

# PROCEEDINGS

## IV МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

### АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

# МАТЕРИАЛЫ



IV INTERNATIONAL SCIENTIFIC  
CONFERENCE

ACTUAL PROBLEMS  
OF APPLIED MATHEMATICS

22 – 26 МАЯ 2018 Г., НАЛЬЧИК – ЭЛЬВРУС

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И АВТОМАТИЗАЦИИ – ФИЛИАЛ  
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО НАУЧНОГО  
УЧРЕЖДЕНИЯ «ФЕДЕРАЛЬНЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР  
«КАБАРДИНО-БАЛКАРСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК»

---

---

## МАТЕРИАЛЫ

IV

Международной научной конференции  
«Актуальные проблемы  
прикладной математики»

22–26 мая 2018 г.  
Нальчик – Эльбрус

**УДК 5**

**А 43**

**А 43 Актуальные проблемы прикладной математики:  
Материалы IV Международной научной конференции.**  
– Нальчик, ИПМА КБНЦ РАН, 2018. – 326 с.

В сборнике представлены материалы IV Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики» (Нальчик – Эльбрус, 22–26 мая 2018 г.)

Конференция проводится при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, Проект №18-01-20015-г, а также при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (договор № 03.G25.31.0225) в рамках реализации проекта «Разработка и создание высокотехнологичного производства отечественного инновационного цифрового рентгеновского комплекса с функцией томографического синтеза изображений» по постановлению Правительства РФ № 218 от 09.04.2010

*Все работы напечатаны в авторской версии с незначительной редакторской правкой*

© Институт прикладной математики  
и автоматизации – филиал Федерального  
государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный научный центр «Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук», 2018

# Оглавление

|   |    |
|---|----|
| <b>Абдулин И.Н., Байков В.А.</b> Математические модели фильтрации в пористых средах с фрактальными свойствами геометрических характеристик . . . . .                                    | 22 |
| <b>Абдуллаев А.А.</b> Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа второго рода . . . . .  | 23 |
| <b>Абдуллаев О.Х., Матчанова О.</b> О постановке краевых задач для одного класса уравнений третьего порядка смешанного типа с оператором Капуто . . . . .                               | 24 |
| <b>Абдуллаев О.Х., Фохирова Т.О.</b> О задаче для диффузионно-волнового уравнения дробного порядка . . . . .  | 25 |
| <b>Абдурахимов А.</b> Реактор с неоднородным псевдоожиженным слоем при осуществлении последовательно-параллельной реакции . . . . .   | 26 |
| <b>Абраев Б.Х., Хасanova Д.</b> О количестве чисел, представляемых в виде суммы $k$ -ых степеней натуральных чисел . . . . .  | 27 |
| <b>Агибова И.М., Крахоткина В.К.</b> Расчет потенциалов ионизации молекул в прикладном пакете ABINIT . . . . .  | 28 |
| <b>Аджиева А.А., Шаповалов В.А., Машуков И.Х.</b> Математическое моделирование характеристик молниевых разрядов на основе данных центра геофизического мониторинга ФГБУ «ВГИ» . . . . . | 29 |
| <b>Азизов М.С.</b> Об одной задаче для вырождающегося уравнения четвертого порядка . . . . .  | 30 |
| <b>Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М.</b> Идентификация мест нагружения в системах с распределенными параметрами . .  | 31 |
| <b>Айда-заде К.Р., Гашимов В.А.</b> Оптимизация размещения контролируемых областей в задачах управления с обратной связью . . . . .   | 32 |

|   |    |
|---|----|
| <b>Акользин А.Н., Легин А.А., Горбунов А.А., Харьин О.А.</b> Разработка и исследование алгоритмов управления приводами для обеспечения высокой точности параметров движения элементов конструкции телевизуемого стола-штатива . . . . . | 33 |
| <b>Алиев Н.А., Велиева С.Р.</b> Задача Стеклова для уравнения Коши – Римана в полосе . . . . .  | 34 |
| <b>Алиханов А.А., Апеков А.М., Коков З.А., Хибиев А.Х., Хамукова Л.А.</b> Об одном методе распараллеливания решения систем уравнений при реконструкции изображения в методе цифрового томосинтеза . . . . .                             | 35 |
| <b>Алиханов А.А., Хамгокова М.М.</b> Устойчивость и сходимость разностных схем, аппроксимирующих нелокальную краевую задачу Стеклова первого класса . . . . .   | 36 |
| <b>Алиханов А.А., Шогенова Е.М.</b> Априорная оценка решения первой краевой задачи для уравнения конвекции-диффузии дробного порядка . . . . .  | 37 |
| <b>Аллаков И., Абдусаматов А.</b> О границе области, свободной от нулей $L$ -функции Дирихле . . . . .  | 38 |
| <b>Аллаков И., Бахридинова Ю.</b> О представлении чисел суммой простого и квадрата простого числа . . . . .   | 39 |
| <b>Апаков Ю.П.</b> Краевая задача для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками . . . . .  | 40 |
| <b>Апеков А.М.</b> Поляризационная поправка к межфазной энергии на границе металл-органическая жидкость . . . . .   | 41 |
| <b>Аристова Е.Н., Астафуров Г.О.</b> Реализация условий отражения при решении уравнения переноса излучения на неструктурированной сетке . . . . .   | 42 |
| <b>Аристова Е.Н., Караваева Н.И.</b> Бикомпактные схемы высокого порядка аппроксимации для holo алгоритмов решения уравнения переноса . . . . .   | 43 |
| <b>Артиков М.</b> Об одной нелокальной краевой задаче для одного линейного уравнения . . . . .  | 44 |
| <b>Артюшин А.Н.</b> Нелокальные краевые задачи для многомерного волнового уравнения с краевыми условиями, обобщющими условия Самарского . . . . .   | 45 |
| <b>Асхабов С.Н.</b> Метод максимальных монотонных операторов в теории нелинейных сингулярных интегральных уравнений   | 46 |
| <b>Аттаев А.Х.</b> Задача граничного управления для одномерного нагруженного волнового уравнения . . . . .  | 47 |

|  |    |
|--|----|
| <b>Ашабоков Б.А., Тайсаев И.Д., Шхануков-Лафишев М.Х.</b>  |    |
| Локально-одномерная схема для параболического уравнения общего вида, описывающего микрофизические процессы в конвективных облаках . . . . .      | 48 |
| <b>Ашабоков Б.А., Шаповалов А.В., Ташилова А.А.</b>  |    |
| Модель управления формированием микроструктуры градовых облаков . . . . .  | 49 |
| <b>Ашрафова Е.Р.</b>   |    |
| Решение задач оптимального управления для систем обыкновенных дифференциальных уравнений блочной структуры с неразделенными граничными условиями | 50 |
| <b>Багов М.А., Кудаев В.Ч.</b>   |    |
| Нелокальное решение сетевой задачи Штейнера . . . . .  | 51 |
| <b>Байрамукова З.Х., Хубиева Д.А.-З.</b>   |    |
| Определение спектров предфрактальных графов с чередующимися полными затравками, сохраняющих смежность старых ребер . . . . .                     | 52 |
| <b>Байчорова А.Н., Кочкиров А.М., Кочкиров Р.А.</b>  |    |
| Перечисление равновзвешенных и неравновзвешенных предфрактальных деревьев . . . . .  | 53 |
| <b>Балкизов Ж.А.</b>   |    |
| Об априорной оценке решения задачи Трикоми для одного уравнения смешанного типа второго порядка .  | 54 |
| <b>Бегалиев О., Яхшиев Н.</b>  |    |
| Об одном обобщении задачи Франкля для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом . . . . .   | 55 |
| <b>Белевцов Н.С.</b>   |    |
| Симметрийный анализ нелинейного уравнения фильтрации с потенциалом Рисса . . . . .   | 56 |
| <b>Беляева И.Н., Чеканов Н.А., Красовская Л.В., Чеканова Н.Н.</b>  |    |
| Компьютерный расчет функции Грина для обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка   | 57 |
| <b>Бештоков М.Х.</b>   |    |
| Первая краевая задача для дифференциального уравнения в частных производных соболевского типа с нелокальным источником . . . . .                 | 58 |
| <b>Бештюкова З.В., Шхануков-Лафишев М.Х.</b>   |    |
| Локально-одномерная схема третьей краевой задачи для параболического уравнения общего вида с нелокальным источником .                            | 59 |
| <b>Бжеумихова О.И., Кожанов А.И.</b>   |    |
| О влиянии параметров на корректность краевой задачи для эллиптического уравнения с инволюцией . . . . .  | 60 |
| <b>Богатырева Ф.Т.</b>   |    |
| О разрешимости ядер линейного дифференциального оператора дробного порядка . . . . .   | 61 |

|   |    |
|---|----|
| <b>Брыкалова А.А., Киселева Т.В.</b> Бутстреп в статистическом обучении . . . . .   | 62 |
| <b>Бурлаков Е.О., Жуковская Т.В., Жуковский Е.С., Пучков Н.П.</b> О непрерывных и разрывных моделях нейронных полей . . . . .   | 63 |
| <b>Бурлаков Е.О., Жуковская Т.В., Жуковский Е.С., Пучков Н.П.</b> О приложениях накрывающих отображений в теории неявных дифференциальных уравнений . . . . .   | 64 |
| <b>Бухурова М.М.</b> Моделирование движения молекулы фуллерана $C_{60}$ между плоскостями графена . . . . .   | 65 |
| <b>Быков В.В.</b> Полное описание лебеговских множеств верхних сигма-показателей Изобова . . . . .  | 66 |
| <b>Вагабов А.И., Абдусаламов Х.А.</b> Спектральная задача для уравнения восьмого порядка с четырьмя двукратными характеристиками . . . . .  | 67 |
| <b>Вагабов А.И., Ибрагимов М.Г.</b> О регулярности простейших типов пучков дифференциальных операторов с кратными характеристиками . . . . .  | 68 |
| <b>Вельмисов П.А., Тамарова Ю.А., Семенова Е.П.</b> Асимптотические уравнения газовой динамики: качественный анализ, построение решений, приложения . . . . .   | 69 |
| <b>Вельмисов П.А., Анкилов А.В., Покладова Ю.В.</b> Об устойчивости решений некоторых классов начально-краевых задач в аэрогидроупругости . . . . .   | 70 |
| <b>Вельц О.В., Крахоткина Е.В., Плетухина А.А.</b> Использование теории временных рядов для решения задачи исследования зависимости скорости переноса переднего фронта облака зараженного воздуха . . . . . | 71 |
| <b>Ветохин А.Н.</b> Бэрсовская классификация старшего экспоненциального показателя как функции вещественного параметра . . . . .  | 72 |
| <b>Винокурский Д.Л.</b> SM управления беспилотным летательным аппаратом . . . . .   | 73 |
| <b>Винокурский Д.Л., Кононова Н.В., Хныкина А.Г.</b> Многосеточный метод решения задач квантовой химии . . . . .  | 74 |
| <b>Витохина Н.Н.</b> Вычисление распределения Манделя в квантовой статистике . . . . .  | 75 |
| <b>Гавриков Б.М., Пестрякова Н.В.</b> Определение состояния систем организма человека по данным анализа периферической крови . . . . .  | 76 |

|  |    |
|--|----|
| <b>Гадзова Л.Х.</b> Формула Лагранжа для обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дробного дискретно распределенного дифференцирования . . . . .           | 77 |
| <b>Газизов Р.К., Лукащук С.Ю.</b> Дробно-дифференциальные математические модели фильтрации в сложных неоднородных пористых средах . . . . .                              | 78 |
| <b>Гайнетдинова А.А.</b> Использование оператора инвариантного дифференцирования в алгоритме последовательного понижения порядка . . . . .                               | 79 |
| <b>Гасанов А.Б.</b> Моделирование динамических свойств нанокомпозитных материалов на полимерной основе . . . . .   | 80 |
| <b>Гаспарян А.Ф.</b> Система управления расписанием в ВУЗе . . .   | 81 |
| <b>Гасымов Г.Г.</b> Коэффициентно-обратные задачи на гидравлических сетях . . . . .  | 82 |
| <b>Гашимов В.А.</b> Оптимизация размещения источников и точек контроля при нагреве пластины . . . . .  | 83 |
| <b>Геккиева С.Х.</b> Об одном обобщении задачи Жевре для уравнения дробной диффузии с переменным направлением времени . . . . .  | 84 |
| <b>Геккиева С.Х., Керефов М.А.</b> Краевая задача для уравнения влагопереноса с дробной производной . . . . .  | 85 |
| <b>Голава М.Р.</b> Средние Валле Пуссена в обобщенных гёльдеровых пространствах . . . . .  | 86 |
| <b>Гомоюнов М.И.</b> Об аппроксимации конфликтно-управляемых динамических систем с дробными производными . . . . .   | 87 |
| <b>Горбунова Е.Б., Ковтун Д.Г., Угольков А.В.</b> Оценка влияния искажений в исходных данных на качество реконструкции в задачах рентгеновской томографии . . . . .      | 88 |
| <b>Григорян Л.А., Саиег Т.Х.</b> Параллельный метод Арнольди поиска собственных значений и собственных векторов . . . . .  | 89 |
| <b>Гришанина О.А., Литвин Д.Б., Симоновский А.Я.</b> Математическое моделирование равновесных форм магнитной жидкости в окрестностях пластины . . . . .                  | 90 |
| <b>Джамалов С.З., Ашурев Р.Р.</b> Об одной нелокальной краевой задаче для нагруженного уравнения смешанного типа первого рода второго порядка в прямоугольнике . . . . . | 91 |
| <b>Димитриченко Д.П.</b> Об одном алгоритме обучения логических нейронных сетей . . . . .  | 92 |
| <b>Дюжева А.В.</b> Нелокальная задача с динамическими граничными условиями для гиперболического уравнения . . . . .  | 93 |

|  |     |
|--|-----|
| <b>Жемухов Р.Ш., Жемухова М.М.</b> О моделировании поддержки принятия решения в задачах управления водными и земельными ресурсами оросительной системы . . . . . | 94  |
| <b>Жилов Р.А.</b> Применение логических нейронных сетей в задачах классификации . . . . .  | 95  |
| <b>Жукова А.А., Шутов А.В.</b> Аддитивная задача с $k$ числами специального вида . . . . .   | 96  |
| <b>Жураев А.Х.</b> Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками . . . . .  | 97  |
| <b>Жураев Б.Б., Сакиева О.</b> Нелокальная краевая задача для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками с нелинейным граничным условием . . . . .   | 98  |
| <b>Зайцева Н.В.</b> Краевая задача с интегральным условием для гиперболического уравнения с оператором Бесселя . . . . .   | 99  |
| <b>Захарова Н.И., Захаров В.В.</b> Применение гребневой регрессии в машинном обучении . . . . .  | 100 |
| <b>Зикиров О.С.</b> Об одной нелокальной задаче с интегральными условиями для уравнения третьего порядка . . . . .   | 101 |
| <b>Зинченко Н.А.</b> Аддитивные задачи с простыми числами . . . .  | 102 |
| <b>Зуннунов Р.Т., Эргашев А.А.</b> Об одной задаче для системы уравнений смешанного типа в неограниченной области . . . . .                                      | 103 |
| <b>Ибавов Т.И.</b> Задача Коши для одной системы трёх дифференциальных уравнений с производной дробного порядка . . . . .  | 104 |
| <b>Ибрагим А.С.</b> Необходимость внедрения СЭД в ВУЗе . . . . .   | 105 |
| <b>Иванова Н.Д.</b> Инвариантные подмодели двухфазной системы Андерсона в случае одной пространственной переменной . . . . .                                     | 106 |
| <b>Иргашев Б.Ю.</b> Аналог задачи Дирихле для уравнения смешанного типа высокого порядка . . . . .   | 107 |
| <b>Исаилов С.В., Сагитов А.А.</b> Теорема существования решения интегрального уравнения с точечными сингулярностями . . . . .                                    | 108 |
| <b>Казаков М.А.</b> К вопросу об оптимизации конструктивного метода обучения нейронных сетей . . . . .   | 109 |
| <b>Казиев В.М., Кайгермазов А.А., Керефов М.А., Кудаева Ф.Х.</b> Задачи для нагруженных волнового и телеграфного уравнений, их приложения . . . . .              | 110 |
| <b>Кайгермазов А.А., Кудаева Ф.Х., Казиев В.М.</b> Система «ресурс-потребитель» с возрастной структурой . . . . .  | 111 |
| <b>Канкулова Л.И.</b> Использование ГИС «AutoCad Map» для решения прикладных геоэкологических задач . . . . .  | 112 |

|   |     |
|---|-----|
| <b>Канкулова Л.И., Кюль Е.В., Калов Р.О., Назранов Х.М.</b>   |     |
| Геоэкологическая оценка родниково-ручьевых систем при помощи ГИС . . . . .  | 113 |
| <b>Канукоева Л.В., Куготова А.М., Езаова А.Г., Цечоева А.Х., Желдашева А.О., Кунижев Б.И.</b> Моделирование процесса разрушения ударно-сжатого полиметилметакрилата . . . . . | 114 |
| <b>Карашева Л.Л.</b> Задача в полуполосе для параболического уравнения высокого четного порядка с оператором Римана – Лиувилля по временной переменной . . . . .              | 115 |
| <b>Каримов О.Х.</b> Коэрцитивная разрешимость уравнения Шредингера в гильбертовом пространстве . . . . .  | 116 |
| <b>Каримов Ш.Т.</b> Задача Коши для неоднородного итерированного уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу . . . . .  | 117 |
| <b>Кармоков М.М., Кудаева Ф.Х., Керефов Б.М.</b> Моделирование процесса электронно-лучевой литографии . . . . .   | 118 |
| <b>Кармоков М.М., Кудаева Ф.Х., Нахушева Ф.М.</b> Регулирование уровня грунтовых вод в гидродинамической постановке . . . . .   | 119 |
| <b>Касаткин А.А.</b> Исследование симметрийных свойств дробно-дифференциальных моделей фильтрации . . . . .   | 120 |
| <b>Ким В.А., Паровик Р.И.</b> Хаотические режимы осциллятора Дуффинга с производной переменного дробного порядка Римана – Лиувилля . . . . .                                  | 121 |
| <b>Киржинов Р.А.</b> О представлении решения аналога задачи А.А. Дезина для уравнения смешанного типа второго порядка методом функции Грина . . . . .                         | 122 |
| <b>Киричек В.А.</b> Задача с вырождающимися нелокальными условиями для гиперболического уравнения . . . . .   | 123 |
| <b>Китайбеков Е.Т.</b> Линейно независимые решения трехмерного гиперболического уравнения с двумя линиями вырождения . . . . .  | 124 |
| <b>Ковалева Л.А., Солдатов А.П.</b> Задача Дирихле на двумерной сети . . . . .  | 125 |
| <b>Коваль К.А., Сухоруков А.Л.</b> Численное моделирование гидроупругих колебаний консольных конструкций в потоке жидкости . . . . .  | 126 |
| <b>Кожанов А.И.</b> Параболические и ультрапараболические уравнения с необратимыми операторными коэффициентами при временных производных . . . . .                            | 127 |

|   |     |
|---|-----|
| <b>Кожемякин И.И.</b> Компьютерное моделирование дефектов радиочастотного усилителя мощности в сетях 5G с массивным МММО . . . . .  | 128 |
| <b>Кононов Н.Б., Коробейникова П.К., Кононов М.Н.</b> Алгоритм обучения методом обратного распространения ошибки, позволяющий обучить разработанную нейронную сеть . . . . .                      | 129 |
| <b>Королёв М.А.</b> Распределение рациональных точек на единичной окружности (по совместной работе с А.В. Устиновым) . . . . .  | 130 |
| <b>Корчагина Е.А.</b> Исследование устойчивости тенденций временных рядов метеорологических элементов в горных районах Карачаево-Черкесии с 1961 по 2016 гг. . . . .                              | 131 |
| <b>Котец А.Ф.</b> Исследование изменения положения ключевых точек объекта в видеопотоке. . . . .  | 132 |
| <b>Кочкаров А.М., Коркмазова З.О.</b> Исследование разрешимости с помощью АЛС многокритериальной задачи Эйлера на $n$ -взвешенном $m$ -цветном предфрактальном графе . . . . .                    | 133 |
| <b>Кочкаров А.М., Токова А.А.</b> Об одной краевой задаче для модельного уравнения параболического типа, заданного на предфрактальном графе . . . . .   | 134 |
| <b>Кочкаров А.М., Хубиева Д.А.-З.</b> Топологические характеристики предфрактального и фрактального графов . . . . .  | 135 |
| <b>Красовская Л.В.</b> Моделирование процессов самообучения интеллектуальных систем в проблемной среде при наличии в ней причинно-следственных связей . . . . .                                   | 136 |
| <b>Крахоткина Е.В.</b> Реализация задачи моделирования процесса переноса давления многокомпонентного рассола в пористой среде с помощью схем параллельной продольно-поперечной прогонки . . . . . | 137 |
| <b>Крупицын Е.С.</b> Оценки многочленов от совокупностей полиадических чисел . . . . .  | 138 |
| <b>Крупицын Е.С., Чирский В.Г.</b> Представление произвольных полиадических чисел в виде суммы лиувиллевых полиадических чисел . . . . .  | 139 |
| <b>Кубанова А.К., Иманкулиева А.А.</b> Моделирование ударной волны в поликомпонентной среде при экстремальном воздействии на ее поверхность . . . . .   | 140 |
| <b>Куготова М.Н.</b> О моделировании распространения информации с учетом забывания . . . . .  | 141 |

|   |     |
|---|-----|
| <b>Кудаев В.Ч., Абазоков М.Б.</b> Ранговая оптимизация потоковых сетей . . . . .  | 142 |
| <b>Кудаев В.Ч., Багов М.А., Скорикова Л.В.</b> Построение базового графа и начального решения задачи синтеза оптимальной потоковой сети . . . . .                   | 143 |
| <b>Кудаев В.Ч., Буздов А.К.</b> Компьютерное проектирование протяженных трубопроводов в сети городского водоснабжения . . . . .                                     | 144 |
| <b>Кулиев С.З.</b> Оптимизация зональных параметров обратной связи при управлении процессом нагрева стержня . . . . .   | 145 |
| <b>Кулиев Г.Ф., Сафарова З.Р.</b> Вариационный подход к решению одной коэффициентно-обратной задачи для гиперболического уравнения . . . . .                        | 146 |
| <b>Кулиев Г.Ф., Тагиев Х.Т.</b> Об определении начальной функции в смешанной задаче для гиперболического уравнения второго порядка с нелокальным условием . . . . . | 147 |
| <b>Кумыков Т.С.</b> Математическое моделирование формирования и роста кристаллов льда во фрактальной облачной среде .   | 148 |
| <b>Кунижев Х.Л.</b> Моделирование влияния решеточного ангармонизма на процесс теплопроводности . . . . .  | 149 |
| <b>Куртова Л.Н., Васильева Н.В.</b> О числе решений уравнения с квадратичными формами разных дискриминантов . . . . .   | 150 |
| <b>Куртова Л.Н., Мотькина Н.Н.</b> О видах решений задачи Лагранжа . . . . .  | 151 |
| <b>Кучерявенко С.В.</b> Моделирование вероятностных характеристик в MathCAD . . . . .   | 152 |
| <b>Кюль Е.В.</b> Районирование лавинной деятельности при помощи авторской программы «Оцифровщик топографических карт» . . . . .                                     | 153 |
| <b>Кюль Е.В., Чернышев Г.В.</b> Создание баз данных для целей картографирования природной опасности . . . . .   | 154 |
| <b>Ласурия Р.А.</b> Неравенства типа Джексона в пространствах $S^{(p,q)}(\sigma^{m-1})$ . . . . .   | 155 |
| <b>Лекомцев А.В.</b> Метод дробных шагов численного решения многомерного уравнения теплопроводности с последействием . . . . .                                      | 156 |
| <b>Липко О.Д., Паровик Р.И.</b> Исследование хаотических и регулярных режимов фрактального осциллятора ФитцХью-Нагумо . . . . .                                     | 157 |

|   |     |
|---|-----|
| <b>Литвин Д.Б., Шепеть И.П.</b> Автоматизированная система управления динамическим объектом с идеальной моделью в контуре управления . . . . .                                  | 158 |
| <b>Лобанова Н.И.</b> Решение практико-ориентированных задач с помощью дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования . . . . .                                | 159 |
| <b>Лобанов А.И., Пастухов С.И.</b> Свойства разностных схем для решения уравнения Хопфа . . . . .   | 160 |
| <b>Лосanova Ф.М., Кенетова Р.О.</b> Об одной модели динамики численности населения с учетом половой структуры . . . .   | 161 |
| <b>Лукащук С.Ю.</b> Приближенные симметрии и приближенные законы сохранения дифференциальных уравнений дробного порядка . . . . .   | 162 |
| <b>Ляхов Л.Н., Елецких К.С.</b> О задаче Коши для сингулярного уравнения типа уравнения Ибрагимова – Мамонтова . . . .  | 163 |
| <b>Лютикова Л.А.</b> Применения непрерывной логики для построения робастных процедур обучения нейронных сетей . . . .   | 164 |
| <b>Мавляиев Р.М., Гарипов И.Б.</b> Гауссово соотношение № 3 для функций Горна $H_3$ . . . . .   | 165 |
| <b>Магомедов Р.А., Ахмедов Э.Н., Мейланов Р.Р., Бейбалаев В.Д., Аливердиев А.А.</b> Применение дробного исчисления для расчета теплофизических характеристик криптона . . . . . | 166 |
| <b>Магомедов Р.И., Магомедов И.И.</b> Нахождение функции плотности вероятностей числа депозитов банковских вкладов с помощью параболического уравнения . . . . .                | 167 |
| <b>Магомедова Е.С., Раджабова М.Т.</b> Математическая модель многошаговой стохастической игры защиты информации .   | 168 |
| <b>Мажгихова М.Г.</b> Краевая задача с условиями третьего рода для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом . . . . .              | 169 |
| <b>Макаренко М.Д., Гутнова А.К.</b> Структура семантической сети для системы автоматической генерации тестов . . . .  | 170 |
| <b>Макаров А.М., Ермаков А.С., Постовалов С.С.</b> Взаимосвязь трансцендентных чисел $e$ и $\pi$ . . . . .  | 171 |
| <b>Макаова Р.Х.</b> Задача Трикоми для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения третьего порядка . .  | 172 |
| <b>Мамажонов М., Шерматова Х.М.</b> Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа в пятиугольной области . . . . .                      | 173 |

|  |     |
|--|-----|
| <b>Маманазаров А.О.</b> Задачи типа Бицадзе – Самарского для одного параболо-гиперболического уравнения с сингулярным коэффициентом . . . . .  | 174 |
| <b>Маматова З.Х.</b> Задача со смещением для уравнения гиперболического типа . . . . .   | 175 |
| <b>Мамедов И.Г.</b> О корректной разрешимости задачи Неймана для обобщенного уравнения Манжерона с негладкими коэффициентами . . . . .   | 176 |
| <b>Мамедов Р.С., Гасымов С.Ю.</b> Решение задачи управления процессом распространения тепла с минимальной энергией в среде с температурной вязкостью . . . . .   | 177 |
| <b>Мамчуев Мурат О.</b> Краевая задача для системы уравнений дробного порядка . . . . .  | 178 |
| <b>Мамчуев Мухтар О.</b> Исследование колебательных характеристик многослойных печатных плат . . . . .   | 179 |
| <b>Маршан Р.Б.</b> Оптимальный календарь для графиков, планов, расписаний, расчёта дат . . . . .   | 180 |
| <b>Масаева О.Х.</b> Краевая задача для обобщенного уравнения Лапласа . . . . .   | 181 |
| <b>Маслова О.И., Шагрова Г.В.</b> Реализация задачи моделирования процесса переноса давления многокомпонентного рассола в пористой среде с помощью схем параллельной продольно-поперечной прогонки . . . . . | 182 |
| <b>Матахаев А.И., Кидакоев М.М.</b> Осцилляция решений некоторых классов нелинейных дискретных разностных уравнений второго порядка с отклоняющимся аргументом . . . . .                                     | 183 |
| <b>Матвеев В.Ю.</b> Арифметические свойства некоторых почти полиадических чисел . . . . .  | 184 |
| <b>Машуков И.Х., Шаповалов В.А., Аджиева А.А.</b> Алгоритмы цифровой обработки данных напряженности приземного электрического поля с использованием фильтра Калмана . . . . .                                | 185 |
| <b>Мирзоев Ф.А., Кулиев Р.М., Аббасова Ш.А., Юсифов М.Ю.</b> Моделирование влияния экологического загрязнения на индекс развития человеческого потенциала в условиях неопределенности . . . . .              | 186 |
| <b>Мирсабуров М., Хуррамов Н.Х.</b> Задача для уравнения смешанного типа с условием Бицадзе – Самарского на характеристиках одного семейства . . . . .   | 187 |

|   |     |
|---|-----|
| <b>Мирсабурова Г.М., Нормуродов Ш.</b> Нелокальная задача для уравнения смешанного типа . . . . .   | 188 |
| <b>Мирсабурова У.М., Омонов Б.</b> Об одном обобщении задачи Трикоми для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом . . . . .   | 189 |
| <b>Назрублоев Н.Н.</b> Короткие тригонометрические суммы Г. Вейля в малые дуги . . . . .  | 190 |
| <b>Нармурадов Ч.Б., Турсунова Б.А.</b> Математическое моделирование проблемы гидродинамической устойчивости с применением полиномов Чебышева 2-го рода . . . . .  | 191 |
| <b>Нарожнов В.В.</b> Моделирование нелинейного осциллятора с соударениями . . . . .   | 192 |
| <b>Насибзаде В.Н., Сафарова З.Р.</b> О численном решении задач по определению правой части, начальной функции и коэффициента уравнения колебания струны . . . . .   | 193 |
| <b>Нигмедзянова А.М., Чеботарева Э.В.</b> Фундаментальное решение одного класса вырождающихся В-эллиптических уравнений . . . . .   | 194 |
| <b>Николаев Е.И., Журавлев В.В.</b> Обучение глубокой модели распознавания жестов на виртуальных данных . . . . .   | 195 |
| <b>Новикова Е.Р., Паровик Р.И.</b> Исследование хаотических и регулярных режимов фрактального осциллятора Ван дер Поля – Дуффинга . . . . .   | 196 |
| <b>Обласова И.Н., Тимофеева Е.Ф.</b> Метод подпространств Крылова для решения больших линейных алгебраических систем на GPU . . . . .   | 197 |
| <b>Огородников Е.Н., Унгарова Л.Г.</b> Идентификация параметров нелинейных математических моделей наследственно-упругого тела на основе численного решения интегральных уравнений в задаче о ползучести . . . . . | 198 |
| <b>Олимов А.Г.</b> Система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка со сверхсингулярной точкой . . . . .  | 199 |
| <b>Панов А.В., Воронин С.М.</b> Центрально симметричные установившиеся движения самогравитирующего газа . . . . .   | 200 |
| <b>Паровик Р.И.</b> Хаотические режимы фрактального нелинейного осциллятора . . . . .   | 201 |
| <b>Пачев У.М., Аллачев Б.М.</b> Об оценке сверху числа решений сравнения от нескольких неизвестных по простому модулю   | 202 |

|   |     |
|---|-----|
| <b>Пачев У.М., Дохов Р.А.</b> Об особых функциях в задаче о взвешенном числе целых точек на гиперболоидах . . . . .   | 203 |
| <b>Пачев У.М., Эсмурзиева С.Д.</b> Об алгебраических и арифметических соотношениях для гауссовых коэффициентов .  | 204 |
| <b>Пачулиа Н.Л.</b> О точках сильной суммируемости интегралов Фурье . . . . .   | 205 |
| <b>Петров Н.С., Линьков В.С., Хоружий Р.В., Иванов Я.В.</b> Особенности параллельной реализации итерационных алгоритмов томографической реконструкции с использованием гетерогенной системы CPU-GPU . . . . . | 206 |
| <b>Пименов В.Г., Солодушкин С.И., Горбова Т.В.</b> Нелинейные разностные схемы с памятью . . . . .  | 207 |
| <b>Плеханова М.В., Байбулатова Г.Д.</b> Вопросы разрешимости задач оптимального управления для вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка . . . . .  | 208 |
| <b>Пономаренко Р.Н., Табухов А.М., Коков З.А., Хамукова Л.А., Синютин С.А., Беляев А.О.</b> О реализации цифрового томосинтеза на рентгеновском телевизионном столе-штативе «КОСМОС-Д» . . . . .              | 209 |
| <b>Псху А.В.</b> Уравнение в частных производных дробного порядка с комплексным коэффициентом . . . . .   | 210 |
| <b>Пшибихова Р.А.</b> Задача Дарбу для обобщенного телеграфного уравнения дробного порядка . . . . .  | 211 |
| <b>Рагимов А.Б.</b> К решению одной обратной задачи для гиперболического уравнения . . . . .  | 212 |
| <b>Рахимова М.М.</b> Смешанная краевая задача для интегро-дифференциального уравнения второго порядка . . . . .   | 213 |
| <b>Рахмонов З.Х.</b> Об оценке сумм значений характеристики Дирихле с простыми числами и их приложения . . . . .  | 214 |
| <b>Рехвиашвили С.Ш., Мурга З.В.</b> Влияние изотермы монолейной адсорбции на поверхностную энергию твердого тела . . . . .  | 215 |
| <b>Романенко М.Г., Шагрова Г.В., Дроздова В.И.</b> Моделирование колебаний магнитожидкостных микрокапель с учетом зависимости поверхностного натяжения от поля . . . . .                                      | 216 |
| <b>Ромм Я.Е.</b> Идентификация области, диапазонов и значений комплексных корней полинома с комплексными коэффициентами на основе устойчивой адресной сортировки . . . . .                                    | 217 |
| <b>Ромм Я.Е., Джанунц Г.А.</b> Варьируемое кусочно-интерполяционное решение уравнения переноса . . . . .  | 218 |

|   |     |
|---|-----|
| <b>Рузиев М.Х.</b> О нелокальной краевой задаче для параболо-<br>гиперболического уравнения с дробной производной . . . . .   | 219 |
| <b>Рустамова Л.Р.</b> Нелокальная краевая задача типа задачи Би-<br>цадзе – Самарского для нагруженного уравнения смешан-<br>ного типа с кратными характеристиками . . . . .  | 220 |
| <b>Сабитов К.Б.</b> Обратная задача для уравнения смешанного<br>типа со степенным вырождением . . . . .   | 221 |
| <b>Сабитова Ю.К.</b> Задача Дирихле для уравнения Келдыша в<br>прямоугольной области . . . . .  | 222 |
| <b>Самойленко А.П., Панычев А.И., Корниенко В.Т., Трой-<br/>ченков И.Н.</b> Статистический трехядерный анализатор эм-<br>пирических данных ограниченного объема при натурных<br>испытаниях объектов авиационного назначения . . . . . | 223 |
| <b>Сафаров А.Ш.</b> О представлении четных чисел суммой двух<br>простых из арифметической прогрессии . . . . .  | 224 |
| <b>Сафаров Д.С.</b> Двоякопериодическое решение одной нелиней-<br>ной эллиптической системы уравнений на плоскости . . . . .  | 225 |
| <b>Сенотрусова С.Д., Воропаева О.Ф.</b> Численные модели ди-<br>намики p53-зависимых макроРНК . . . . .   | 226 |
| <b>Сидоров С.Н.</b> Обратная задача для вырождающегося смешан-<br>ного параболо-гиперболического уравнения . . . . .  | 227 |
| <b>Синицын Д.Р., Шагрова Г.В.</b> Приложение для распознавания<br>русских слов и словосочетаний на основе Microsoft SAPI .  | 228 |
| <b>Ситник С.М.</b> Дробные степени оператора Бесселя . . . . .  | 229 |
| <b>Смирнов А.А., Роженко О.Д., Бондарь В.В., Мирзо-<br/>ян М.В., Даржания А.Д.</b> Числа Мерсенна в основаниях<br>системы остаточных классов при передаче данных в после-<br>довательных каналах связи . . . . .                      | 230 |
| <b>Созаева Л.Т., Кагермазов А.Х.</b> Исследование возможности<br>применения метода регуляризации А.Н. Тихонова к вос-<br>становлению микроструктурных характеристик градовых<br>облаков . . . . .                                     | 231 |
| <b>Сокуров А.А.</b> Задача о форме двумерной висящей капли и<br>свойства ее решений . . . . .   | 232 |
| <b>Сотоволдиев А.И.</b> О задаче управляемости и преследования в<br>линейных дискретных системах с суммарными ограни-<br>чениями на управление . . . . .  | 233 |
| <b>Стрелецкая Е.М., Федоров В.Е.</b> Задача Коши для уравне-<br>ния с распределенной производной в банаховом простран-<br>стве . . . . .  | 234 |

|   |     |
|---|-----|
| <b>Сухинов А.И., Сидорякина В.В.</b> Исследование условий существования и единственности решения задачи транспорта многокомпонентной взвеси . . . . .   | 235 |
| <b>Сухинов А.И., Сидорякина В.В.</b> Явные регуляризованные схемы для численного решения задачи транспорта наносов и многокомпонентной взвеси . . . . . | 236 |
| <b>Талыбов С.Г.</b> Численное решение краевых задач и задач управления в областях сложной структуры . . . . .   | 237 |
| <b>Тамбиева Д.А.</b> Об одном алгоритме кластеризации . . . . .   | 238 |
| <b>Тасмамбетов Ж.Н., Жахина Р.У.</b> Конечные решения специальной системы эллиптического типа . . . . .   | 239 |
| <b>Тасмамбетов Ж.Н., Талипова М.Ж.</b> Решение неоднородной специальной системы дифференциальных уравнений в частных производных . . . . .              | 240 |
| <b>Тахиров А.Ж.</b> О задаче химической реакции в трехкомпонентных средах . . . . .   | 241 |
| <b>Твёрдый Д.А., Паровик Р.И.</b> Задача Коши для уравнения Риккати с переменными коэффициентами и учетом степенной функции памяти . . . . .            | 242 |
| <b>Темирова Л.Г.</b> Двухуровневое моделирование задачи землепользования . . . . .  | 243 |
| <b>Трофимов С.П., Иванов А.В.</b> Численный метод разложения бесконечно малых функций в обобщенный ряд Тейлора и его приложения . . . . .               | 244 |
| <b>Тураев Р.Н.</b> Об одной нелокальной задаче со свободной границей для квазилинейного параболического уравнения .                                     | 245 |
| <b>Тураев Р.Н., Тураев К.Н.</b> Нелокальная задача Флорина для нагруженного параболического уравнения с нелинейным граничным условием . . . . .         | 246 |
| <b>Тураев Х., Курбанназаров А.И.</b> Построение общего решения одного дифференциально-разностного уравнения нейтрального типа . . . . .                 | 247 |
| <b>Тухтасинов М., Мустапокулов Х.Я.</b> Об одном способе исследования с помощью $\varepsilon$ позиционной стратегии . . . . .                           | 248 |
| <b>Тхамоков М.Б., Хакулов Т.Г.</b> Краевая задача для волнового уравнения с нагрузкой . . . . .   | 249 |
| <b>Узденов А.А., Кочкаров Р.А.</b> Эффективный алгоритм построения $p$ -центров . . . . .   | 250 |
| <b>Умаров Х.Г.</b> Задача Коши для уравнения крутильных колебаний нелинейно-упругого стержня бесконечной длины .  | 251 |

|   |     |
|---|-----|
| <b>Умирхонов М.</b> Двухслойная задача для гиперболического уравнения теплопроводности . . . . .  | 252 |
| <b>Уринов А.К., Каримов К.Т.</b> Задача Келдыша для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами . . . . .                                       | 253 |
| <b>Уринов А.К., Окбоев А.Б.</b> Задача с видоизмененными начальными условиями для вырождающегося гиперболического уравнения второго рода со спектральным параметром . . . . . | 254 |
| <b>Учайкин В.В., Кожемякина Е.В.</b> Численное решение интегро-дифференциального уравнения методом сплайнов . . . . .   | 255 |
| <b>Учайкин В.В., Кожемякин И.И., Кожемякина Е.В.</b> Вариационное интерполирование функционалов с применением сопряжённых операторов . . . . .                                | 256 |
| <b>Ушхо А.Д., Тлячев В.Б., Ушхо Д.С.</b> Отсутствие предельных циклов плоской квадратичной системы, имеющей инвариантную кривую в виде гиперболы . . . . .                    | 257 |
| <b>Федоров В.Е., Нажимов Р.Р.</b> Один класс обратных задач для вырожденных эволюционных уравнений с дробной производной Римана – Лиувилля . . . . .                          | 258 |
| <b>Фозилова Ф.Ф.</b> Обобщенная спектральная задача для линейного дифференциального уравнения, коэффициент которого имеет скачок . . . . .                                    | 259 |
| <b>Хазириши Э.О.</b> Приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений . . . . .   | 260 |
| <b>Хайруллоев Ш.А.</b> Нули производной функции Харди . . . . .   | 261 |
| <b>Халиков Д.К.</b> Об одной нелокальной краевой задаче для нагруженного уравнения третьего порядка . . . . .   | 262 |
| <b>Ханкишиев З.Ф.</b> Решение разностной задачи для одного линейного нагруженного дифференциального уравнения гиперболического типа и исследование устойчивости . . . . .     | 263 |
| <b>Хашба Л.А.</b> О точках $\varphi$ -сильной суммируемости двойных рядов Фурье . . . . .   | 264 |
| <b>Хубиев К.У.</b> Краевая задача для одного нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа с оператором дробной диффузии . . . . .                                    | 265 |
| <b>Худаяров Б.А.</b> Моделирование сверхзвукового флаттера вязкоупругих ортотропных оболочек . . . . .  | 266 |
| <b>Худаяров Б.А., Тураев Ф.Ж.</b> Моделирование колебательных процессов трубопроводов с учетом основания грунта .   | 267 |

|  |     |
|--|-----|
| <b>Хуррамова Р.И.</b> Законы сопротивления при транспортировке нефти и нефтепродуктов по трубопроводу с лупингом . . . . .   | 268 |
| <b>Хуштова Ф.Г.</b> Смешанная краевая задача для дифференциального уравнения с оператором Бесселя и частной производной Римана – Лиувилля . . . . .                        | 269 |
| <b>Чеканов В.В., Кандаурова Н.В., Чеканов В.С., Шевченко М.Ю.</b> Математическое моделирование автоволновых процессов в ячейке с наноструктурированной жидкостью . . . . . | 270 |
| <b>Чернова О.В.</b> Об одной краевой задаче для эллиптической системы . . . . .  | 271 |
| <b>Чернышев Г.В.</b> К функциональной характеристизации иерархических структур . . . . .   | 272 |
| <b>Чирский В.Г.</b> Формула произведения, глобальные соотношения и полиадические числа . . . . .   | 273 |
| <b>Чуриков В.А.</b> О собственных функциях и собственных значениях $d$ -оператора рациональных порядков . . . . .  | 274 |
| <b>Шамилова Б.Г.</b> Об одной задаче аппроксимации на классе $\delta$ -непрерывных одномерных функций . . . . .  | 275 |
| <b>Шамсудинов Ф.М., Абдуллоев Т.И.</b> Об исследовании одной системы дифференциальных уравнений второго порядка с сингулярной точкой . . . . .                             | 276 |
| <b>Шаповалов В.А.</b> Методика численного решения системы уравнений трехмерной модели конвективного облака . . . . .   | 277 |
| <b>Шаповалов В.А., Аджиева А.А., Машуков И.Х.</b> Численное моделирование переноса многокомпонентной примеси с учётом орографии местности . . . . .                        | 278 |
| <b>Шапошникова О.И.</b> Полиномиально разрешимый класс задач об оставных деревьях с топологическим критерием .   | 279 |
| <b>Шарданова М.А.</b> Первая краевая задача для линейного дифференциального уравнения второго порядка с отклоняющимся аргументом в младших членах . . . . .                | 280 |
| <b>Шепеть И.П., Литвин Д.Б.</b> Дуальное управление многомерными динамическими системами . . . . .   | 281 |
| <b>Шибзухов З.М.</b> О некоторых робастных принципах обучения нейронных сетей . . . . .  | 282 |
| <b>Шибзухов З.М., Димитриченко Д.П., Казаков М.А.</b> Минимизация $M$ -средних от параметризованных функций .  | 283 |
| <b>Шильков А.В.</b> О решении эллиптических уравнений второго порядка методом лучевых переменных . . . . .   | 284 |

|  |     |
|--|-----|
| <b>Шишкина Э.Л.</b> Ограниченность гиперболических $B$ -потенциалов Рисса . . . . .  | 285 |
| <b>Шматова Е.В.</b> Построение функции среднего методами непрерывной логики . . . . .  | 286 |
| <b>Шутов А.В.</b> Фракталы Рози и их теоретико-числовые приложения . . . . .   | 287 |
| <b>Шхагапсоев А.М.</b> Априорная оценка решения краевой задачи второго рода с условием Самарского для обобщенного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками . . . . .     | 288 |
| <b>Эгамбердиев Б.Т., Холходжаев Б.Б.</b> Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками . . . . .  | 289 |
| <b>Элмуродов А.Н.</b> Об одной задаче со свободной границей для параболического уравнения типа реакция-диффузия . . . . .  | 290 |
| <b>Эльканова Л.М., Матвеев О.В.</b> Векторная задача покрытия предфрактального графа пересекающимися цепями . . . . .  | 291 |
| <b>Эмиров С.Н., Бейбалаев В.Д., Амирова А.А., Аливердиев А.А.</b> Закономерности изменения теплопроводности керамики в условиях высоких давлений и температур . . . . .                | 292 |
| <b>Энеева Л.М.</b> О собственных значениях задачи Неймана для уравнения дробного порядка с различными начальными . . . . .   | 293 |
| <b>Эргашев Т.Г.</b> Фундаментальные решения многомерного эллиптического уравнения с тремя сингулярными коэффициентами и параметром . . . . .   | 294 |
| <b>Эфендиев Б.И.</b> О фундаментальном решении обыкновенного дифференциального уравнения распределенного порядка . . . . .   | 295 |
| <b>Юлдашева А.В.</b> О разрешимости краевой задачи для одного уравнения четного порядка . . . . .  | 296 |
| <b>Юлдашев А.В., Губайдуллин Р.Р., Лукащук С.Ю.</b> Параллельные численные алгоритмы решения начально-краевых задач для дробно-дифференциальных уравнений диффузионного типа . . . . . | 297 |
| <b>Agakhanova Ya.S.</b> GPU-based system of equation solver . . . . .  | 298 |
| <b>Alikhanov A.A.</b> High-order difference schemes for the diffusion equation of variable order . . . . .   | 299 |
| <b>Alikhanov I.A.</b> Probability density distribution of equivalent photons in electron from $e^+e^- \rightarrow \gamma Z$ . . . . .  | 300 |
| <b>Assanova A.T.</b> On periodic problem for system of hyperbolic equations with piecewise constant argument . . . . .   | 301 |

|   |     |
|---|-----|
| <b>Changpin Li.</b> The finite difference method for Caputo-type parabolic equation with fractional laplacian . . . . .   | 302 |
| <b>Danilkina O.</b> On parabolic conservative problems in population dynamics . . . . .   | 303 |
| <b>Duan B., Lazarov R. and Pasciak J.</b> Numerical approximation of fractional powers of elliptic operators . . . . .  | 304 |
| <b>Goy T.</b> On balancing numbers . . . . .  | 305 |
| <b>Karova F.A.</b> A difference scheme for Allers' fractional equation with generalized memory kernel . . . . .   | 306 |
| <b>Khoury S.A.</b> Biorthogonality conditions for the solution of the biharmonic equation that models Stokes flow . . . . .   | 307 |
| <b>Kukushkin M.V.</b> On properties of fractional powers of semigroup's generator of shift operators in the direction . . . . .   | 308 |
| <b>Kulaev R.Ch.</b> On the three-dimentional Darboux system . . . . .   | 309 |
| <b>Lobatch V.T., Potipak M.V., Bakhcheynikov V.V.</b> Electrodynamic model of HF-radio signal backscattering from fully arisen sea . . . . .                                  | 310 |
| <b>Mamayusupov Kh.</b> Newton's method as a global root finder . . . . .  | 311 |
| <b>Neumann F.</b> Weil conjectures and moduli of vector bundles . . . . .   | 312 |
| <b>Ochilova N.K.</b> Boundary value problem for mixed type equation with the Caputo fractional differential operator . . . . .  | 313 |
| <b>Piskarev S.</b> Approximation of stable manifolds for fractional semi-linear equations . . . . .   | 314 |
| <b>Rasulov M.S.</b> Free boundary problem for diffusive Lotka-Volterra competition model with advection . . . . .   | 315 |
| <b>Sharifov Y.A.</b> Solvability and optimal control of system with integral boundary conditions . . . . .  | 316 |
| <b>Takhirov J.O.</b> On periodic solutions of cross-diffusion biological model with prey-taxis . . . . .  | 317 |
| <b>Tashpulatov S.M.</b> Structure of essential spectra and discrete spectrum of energy operator of five-electron systems in the Hubbard model. Second quartet state . . . . . | 318 |
| <b>Trofimov S.P.</b> An algorithm for exact geometric search of complex roots of a cubic equation . . . . .   | 319 |
| <b>Uchaikin V.V.</b> Fractional operators in statistical mechanics . . . . .  | 320 |
| <b>Vabishchevich P.N.</b> Numerical solving boundary value problem for fractional power of elliptic operators . . . . .   | 321 |

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФИЛЬТРАЦИИ В ПОРИСТЫХ  
СРЕДАХ С ФРАКТАЛЬНЫМИ СВОЙСТВАМИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ  
ХАРАКТЕРИСТИК**

**Абдулин И.Н.<sup>1</sup>, Байков В.А.<sup>2</sup>**

<sup>1,2</sup>УГАТУ, Уфа, Россия; nakiullovich@mail.ru

<sup>2</sup>ООО «РН-УфаНИПИнефть», Уфа, Россия; baikov@ufanipi.ru

Доклад посвящен обобщениям некоторых классических моделей фильтрации [1] на случай неоднородных сред, в которых пористость и проницаемость являются известными ступенчатыми функциями от пространственных переменных, чьи множества точек роста имеют самоподобную структуру.

Один из подходов к описанию процессов фильтрации в таких средах заключается в использовании моделей с аппроксимациями степенными законами указанных геометрических характеристик [2, 3]. Этот подход сравнивается с подходом, предложенным в данной работе, когда на множестве точек роста ступенчатых функций сохраняется условие непрерывности искомых величин и потоков.

В частности, для процесса стационарной фильтрации рассматривается задача в вариационной постановке на определение параметров степенного закона для проницаемости, при которых искомая величина давления модели со степенными законами наилучшим образом приближает величину давления, полученного при использовании предложенного подхода.

Обсуждается возможность использования исчисления на фракталах, введенного в работе [4], для задач фильтрации в неоднородных средах.

**Литература**

1. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972. 288 с.
2. O'Shaughnessy B., Procaccia I. Defection of Fractals // Phys. Rev. A. 1989. Vol. 32, № 5. P. 3073-3083.
3. Багманов В.Х., Байков В.А., Латыпов А.Р., Васильев И.Б. Методика интерпретации и определения параметров уравнения фильтрации в пористой среде с фрактальными свойствами // Вестник УГАТУ. 2006. Т. 7, № 2. С. 146-149.
4. Parvate A., Gangal A. Calculus on fractal subsets of real line-I: Formulation // Fractals. 2009. Vol. 17, № 1. P. 53-81.

---

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ, государственное задание № 1.3103.2017/4.6.

## Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа второго рода

**Абдуллаев А.А.**

*ТИИИМСХ, Ташкент, Узбекистан; akmal09.07.85@mail.ru*

Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{sign} y|y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (-1 < m < 0) \quad (1)$$

в области  $D = D_1 \cup D_2$ , где  $D_1$  – ограничена кривой  $\sigma = \sigma(s)$  при  $y > 0$  с концами в точках  $A(0, 0), B(1, 0)$  и отрезком  $AB(y = 0)$ , а  $D_2$  – ограничена тем же отрезком  $AB$  и характеристиками уравнения (1):

$$AC : x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0, \quad BC : x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1.$$

Введём обозначения  $J = \{(x, y) : 0 < x < 1, y = 0\}$ ,  $\partial D = \vec{\sigma} \cup \overline{AB}$ ,  $2\beta = \frac{m}{m+2}$ , причем  $-\frac{1}{2} < \beta < 0$ .

В области  $D$  для уравнения (1) исследуем следующую задачу.

**Задача.** Найти функцию  $u(x, y)$ , обладающую следующими свойствами:

- 1)  $u(x, y) \in C(\bar{D}) \cup C^1(D \cup \sigma \cup J)$ , причем  $u_x$  и  $u_y$  могут обращаться бесконечность порядка меньше, чем  $-2\beta$  в точках  $A(0, 0)$  и  $B(1, 0)$ ;
- 2)  $u(x, y) \in C(\bar{D})$  является регулярным решением уравнения (1) в области  $D_1 (y > 0)$ , а в области  $D_2 (y < 0)$  – обобщенным решением из класса  $R_2$ ;
- 3) выполняется условие склеивания:  $-u_y(x, -0) = u_y(x, +0)$ ;
- 4)  $u(x, y)$  удовлетворяет краевым условиям

$$\begin{aligned} \{\delta(s)A_s[u] + \rho(s)u\}|_\sigma &= \phi(s), \quad 0 < s < l, \\ u(x, y)|_{AC} &= \psi(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

где  $\delta(s), \phi(s), \psi(x)$  – заданные функции,  $A_s[u]$  – конормальная производная, которая представима в виде:

$$A_s[u] = y^m \frac{dy}{ds} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{dx}{ds} \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Единственность решения задачи доказывается с помощью метода интегралов энергии, а существование решения задачи при некоторых условиях доказывается с помощью теории интегралов [1, 2].

### Литература

1. Исломов X. Задача с конормальной производной для уравнения эллиптического типа с одной линией вырождения // Узбекский математический журнал. 2012. № 1. С. 47-60.
2. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. М.: Выс. школа, 1985. 304 с.

**О ПОСТАНОВКЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА  
УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА СМЕШАННОГО ТИПА С  
ОПЕРАТОРОМ КАПУТО**

**Абдуллаев О.Х.<sup>1</sup>, Матчанова О.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*НУУз, Ташкент, Узбекистан; obidjon.mth@gmail.com*

<sup>2</sup>*ТУИТ им. Мухаммада ал-Хоразми, Ташкент, Узбекистан;  
oygul87-87@mail.ru*

Пусть  $D$  односвязная область, ограниченная отрезками  $BB_0$ ,  $B_0A_0$ ,  $A_0A$  прямых  $x = 1, y = h = \text{const} > 0, x = 0$  и характеристиками  $AC$ :  $x + y = 0, BC$ :  $x - y = 1$  уравнения колебания струны, пересекающимися в точке  $C\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ . В области  $D$  рассмотрим уравнение

$$\left(a \frac{\partial}{\partial x} + b\right) Lu = 0, \quad (1)$$

где

$$L = u_{xx} - {}_cD_{0y}^\alpha \text{ в } D_1, \quad L = u_{xx} - u_{yy} \text{ в } D_2,$$

$a, b$  – заданные постоянные числа, а  ${}_cD_{0y}^\alpha$  – оператор Капуто порядка  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ). Выпишем краевые условия, которые будем использовать при постановке задач:

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u(1, y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (2)$$

$$u_{xx}(0, y) = \varphi_3(y), \quad 0 < y < h, \quad (3); \quad u_{xx}(1, y) = \varphi_4(y), \quad 0 < y < h, \quad (4)$$

$$u|_{AC} = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad (5); \quad u|_{BC} = \psi_2(x), \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \quad (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{AC} = \psi_3(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad (7); \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{BC} = \psi_4(x), \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \quad (8)$$

где  $n$  – внутренняя нормаль,  $\varphi_i, \psi_i (i = \overline{1, 4})$  – заданные функции, причем  $\varphi_1(y), \varphi_2(y) \in C^2[0, h], \varphi_3(y), \varphi_4(y) \in C^1[0, h], \psi_1(x), \psi_2(x) \in C^3[0, \frac{1}{2}], \psi_3(x), \psi_4(x) \in C^3[\frac{1}{2}, 1], \psi_1(0) = \varphi_1(0), \psi_2(1) = \varphi_2(0), \psi'_3(\frac{1}{2}) = -\psi'_4(\frac{1}{2})$ .

**Задача.** Требуются определить функцию  $u(x, y)$ , обладающую следующими свойствами: 1) непрерывна в замкнутой области  $\overline{D}$ ; 2) является регулярным решением уравнения (1) в области  $D$  при  $y \neq 0$ ; 3) удовлетворяет следующим краевым условиям: если  $a \neq 0$ , то выполняется одна из групп условий:  $\{(2), (3), (5), (7)\}, \{(2), (3), (5), (8)\}, \{(2), (3), (6), (7)\}, \{(2), (4), (5), (8)\}, \{(2), (4), (6), (7)\}, \{(2), (4), (6), (8)\}$ ; 4) во всех случаях удовлетворяет на отрезке  $AB$  непрерывным условиям склеивания со своими первыми производными.

**О ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДИФФУЗИОННО-ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ  
ДРОБНОГО ПОРЯДКА**

**Абдуллаев О.Х.<sup>1</sup>, Фохирова Т.О.<sup>2</sup>**

НУУз, Ташкент, Узбекистан;

<sup>1</sup>*obidjon.mth@gmail.com*; <sup>2</sup>*foxirovaturusunoy14@gmail.com*

Пусть  $\Omega_k = \{(x, t) : -1 < (-1)^k x < 0, 0 < t < 1\}, k = 1, 2$  и  $I = \{(x, t) : x = 0, 0 < t < 1\}$ , тогда через  $\Omega$  обозначим,  $\Omega = \Omega_1 \cup I \cup \Omega_2$ .

В работе для уравнения смешанного типа дробного порядка

$${}_cD_{0t}^{\alpha_k} u - u_{xx} = f_k(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_k, \quad (k = 1, 2) \quad (1)$$

где  $0 < \alpha_1 < 1, 1 < \alpha_2 < 2$ , в области  $\Omega$  исследуется следующая

**Задача.** Требуется найти функцию  $u(x, t)$  из класса

$$W = \{u(x, t) : u(x, t) \in C(\bar{\Omega}), u_{xx}(x, t) \in C(\Omega_k), {}_cD_{0t}^{\alpha_k} u \in C(\Omega_k)\}$$

удовлетворяющую условиям:

1.  $u(x, t)$  удовлетворяет уравнению (1) в области  $\Omega_k$ ;
2.  $u(x, t)$  удовлетворяет следующим начальными

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad x \in [0, 1];$$

$$u(x, 0) = \varphi_2(x), \quad u_t(x, 0) = \varphi_3(x), \quad x \in [-1, 0],$$

и краевым условиям:

$$u(1, t) = \psi_1(t), \quad u(-1, t) = \psi_2(t), \quad t \in [0, 1];$$

3. для  $u(x, t)$  выполняются условия склеивания:

$$u(+0, t) = \beta_1 u(-0, t), \quad u_x(+0, t) = \beta_2 u_x(-0, t), \quad t \in [0, 1],$$

где  $\beta_1, \beta_2 = \text{const} \neq 0$ , а  $\psi_k(t), \psi_2(t), \varphi_k(x), \varphi_3(x), f_k(x, t)$ , ( $k = 1, 2$ ) – заданные функции, причем

$$\psi_1(t), \varphi_1(x) \in C^2[0, 1], \quad \psi_2(t), \varphi_2(x), \varphi_3(x) \in C^2[-1, 0], \quad (2)$$

а  ${}_cD_{0t}^{\alpha_k}$  – дифференциальный оператор в смысле Капуто.

**Теорема.** Если выполняется условие (2), то при определенных условиях на функции  $f_k(x, t)$  исследуемая задача однозначно разрешима.

**РЕАКТОР С НЕОДНОРОДНЫМ ПСЕВДООЖИЖЕННЫМ СЛОЕМ ПРИ  
ОСУЩЕСТВЛЕНИИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО-ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ  
РЕАКЦИИ**

**Абдурахимов А.**

*ТАСИ, Ташкент, Узбекистан; abduraximov1943@mail.ru*

Рассматривается одномерная модель реактора с неоднородным псевдоожиженым слоем при неполном продольном перемешивании в плотной фазе. Для последовательно-параллельной реакции исследуется влияние интенсивности продольной дисперсии на степень превращения, избирательность и выход продукта при разбавленной фазе, скорость потока и степень неоднородности доли пузырей в реакторе. Задача сводится к нелинейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Границные условия на входе и выходе реактора с неоднородным кипящим слоем выводятся аналогично с выводом Данкверста для реактора с продольным перемешиванием. В приближении «слабой» реакции методом малых возмущений получено аналитическое решение задачи. Установлено, что оптимальный уровень продольного перемешивания в этом приближении определяется не только комбинацией безразмерных скоростей химических реакций, как это имеет место в случае реактора с однородным слоем, но и существенно зависит от коэффициента маскообмена между плотной и разбавленной фазами, а также от степени неоднородности. Увеличение доли пузырей в реакторе и скорости потока приводит к возрастанию выхода продукта. Получена зависимость оптимального числа Пекле от этих параметров. Найдены характерные области в пространстве определяющих параметров.

Определена зависимость функций от чисел Пекле, коэффициента маскообмена и объёма разбавленной фазы, которые пропорциональны выходу продукта. Расчет при разных значениях параметров показал, что функция монотонно убывает с ростом числа Пекле. Следовательно, максимальный выход продукта достигается в реакторе полного перемешивания, а минимальный – в реакторе идеального вытеснения [1]. Вышеизложенный анализ свидетельствует о разнообразии влияния гидродинамических параметров на выход продукта, причем подбирая значения параметров системы в допустимом диапазоне можно регулировать режим работы реактора с неоднородным кипящим слоем для достижения оптимальных условий осуществления технологического процесса.

**Литература**

1. Абдурахимов А. Работа реактора в псевдоожиженнм слое // Труды VII международной конференции по математическому моделированию. Якутск. 2014. С. 114–116.

**О КОЛИЧЕСТВЕ ЧИСЕЛ, ПРЕДСТАВИМЫХ В ВИДЕ СУММЫ  $k$ -ЫХ СТЕПЕНЕЙ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ**

**Абраев Б.Х<sup>1</sup>, Хасанова Д.**

*ТерГУ, Термез, Узбекистан; <sup>1</sup>babrayev@mail.ru*

Пусть  $G(k)$  – наименьшее  $s$  такое, что каждое достаточно большое натуральное число  $n$  представимо в виде:

$$n = x_1^k + x_2^k + \dots + x_s^k, \quad (1)$$

где  $k \geq 2$  и  $x_1, x_2, \dots, x_s$  – натуральные числа. При  $X$  достаточно большом, через  $N_{k,s}(X)$  обозначим количество натуральных чисел  $n \leq M$ , которые представимы в виде (1). Фактически величина  $G(k)$  известна только для  $k = 2$  и  $k = 4$ , а именно  $G(2) = 4$  и  $G(4) = 16$  (см. § 1.1, 1.2 [1]).

После известных работ И.М. Виноградова, Г. Дэвенпорта, А.А. Карапубы и других (наиболее полную библиографию см. в [1]), R.C. Vaughan [2], применяя новый итерационный метод, улучшил прежние результаты относительно  $G(k)$  для всех  $k \geq 5$ . При  $s = 3$ ,  $k \geq 3$  и  $s = 4$ ,  $5 \leq k \leq 20$ , он получил улучшение в оценках функции  $N_{k,s}(X)$ .

В настоящей работе доказана

**Теорема.** *Если  $k \geq 10$ , то справедлива формула:*

$$a_{k,11} = \left( 21 - \frac{35}{2k} - \lambda_{11} \left( 1 - \frac{7}{8k} \right) \right) k^{-1},$$

где  $\lambda_{11} = \frac{35}{2k} + 1 + \lambda_{10} \left( 1 - \frac{7}{8k} \right)$ ,  $k \geq 45$ ; а при  $11 \leq k \leq 44$ ,  $\lambda_{11} = (2240 + 111k + \lambda_{10} (40k - 35)) (48k + 70)^{-1}$  и параметр  $\lambda_{10}$  определяется как в [3].

Эти результаты дополняют соответствующие результаты работ [1–3].

**Литература**

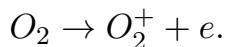
1. Vaughan R.C. A new iterative method in Waring' s problem // Acta Math. 1989. № 1-2 (162). P. 1–71.
2. Allakov I., Israilov M.I. On the sum of  $k$ -th powers of natural numbers // Proceeding of the Steklov Institute of Mathematics. 1995. Vol. 207. P. 155–161.
3. Абраев Б., Аллаков И. О варинговых числах // Узбекский математический журнал. 2012. № 4. С. 11–18.

## Расчет потенциалов ионизаций молекул в прикладном пакете ABINIT

Агибова И.М. Крахоткина В.К.<sup>1</sup>

*СКФУ, Ставрополь, Россия;* <sup>1</sup>*krahotkinav@mail.ru*

Рассмотрим процесс отрыва электрона от двухатомной молекулы  $\theta_2$ :



Один из экспериментальных методов изучения этого процесса, при котором производится измерение энергетических спектров электромагнитным излучением подходящей длины волны, получил название ЭСХА (электронная спектроскопия для химического анализа).

В наших расчетах мы приняли за основное состояние молекул  $O_2$  и  $O_2^+$  состояния  ${}^3\sum_g^0$  и  ${}^2\Pi_g$  соответственно. Равновесное расстояние в молекуле  $O_2$   $R = 1,207 \text{ \AA}$ , а в молекуле  $O_2^+$   $R = 1,123 \text{ \AA}$ . Энергия ионизации рассчитывалась по формуле

$$\Delta E = E(O_2^+) - E\left(O_2; {}^3\sum_g^0\right).$$

Для расчета использовался базисный набор гауссовых орбиталей в приближении DFTCGA. Расчеты проведены на 8-ядерном машинном прикладном пакете программ ABINIT.

### Литература

1. Kulkarni G.U., Gopalan R.S. and Rao C.N.R. Experimental and theoretical electronic charge densities in molecular crystals // Journal of Molecular Structure: THEOCHEM. 2000. Vol. 500, № 1-3. P. 339–362.
2. Rovira C. and Novoa J.J. A density functional study of crystalline acetic acid and its proton transfer polymorphic forms // The Journal of Chemical Physics. 2000. Vol. 113, № 20.
3. Abramov Yu.A., Volkov A. V. and Coppens P. On the evaluation of molecular dipole moments from multipole refinement of X-ray diffraction data // Chemical Physics Letters. 1999. Vol. 311, № 1-2. P. 81–86.

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК  
МОЛНИЕВЫХ РАЗРЯДОВ НА ОСНОВЕ ДАННЫХ ЦЕНТРА  
ГЕОФИЗИЧЕСКОГО МОНИТОРИНГА ФГБУ «ВГИ»**

**Аджиева А.А.<sup>1</sup>, Шаповалов В.А.<sup>2</sup>, Машуков И.Х.<sup>3</sup>**

<sup>1</sup> КБГАУ, Нальчик, Россия; aida-adzhieva@mail.ru

<sup>2,3</sup> ВГИ, Нальчик, Россия; vet555\_83@mail.ru

Опасность повреждения микропроцессорной аппаратуры и её цепей зависит от многих факторов, один из которых – параметры молниевого импульса [1–3]. Проведены исследования электрических параметров разрядов в атмосфере с использованием данных центра геофизического мониторинга ФГБУ «ВГИ», включающего сеть датчиков автоматического грозопеленгатора – дальномера LS8000. Полученные за период его эксплуатации значения параметров молниевых разрядов позволяют выявить основные факторы, влияющие на характеристики получаемых распределений [4, 5].

Параметры тока молнии в нормативных документах по молниезащите не соответствуют в полной мере накопленным фактическим данным. Поэтому для совершенствования внутренней молниезащиты необходимы оперативные данные об исследованиях параметров молний для конкретных местностей, на которых планируются молниезащитные мероприятия и, в первую очередь, уточнение данных амплитуды и крутизны фронта.

**Литература**

1. Аджиев А.Х., Аджиева А.А., Дорина А.Н. Определение параметров молниевых разрядов // Известия высших учебных заведений. Северокавказский регион. Физика атмосферы. № S. С. 10–12.
2. Базелян Э.М., Райзер Ю.П. Физика молнии и молниезащиты. М.: Физматлит, 2001. 320 с.
3. Дмитриев В.Л., Дмитриев М.В. Параметры разряда молнии в задачах грозозащиты // Известия РАН: Энергетика. 2005. № 4. С. 54–61.
4. Шаповалов А.В., Стасенко В.Н., Кравченко Н.А., Лашманов Ю.К., Шаповалов В.А., Скорбэж Н.Н. Комплексная обработка информации метеорологических радиолокаторов и систем грозопеленгации // Сборник трудов II международной научной конференции с элементами научной школы «Иновационные методы и средства исследований в области физики атмосферы, гидрометеорологии, экологии и изменения климата», Ставрополь: Издательство СКФУ, 2015. С. 285–289.
5. Adzhieva A.Kh., Stasenko V.N., Shapovalov A.V., Shapovalov V.A. Atmospheric electric field strength and thunderstorms in the North Caucasus // Meteorology and Hydrology. 2016. Vol. 41, № 3. P. 186–192.

## Об одной задаче для вырождающегося уравнения четвертого порядка

**Азизов М.С.**

*ФерГУ, Фергана, Узбекистан; muzaffar.azizov.1988@mail.ru*

В области  $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < p, 0 < t < T\}$  для уравнения

$$Lu = u_{xxxx} + u_{tt} + \frac{2\gamma}{t}u_t = f(x, t), \quad \gamma = const \in (0, 1/2), \quad (1)$$

где  $f(x, t)$  – заданная непрерывная в области  $\Omega$  функция, рассмотрим следующую смешанную задачу.

**Задача A.** Найти в области  $\Omega$  решение  $u(x, t)$  уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad 0 \leq x \leq p, \quad (2)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{2\gamma} u_t(x, t) = \varphi_2(x), \quad 0 < x < p, \quad (3)$$

$$u_x(0, t) = \psi_1(t), \quad u_x(p, t) = \psi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

$$u_{xxx}(0, t) = \psi_3(t), \quad u_{xxx}(p, t) = \psi_4(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5)$$

где  $\varphi_j(x)$ ,  $j = \overline{1, 2}$ ;  $\psi_k(x)$ ,  $k = \overline{1, 4}$  – заданные непрерывные функции.

**Определение.** Функцию  $u(x, t) \in C_{x,t}^{3,1}(\bar{\Omega}) \cap C_{x,t}^{4,2}(\Omega)$  назовем регулярным решением задачи A, если она в области  $\Omega$  удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2)–(5).

Задача A при  $\gamma = 0$  исследована в работе [1].

Введем обозначения:  $\varphi_3(x) = \varphi_1(x) - w(x, 0)$ ,  $\varphi_4(x) = \varphi_2(x) - \lim_{t \rightarrow 0} t^{2\gamma} w_t(x, t)$ ,  $w(x, t) = \frac{1}{24p} [\psi_4(t) - \psi_3(t)] x^4 + \frac{1}{6} \psi_3(t) x^3 + \psi_1(t) x + \left\{ \frac{1}{2p} [\psi_2(t) - \psi_1(t)] - \frac{p}{12} [\psi_4(t) + 2\psi_3(t)] \right\} x^2$ .

Доказано, что справедлива следующая

**Теорема.** Пусть  $f \in C_{x,t}^{2,0}(\bar{\Omega})$ ,  $f_{xxx} \in L_2(\Omega)$ ,  $f_x(0, t) = f_x(p, t) = 0$ ,  $a \varphi_3^{(5)}(x) \in C[0, p]$ ,  $\varphi_3^{(6)}(x) \in L_2(0, p)$ ,  $\varphi_4^{(3)}(x) \in C[0, p]$ ,  $\varphi_4^{(4)}(x) \in L_2(0, p)$ , и удовлетворяют условиям согласования  $\varphi_3'(0) = \varphi_3'(p) = 0$ ,  $\varphi_3'''(0) = \varphi_3'''(p) = 0$ ,  $\varphi_3^{(5)}(0) = \varphi_3^{(5)}(p) = 0$ ,  $\varphi_4'(0) = \varphi_4'(p) = 0$ ,  $\varphi_4'''(0) = \varphi_4'''(p) = 0$ . Тогда регулярное решение  $u(x, t)$  задачи A существует и единствено.

### Литература

1. Отарова Ж.А. Разрешимость и спектральные свойства краевых задач для уравнений смешанного типа четвертого порядка: Диссертация канд. физ.-мат. наук. Ташкент. 2008.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ МЕСТ НАГРУЖЕНИЯ В СИСТЕМАХ С  
РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Айда-заде К.Р.<sup>1</sup>, Абдуллаев В.М.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>БГУ, Баку, Азербайджан; kamil\_aydazade@rambler.ru

<sup>1,2</sup>ИСУ, Баку, Азербайджан;

<sup>2</sup>АГУНП, Баку, Азербайджан; vaqif\_ab@rambler.ru

Исследуются постановки задач идентификации мест нагружения и соответствующих функций реакций, а также методы их численного решения [1, 2]. Для иллюстрации рассмотрена следующая задача:

$$u_t(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t) + \sum_{s=1}^L B^s(x, t) u(\bar{x}_s, t) + f(x, t), (x, t) \in (0, l) \times (0, T], \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} J(B, \bar{x}) = & \int_0^l [u(x, T; B, \bar{x}) - U(x)]^2 dx + \\ & + \sigma_1 \sum_{s=1}^L \|B^s(x, t) - \tilde{B}^s(x, t)\|^2 + \sigma_2 \sum_{s=1}^L \|x^s - \tilde{x}^s\|^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $u(x, t; B, \bar{x})$  – решение начально-краевой задачи (1)–(4) при заданных  $B = (B^1, B^2, \dots, B^L)$ ,  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_L)$ , удовлетворяющих условиям:

$$\underline{B}^s \leq B^s \leq \bar{B}^s, \quad 0 \leq \bar{x}_s \leq l, \quad s = 1, 2, \dots, L. \quad (5)$$

Для численного решения задачи (1)–(5) использован метод проекции градиента. С этой целью получены необходимые условия оптимальности в задаче (1)–(5), содержащие формулы градиента функционала (4), использованные для построения итерационной процедуры.

**Литература**

1. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение. Москва: Наука, 2012. 232 с.
2. Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р. Оптимизация мест нагружения и функций реакции на нагружения для стационарных систем // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57, № 4. С. 633–644.

## Оптимизация размещения контролируемых областей в задачах управления с обратной связью

Айда-заде К.Р.<sup>1</sup>, Гашимов В.А.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>БГУ, Баку, Азербайджан; kamil\_aydazade@rambler.ru

<sup>1,2</sup>ИСУ, Баку, Азербайджан; vugarhashimov@gmail.com

Рассматривается управление процессом нагрева стержня точечными источниками:

$$u_t(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t) - \lambda_0[u(x, t) - \theta] + \sum_{i=1}^{N_c} \vartheta^i(t) \delta(x - \eta^i), \quad (1)$$

$$x \in [0, l], \quad t \in (t_0, T],$$

$$u(x, t_0) = \varphi \in \Phi, \quad x \in [0, l], \quad (2)$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = 0, \quad t \in [t_0, T]. \quad (3)$$

Здесь  $\vartheta^i(t)$  – мощность источника, сосредоточенного в точке  $x = \eta^i \in [0, l]$ ,  $\theta, \varphi$  заданы множествами возможных их постоянных значений в  $\Theta$  и  $\Phi$  с функциями распределения.

В  $N_o$  точках  $\xi^j \in [0, l]$  расположены точки замеров температуры стержня, определяемые по областям замера  $\omega^j \subset [0, l]$ :

$$\tilde{u}^j(t) = u(\xi^j, t) = \int_{\omega^j} \mu_j(x) u(x, t) dx, \quad j = 1, \dots, N_o, \quad (4)$$

$\mu_j(x)$  – весовая функция. Температура источников назначается по текущим замерам:

$$\vartheta^i(t) = \sum_{j=1}^{N_o} k_j^i \left[ \int_{\omega^j} \mu_j(x) u(x, t) dx - z_i^j \right], \quad i = 1, \dots, N_c. \quad (5)$$

Для оптимизации параметров обратной связи  $K = (k_j^i)$ ,  $Z = (z_i^j)$ , а так же точек управления  $\eta = (\eta^1, \dots, \eta^{N_c})$  и замеров  $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^{N_o})$  относительно заданного целевого функционала задачи, усредненного по возможным значениям  $\Theta$  и  $\Phi$ , использованы численные методы. Для этого получены необходимые формулы. Проведены численные эксперименты.

**РАЗРАБОТКА И ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ УПРАВЛЕНИЯ  
ПРИВОДАМИ ДЛЯ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ВЫСОКОЙ ТОЧНОСТИ  
ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИИ  
ТЕЛЕУПРАВЛЯЕМОГО СТОЛА-ШТАТИВА**

**Акользин А.Н.<sup>1</sup>, Легин А.А.<sup>2</sup>, Горбунов А.А.<sup>3</sup>, Харьянов О.А.<sup>4</sup>**

*НТЦ «Техноцентр» ЮФУ, Таганрог, Россия;* <sup>1</sup>*anton.akolzin@gmail.com;*  
<sup>2</sup>*andrey9199@gmail.com;* <sup>3</sup>*alexandrgor28@gmail.com;* <sup>4</sup>*zagta@yandex.ru*

Реализация метода цифрового томосинтеза (ЦТ) требует обеспечения высокой точности взаимного перемещения излучателя и детектора рентгеновского излучения. В то же время необходимо обеспечить плавность разгона и торможения колонны с излучателем с наименьшим временем (или траекторией) выхода на рабочую скорость [1]. В работе представлены результаты разработки и исследования алгоритмов управления приводами телеуправляемого стола-штатива, позволяющие обеспечить погрешность позиционирования системы излучатель-детектор в момент получения проекции не более 200 мкм, при длине траектории перемещения до 2 м. Отдельное внимание уделено алгоритмам разгона и торможения. В качестве основных критериев оценки алгоритмов использованы: время выхода на рабочую скорость и остановки, длина траекторий разгона и торможения при максимально допустимом ускорении. Суть исследования заключается в снижении нагрузок на колонну телеуправляемого стола-штатива, при этом оценка нагрузок производится не только по второй производной перемещения (ускорению) но и по производной третьего порядка (рывок) [2]. На основании моделирования показано, что использование наиболее употребимых линейных алгоритмов разгона и торможения с постоянным ускорением является источником вибраций в колонне в моменты страгивания и остановки. Предложены методы расчета параметров движения, основанные на нелинейных алгоритмах разгона и торможения, обеспечивающие минимальное время (траекторию) выхода на рабочую скорость при заданных параметрах максимального ускорения и рывка.

**Литература**

1. *Li H., Gong Z., Lin W., Lippa T.* Motion profile planning for reduced jerk and vibration residuals // SIMTech technical reports. 2007. № 1.
2. *Barre P.J., Bearee R., Borne P., Dumetz E.* Influence of a jerk controlled movement law on the vibratory behaviour of high-dynamics systems // Journal of Intelligent and Robotic Systems. 2005. № 42.

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках постановления Правительства Российской Федерации № 218.

## ЗАДАЧА СТЕКЛОВА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОШИ – РИМАНА В ПОЛОСЕ

**Алиев Н.А.<sup>1</sup>, Велиева С.Р.<sup>2</sup>**

*БГУ, Баку, Азербайджан;* <sup>1</sup>aliyev.nihan@mail.ru; <sup>2</sup>sevinj\_veliyeva@mail.ru

Рассмотрим следующую граничную задачу для уравнения эллиптического типа первого порядка на плоской полосе:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_2} + i \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad x_1 \in R, \quad x_2 \in (0, 1), \quad (1)$$

$$u(x_1, 1) = \lambda u(x_1, 0), \quad x_1 \in R, \quad (2)$$

где  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\lambda \in C$  - спектральный параметр.

Как известно, фундаментальное решение уравнения (1) имеет вид:

$$U(x - \xi) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1)}. \quad (3)$$

Исходя из (3), получим основное соотношение:

$$\int_R [u(x_1, 1)U(x_1 - \xi_1, 1 - \xi_2) - u(x_1, 0)U(x_1 - \xi_1, -\xi_2)] dx_1 = \quad (4)$$

$$= \begin{cases} u(\xi), & \xi \in D, \\ \frac{1}{2}u(\xi), & \xi_1 \in R, \xi_2 = 0 \text{ или } \xi_2 = 1, \end{cases}$$

где

$$u(x)U(x - \xi)|_{x_1=-\infty}^{\infty} = 0.$$

Тогда из основного соотношения (4) получим следующие необходимые условия:

$$\begin{cases} u(\xi_1, 1) = \frac{1}{\pi} \int_R \frac{u(x_1, 1)}{i(x_1 - \xi_1)} dx_1 - \frac{1}{\pi} \int_R \frac{u(x_1, 0)}{-1 + i(x_1 - \xi_1)} dx_1, \\ u(\xi_1, 0) = \frac{1}{\pi} \int_R \frac{u(x_1, 1)}{1 + i(x_1 - \xi_1)} dx_1 - \frac{1}{\pi} \int_R \frac{u(x_1, 0)}{i(x_1 - \xi_1)} dx_1. \end{cases} \quad (5)$$

Исходя из граничного условия (2) регуляризируем необходимые условия (5):

$$u(\xi_1, 1) + \lambda u(\xi_1, 0) = \frac{1}{\pi} \int_R \frac{u(x_1, 0)}{1 - i(x_1 - \xi_1)} dx_1 + \frac{\lambda}{\pi} \int_R \frac{u(x_1, 1)}{1 + i(x_1 - \xi_1)} dx_1. \quad (6)$$

Из граничного условия (2) и соотношения (6) получим как собственные значения, так и собственные функции задачи (1)–(2).

**ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ  
УРАВНЕНИЙ ПРИ РЕКОНСТРУКЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЯ В МЕТОДЕ  
ЦИФРОВОГО ТОМОСИНТЕЗА**

**Алиханов А.А.<sup>1</sup>, Апеков А.М.<sup>2</sup>, Коков З.А.<sup>3</sup>, Хибиев А.Х.<sup>4</sup>,  
Хамукова Л.А.<sup>5</sup>**

<sup>1,2,4</sup>ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; alikhakov-tom@yandex.ru,  
aslkbsu@yandex.ru

<sup>3,5</sup>НТЦ «Техноцентр» ЮФУ, Таганрог, Россия; zak@kbsu.ru

С развитием вычислительной техники широкое практическое применение получили томографические методы, основанные на математических алгоритмах восстановления изображений по многочисленным проекционным данным [1–3].

В случае, когда невозможно получить полный набор проекционных данных оправдано применение алгоритмов цифрового томосинтеза, в основе которого лежит схема многоракурсного просвечивания объекта, предусматривающая получение двумерных рентгенограмм объекта и восстановление его внутренней структуры путем решения систем линейных алгебраических проекционных уравнений.

В данной работе предлагается метод нумерации неизвестных таким образом, чтобы проекционная матрица была симметричной. Это свойство матрицы позволяет распараллелить процесс решения и работать с двумя матрицами размерность которых в четыре раза меньше исходной проекционной матрицы, что дает возможность сократить время вычисления в четыре раза.

**Литература**

1. Natterer F. The mathematics of computerized tomography. Stuttgart, 1986. 200 p.
2. Хермен Г. Восстановление изображений по проекциям: основы реконструктивной томографии. М.: Мир, 1983. 352 с.
3. Синютин С.А., Беляев А.О., Апеков А.М., Алиханов А.А., Пономаренко Р.Н., Коков З.А. Алгоритмическое обеспечение цифрового томосинтеза на телекоммуникационном столе штативе «КОСМОС-Д» ООО «Севкаврентген-Д» // Тезисы Международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и физики». Терскол. 2017. С. 191.

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках постановления Правительства Российской Федерации № 218 от 09.04.2010 г. (договор № 03.G25.31.0225).

**УСТОЙЧИВОСТЬ И СХОДИМОСТЬ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ,  
АППРОКСИМИРУЮЩИХ НЕЛОКАЛЬНУЮ КРАЕВУЮ ЗАДАЧУ  
СТЕКЛОВА ПЕРВОГО КЛАССА**

**Алиханов А.А.<sup>1</sup>, Хамгокова М.М.<sup>2</sup>**

*ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия;*

<sup>1</sup>*alikhhanov-tom@yandex.ru*, <sup>2</sup>*hamgokova.madina@yandex.ru*

Рассматривается нелокальная краевая задача Стеклова первого класса

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$\begin{cases} k(0)u_x(0, t) = \alpha u(0, t) + \beta u(1, t) - \mu_1(t), \\ -k(1)u_x(1, t) = \gamma u(0, t) + \delta u(1, t) - \mu_2(t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (3)$$

где  $k(x)$  и  $f(x, t)$  – заданные достаточно гладкие функции,  $0 < c_1 \leq k(x) \leq c_2$ ,  $k(x) = k(1-x)$  для всех  $x \in [0, 1]$ ;  $\alpha, \beta, \gamma$  и  $\delta$  – заданные действительные числа;  $\mu_1(t), \mu_2(t) \in C[0, T]$ .

Известно [1], что если выполняются условия  $\alpha > 0$  и  $(\beta + \gamma)^2 - 4\alpha\delta < 0$ , то для решения задачи (1)–(3) справедлива априорная оценка

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, \tau)\|_0^2 + \int_0^t (\|u_x(\cdot, \tau)\|_0^2 + u^2(0, \tau) + u^2(1, \tau)) d\tau \leq \\ \leq M \left( \int_0^t (\|f(\cdot, \tau)\|_0^2 + \mu_1^2(\tau) + \mu_2^2(\tau)) d\tau + \|u_0\|_0^2 \right), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\|u\|_0^2 = \int_0^1 u^2 dx$ ,  $M > 0$  – известная постоянная не зависящая от  $T$ .

В данной работе получены априорные оценки как для дифференциальной так и для разностной задач, вида (4), в случае когда условие  $(\beta + \gamma)^2 - 4\alpha\delta < 0$  не выполняется. Отличительной особенностью данной работы от [2, 3] является то, что константы полученных априорных оценок не зависят от  $T$ .

#### Литература

1. Стеклов В. А. Основные задачи математической физики. М. 1983.
2. Алиханов А. А. Нелокальные краевые задачи в дифференциальной и разностной трактовках // Диф. уравнения. 2008. Т. 44, № 7. С. 924–931.
3. Алиханов А. А. Об устойчивости и сходимости нелокальных разностных схем // Диф. уравнения. 2010. Т. 46, № 7. С. 942–954.

## АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Алиханов А.А.<sup>1</sup>, Шогенова Е.М.<sup>2</sup>

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия;

<sup>1</sup> *aликhanov-tom@yandex.ru*, <sup>2</sup> *shogenova@inbox.ru*

В работе [1] методом энергетических неравенств получены априорные оценки решения краевых задач первого и третьего рода для диффузионно-волнового уравнения. Априорные оценки решений краевых задач для уравнения диффузии дробного, переменного и распределенного порядков в дифференциальной и разностной трактовках получены в работах [2, 3].

В прямоугольнике  $\bar{Q}_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$  рассматривается первая краевая задача:

$$\partial_{0t}^{\alpha+\beta} u = \partial_{0t}^\beta (k(x)u_x)_x + r(x)u_x - q(x)\partial_{0t}^\beta u + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (3)$$

где  $0 < \beta < 1$ ,  $0 < \alpha + \beta < 1$ ,  $\partial_{0t}^\gamma u = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t u_\xi(x, \xi)(t-\xi)^{-\gamma} d\xi$  – дробная производная Капуто порядка  $\gamma \in (0, 1)$ ,  $k(x) \geq c_1 > 0$ ,  $r'(x) \geq 0$ ,  $q(x) \geq 0$ .

В работе получена априорная оценка для решения  $u(x, t)$  задачи (1)–(3) вида

$$\|u\|_0^2 + c_1 D_{0t}^{-\alpha} \|u_x\|_0^2 \leq M \left( D_{0t}^{-\alpha-\beta} \|f\|_0^2 + \|u_0\|_0^2 + \|u_x(x, 0)\|_0^2 \right), \quad (4)$$

где  $M(T) > 0$  – известная постоянная.

Из априорной оценки (4) следует единственность и непрерывная зависимость решения задачи (1)–(3) от входных данных.

### Литература

1. Алиханов А.А. Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46, № 5. С. 658–664.
2. Alikhanov A.A. Boundary value problems for the diffusion equation of the variable order in differential and difference settings // Applied Mathematics and Computation. 2012. Vol. 219. P. 3938–3946.
3. Alikhanov A.A. Numerical methods of solutions of boundary value problems for the multi-term variable-distributed order diffusion equation // Applied Mathematics and Computation. 2015. Vol. 268. P. 12–22.

**О ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ, СВОБОДНОЙ ОТ НУЛЕЙ  $L$ -ФУНКЦИИ  
ДИРИХЛЕ**

**Аллаков И.<sup>1</sup>, Абдусаматов А.**

*TerGU, Термез, Узбекистан; <sup>1</sup>iallakov@mail.ru*

Пусть  $n$  – натуральное,  $s = \sigma + it$  – комплексное число,  $\chi$ -характер Дирихле по модулю  $q$ . Известно, что  $L$ -функция Дирихле  $L(s, \chi)$ , при  $\operatorname{Re}s > 1$ , определяется равенством [1]  $L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$ . Согласно обобщенной гипотезе Римана все комплексные нули  $L(s, \chi)$  лежат на прямой  $\sigma = \frac{1}{2}$ . Хотя, гипотеза Римана до сих пор полностью не доказана, получен ряд обнадёживающих результатов его справедливости. В частности, доказано, что все комплексные нули  $L(s, \chi)$  расположены в полосе  $0 < \sigma < 1$  и они расположены симметрично относительно прямой  $\sigma = \frac{1}{2}$  и действительной оси. Позднее, этот результат был уточнен и доказано, что  $L$ -функция не имеет нулей в области

$$\sigma > 1 - \frac{c}{\ln q (|t| + 3)}, \quad (1)$$

где  $q \geq 3$ ,  $t$  – произвольное действительное число.

С гипотезой Римана связаны многие до сих пор нерешенные аддитивные задачи теории чисел. Поэтому исследования связанные с нулями  $L$ -функции Дирихле являются актуальной задачей.

Настоящая работа посвящена определению численного значения постоянного в неравенстве (1). В нем, сначала выводится выражение для  $c$ , через остальные параметры, то есть

$$c = c(t_0) = 2 \left\{ 1 + \left( \gamma_0 + \frac{1}{2t_1} + \frac{1}{12t_1^2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4,1209}{t_1^2}} \right) L_1^{-1} \right\} + \frac{1}{2} \times \\ \times \left\{ 1 + \left( \gamma_0 + \frac{1}{2t_2} + \frac{1}{12t_2^2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4,1209}{t_2^2}} \right) L_2^{-1} \right\} \left( 1 + \frac{\ln 2}{\ln t_1} \right)$$

Здесь  $t_1 = t_0 + 3$ ,  $L_1 = \ln(t_0 + 3)$  и  $t_2 = 2t_0 + 3$ ,  $L_2 = \ln(2t_0 + 3)$ ,  $t \geq t_0$ ,  $\gamma_0 = 0,5772\dots$

– постоянная Эйлера.

**Литература**

1. Davenport H. Multiplicative number theory. Second edit. New York, Heidelberg, Berlin, 1997. 178 p.

## О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЧИСЕЛ СУММОЙ ПРОСТОГО И КВАДРАТА ПРОСТОГО ЧИСЛА

Аллаков И.<sup>1</sup>, Бахридинова Ю.

ТерГУ, Термез, Узбекистан; <sup>1</sup>i.allakov@mail.ru

Пусть  $X$  – достаточно большое вещественное число,  $M$ - множество натуральных чисел  $n < X$  непредставимых в виде  $n = p_1 + p_2^k$ , где  $p_1, p_2$  – простые числа. В.А. Плаксин [1], рассмотрев  $E_k(x) = \text{card}M$ , доказал, что  $E^k(X) < X^{\gamma_k}$ , где  $0 < \gamma_k < 1$  всегда и  $\gamma_k < 1 - (137k^3 \ln k)^{-1}$  при достаточно большом. В [2] И. Аллаковым этот результат был несколько уточнен.

В настоящей работе рассматривается эта задача при  $k = 2$  и доказано, что для достаточно больших  $X$  справедлива оценка  $E_2(X) < X^\gamma$  где  $0 < \gamma < 0,99998$ .

Доказательство теоремы основывается на идеи работ [1,2] и на численные результаты работы [3]. Пусть  $\varepsilon$  – произвольное малое положительное число,  $X > X_\varepsilon$ ,  $X_\varepsilon$  – достаточно большое положительное число, будем считать, что  $X = p^2$ ,  $Q = X^{17\varepsilon}$ ,  $\tau = XQ^{-1}$ ,  $\Delta = \tau^{-1}$ ,  $Z = Q^{0,3}$ ,  $L = \ln X$ ,  $l = \ln \ln x$ ;  $c_1, c_2, \dots$  – эффективно вычислимые положительные постоянные, в худшем случае зависящие от  $\varepsilon$  и  $X$ .

Далее, пусть

$$R(n) = 2 \sum_{n=p_1+p_2^2, x/3 < p_1, p_2^2 x} \ln p_1 \ln p_2 \quad \text{и} \quad S_k(\alpha) = \sum_{x/3 < p_2^2 < x} \ln p e(\alpha p^k), \quad k = 1, 2.$$

Тогда

$$R(n) = \int_{\Delta}^{1-\Delta} S_1(\alpha) S_2(\alpha) e(\alpha n) d\alpha.$$

Далее,  $R(n)$  – представляется в виде суммы двух интегралов:  $R(n) = R_1(n) + R_2(n)$ . Для оценки интеграла  $R_2(n)$  используется тождество Парсеваля и метод тригонометрических сумм И.М. Виноградова. Интеграл  $R_1(n)$  исследуются по схеме работы [2], при этом используются численные результаты из работы [3].

### Литература

1. Плаксин В.А. Об одном вопросе Хуа-Ло-Кена // Мат. заметки. 1990. № 3(47). С. 78–90.
2. Аллаков И. Об одной бинарной аддитивной задаче с простыми числами из арифметической прогрессии // Докл. АН РУз. 1991. № 7. С. 9–11.
3. Аллаков И. Об исключительном множестве в бинарной проблеме Гольдбаха. М.: 1981, 76 с. Деп. с решением редколлегии Узб. матем. журнала. Деп. в ВИНТИ 30.10.81. № 5166-81.

**КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С  
КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ**

**Апаков Ю.П.**

*НамИСИ, Наманган, Узбекистан; yusipjon.apakov@gmail.com*

В области  $D = \{(x, y) : 0 < x < p, 0 < y < l\}$ , где  $p > 0, l > 0$  – постоянные числа, рассмотрим уравнение третьего порядка с кратными характеристиками, содержащее вторую производную по времени

$$L(u) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g(x, y). \quad (1)$$

**Задача A.** Найти регулярное в области  $D$  в решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, l) = 0,$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(p, y) = 0, \quad u_x(p, y) = 0,$$

где  $g(x, y) \in L_2(D)$ ,  $g(x, 0) = g(x, l) = 0$ .

Отметим, что уравнение (1) является сопряженным к уравнению

$$u_{xxx} + u_{yy} = F(x, y),$$

которое является линейной частью (при  $\nu = 0$ ) так называемого ВТ-уравнения, (вязкое трансзвуковое уравнение)

$$u_{xxx} + u_{yy} - \frac{\nu}{y} u_y = u_x u_{xx}.$$

При  $\nu = 1$  ВТ-уравнение описывает осесимметричный поток, а при  $\nu = 0$  плоско-параллельный поток [1–2].

**Теорема.** Для решения задачи A имеет место оценка

$$\|u\|_{L_2(D)} \leq C \|g\|_{L_2(D)},$$

где  $C$  – постоянное число, зависящее только от размерности области.

**Литература**

1. Рыжов О.С. Асимптотическая картина обтекания тел вращения звуковым потоком вязкого и теплопроводящего газа // Прикладная математика и механика. 1965. Т. 2, № 6. С. 1004–1014.
2. Диесперов В.Н. О функции Грина линеаризованного вязкого трансзвукового уравнения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1972. Т. 12, № 5. С. 1265–1279.

## **ПОЛЯРИЗАЦИОННАЯ ПОПРАВКА К МЕЖФАЗНОЙ ЭНЕРГИИ НА ГРАНИЦЕ МЕТАЛЛ-ОРГАНИЧЕСКАЯ ЖИДКОСТЬ**

**Апеков А.М.**

*ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; aslkbsu@yandex.ru*

Разработка новых высокотехнологичных приборов требует глубокого понимания физических явлений, лежащих в основе их функционирования. Особенно большую роль при функционировании этих приборов играют явления, происходящие на границе металла с органическими соединениями. Граница металл-органика в твердом состоянии исследовалась как теоретически, так и экспериментально. Не малое влияние на межфазные характеристики вносит поляризация на межфазной границе. Влияние поляризации в металлоорганических структурах исследовалось в работах [1, 2]. Однако, мало исследованы свойства границы металл-органическая жидкость. Поправки на поляризацию ионов переходного слоя к поверхностной энергии на границе металл-вакуум была определена в [3].

В данной работе получена поправка к межфазной энергии граней кристаллов на границе с неполярной органической жидкостью на поляризацию металлических ионов переходного слоя [4] и поляризацию жидкости в поле полубесконечного металла в рамках электронно-статистического метода. Показана зависимость поправки на поляризацию от диэлектрической проницаемости жидкости.

### **Литература**

1. *Tsiper E.V. and Soos Z.G.* Charge redistribution and polarization energy of organic molecular crystals // Phys. Rev. B. 2001. Vol. 64. Iss. 19.
2. *Di Sante D., Stroppa A., Jain P., and Picozzi S.* Tuning the Ferroelectric Polarization in a Multiferroic Metal-Organic Framework // J. Am. Chem. Soc. 2013. Vol. 135 (48). P. 18126–18130.
3. *Задумкин С.Н., Шебзухова И.Г., Дигилов Р.М.* Физическая химия поверхностных явлений в расплавах. Киев: Наукова думка, 1971. 32 с.
4. *Апеков А.М., Шебзухова И.Г.* Влияние поляризации металлических ионов переходного слоя на границе металл-неполярная органическая жидкость на межфазную энергию // Физико-химические аспекты изучения кластеров,nanoструктур и наноматериалов. Тверь: Твер. госуд. ун-т, 2017. Вып. 9. С. 27–31.

**РЕАЛИЗАЦИЯ УСЛОВИЙ ОТРАЖЕНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ  
УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ НА  
НЕСТРУКТУРИРОВАННОЙ СЕТКЕ**

**Аристова Е.Н., Астафуров Г.О.<sup>1</sup>**

*ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия; <sup>1</sup>astafurov.gleb@yandex.ru*

В задачах радиационной газовой динамики важную роль играет перенос излучения. При решении трехмерной задачи наиболее удобным является использование сеток из тетраэдров. В работе построена интерполяционно-характеристическая схема с использованием барицентрических координат в каждой отдельной ячейке. Схема обладает порядком аппроксимации не ниже второго и свойством консервативности. Подлежащие расчету величины задаются в вершинах, на ребрах и в гранях тетраэдров. На основе теории графов реализован оптимальный алгоритм обхода ячеек. Построены кубатурные формулы для интегрирования по углам, аналогичные полностью симметричным кубатурным формулам Карлсона, и включающие в себя ряд угловых направлений в координатных плоскостях. Данные формулы строятся исходя из инвариантности относительно группы симметрий правильного октаэдра, правильности и точности на многочленах максимальной возможной степени.

В рамках предложенного подхода в работе реализуются условия зеркально-диффузного отражения на границах расчетной области. Трудность вызывает использование дискретного набора направлений. Предлагаемые методики пригодны для решения задачи обтекания спускаемого космического и задач реакторной физики. Приводятся результаты расчетов тестовых задач, демонстрирующих качество предлагаемого алгоритма.

---

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 18-01-00857.

**БИКОМПАКТНЫЕ СХЕМЫ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА  
АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ НОЛО АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ  
УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА**

**Аристова Е.Н.<sup>1</sup>, Караваева Н.И.<sup>2</sup>**

*ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия;*

<sup>1</sup>*aristovaen@mail.ru;* <sup>2</sup>*natali95k@mail.ru*

При рассмотрении задач переноса неполяризованного излучения или частиц инструментом численного анализа является решение уравнения переноса. Одной из проблем при этом является медленная сходимость итераций по членам рассеяния и деления. Для ускорения сходимости итераций эффективными являются так называемые HOLO алгоритмы, в которых помимо самого уравнения переноса высокой размерности (HO – high order) дополнительно решаются уравнения более низкой размерности (LO – low order). Первым и, возможно, самым успешным HOLO алгоритмом решения уравнения переноса является метод квазидиффузии В.Я. Гольдина.

В работе рассмотрено построение бикомпактных схем для нестационарных уравнений квазидиффузии, аналогичное построению схем для уравнения переноса. Построение схемы высокого порядка аппроксимации на минимальном пространственном шаблоне возможно при расширении списка искомых переменных и включении в него помимо узловых значений интегральных средних по ячейке. Полученная система дифференциально-разностных уравнений интегрируется по времени  $L$ -устойчивым диагонально-неявным методом Рунге–Кутты третьего порядка аппроксимации. На тестовых примерах показано, что порядки сходимости на гладких решениях составляют четвертый по пространству и третий по времени. Показано, что построенная разностная схемы для уравнений квазидиффузии является кинетически-согласованной с бикомпактной схемой для уравнения переноса.

---

Работы выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 18-01-00857.

## Об одной нелокальной краевой задаче для одного линейного уравнения

Артиков М.

ТерГУ, Термез, Узбекистан; mirsaburov@mail.ru

В настоящей работе в области  $D = \{0 < x < 1, 0 < y < 1\}$  рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^{2n+1}u}{\partial x^{2n+1}} + (-1)^n \frac{\partial u}{\partial y} + \sum_{i=0}^{2n} a_i(y) \frac{\partial^i u}{\partial x^i} = f(x, y), \quad (1)$$

где  $a_i(y)$ ,  $f(x, y)$  – заданные функции.

**Задача.** Найти решение уравнения (1) из класса  $u(x, y) \in C^{n-1,0}(\overline{D}) \cap C^{n,0}(D \cup \{x = 0, 0 \leq y \leq 1\}) \cap C^{2n+1,1}(D)$ , удовлетворяющее краевым условиям:

$$\left. \frac{\partial^i u}{\partial x^i} \right|_{x=j} = h_{i,j}(y), \quad i = \overline{0, n-1}, \quad j = 0, 1, \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \right|_{x=0} = h_{n,0}(y), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (3)$$

$$u(x, 0) + \alpha(x)u(x, 1) = E(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (4)$$

где  $h_{i,j}(y)$  ( $i = \overline{0, n-1}$ ;  $j = 0, 1$ ),  $h_{n,0}(y)$ ,  $E(x)$ ,  $\alpha(x)$  – заданные непрерывные функции.

**Теорема 1.** Если  $|\alpha(x)| \leq 1$ ,  $a_i(y) \in C(i = \overline{0, 2n})$ ,  $(-1)^{n+k}a_{2k}(y) \geq 0$ ,  $(-1)^{n+k}a_{2k+1}(y) \geq 0$  ( $k = \overline{0, n}$ ;  $0 \leq y \leq 1$ ), то задача (1)–(4) не может иметь более одного решения.

Единственность решения задачи (теорема 1) доказывается методом интегралов энергии.

**Теорема 2.** Если наряду с условиями теоремы 1 выполнены условия:  $h_{i,j}(y)$  ( $i = \overline{0, n-1}$ ;  $j = 0, 1$ ),  $h_{n,0}(y)$ ,  $a_i(y)$  ( $i = \overline{0, 2n-1}$ )  $\in C^1[0, 1]$ ,  $\alpha(x)$ ,  $E(x) \in C^{2n+1}[0, 1]$ ,  $f(x, 0) \equiv 0$  ( $0 \leq x \leq 1$ ),  $f(x, y) \in C^{0,1}(\overline{D})$ , то решение задачи (1)–(4) существует.

Существование решения задачи (теорема 2) доказывается получением интегро-дифференциального уравнения, которое решается методом последовательных приближений. Отметим, что задача (1)–(4) в случае  $\alpha(x) \equiv 0$  исследована в работе [1].

### Литература

1. Джусураев Т.Д., Абдиназаров С. // Узбекский математический журнал. 1991. № 1. С. 21–30.

**НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО  
ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ,  
ОБОВЩАЮЩИМИ УСЛОВИЯ САМАРСКОГО**

**Артюшин А.Н.**

*ООО «Дата Ист», Новосибирск, Россия; alexsp3@yandex.ru*

Пусть  $\Omega \subset R^n$  – ограниченная область с гладкой границей  $\Gamma = \partial\Omega$ . В цилиндре  $Q = (0, T) \times \Omega$  с боковой поверхностью  $S = (0, T) \times \Gamma$  рассматривается смешанная задача

$$u_{tt}(t, x) - \Delta u(t, x) = f(t, x), \quad (t, x) \in Q, \quad (1)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$u_t(0, x) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

$$u_\nu(t, x) = \int\limits_{\Gamma} K(t, x, y)u(t, y) dy + \varphi(t, x), \quad (t, x) \in S, \quad (4)$$

где  $u_\nu$  — производная по внешней нормали. Отметим, что для гладких функций  $K(t, x, y)$  разрешимость данной задачи может быть получена стандартными методами.

В докладе рассматривается один простой метод сведения данной задачи к интегральному уравнению Вольтерра второго рода. Ядро этого уравнения является решением некоторой вспомогательной задачи. Анализ этого решения позволяет рассмотреть задачу (1)-(2) и для негладких  $K(t, x, y)$ .

Вместо краевого условия (2) мы также рассматриваем условие

$$\lambda u(t, x) = \int\limits_{\Gamma} K(t, x, y)u_\nu(t, y) dy + \varphi(t, x), \quad (t, x) \in S.$$

В этом случае задача становится значительно сложнее. Предлагаемый подход приводит к интегро-дифференциальному уравнению вольтерровского типа, не разрешенному относительно производной. Предполагаем, что функция  $K(t, x, y)$  гладкая и  $K(t, x, y) = K(t, y, x)$ . В этом случае удается доказать локальную разрешимость такого уравнения, если только  $\lambda$  достаточно велико и выполнены некоторые условия соглашения.

## МЕТОД МАКСИМАЛЬНЫХ МОНОТОННЫХ ОПЕРАТОРОВ В ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Асхабов С.Н.

ЧГПУ; ЧГУ, Грозный, Россия; askhabov@yandex.ru

Метод монотонных (по Браудеру – Минти) операторов, хорошо известный применительно к нелинейным уравнениям Гаммерштейна, был впервые применен к нелинейным сингулярным интегральным уравнениям (НСИУ) частного вида с ядром Гильберта Н. Amann'ом (1968 г.) в случае пространства  $L_2(-\pi, \pi)$ . Затем (подробнее см. [1, с. 122]) этот метод был применен к различным классам НСИУ с ядром Коши в безвесовых и весовых *вещественных* пространствах Лебега  $L_p(\Gamma)$ ,  $p > 1$ , в работах Г.М. Магомедова (1977 г.), А.И. Гусейнова и Х.Ш. Мухтарова (1979 г.), автора (1979 г.) и L.V. Wolfersdorf'a (1983 г.), причем в [2] также использован метод *максимальных* монотонных операторов применительно к нелинейным сингулярным интегро-дифференциальным уравнениям. Случай комплексных пространств Лебега был рассмотрен в [3] и [4].

В докладе методом *максимальных* монотонных операторов будут доказаны теоремы существования и единственности решения (часть из них представлена в работе [5]) для различных классов нелинейных сингулярных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений с ядрами Гильберта и Коши, а также приведены примеры, иллюстрирующие полученные результаты.

### Литература

1. Асхабов С.Н. Нелинейные сингулярные интегральные уравнения в пространствах Лебега. Грозный: ЧГУ, 2013. 136 с.
2. Wolfersdorf L. V. Monotonicity methods for nonlinear singular integral and integrodifferential equations // Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik. 1983. Vol. 63, № 6. P. 249–259.
3. Askhabov S.N. Singular integral equations with monotone nonlinearity in complex lebesgue spaces // Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendungen. 1992. Vol. 11, № 1. P. 77–84.
4. Askhabov S.N. Nonlinear singular integral equations in lebesgue spaces // Journal of Mathematical Sciences. 2011. Vol. 172, № 2. P. 155–171.
5. Асхабов С.Н. Сингулярные интегро-дифференциальные уравнения с ядром Гильберта и монотонной нелинейностью // Владикавказский математический журнал. 2017. Т. 19, № 3. С. 11–20.

**ЗАДАЧА ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО  
НАГРУЖЕННОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ**

**Аттаев А.Х.**

*ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; attaev.anatoly@yandex.ru*

В настоящем докладе будет рассматриваться одномерное нагруженное уравнение вида

$$u_{xx} - u_{yy} = \lambda u \left( \frac{\eta}{2}, \frac{\eta}{2} \right),$$

где  $\eta = x + y$ ,  $\lambda = \text{const}$ , описывающее, например, колебания струны, концами которой служат точки  $x = 0$  и  $x = l$ . Предполагается, что в начальный момент времени  $t = 0$  для точек струны заданы произвольное смещение  $\varphi(x)$  и произвольная скорость  $\psi(x)$ . Будет изложено исследование задачи отыскания на концах  $x = 0$  и  $x = l$  таких граничных управлений  $\mu(t)$  и  $\nu(t)$ , которые за минимальный промежуток времени приводят в качестве смещения и скорости к двум наперед заданным функциям  $\varphi_1(x)$  и  $\psi_1(x)$  и которые удовлетворяют условиям согласования с функциями  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  при  $t = 0$ , и с функциями  $\varphi_1(x)$  и  $\psi_1(x)$  при  $t = l$ . Получены следующие результаты:

- установлены необходимые и достаточные условия на функции  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$ ,  $\varphi_1(x)$  и  $\psi_1(x)$ , обеспечивающие существование управлений  $\mu(t)$  и  $\nu(t)$ ;
- при выполнении этих условий найден явный аналитический вид искомых управлений;
- установлено минимальное время, в течение которого это управление осуществимо.

**ЛОКАЛЬНО-ОДНОМЕРНАЯ СХЕМА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО  
УРАВНЕНИЯ ОБЩЕГО ВИДА, ОПИСЫВАЮЩЕГО  
МИКРОФИЗИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В КОНВЕКТИВНЫХ ОБЛАКАХ**

**Ашабоков Б.А.<sup>1</sup>, Тайсаев И.Д.<sup>2</sup>, Шхануков-Лафишев М.Х.<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>ИИПРУ КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; <sup>2</sup>КБГУ, Нальчик, Россия;

<sup>3</sup>ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия;

В цилиндре  $Q_T = G \times [0 < t \leq T]$ , основанием которого служит прямоугольный параллелепипед  $G = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_p) : 0 < x_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, p\}$  с границей  $\Gamma$ , рассматривается задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, m, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (1)$$

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad u(x, m, 0) = u_0(x, m), \quad (2)$$

$$\begin{aligned} Lu = \sum_{\alpha=1}^p L_\alpha u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( k_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) + r_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - \\ - q_\alpha(x, t) u - \frac{1}{p} \int_0^{m_1} \beta(m, m') u(x, m', t) dm'. \end{aligned}$$

Для решения задачи (1)–(2) запишем локально-одномерную схему [1]

$$\frac{y^{j+\frac{\alpha}{p}} - y^{j-\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} = \Lambda_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}} + \varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}} = \varkappa_\alpha (a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} + b_\alpha^+ a_\alpha^{(+1_\alpha)} y_{x_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} + b_\alpha^- a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} - d_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}} - \\ - \frac{1}{p} \sum_{i_m=0}^{N_m} \beta(m, m_{i_m}) y^{j+\frac{\alpha}{p}}(x, m_{i_m}, t) \hbar_m, \\ y^{j+\frac{\alpha}{p}} \Big|_{\gamma_{h,\alpha}} = 0, \quad y(x, m, 0) = u_0(x, m), \quad \alpha = 1, 2, \dots, p. \end{aligned} \quad (4)$$

**Теорема.** Пусть задача (1)–(2) имеет единственное непрерывное в  $\overline{Q}_T$  решение  $u(x, m, t)$  и существуют непрерывные в  $\overline{Q}_T$  производные

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x_\alpha^2 \partial x_\beta^2}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^2 \partial t}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha^2}, \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq p,$$

тогда локально-одномерная схема (3)–(4) сходится со скоростью  $O(|h|^2 + \tau)$ .

**Литература**

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.

## МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ФОРМИРОВАНИЕМ МИКРОСТРУКТУРЫ ГРАДОВЫХ ОБЛАКОВ

Ашабоков Б.А.<sup>1</sup>, Шаповалов А.В.<sup>2</sup>, Ташилова А.А.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>ИИПРУ, Нальчик, Россия; ashabokov.boris@mail.ru

<sup>1,2,3</sup>ВГИ, Нальчик, Россия;

Разработка научно-обоснованных методов активных воздействий на конвективные процессы в атмосфере, включая и конвективные облака, требует создания и широкого использования нового класса моделей. Одним из перспективных направлений решения данной проблемы является рассмотрение ее в рамках теории оптимального управления, что требует разработки и использования моделей управления образованием и развитием этих процессов. В этих моделях параметры воздействия (место воздействия, время воздействия, мощность источника) определяются в результате решения задачи оптимального управления для системы уравнений, описывающих трансформацию параметров конвективных процессов во времени и в пространстве.

В данной работе с использованием двумерной модели микрофизических процессов в облаках с заданной термогидродинамикой

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial t} + V_x \frac{\partial f_1}{\partial x} + (V_z - V_1) \frac{\partial f_1}{\partial z} &= \left[ \frac{\partial f_1}{\partial t} \right]_{\kappa} + \left[ \frac{\partial f_1}{\partial t} \right]_a + \left[ \frac{\partial f_1}{\partial t} \right]_{\partial} + \left[ \frac{\partial f_1}{\partial t} \right]_3 + \frac{\partial}{\partial x} K \frac{\partial f_1}{\partial x} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial f_1}{\partial z} + I_1, \\ \frac{\partial f_2}{\partial t} + V_x \frac{\partial f_2}{\partial x} + (V_z - V_2) \frac{\partial f_2}{\partial z} &= \left[ \frac{\partial f_2}{\partial t} \right]_a + \left[ \frac{\partial f_2}{\partial t} \right]_3 + \frac{\partial}{\partial x} K \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial f_2}{\partial z} + I_2 + u, \\ 0 \leq x \leq L_x, 0 \leq z \leq L_z, 0 \leq m < \infty, t > 0, \end{aligned} \quad (1)$$

представлена задача оптимального управления эволюцией ансамбля облачных частиц в мощном конвективном облаке. Начальные и граничные условия для системы уравнений (1) и использованные при ее записи можно найти в работе [1].

Приведены некоторые результаты расчетов управления формированием микроструктуры мощных конвективных облаков. В качестве контрольного значения при проведении расчетов использован функционал

$$F[f_2, u] = \int_0^{L_x} \int_0^{L_z} \int_{m_k}^{\infty} \int_0^T f_2(x, z, m, t) dx dz dm dt,$$

т.е. число образующихся в облаке за время  $T$  крупных ледяных частиц (градин).

### Литература

1. Ашабоков Б.А., Шаповалов А.В. Конвективные облака: численные модели и результаты моделирования в естественных условиях и при активном воздействии. Нальчик: Издательство КБНЦ РАН, 2008. 254 с.

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ  
ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ БЛОЧНОЙ  
СТРУКТУРЫ С НЕРАЗДЕЛЕННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ**

**Ашрафова Е.Р.**

*БГУ; ИСУ, Баку, Азербайджан; ashrafova.yegana@gmail.com*

Рассматривается задача минимизации функционала

$$J(u) = \sum_{k=1}^L \left( \alpha_{1k} \int_0^{l^k} f_0^k(x, t; u) dt + \alpha_{2k} \Phi_k(x^k(0), x^k(l^k)) \right), \quad (1)$$

где  $x^k(t) \in R^{n_k}$ , ( $k = 1, \dots, L$ ) – решения  $L$  независимых подсистем линейных неавтономных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}^k(t) = A^k(t)x^k(t) + B^k(t)u^k(t), \quad t \in [0, l^k], \quad (2)$$

связанных лишь следующими нелокальными краевыми условиями:

$$Gx(0) + Qx(l) = r. \quad (3)$$

Здесь  $A^k(t), B^k(t)$  – известные непрерывные  $n_k$  – мерные соответственно квадратные матричные и векторные функции,  $x^k(t), u^k(t)$  – соответственно фазовая траектория и управление  $k$ -той подсистемы;  $l^k > 0$  – заданы;  $G, Q$  – заданные квадратные матрицы размерности  $n \times n$ ,  $n = \sum_{k=1}^L n_k$ ,  $\text{rang}(G, Q) = n$ ;  $r = (r^1, \dots, r^n)^*$  – заданный  $n$ -мерный вектор.

Получены необходимые условия оптимальности, содержащие формулы для градиента функционала задачи. Проведены численные эксперименты на примере решения тестовых задач.

**Литература**

1. Abdullaev V.M., Aida-Zade K.R. Numerical method of solution to loaded nonlocal boundary value problems for ordinary differential equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2014. Vol. 54, № 7. P. 1096–1109.
2. Aida-zade K.R. Ashrafova Y.R. Solving systems of differential equations of block structure with nonseparated boundary conditions // Journal of Applied and Industrial Mathem. 2015. Vol. 9, № 1. P. 1–10.

## НЕЛОКАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ СЕТЕВОЙ ЗАДАЧИ ШТЕЙНЕРА

Багов М.А., Кудаев В.Ч.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; maratniipma@mail.ru

Сетевая задача Штейнера (СЗШ), являющаяся наиболее общей математической моделью задач синтеза оптимальных распределительных сетей, была представлена в работах [1, 2]:

$$\begin{cases} C = \sum_{ij \in D} f_{ij}(v_{ij}) \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \rightarrow \min, \\ \sum_{ij \in \Gamma_j^+} v_{ij} - \sum_{k \in \Gamma_j^-} v_{jk} = q_j \quad \forall j \in B; \quad \sum_{j \in \Gamma_1^-} v_{1j} = \sum_{j \in B_\Phi} q_j, \\ v_{ij} \geq 0 \quad \forall ij \in D; \quad x_i = a_i, \quad y_i = b_i \quad \forall i \in B_\Phi, \end{cases}$$

где  $B = B_\Phi \cup B_\Pi$ ,  $B_\Phi$  и  $B_\Pi$  – соответственно множество фиксированных узлов и точек Штейнера,  $|B_\Phi| = n$ ,  $|B_\Pi| = n - 2$ ,  $f_{ij}(v_{ij})$  – вогнутая непрерывно возрастающая функция,  $f_{ij}(0) = 0$ ;  $q_j$ ,  $j \in B$  – заданный поток потребляемый в  $j$ -м узле (вершине) сети. СЗШ, как и классическая задача Штейнера [3], является существенно многоэкстремальной и относится к классу NP-полных задач. Вследствие этого в [1, 2] введено определение ранга экстремума сети. Сеть Штейнера Р-оптимальна, если любая ее связная подсеть, включающая Р-достижимые вершины из любой вершины, оптимальна. В докладе представлены алгоритм проектирования сети Штейнера 2-го ранга, основанный на динамической декомпозиции сети на подсети 2-го ранга и их оптимизации и результаты вычислительного эксперимента по синтезу сетей Штейнера.

### Литература

1. Багов М.А., Кудаев В.Ч. Преобразование терминалной сети в сеть Штейнера // Извести КБНЦ РАН. 2015. № 6 (68). С. 31–37.
2. Багов М.А., Кудаев В.Ч. Сетевая задача Штейнера с учетом энергетических затрат // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2016. № 4-1 (16). С. 85–92.
3. Гордеев Э.Н., Тарасцов О.Г. Задача Штейнера. Обзор // Дискретная математика. 1993. Вып. 2, № 5. С. 3–28.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ СПЕКТРОВ ПРЕДФРАКТАЛЬНЫХ ГРАФОВ С  
ЧЕРЕДУЮЩИМИСЯ ПОЛНЫМИ ЗАТРАВКАМИ, СОХРАНЯЮЩИХ  
СМЕЖНОСТЬ СТАРЫХ РЕБЕР**

**Байрамукова З.Х.<sup>1</sup>, Хубиева Д.А.-З.<sup>2</sup>**

*СевКавГГТА, Черкесск, Россия;*

<sup>1</sup>*zuhra\_bayramukova@mail.ru;* <sup>2</sup>*khubieva-diana@mail.ru*

Для задачи определения спектров [1] предфрактальных графов с чередующимися полными затравками, сохраняющих смежность старых ребер в траектории, доказана

**Теорема.** *Характеристический многочлен предфрактального графа с  $k$  последовательно повторяющимися в траектории полными затравками  $K_{n_1}, K_{n_2}, \dots, K_{n_k}$ , смежность старых ребер которого не нарушается, определяется по рекуррентной формуле:*

$$P_{G_l}(\lambda) = (\lambda + 1)^{(n_j - 2) \prod_{i=1}^{j-1} n_i^{\frac{l-j}{k}+1}} \prod_{i=j}^k n_i^{\frac{l-j}{k}} (\lambda - (n_j - 2))^{\prod_{i=1}^{j-1} n_i^{\frac{l-j}{k}+1}} \prod_{i=j}^k n_i^{\frac{l-j}{k}} \times \\ \times P_{G_{l-1}}\left(\frac{(\lambda - (n_j - 2))\lambda - (n_j - 1)}{\lambda - (n_j - 2)}\right), \quad l \equiv j \pmod{k}, \quad j = 1, \dots, k, \quad l = 1, \dots, L.$$

**Литература**

1. Цветкович Д., Дуб М., Захс Х. Спектры графов: теория и применение. Киев: Наукова Думка, 1984. 384 с.

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-07-00231а.

## ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ РАВНОВЗВЕШЕННЫХ И НЕРАВНОВЗВЕШЕННЫХ ПРЕДФРАКТАЛЬНЫХ ДЕРЕВЬЕВ

Байчорова А.Н.<sup>1</sup>, Кочкаров А.М.<sup>2</sup>, Кочкаров Р.А.<sup>3</sup>

<sup>1,2</sup> СевКавГГТА, Черкесск, Россия;

kochkarova-asya@mail.ru; ahmat\_kochkarov@mail.ru;

<sup>3</sup> Финансовый университет, Черкесск, Россия; rasul\_kochkarov@mail.ru

Одно из центральных мест в теории графов [1] занимает вопрос о перечислении неизоморфных графов, в том числе и деревьев, с заданным количеством вершин. Развитие этого вопроса в отношении деревьев опирается на фундаментальные результаты, полученные Кэли и Пойа по перечислению корневых деревьев [2].

**Теорема (Кэли) 1.** Перечисляющий ряд для корневых деревьев имеет вид:

$$T(x) = x \prod_{n=1}^{\infty} (1-x^n)^{-T_n}.$$

**Теорема (Пойа) 2.** Перечисляющий ряд корневых деревьев удовлетворяет функциональному уравнению:

$$T(x) = x \exp \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} T(x^n).$$

### Литература

1. Емеличев В.А. Лекции по теории графов. М. 1990.
2. Кочкаров Р.А. Многозвездные предфрактальные графы с недетерминированными весами. М.: Ленанд, 2017. 432 с.

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-07-00231а.

## Об априорной оценке решения задачи Трикоми для одного уравнения смешанного типа второго порядка

Балкизов Ж.А.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; Giraslan@yandex.ru

Доклад будет посвящен исследованию краевой задачи Трикоми для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа второго порядка вида

$$0 = \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + f(x, y), & y > 0, \\ (-y)^m u_{xx} - u_{yy}, & y < 0, \end{cases}$$

в евклидовой плоскости точек  $x, y$ , где  $u = u(x, y)$  – искомая функция,  $m$  – заданное действительное положительное число,  $f(x, y)$  – заданная функция из класса  $L_2(\Omega)$ ;  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup J$ ;  $\Omega_1 = \{(x, y) : 0 < x < r, 0 < y < h\}$ ,  $\Omega_2 = \left\{(x, y) : \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2} < x < r - (-y)^{(m+2)/2}, -[\frac{m+2}{4}r]^{2/(m+2)} < y < 0\right\}$ ;  $J = \{(x, 0) : 0 < x < r\}$ .

Уравнение (1) совпадает с уравнением Пуассона в области эллиптичности и с уравнением Геллерстедта в области его гиперболичности.

В работе доказана теорема об априорной оценке решения исследуемой задачи, из которой следует единственность регулярного решения задачи, а также существование слабого решения задачи, сопряженной к исследуемой.

Ранее подобные априорные оценки решения задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе были получены в работах [1, 2].

### Литература

1. Балкизов Ж.А., Сокуров А.А. Об априорной оценке решения задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Вестник КРАУНЦ. Серия физико-математические науки. 2016. №4-1(16). С. 15–20.
2. Балкизов Ж.А., Сокуров А.А. Об одном разностном методе решения задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Вестник Ставропольского государственного технического университета. Серия физико-математические науки. 2017. Т. 21, № 2. С. 221–235.

**Об одном обобщении задачи Франкля для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом**

**Бегалиев О., Яхшиев Н.**

*ТерГУ, Термез, Узбекистан; mirsaburov@mail.ru*

Рассмотрим уравнение Геллерстедта с сингулярным коэффициентом

$$(sign y)|y|^m u_{xx} + u_{yy} + (\beta_0/y)u_y = 0, \quad (1)$$

где  $m$  – положительная постоянная,  $\beta_0 \in (-m/2, 1)$ .

На отрезке  $[a, a_1] \in (-1, 1)$  введем линейную функцию  $\gamma(x) = px + q$ , отображающую отрезок  $[a_1, a]$  на отрезок  $[c, a]$  со свойствами  $\gamma(a_1) = c$ ,  $\gamma(a) = a$ ,  $p = (a - c)/(a - a_1)$ ,  $q = a(c - a_1)/(a - a_1)$ .

В работе для уравнения (1) в смешанной области  $D$  [1] исследуется обобщенная задача Франкля.

**Постановка задачи  $F_0$ .** Найти в области  $D \setminus (OP \cup OC)$  регулярное решение  $u(x, y) \in C(\overline{D})$  уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям:

$$u|_{\Gamma} = \psi_1(s), \quad 0 \leq s \leq l,$$

$$u(x, 0) = \omega(x)u(\gamma(x), 0) + \psi_2(x), \quad x \in [a_1, a],$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}|_{AA^1} = 0, \quad u(0, y) - \mu u(0, -ky) = f(y), \quad 0 \leq y \leq y_2,$$

и на линии вырождения имеет место условие сопряжения

$$\lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y \rightarrow +0} y^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad 0 \leq x \leq a_1.$$

Здесь  $\mu$  – положительная постоянная,  $k = (-y_1/y_2) \leq 1$ ,  $\psi_1(s)$ ,  $\psi_2(x)$  заданные функции удовлетворяющие условию Гелдера, причем от точки  $B(-1, 0)$  до точки  $M(x(s), y(s)) \in \Gamma$ ,  $l$  – длина всей дуги кривой. Заданные функции непрерывно дифференцируемы в замыкании множества их определения.

**Теорема.** Задача  $F_0$  при  $\mu > 0$ ,  $\omega(x) > 0$  однозначно разрешима.

Доказательство теоремы проводится методом работы [1].

**Литература**

- Салахутдинов М.С., Мирсабуров М. Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами. Ташкент. Университет, 2005. 224 с.

**СИММЕТРИЙНЫЙ АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ  
ФИЛЬТРАЦИИ С ПОТЕНЦИАЛОМ РИССА**

**Белевцов Н.С.**

УГАТУ, Уфа, Россия; nikitabelevtsov@mail.ru

Рассматривается дробно-дифференциальное обобщение нелинейного закона фильтрации Дарси [1]

$$\mathbf{v} = -\frac{k}{\mu} p^\sigma \nabla (R^\alpha p), \quad \alpha \in (0, 1), \quad p = p(t, x, y), \quad t > 0, \quad (x, y) \in R^2, \quad (1)$$

где

$$R^\alpha p(t, x, y) = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_{R^2} \frac{p(t, \mu, \nu)}{[(x - \mu)^2 + (y - \nu)^2]^{\frac{2-\alpha}{2}}} d\mu d\nu, \quad \gamma(\alpha) = 2^\alpha \pi \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(1 - \frac{\alpha}{2})}$$

– потенциал Рисса. Подстановка (1) в уравнение неразрывности для течения сжимаемой жидкости дает нелинейное дробно-дифференциальное уравнение фильтрации с потенциалом Рисса, которое в безразмерном виде может быть записано как

$$u_t = \nabla (u^\sigma \nabla R^\alpha u), \quad u = u(t, x, y), \quad t > 0, \quad (x, y) \in R^2. \quad (2)$$

В работе [2] предложен конструктивный алгоритм нахождения симметрий для дробно-дифференциальных уравнений с потенциалом Рисса и найдены все симметрии линейного ( $\sigma = 0$ ) уравнения (2). В данной работе решена задача групповой классификации уравнения (2) по параметру  $\sigma$ .

Показано, что уравнение (2) для произвольного  $\sigma$  допускает шестимерную группу точечных преобразований. При  $\sigma = 0$  (линейный случай), группа расширяется до бесконечномерной [2]. В особом случае ( $\sigma = -1$ ) возникает дополнительная бесконечномерная подалгебра.

**Литература**

1. Yamazaki K. Remarks on the method of modulus of continuity and the modified dissipative Porous Media Equation // Journal of Differential Equations. 2011. Т. 4, № 250. Р. 1909–1923.
2. Belevtsov N.S., Lukashchuk S.Yu. Symmetry properties of linear fractional filtration equation with the Riesz potential // Abstracts of International Conference on Mathematical Modelling in Applied Sciences (ICMMAS'2017), Saint Petersburg: SPbPU, 2017. Р. 291–292.

---

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ, государственное задание № 1.3103.2017/4.6.

**Компьютерный расчет функции Грина для  
обыкновенных дифференциальных уравнений третьего  
порядка**

**Беляева И.Н.<sup>1</sup>, Чеканов Н.А.<sup>2</sup>, Красовская Л.В.<sup>3</sup>,  
Чеканова Н.Н.<sup>4</sup>**

<sup>1,2,3</sup>БелГУ, Белгород, Россия; <sup>1</sup>ibelyaeva@bsu.edu.ru; <sup>2</sup>chekanov@bsu.edu.ru;  
<sup>3</sup>krasovskaya@bsu.edu.ru

<sup>4</sup>Университет банковского дела, Харьков, Украина; chekanova76@list.ru

При решении краевых задач полезной величиной является функция Грина, с помощью которой можно, например, 1) найти решение неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения, 2) вычислить собственные значения и функции при решении задачи на собственные значения для данного дифференциального уравнения, 3) представить исходную краевую задачу в виде интегрального уравнения Фредгольма и др. [1, 2, 3, 4]. Однако построение функции Грина является актуальной, но достаточно сложной задачей.

В данной работе представлен разработанный способ символьно-численного построения функции Грина в виде обобщенных степенных рядов [5] для линейных дифференциальных уравнений третьего порядка, которые допускают наличие особых регулярных точек. Приводятся примеры построения функции Грина.

**Литература**

1. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1965. 704 с.
2. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т. 1. М.: Изд-во иностранной литературы, 1953. 346 с.
3. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т. 2. М.: Изд-во иностранной литературы, 1954. 416 с.
4. Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Перевод с английского ОНТИ: Государственное научно-техническое издательство Украины, 1939. 719 с.
5. Беляева И.Н., Чеканов Н.А. Символьно-численное интегрирование линейного дифференциального уравнения третьего порядка в виде обобщенных рядов // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2010614257. 2010.

ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО  
УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА  
С НЕЛОКАЛЬНЫМ ИСТОЧНИКОМ

Бештоков М.Х.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; beshtokov-murat@yandex.ru

В замкнутом цилиндре  $\overline{Q}_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$  рассматривается первая краевая задача для уравнения соболевского типа с нелокальным источником

$$u_t = (ku_x)_x + (\eta u_x)_{xt} + r(x, t)u_x + \int_0^t q(x, t, \tau)u(x, \tau)d\tau + f(x, t), \\ 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (3)$$

где  $0 < c_0 \leq \eta$ ,  $k \leq c_1$ ,  $|\eta_t, k_t, r_t, r, q| \leq c_2$ ,  $c_0, c_1, c_2 - const > 0$ . (4)

Предполагается, что коэффициенты уравнения (1) и граничных условий (2), (3) удовлетворяют необходимым условиям гладкости. Методом энергетических неравенств (см. например [1]) доказана следующая

**Теорема.** *Пусть выполнены условия (4), тогда для решения дифференциальной задачи (1)–(3) справедлива априорная оценка*

$$\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2 + \|u_t\|_{2,Q_t}^2 + \|u_x\|_{2,Q_t}^2 + \|u_{xt}\|_{2,Q_t}^2 \leq \\ \leq M \left( \int_0^t \|f\|_0^2 d\tau + \|u_0(x)\|_0^2 + \|u'_0(x)\|_0^2 \right), \quad (5)$$

где  $M$  – зависит только от входных данных задачи (1)–(3),  $\|u_x\|_{2,Q_t}^2 = \int_0^t \|u_x\|_0^2 d\tau$ .

Из априорной оценки (5) следует единственность решения исходной задачи и непрерывная зависимость решения задачи от входных данных.

**Литература**

1. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 407 с.

**ЛОКАЛЬНО-ОДНОМЕРНАЯ СХЕМА ТРЕТЬЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ  
ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ОБЩЕГО ВИДА С  
НЕЛОКАЛЬНЫМ ИСТОЧНИКОМ**

**Бештокова З.В.<sup>1</sup>, Шхануков-Лафишев М.Х.**

*ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; <sup>1</sup>zarabaeva@yandex.ru*

Рассматривается локально-одномерная схема [1] для уравнения параболического типа общего вида в  $p$ -мерном параллелепипеде. Получена априорная оценка для решения локально-одномерной схемы и доказана её сходимость.

В цилиндре  $Q_T = G \times [0 < t \leq T]$ , основанием которого является прямоугольный параллелепипед  $G = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_p) : 0 < x_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, p\}$  с границей  $\Gamma$ , рассматривается задача

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= L_\alpha u + f(x, t), \\ \begin{cases} k_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} &= \beta_{-\alpha} u - \mu_{-\alpha}(x, t), \quad x_\alpha = 0, \\ -k_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} &= \beta_{+\alpha} u - \mu_{+\alpha}(x, t), \quad x_\alpha = l_\alpha, \end{cases} \\ u(x, 0) &= u_0(x), \end{aligned}$$

где  $0 < c_0 \leq k_\alpha(x, t) \leq c_1$ ,  $|r_\alpha(x, t)|, |q_\alpha(x, t)|, |\beta_{\pm\alpha}(x, t)| \leq c_2$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, p$ ,

$$L_\alpha u = \sum_{\alpha=1}^p L_\alpha u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( k_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) + r_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - q_\alpha(x, t) u - \int_0^{l_\alpha} u dx_\alpha.$$

Для решения соответствующей разностной задачи получена оценка

$$\begin{aligned} \|y^{j+1}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 &+ \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \|y_{\bar{x}_\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 \leq \\ &\leq M(t) \left[ \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \|\varphi^{j'+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \|y^0\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} (\mu_{-\alpha}(t_{j'}) + \mu_{+\alpha}(t_{j'})) H/\hbar_\alpha \right], \end{aligned}$$

откуда следует сходимость схемы со скоростью  $O(|h|^2 + \tau)$ ,  $|h|^2 = \sum_{\alpha=1}^p h_\alpha^2$ .

**Литература**

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. М: Наука, 1983. 616 с.

## О ВЛИЯНИИ ПАРАМЕТРОВ НА КОРРЕКТНОСТЬ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

Бжеумихова О.И.<sup>1</sup>, Кожанов А.И.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> КБГУ, Нальчик, Россия; bzhoksana@gmail.com

<sup>2</sup> ИМ СО РАН, Новосибирск, Россия; kozhanov@math.nsc.ru

Уравнения с отклоняющимся аргументом в последние годы привлекают все больше внимания. Подобный интерес можно объяснить с одной стороны теоретической новизной данных исследований, с другой – практической значимостью получаемых результатов [1–3].

Настоящая работа посвящена исследованию влияния параметров на корректность краевой задачи для эллиптического уравнения с инволютивным отклонением аргумента.

Рассмотрим уравнение

$$\Delta u(x, t) + \lambda u(x, t) + \mu u(-x, t) = g(x, t) \quad (1)$$

в прямоугольной области  $D = \{(x, t) : -x_0 < x < x_0, 0 < t < T < +\infty\}$ , где  $\lambda, \mu, x_0, T \in R$ ,  $x_0, T > 0$ ,  $g(x, t)$  – вещественная функция.

Для уравнения (1) в области  $D$  исследована

**Задача.** Найти решение  $u(x, t)$  уравнения (1) в  $D$  из класса  $u(x, t) \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ , удовлетворяющее условиям

$$u(-x_0, t) = \varphi_1(t), \quad u(x_0, t) = \varphi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$u(x, 0) = \varphi_3(x), \quad u(x, T) = \varphi_4(x), \quad -x_0 \leq x \leq x_0,$$

где  $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(x), \varphi_4(x)$  – заданные, достаточно гладкие функции.

Для данной задачи установлен критерий однозначной разрешимости, доказаны теоремы существования и не существования решений.

### Литература

1. Курц В.В., Ануфриев И.Е. Модель автомобильного трафика с запаздывающим аргументом — исследование устойчивости на кольце // Матем. моделирование. 2017. Т. 29, №4. С. 88–100.
2. Samoilenko A.M., Serheeva L.M. Construction of Global Solutions of Partial Differential Equations with Deviating Arguments in the Time Variable // Journal of Mathematical Sciences. 2016. Vol. 212, Issue 4. P. 426–441.
3. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Nonlinear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients: Exact methods and new solutions // Applied Mathematics Letters. 2014. Vol. 37. P. 43–48.

## О РАЗРЕШИМОСТИ ЯДЕР ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Богатырева Ф.Т.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; fatima\_bogatyreva@bk.ru

Известно, что размерность ядра линейных дифференциальных операторов (с производными целого и дробного порядка), как правило, связана с порядком старшей производной: для оператора порядка  $\alpha$ , где  $m - 1 < \alpha \leq m$ , размерность равна  $m$ . В данной работе показано, что в случае операторов Джрбашяна – Нерсесяна это не всегда имеет место.

Рассмотрим оператор

$$Lu(x) \equiv D_{0x}^{\{\alpha, \beta\}} u - \lambda D_{0x}^{\{\gamma, \delta\}} u, \quad 0 < x < 1, \quad (1)$$

$D_{0x}^{\{\alpha, \beta\}}, D_{0x}^{\{\gamma, \delta\}}$  – операторы дробного дифференцирования Джрбашяна – Нерсесяна, ассоциированные с упорядоченными парами  $\{\alpha, \beta\}$  и  $\{\gamma, \delta\}$  порядков  $\mu = \alpha + \beta - 1 > 0$ ,  $\nu = \gamma + \delta - 1 > 0$  соответственно,  $\mu > \nu$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Оператор дробного дифференцирования Джрбашяна – Нерсесяна, ассоциированный с последовательностью  $\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n\}$  порядка  $\alpha = \sum_{k=0}^n \gamma_k - 1 > 0$ ,  $\gamma_k \in (0, 1]$ , определяется соотношением [1]

$$D_{0x}^{\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n\}} u(x) = D_{0x}^{\gamma_n - 1} D_{0x}^{\gamma_{n-1}} \dots D_{0x}^{\gamma_1} D_{0x}^{\gamma_0} u(x),$$

$D_{0x}^\gamma$  – производная (интеграл) Римана – Лиувилля [2].

Доказано, что размерность ядра оператора  $L$  зависит от распределения параметров  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  и может быть равной нулю.

### Литература

1. Джрбашян М.М., Нерсесян А.Б. Дробные производные и задачи Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка // Изв. АН АрмССР. Математика. 1968. С. 3–28.
2. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

---

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-01-00462 А.

## **БУТСТРЕП В СТАТИСТИЧЕСКОМ ОБУЧЕНИИ**

**Брыкалова А.А.<sup>1</sup>, Киселева Т.В.<sup>2</sup>**

*СКФУ, Ставрополь, Россия;* <sup>1</sup>sannette123@yandex.ru; <sup>2</sup>polet65@mail.ru

Метод бутстрепа – часто применяемый и чрезвычайно популярный статистический инструмент. Его используют для количественного описания неопределенности некоторого параметра при машинном обучении.

В данной работе необходимо было оценить свойства прочности бетона при добавлении присадок  $x$  и  $y$  и найти оптимальное методами статистического обучения. Иными словами, мы хотим минимизировать функцию  $Var(\alpha X + (1 - \alpha)Y)$ . Было доказано, что минимум достигается при

$$\alpha = \frac{\sigma_y^2 - \sigma_{xy}}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\sigma_{xy}}.$$

Здесь  $\sigma_x^2 = Var(X)$ ,  $\sigma_y^2 = Var(Y)$ , а  $\sigma_{xy} = Cov(X, Y)$ . В действительности  $\sigma_x^2$ ,  $\sigma_y^2$  и  $\sigma_{xy}$  неизвестны и мы можем лишь оценить их по прошлым измерениям. В работе нами было сгенерировано 100 пар значений прочности бетона для компонент  $x$  и  $y$ . Эти значения были использованы для оценивания  $\sigma_x^2$ ,  $\sigma_y^2$  и  $\sigma_{xy}$ . Итоговое значение мы получили при оценке параметра  $\alpha$  от 0,546 до 0,643.

### **Литература**

1. Анатольев С.А. Эконометрика для продолжающих. Курс лекций. 2002.
2. Зарядов И.С. Статистический пакет R: теория вероятностей и математическая статистика. М.: Издательство Российского университета дружбы народов, 2010. 141 с.
3. Зиновьев А.Ю. Визуализация многомерных данных. Красноярск: КГТУ, 2000. 168 с.
4. Кендалл М., Стьюарт А. Статистические выводы и связи. М.: Наука, 1973. 899 с.

## О НЕПРЕРЫВНЫХ И РАЗРЫВНЫХ МОДЕЛЯХ НЕЙРОННЫХ ПОЛЕЙ

**Бурлаков Е.О.<sup>1</sup>, Жуковская Т.В.<sup>2</sup>, Жуковский Е.С.<sup>1</sup>, Пучков Н.П.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> ТГУ им. Г.Р. Державина, Тамбов, Россия; eb\_@bk.ru, zukovskys@mail.ru

<sup>2</sup> ТГТУ, Тамбов, Россия; t\_zhukovskaia@mail.ru

В течение последних десятилетий существенно возрос интерес к математическим моделям электрической активности коры головного мозга. Первые подобные модели восходят к работам H.R. Wilson, J.D. Cowan, S. Amari. Дальнейшие исследования в этой области позволили дать математические описания нормального функционирования головного мозга (см. работы H. Sompolinsky, R. Shapley, J.S. Taube, J.P. Bassett, J.M. Fuster, G. Alexander, X-J. Wang), а также различных нарушений его нормальной активности (см. работы S.J. Schiff, F.H. Lopes Da Silva, P. Taylor).

Наиболее известной моделью электрической активности коры головного мозга является, так называемая, модель Amari (см., например, [1]):

$$\partial_t u(t, x) = -\alpha u(t, x) + \int_{\Omega} \omega(x-y) f(u(t, y)) dy, \quad t \geq 0, \quad x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \quad \alpha > 0. \quad (1)$$

Здесь значение  $u(t, x)$  характеризует активность нейрона в позиции  $x$  в момент времени  $t$ ,  $f(u)$  – степень влияния нейрона с активностью  $u$  на другие нейроны, функция  $\omega$  определяет силу связи между нейронами. Исходя из биофизических оснований, входящие в уравнение (1) функции являются непрерывными: функция  $f$  типично имеет сигмоидальную форму,  $\omega$  – форму Гауссовой функции.

Для случая непрерывной функции  $f$  корректная разрешимость модели Amari и ее обобщений была показана в [1]. Использование в таких моделях разрывной функции типа Хевисайда вместо непрерывной функции  $f$  позволяет существенно упростить их численное исследование, а также получить в явном виде многие важные с точки зрения нейробиологии типы решений. «Обоснованием» такой замены обычно служит трактовка функции Хевисайда в качестве предела сигмоидальных функций нарастающей крутизны. Для обобщения уравнения (1), содержащего, в том числе, запаздывание, авторами предложено строгое обоснование возможности такого перехода, использующее теорию включений Вольтерры.

### Литература

1. Burlakov E., Zhukovskiy E., Ponosov A., Wyller J. Existence, uniqueness and continuous dependence on parameters of solutions to neural field equations // Mem. Dif. Eq. Math. Phys. 1977. Vol. 65. C. 35–55.

---

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты № 17-01-00553, № 17-41-680975.

## О ПРИЛОЖЕНИЯХ НАКРЫВАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ В ТЕОРИИ НЕЯВНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Бурлаков Е.О.<sup>1</sup>, Жуковская Т.В.<sup>2</sup>, Жуковский Е.С.<sup>1</sup>, Пучков Н.П.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> ТГУ им. Г.Р. Державина, Тамбов, Россия; eb\_@bk.ru, zukovskys@mail.ru

<sup>2</sup> ТГТУ, Тамбов, Россия; t\_zhukovskaia@mail.ru

Идея использования накрывающих отображений метрических пространств для исследования неявных обыкновенных дифференциальных уравнений (НОДУ) была предложена в [1]. С целью получения условий разрешимости краевых задач для НОДУ в [2] начато изучение векторно накрывающих отображений в произведениях метрических пространств. В настоящей работе продолжены эти исследования, получены утверждение о липшицевых возмущениях регулярных отображений в пространствах с векторнозначными метриками и условия регулярности конкретных отображений. На основе этих результатов исследуются вопросы разрешимости и предлагаются оценки решений краевых задач для НОДУ.

Сформулируем теорему о возмущениях. Пусть заданы: непустые множества  $X, Y; y \in Y$ ; банаховы пространства  $E, M$ , упорядоченные конусами  $E_+ \subset E, M_+ \subset M$ ; векторнозначные метрики  $\mathcal{P}_X : X^2 \rightarrow E_+$ ,  $\mathcal{P}_Y : Y^2 \rightarrow M_+$ ; линейные ограниченные операторы  $K : M \rightarrow E$  и  $Q : E \rightarrow M$  такие, что  $K(M_+) \subset E_+, Q(E_+) \subset M_+$ . Отображение  $F : X \rightarrow Y$  называем  $Q$ -липшицевым, если выполнено  $\mathcal{P}_Y(Fx, Fu) \leq Q\mathcal{P}_X(x, u)$  для любых  $x, u \in X$ ; и  $K$ -регулярным относительно  $y \in Y$ , если для любого  $u \in X$  существует  $x \in X$  такой, что  $Fx = y$  и  $\mathcal{P}_X(x, u) \leq K\mathcal{P}_X(Fx, y)$ .

Обозначим  $\rho(KQ)$  спектральный радиус композиции  $KQ : E \rightarrow E$ ,  $I : E \rightarrow E$  – тождественное отображение.

**Теорема.** Пусть пространство  $X$  полно, отображение  $\Psi : X^2 \rightarrow Y$  по одному аргументу является  $K$ -регулярным относительно  $y \in Y$  и непрерывным, по другому –  $Q$ -липшицевым, и  $\rho(KQ) < 1$ . Тогда для любого  $u \in X$  существует решение  $x \in X$  уравнения  $\Psi(x, x) = y$ , удовлетворяющее неравенству  $\mathcal{P}_X(x, u) \leq (I - KQ)^{-1}K\mathcal{P}_Y(y, Fu)$ .

### Литература

1. Аваков Е.Р., Арутюнов А.В., Жуковский Е.С. Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45, № 5. С. 613–634.
2. Жуковский Е.С., Плужникова Е.А. Накрывающие отображения в произведении метрических пространств и краевые задачи для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49, № 4. С. 439–455.

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ МОЛЕКУЛЫ ФУЛЛЕРЕНА  $C_{60}$   
МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ ГРАФЕНА**

**Бухурова М.М.**

*ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; maretabukhurova@mail.ru*

Изучение адсорбционных свойств графена в настоящее время является актуальной задачей. Достаточно подробно вопросы физикохимии молекулярной адсорбции на графене освещены в обзоре [1]. Взаимодействие молекул фуллерена  $C_{60}$  с однослойным графеном рассматривалось в работах [2–7]. Следует, однако, отметить, что в работах [2–7] представлены лишь численные результаты моделирования; формула для потенциала взаимодействия «фуллерен-графен» в явном аналитическом виде в этих работах не была получена. В работе [8] в аналитическом виде вычислен потенциал взаимодействия молекулы фуллерена  $C_{60}$  с однослойным графеном. Представляет интерес в рамках подхода [8] рассмотреть случай бислойного графена.

С использованием парного потенциала Леннарда – Джонса выведены формулы для потенциала и силы взаимодействия молекулы фуллерена  $C_{60}$  с двумя плоскостями графена (бислой графена). Проведено численное моделирование движения молекулы фуллерена между плоскостями графена. Показано, что молекула фуллерена совершает колебательное движение, характер которого зависит от начальных условий и параметров взаимодействия. Полученные результаты представляют интерес для изучения процесса адсорбции молекул фуллерена в бислойе графена.

**Литература**

1. Kong L, Enders A., Rahman T.S., Dowben P.A. // J. Phys.: Condens. Matter. 2014. Vol. 26. P. 443001.
2. Girifalco L.A., Hodak M., Lee R.S. // Phys. Rev. B. 2000. Vol. 62. P. 13104.
3. Ulbricht H., Moos G., Hertel T. // Phys. Rev. Lett. 2003. Vol. 90. №9. P. 095501.
4. Dappe Y. J., Ortega J., Flores F. // Phys. Rev. B. 2009. Vol. 79. P. 165409.
5. Yu D., Park K., Durstock M., Dai L. // J. Phys. Chem. Lett. 2011. Vol. 2. №10. P. 1113.
6. Svec M., Merino P., Dappe Y. J., et. al. // Phys. Rev. B. 2012. Vol. 86. P. 121407.
7. Laref S., Asaduzzaman A.M., W. Beck, et. al. // Chem. Phys. Lett. 2013. Vol. 582. №4. P. 115.
8. Rekhviashvili S.S., Bukhurova M.M. // Protection of Metals and Physical Chemistry of Surfaces. 2017. Vol. 53. №6. P.569.

**ПОЛНОЕ ОПИСАНИЕ ЛЕБЕГОВСКИХ МНОЖЕСТВ ВЕРХНИХ  
СИГМА-ПОКАЗАТЕЛЕЙ ИЗОБОВА**

**Быков В.В.**

*МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия; vvbbykov@gmail.com*

Зафиксируем числа  $n \geq 2$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  и  $\sigma > 0$ . Определим  $i$ -й верхний сигма-показатель Изобова [1] системы  $\dot{x} = A(t)x$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in \mathbb{R}^+$ , равенством

$$\nabla_{i,\sigma}(A) = \sup_{Q \in \mathcal{E}_\sigma} \lambda_i(A + Q),$$

где  $\lambda_i$  –  $i$ -й показатель Ляпунова, а  $\mathcal{E}_\sigma$  – множество функций  $Q : \mathbb{R}^+ \rightarrow \text{End}\mathbb{R}^n$ , удовлетворяющих условию  $\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \ln |Q(t)|^{1/t} \leq -\sigma$ .

Пусть  $M$  – метрическое пространство. Обозначим через  $\mathcal{C}^n(M)$  совокупность всех непрерывных отображений  $A : \mathbb{R}^+ \times M \rightarrow \text{End}\mathbb{R}^n$ , а через  $\mathcal{U}^n(M)$  – совокупность ограниченных отображений  $A \in \mathcal{C}^n(M)$ , удовлетворяющих условию  $\lim_{\nu \rightarrow \mu} |A(t, \nu) - A(t, \mu)| = 0$ ,  $\mu \in M$ .

Для всякого  $A \in \mathcal{C}^n(M)$  будем обозначать через  $\nabla_{i,\sigma}^A$  функцию из  $M$  в  $\overline{\mathbb{R}} \equiv \mathbb{R} \sqcup \{-\infty, \infty\}$ , ставящую всякому  $\mu \in M$  в соответствие  $i$ -й верхний сигма-показатель Изобова системы  $\dot{x} = A(t, \mu)x$ .

Напомним, что для всякого  $r \in \mathbb{R}$  множества Лебега  $[f > r]$ ,  $[f \geq r]$  и  $[f = r]$  функции  $f : M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  – это прообразы промежутков  $(r, +\infty]$ ,  $[r, +\infty]$  и точки  $\{r\}$  соответственно [2, §37.1]. Через  $G_\delta(M)$ ,  $G_{\delta\sigma}(M)$  и  $F_{\sigma\delta}(M)$  будем обозначать, соответственно, совокупности подмножеств  $M$  типа  $G_\delta$ ,  $G_{\delta\sigma}$  и  $F_{\sigma\delta}$ .

**Теорема.** Пусть заданы метрическое пространство  $M$  и  $r \in \mathbb{R}$ . Тогда справедливы следующие равенства:

- 1)  $\{[\nabla_{i,\sigma}^A \geq r] : A \in \mathcal{C}^n(M)\} = \{[\nabla_{i,\sigma}^A \geq r] : A \in \mathcal{U}^n(M)\} = G_\delta(M);$
- 2)  $\{[\nabla_{i,\sigma}^A > r] : A \in \mathcal{C}^n(M)\} = \{[\nabla_{i,\sigma}^A > r] : A \in \mathcal{U}^n(M)\} = G_{\delta\sigma}(M);$
- 3)  $\{[\nabla_{i,\sigma}^A = r] : A \in \mathcal{C}^n(M)\} = \{[\nabla_{i,\sigma}^A = r] : A \in \mathcal{U}^n(M)\} = F_{\sigma\delta}(M).$

**Следствие.** Для всякого  $A \in \mathcal{C}^n(M)$  функция  $\nabla_{i,\sigma}^A$  принадлежит второму классу Бэра.

**Литература**

1. Изобов Н.А. О старшем показателе линейной системы с экспоненциальными возмущениями // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5, № 7. С. 1186–1192.
2. Хаусдорф Ф. Теория множеств. М.-Л.: ОНТИ, 1937. 304 с.

**СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВОСЬМОГО ПОРЯДКА С ЧЕТЫРЬМЯ ДВУКРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ**

**Вагабов А.И, Абдусаламов Х.А.**

*ДГУ, Махачкала, Россия; algebra-dgu@mail.ru*

Краевые задачи в случае кратных корней их характеристических уравнений нашли отражение в работах [1, 2]. В этой связи мы рассматриваем краевую задачу для дифференциального пучка:

$$\left(\frac{d^8}{dx^8} - \lambda^8\right)y \equiv \left(\frac{d^2}{dx^2} - i\lambda^2\right)^2 \left(\frac{d^2}{dx^2} + i\lambda^2\right)^2 y, \quad 0 < x < 1 \quad (1)$$

с двукратными характеристическими корнями  $\pm\sqrt{i}$ ,  $\pm\sqrt{-i}$  при краевых условиях

$$\frac{d^k y(0)}{dx^k} = 0, \quad k = \overline{0, 6}, \quad y(1) = 0, \quad (2)$$

некорректных с точки зрения классических задач.

Устанавливается

**Теорема.** Для любой восмикратно непрерывно дифференцируемой на  $(0, 1)$  функции  $f(x)$ , равной нулю на концах со всеми производными, справедлива формула разложения в обобщенный ряд Фурье по собственным элементам задачи (1)–(2).

**Литература**

1. Вагабов А.И. Об условиях кратной разложимости функций по корневым элементам обыкновенных дифференциальных операторов // Доклады РАН. 2012. Т. 48, № 6. С. 1067–1079.
2. Вагабов А.И. Одна спектральная задача для дифференциального пучка четвертого порядка с четырехкратной характеристикой и краевыми условиями распадающегося типа // Изв. вузов СКНЦ. Естественные науки. 2015. № 1. С. 5–8.

**О РЕГУЛЯРНОСТИ ПРОСТЕЙШИХ ТИПОВ ПУЧКОВ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С КРАТНЫМИ  
ХАРАКТЕРИСТИКАМИ**

Вагабов А.И.<sup>1</sup>, Ибрагимов М.Г.<sup>2</sup>

*ДГУ, Махачкала, Россия; <sup>1</sup>algebra-dgu@mail.ru; <sup>2</sup>murad.ibragimov72@mail.ru*

Изучена спектральная задача для дифференциального пучка с параметром:

$$l(y) \equiv \left[ \left( \frac{d}{dx} - \lambda \right) \left( \frac{d^2}{dx^2} + \lambda^2 \right) \right]^{(5)} y(x), \quad 0 < x < 1, \quad (1)$$

при краевых условиях

$$\frac{d^{s-1}y(0)}{dx^{s-1}} = 0, \quad s = \overline{1, 14}, \quad y(1) = 0. \quad (2)$$

Используя фундаментальную систему решений уравнения  $l(y) = 0$ , строится функция Грина задачи (1)–(2) –  $G(x, \xi, \lambda)$ . Установлена

**Теорема.** Для любой пятнадцатикратно непрерывно дифференцируемой на  $[0, 1]$  функции  $f(x)$ , равной нулю на концах 0, 1, справедлива формула разложения по корневым функциям задачи (1)–(2):

$$\lim_{\substack{l \rightarrow \infty \\ 0 < x \leq l}} \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{C_l} \frac{d\lambda}{\lambda} \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) \frac{d^{14}f(\xi)}{d\xi^{14}} d\xi = f(x),$$

где  $C_l$  – последовательность замкнутых, расширяющихся контуров в  $\lambda$ -плоскости, проходящая вне  $\delta$ -окрестности собственных значений задачи.

**Литература**

1. Вагабов А.И.  $n$ -кратная формула разложения в ряды Фурье по корневым элементам дифференциального пучка с  $n$ -кратной характеристикой // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52, № 2. С. 555–560.

**АСИМПТОТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ:  
КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ, ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ,  
ПРИЛОЖЕНИЯ**

**Вельмисов П.А.<sup>1</sup>, Тамарова Ю.А.<sup>2</sup>, Семенова Е.П.<sup>3</sup>**

УлГТУ, Ульяновск, Россия; <sup>1</sup>velmisov@ulstu.ru; <sup>2</sup>kazakovaua@mail.ru;

<sup>3</sup>farbless@gmail.com

Предложены асимптотические разложения для потенциала скорости, на основе которых выводятся асимптотические уравнения газовой динамики для безвихревых изэнтропических течений газа. Приведем эти уравнения для первого приближения потенциала скорости  $\varphi(x, y, z, t)$ .

Классическое уравнение линейной теории, которое применяется для описания как дозвуковых, так и сверхзвуковых течений, имеет вид

$$\varphi_{tt} + 2V\varphi_{xt} + V^2\varphi_{xx} = a^2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz}). \quad (1)$$

Здесь и далее индексы снизу обозначают частные производные,  $V$ ,  $a$  – скорость газа и скорость звука в однородном потоке.

Нелинейное уравнение, описывающее трансзвуковые течения газа:

$$2\varphi_{xt} + (\gamma + 1)\varphi_x\varphi_{xx} + 2\psi_y\varphi_{xy} + 2\psi_z\varphi_{xz} + \frac{\gamma - 1}{2}(2\psi_t + \psi_y^2 + \psi_z^2)\varphi_{xx} - \varphi_{yy} - \varphi_{zz} = -\psi_{tt} - 2\psi_y\psi_{yt} - 2\psi_z\psi_{zt} - \psi_y^2\psi_{yy} - \psi_z^2\psi_{zz} - 2\psi_y\psi_z\psi_{yz}. \quad (2)$$

Функция  $\psi(y, z, t)$  удовлетворяет уравнению Лапласа  $\psi_{yy} + \psi_{zz} = 0$ . В случае  $\psi \equiv 0$  получим уравнение Линя – Рейсснера – Тзяна, переходящее для установившихся течений в уравнение смешанного типа Кармана – Фальковича.

Нелинейное уравнение, описывающее сверхзвуковое течение в окрестности ударных волн, мало отличающихся от линий Маха  $\xi = const$ :

$$2V\varphi_{\xi t} + 2\beta a^2\varphi_{\xi y} + [(\gamma + 1)VM^2\varphi_\xi + (\gamma - 1)M^2\psi_t - 2V\beta\psi_y]\varphi_{\xi\xi} = a^2(\psi_{yy} + \psi_{zz}) - \psi_{tt}. \quad (3)$$

Здесь  $\xi = x - \beta y$ ,  $\beta = \sqrt{M^2 - 1}$ ,  $M = V/a$  – число Маха,  $\gamma$  – показатель Пуассона, функция  $\psi(y, z, t)$  – произвольная. В (2), (3) функция  $\psi(y, z, t)$  задает поперечное аэродинамическое воздействие.

На основе уравнений (1)–(3) получены аналитические и численные решения некоторых задач газовой динамики, а также исследуется динамическая устойчивость упругих элементов конструкций при обтекании их потоком газа или жидкости в модели идеальной среды.

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В АЭРОГИДРОУПРУГОСТИ

**Вельмисов П.А.<sup>1</sup>, Анкилов А.В.<sup>2</sup>, Покладова Ю.В.<sup>3</sup>**

*УлГТУ, Ульяновск, Россия; <sup>1</sup>velmisov@ulstu.ru; <sup>2</sup>ankil@ulstu.ru;*

*<sup>3</sup>pokladovaau@inbox.ru*

Исследуется устойчивость решений начально-краевых задач для связанных систем интегро-дифференциальных уравнений с частными производными, описывающих динамику деформируемых элементов различных конструкций, находящихся во взаимодействии с газожидкостной средой (обтекаемых потоком жидкости или газа). Принятые в работе определения устойчивости деформируемого (вязкоупругого, упругого) тела соответствуют концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову. Изучается устойчивость элементов летательных аппаратов, трубопроводных систем, датчиков измерения параметров газожидкостных сред при различных способах закрепления элементов при дозвуковом или сверхзвуковом режимах обтекания сжимаемой или несжимаемой средой. Воздействие газа или жидкости (в модели идеальной среды) определяется из асимптотических уравнений аэрогидромеханики. Для описания динамики упругих элементов используется как линейная, так и нелинейная теории твердого деформируемого тела.

Для решения связанных задач аэрогидроупругости используются методы теории функций комплексного переменного и метод Фурье. При этом аэрогидродинамическая нагрузка определяется через функции, описывающие неизвестные прогибы элементов, для которых возникает связанная система интегро-дифференциальных уравнений. Исследование устойчивости проводится на основе прямого метода Ляпунова (построены положительно определенные функционалы типа Ляпунова) и численно-аналитических методов с реализацией численного эксперимента.

### Литература

1. Анкилов А. В., Вельмисов П. А. Функционалы Ляпунова в некоторых задачах динамической устойчивости аэроупругих конструкций. Ульяновск: УлГТУ, 2015. 146 с.
2. Анкилов А. В., Вельмисов П. А. Математическое моделирование в задачах динамической устойчивости деформируемых элементов конструкций при аэрогидродинамическом воздействии. Ульяновск: УлГТУ, 2013. 322 с.
3. Анкилов А.В., Вельмисов П.А., Горбоконенко В.Д., Покладова Ю.В. Математическое моделирование механической системы «трубопровод – датчик давления». Ульяновск: УлГТУ, 2008. 188 с.

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕОРИИ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ  
ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАВИСИМОСТИ СКОРОСТИ ПЕРЕНОСА  
ПЕРЕДНЕГО ФРОНТА ОБЛАКА ЗАРАЖЕННОГО ВОЗДУХА**

**Вельц О.В.<sup>1</sup>, Крахоткина Е.В.<sup>2</sup>, Плетухина А.А.<sup>3</sup>**

*СКФУ, Ставрополь, Россия;* <sup>1</sup>velts-yatsenco@yandex.ru;

<sup>2</sup>elen-a-stv@yandex.ru; <sup>3</sup>alla-pletuhina@yandex.ru

Оценка воздействия на окружающую среду при возникновении чрезвычайных ситуаций, связанных с авариями на объектах при выбросе АХОВ проводится по фактически сложившейся обстановке, т. е. зависит от реальных метеоусловий и реального количества, выброшенного АХОВ. В частности, одной из задач, входящих в алгоритм оценки последствий техногенных катастроф, связанных с выбросом в атмосферу АХОВ, является расчет времени подхода зараженного воздуха к данной точке пространства.

При оценке метеоусловий при возникновении чрезвычайных ситуаций, связанных с авариями на объектах при выбросе АХОВ, учитывается такой параметр, как степень вертикальной устойчивости воздуха (СВУВ). При исследовании объекта, подвергнувшегося воздействию АХОВ, выделяют три состояния СВУВ – конвекция, инверсия и изотермия, каждое из которых характеризуется типичным распределением температуры воздуха в нижнем слое, а также интенсивностью вертикального перемещения воздуха.

В [1] найдено решение данной задачи методами интеллектуального анализа данных, выбрав в качестве инструмента механизм нейронных сетей. Цель данной работы разработать математическую модель задачи исследования зависимости скорости переноса переднего фронта облака зараженного воздуха, используя механизм временных рядов и показать ее реализацию с помощью средств Excel [2].

**Литература**

1. Крахоткина Е.В. Исследование зависимости скорости переноса переднего фронта зараженного воздуха методом интеллектуального анализа данных // Материалы Международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и физики», Нальчик, 2017. С. 112.
2. Петрова Л.В. Современные информационные технологии в экономике и управлении: учебное пособие. Поволжский государственный технологический университет. Йошкар-Ола: ПГТУ, 2016. 52 с.

**БЭРОВСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ СТАРШЕГО  
ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ПОКАЗАТЕЛЯ КАК ФУНКЦИИ  
ВЕЩЕСТВЕННОГО ПАРАМЕТРА**

**Ветохин А.Н.**

*МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия; anveto27@yandex.ru*

Пусть  $\lambda_n(A)$  – старший показатель Ляпунова линейной системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0; +\infty), \quad (1)$$

с непрерывной и ограниченной на полуправой  $t \in [0; +\infty)$  оператор-функцией. Старший экспоненциальный показатель [1]

$$\nabla(A) = \sup_{Q \in K_0} \lambda_n(A + Q)$$

отвечает за подвижность вверх старшего показателя Ляпунова при возмущениях системы (1), принадлежащих классу

$$K_0 = \{Q(\cdot) : \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|Q(t)\| < 0\}.$$

Пусть  $\mathcal{M}$  – метрическое пространство. По непрерывной и ограниченной функции

$$A : \mathcal{M} \times [0; +\infty) \rightarrow \text{End}\mathbb{R}^n, \quad (2)$$

построим функцию

$$\mu \mapsto \nabla(A_\mu(\cdot)). \quad (3)$$

В случае, когда  $\mathcal{M}$  – множество иррациональных чисел на отрезке  $[0, 1]$  с метрикой индуцируемой естественной метрикой вещественной прямой, для любого  $n \geq 2$  построено отображение (2), для которого функция (3) всюду разрывна и не принадлежит второму классу Бэра. В случае, когда  $\mathcal{M} = [0, 1]$  получен аналогичный результат.

**Теорема.** *Пусть  $\mathcal{M} = [0, 1]$ , тогда для любого  $n \geq 2$  найдется отображение (2), для которого функция (3) всюду разрывна и не принадлежит второму классу Бэра.*

**Литература**

1. Изобов Н.А. Экспоненциальные показатели линейной системы и их вычисление // Докл. АН БССР. 1982. Т. 26, № 1. С. 5–8.
2. Ветохин А.Н. К бэрковской классификации сигма-показателя и старшего экспоненциального показателя Изобова // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50, № 10. С. 1302–1311.

## SM УПРАВЛЕНИЯ БЕСПИЛОТНЫМ ЛЕТАТЕЛЬНЫМ АППАРАТОМ

**Винокурский Д.Л.**

*СКФУ, Ставрополь, Россия; dvinokursky@gmail.com*

Для того чтобы обеспечить автономный полет БПЛА необходимо несколько программных модулей: модуль состояния; модуль управления; модуль сопоставления; модуль планирования движения.

Рассмотрим подробнее управление БПЛА, а именно SM управление.

SM управление БПЛА – это нелинейный метод управления, который использует в качестве элементов управления изменение угловой скорости. Достоинством метода является быстрота переключения режимов. Запишем уравнение динамики вращательного движения

$$I\ddot{\omega} = u_2 - \dot{\omega} \times I\dot{\omega}, \quad (1)$$

где  $I$  – момент инерции БПЛА;

$\omega$  – угловая скорость;

$u_2$  – элемент управления.

Ошибку положим равной:  $e(t) = \omega - \omega_0$ . SM управления был реализован в системе MATLAB/SIMULINK и включен в программу стабилизации автономного движения БПЛА «Альбатрос».

### Литература

1. *Kushleyev A. and Kumar V.* Towards a swarm of agile micro quadrotors. In Proc. of Robotics: Science and Systems, 2012.
2. *Landau I.D., Lozano R. and Saad M.M.* H Adaptive Control. Springer, 1998.
3. *Lee T., Leok M. and McClamroch N.* Geometric tracking control of a quadrotor UAV on SE(3). In Proc. of the IEEE Conf. on Decision and Control, 2010.

## Многосеточный метод решения задач квантовой химии

Винокурский Д.Л.<sup>1</sup>, Кононова Н.В.<sup>2</sup>, Хныкина А.Г.<sup>3</sup>

СКФУ, Ставрополь, Россия; <sup>1</sup>dlvinokursky@gmail.com; <sup>2</sup>knu\_fm@mail.ru;

<sup>3</sup>hnykina\_anna@mail.ru

Метод функционала электронной плотности широко используется для моделирования многоэлектронных систем. В данной работе предложено использование многосеточного метода для решения уравнений Кона – Шэма взаимодействующих многоэлектронных систем.

В модели Кона – Шэма полная энергия многоэлектронной системы может быть определена следующим образом [1]:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int |\nabla \Psi_i|^2 \cdot dV + \int p(r) \cdot V_{ion}(r) \cdot dV + \\ + \frac{1}{2} \int \int \frac{p(r)p(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot dV \cdot dV' + E_{xc}(p(r)). \quad (1)$$

Здесь  $\Psi_i$ ,  $i = 1, 2 \dots, N$ , одиночественная волновая функция, обладающая свойством ортогональности  $\int \Psi_i^* \Psi_j = \delta_{ij}$ . В данной работе решение задачи Кона – Шэма было представлено многосеточным методом, который имеет следующее преимущество: скорость сходимости независима от размеров сетки и решение не замедляется для больших систем и может быть легко распараллелено. Следовательно, задачу с  $n$  неизвестными можно решить за время порядка  $O(n)$ .

### Литература

1. Gunnarsson O. and Lundqvist B.I. Exchange and correlation in atoms, molecules, and solids by the spindensity-functional formalism. Phys. Rev. B, 13: 4274–4298, May 1976.
2. MacLaren J.M., Clougherty D.P., McHenry M.E. and Donovan M.M. Parameterised local spin density exchange-correlation energies and potentials for electronic structure calculations i. zero temperature formalism. Computer Physics Communications, 66(2–3):383 – 391, 1991.
3. Richard M.M. Electronic structure: basic theory and practical methods. Cambridge University Press, 2004.

**Вычисление распределения Манделя в квантовой статистике**

**Витохина Н.Н.**

*НИУ «БелГУ», Белгород, Россия; vitozhina@bsu.edu.ru*

Распределением Манделя в квантовой оптике называется составное распределение Пуассона, представляющее распределение вероятностей для случайной величины  $\tilde{n}$ -числа зарегистрированных фотонов неидеальным квантовым счётчиком в течение интервала времени длины  $T$  [1]:

$$p_n = \Pr \{ \tilde{n} = n \} = \frac{1}{n!} \mathbf{E} \tilde{J}^n \exp [-J], \quad (1)$$

где  $\tilde{J}$  – случайная величина, поглощенная счётчиком за время  $T$  энергия электромагнитного поля, т. е.  $\tilde{J} \equiv \tilde{J} [\tilde{\zeta}] = \int_0^T |\tilde{\zeta}(s)|^2 ds$ . Здесь  $\tilde{\zeta}(s) = \tilde{\xi}(s) + i\tilde{\eta}(s)$  – траектории комплекснозначного случайного процесса, состоящие из стохастически эквивалентных независимых процессов Орнштейна – Уленбека [2].

Предлагается решение задачи о получении приближенных распределений  $p_n^{(N)}$  для  $p_n$  с гарантированной точностью в области малых значений физически безразмерного параметра  $\sigma T/\nu$  распределения (1).

Получено, что производящая функция распределения Манделя может быть записана в виде

$$G(x) = \exp \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n - 1}{n!} \bar{K}_n \right),$$

где  $\bar{K}_n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} K_{n+m}$ ,  $\mathbf{E} \exp (i\lambda \tilde{J}) = \exp \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\lambda)^n}{n!} K_n \right)$ ,  $K_0 = 0$ . То есть случайная величина с распределением вероятностей Манделя разлагается в сумму независимых «пуассоновских величин».

**Литература**

1. Лэкс М. Флуктуации и когеррентные явления. М.: Мир, 1974. 299 с.
2. Мазманишвили А.С. Континуальное интегрирование как метод решения физических задач. К.: Наукова Думка, 1987. 224 с.

## **ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОСТОЯНИЯ СИСТЕМ ОРГАНИЗМА ЧЕЛОВЕКА ПО ДАННЫМ АНАЛИЗА ПЕРИФЕРИЧЕСКОЙ КРОВИ**

**Гавриков Б.М.<sup>1</sup>, Пестрякова Н.В.<sup>2</sup>**

*ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия; <sup>1</sup>bmgavrikov@gmail.com, <sup>2</sup>pestryakova@isa.ru*

Рассмотрена проблема оценивания состояния здоровья человека на основе результатов анализа периферической крови (из пальца). Исследования проведены раздельно для мужчин и женщин по четырем стадиям поражения систем организма: от практически здорового состояния до тяжелых заболеваний. Разработанный авторами для распознавания изображений статистический метод классификации, базирующийся на полиномиально-регрессионном подходе и имеющий вероятностные оценки [1], адаптирован на несимвольные объекты. В качестве независимых компонент полиномиального вектора используется восемь показателей крови, отнормированных на отрезок [0, 1] по обучающей базе. Реализованы наборы комбинаций базисных мономов в виде степеней и перекрестных произведений степеней независимых компонент до пятого порядка [2].

Разработаны версии классификатора для систем дыхания, пищеварительной, урологической, эндокринной, гинекологической, опорно-двигательного аппарата, ЦНС и органов чувствительности, печени и желчевыводящих путей, грудных желез. При обучении используются выборки, полученные в результате детального обследования пациентов большой группой специалистов из различных областей медицины [3]. Точность классификации на обучающих множествах составляет 95–100

### **Литература**

1. *Пестрякова Н.В.* Метод распознавания символов, основанный на полиномиальной регрессии. М.: УРСС. 2011. 141 с.
2. *Гавриков Б.М., Пестрякова Н.В.* О построении признакового пространства в задаче обучения // Информационные технологии и вычислительные системы. 2018. № 1. С. 40–47.
3. *Ставицкий Р.В. [и др.]* Количественная оценка гомеостатической активности здоровых и больных людей // М.: ГАРТ. 2013. 131 с.

---

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №16-07-00742 а.

**ФОРМУЛА ЛАГРАНЖА ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ ДРОБНОГО  
ДИСКРЕТНО РАСПРЕДЕЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ**

**Гадзова Л.Х.**

*ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; masaneeva@mail.ru*

В интервале  $0 < x < 1$  рассмотрим уравнение

$$Lu[x] = \sum_{j=1}^m \beta_j \partial_{0x}^{\alpha_j} u(x) + \lambda u(x) = f(x), \quad (1)$$

где  $\alpha_1 \in (n-1, n]$ ,  $\lambda, \beta_j \in \mathbb{R}$ ,  $\beta_1 > 0$ ,  $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_m$ ,  $\partial_{0x}^\gamma u(x)$  – производная Капуто [1, с. 11]:

$$\partial_{0x}^\gamma u(x) = D_{0x}^{\gamma-n} u^{(n)}(x), \quad n-1 < \gamma \leq n,$$

$D_{0x}^\gamma$  – оператор дробного интегро-дифференцирования порядка  $\gamma$  в смысле Римана – Лиувилля [1, с. 9] по переменной  $x$ .

В работах [2–3] исследованы краевые задачи первого, второго и третьего рода для линейного обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дробного дискретно распределённого порядка и построена функция Грина краевой задачи с условиями третьего рода для уравнения (1) при  $\alpha_j \in ]1, 2[$ .

В данной работе получена формула Лагранжа для дифференциального оператора  $L$  и построено фундаментальное решение уравнения (1).

**Литература**

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
2. Гадзова Л.Х. Задача Дирихле и Неймана для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51, № 12. С. 1580–1586.
3. Гадзова Л.Х. Краевая задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дробного дискретно распределённого дифференцирования // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54, № 2. С. 180–186.

---

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-01-00462 А.

## ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФИЛЬТРАЦИИ В СЛОЖНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

Газизов Р.К.<sup>1</sup>, Лукащук С.Ю.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> ООО «РН-УфаНИПИнефть», Уфа, Россия; GazizovRK@ufanipi.ru

<sup>1,2</sup> УГАТУ, Уфа, Россия; lsu@ugatu.su

Доклад посвящен нелинейным моделям фильтрации в сложных неоднородных пористых средах, полученным на основе различных дробно-дифференциальных обобщений феноменологических соотношений, связывающих параметры фильтрационного процесса, и развивает результаты, представленные ранее в работах [1, 2].

Рассматриваются модели однофазной фильтрации с дробными производными по временной и пространственной переменным, полученные из соответствующих модификаций закона Дарси. Приводятся точные решения для некоторых частных случаев построенных моделей.

Обсуждается возможность использования для моделирования трещиновато-пористой среды, проявляющей вязкоупругие свойства, дробно-дифференциальных обобщений известных реологических законов. В результате возникает зависимость пористости среды не только от давления, но и от дробной производной от давления, что приводит к появлению дробно-дифференциальных слагаемых в фильтрационных моделях.

Строятся модели фильтрации флюида с дробно-дифференциальными уравнениями состояния, которые могут быть использованы для растворов полимеров в ньютоновской жидкости, что позволяет решать задачи, связанные с полимерным заводнением нефтяных коллекторов.

В качестве примеров моделей многофазной фильтрации рассматриваются обобщения модели Баренблатта – Гильмана с дробными производными по пространству или времени, описывающие процесс неравновесной двухфазной противоточной капиллярной пропитки. Обсуждаются вопросы построения точных решений полученных нелинейных моделей.

### Литература

1. Газизов Р.К., Лукащук С.Ю. Дробно-дифференциальный подход к моделированию процессов фильтрации в сложных неоднородных пористых средах // Вестник УГАТУ. 2017. Т. 21, № 4 (78). С. 104–112.
2. Gazizov R.K., Kasatkin A.A., Lukashchuk S.Yu. Symmetries and exact solutions of fractional filtration equations // AIP Conf. Proc. 2017. Т. 1907. Р. 1–9.

---

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ, государственное задание № 1.3103.2017/4.6.

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОПЕРАТОРА ИНВАРИАНТНОГО  
ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ В АЛГОРИТМЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО  
ПОНИЖЕНИЯ ПОРЯДКА**

**Гайнетдинова А.А.**

УГАТУ, Уфа, Россия; gainetdinova.alia@gmail.com

В работе [1] была предложена модификация алгоритма последовательного понижения порядка для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, основанная на применении оператора инвариантного дифференцирования (ОИД) допускаемой алгебры Ли операторов.

В данной работе исследовалась возможность применения этого алгоритма к уравнениям вида

$$\frac{d^k u}{dt^k} = F_0 \left( t, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^{k-1} u}{dt^{k-1}} \right) + \varepsilon F_1 \left( t, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^{k-1} u}{dt^{k-1}} \right),$$

где  $\varepsilon$  — малый параметр. Если такое уравнение допускает приближенную группу Ли преобразований, то можно построить ОИД допускаемой группы вида  $\lambda D_t$ ,  $\lambda = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1$  — некоторая функция, которую можно найти из условия приближенного коммутирования:  $[X_i, \lambda D_t] = o(\varepsilon)$ .

Более того, если искать ОИД в виде  $\lambda = (D_t(\Phi_0 + \varepsilon \Phi_1))^{-1}$ , то, действуя полученным ОИД на инвариант младшего порядка, можно на многообразии, определяемом уравнением, получить первый интеграл уравнения.

Особое внимание уделяется приближенным симметриям уравнений с малым параметром, которые получаются из уравнений с производными дробного порядка выделением малого параметра из порядка дробного дифференцирования (см., например, [2]). Проводится сравнительный анализ обоих типов уравнений и их решений.

**Литература**

1. Газизов Р. К., Гайнетдинова А. А. Оператор инвариантного дифференцирования и его применение для интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Уфимский математический журнал. 2017. Т. 4, № 9, С 12–21.
2. Лукашук С. Ю. Приближение обыкновенных дробно-дифференциальных уравнений дифференциальными уравнениями с малым параметром // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2017. Vol. 27, № 4. С. 515–531.

---

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации по государственному заданию №1.3103.2017/4.6.

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ  
НАНОКОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ НА ПОЛИМЕРНОЙ ОСНОВЕ**  
**Гасанов А.Б.**

*БГУ; ИСУ, Баку, Азербайджан; dahi57@rambler.ru*

Использование углеродных нанотрубок в качестве наполнителя при получении нанокомпозитов на полимерной основе существенно улучшает деформационно-прочностные характеристики этих материалов. Рассматривается задача применения моделей вязкоупругости для исследования задач динамики нанокомпозитов, которые моделируются как периодическая система пар односторонних, параллельных наностержней. Каждая пара содержит контактирующих между собой два вязкоупругих стержня. Материал вязкоупругого стержня описывается моделью Больцмана — Вольтерры с произвольными наследственными ядрами.

В научной литературе наблюдается существенный разрыв между технологиями получения новых материалов и возможностями теоретического прогнозирования их физико-механических свойств. Создание и усовершенствование таких моделей позволило бы получение новых материалов с предварительно заданными свойствами. Особенно это касается влияния локальной структуры среды на ее макро-свойства. Известно, что классическая феноменологическая теория континуальной среды не учитывает микроструктуры материала, и она непригодна для исследования подобных задач. Недостаточная на сегодняшний день практическая применимость модели микрополярной среды обусловлена, главным образом, отсутствием двух факторов: методик надежного определения материальных констант и концепции учета вязкости такой среды.

В данной работе предпринята попытка применения вязкоупругих моделей в уравнениях Коссера с помощью решения задачи для составного (слоистого) вязкоупругого стержня, идентичного по своим дисперсионным свойствам модели среды Коссера.

## **СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ РАСПИСАНИЕМ В ВУЗЕ**

**Гаспарян А.Ф.**

*СОГУ, Владикавказ, Россия; annagasprian@bk.ru*

Данная работа заключается в создании системы, охватывающей все вопросы работы с расписанием учебного учреждения:

1. Форматирование готового расписания и его публикация;
2. Внесение изменений в расписание;
3. Система оповещения об изменениях в расписании учебных занятий и просмотр их на мобильном устройстве;
4. Встраивание расписания в стандартные системы управления временем.

Для этого в рамках данного проекта должны быть решены следующие задачи:

1. Исследование основных этапов подготовки и использования расписания;
2. Исследование архитектуры стандартных систем управления временем;
3. Разработка серверного приложения;
4. Разработка графического пользовательского интерфейса;
5. Авторизация/регистрация пользователей;
6. Реализация программного модуля для отображения расписания занятий любого участника образовательного процесса;
7. Разработка модуля оповещения;
8. Разработка плагинов десктопа.

В результате была разработана версия – прототип мобильного приложения «Система управления расписанием в ВУЗе», для мобильных устройств на ОС Android 4.4.4 и выше, реализующая удобный просмотр расписания и отправку об изменениях расписания на сервер. На сегодняшний день мобильное приложение проходит тестирование преподавателями и студентами факультета математики и информационных технологий СОГУ.

### **Литература**

1. Мякин Д. StatCounter: веб-сайты чаще посещают с мобильных устройств, а не с ПК. Интернет. 2016. Available: <https://3dnews.ru/942072>
2. Боровинский А. Мобильное приложение для ВУЗа. Интернет. 2013. Available: <https://k.psu.ru/blog/node/24>

## Коэффициентно-обратные задачи на гидравлических сетях

Гасымов Г.Г.

АГУНП, Баку, Азербайджан; q.qasim56@gmail.com

Системы нефте-газопроводов играют важную роль в транспортировке сырья от источника к потребителям. Расчет и оптимизация режимов транспортировки сырья в настоящее время широко используются в компьютерных системах диспетчерского управления и основаны на использовании математических моделей гидравлических сетей.

В данной работе предлагается численный подход, для расчета коэффициентов гидравлического сопротивления участков газопровода. Как правило, расчеты проводятся относительно тех участков, которые могут подвергаться интенсивному загидрачиванию.

Математическая постановка задачи заключается в следующем. Пусть гидравлическая сеть состоит из  $m$  участков и  $n$  вершин. Математическая модель движения газа в трубопроводной сети при стационарном режиме состоит из  $m$  нелинейных и  $n$  линейных уравнений. Используя теорию графов, математическая модель приводится к системе  $L = m + n - 1$  нелинейных уравнений относительно коэффициентов циркуляции в замкнутых контурах.

Для определения коэффициентов гидравлического сопротивления участков проводятся наблюдения в вершинах сети за значениями расхода и давления. По этим данным строится функция квадратичного отклонения между вычисленными по модели и наблюдаемыми значениями расхода газа. Далее относительно этой функции применяются итерационные методы минимизации 1-го порядка.

С этой целью в работе получены аналитические формулы градиента целевой функции по идентифицируемым параметрам.

### Литература

1. Айда-заде К.Р., Кулиев С.З., Касумов К.К. Материалы Международного Российско-Казахского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики», Нальчик, 2011. С. 23–27.
2. Мызников Ф.М., Файзилин Р.Т. Коэффициенты потребления в гидравлических последовательностях осадка в результате предельных значений // Теплофизика и аэромеханика. 2005. Т. 12. С. 483–486.

**Оптимизация размещения источников и точек  
контроля при нагреве пластины**

**Гашимов В.А.**

*ИСУ, Баку, Азербайджан; vugarhashimov@gmail.com*

Исследуется задача управления с обратной связью процессом нагрева стержня, описываемого уравнением

$$u_t(x, t) = a^2 \Delta u(x, t) - \lambda_0 [u(x, t) - \theta] + \sum_{i=1}^{N_c} \vartheta^i(t) \delta(x - \eta^i). \quad (1)$$

Здесь  $x \in \Omega \subset R^2, t \in [0, T]$ ,  $\vartheta^i$  – мощность  $i$ -того источника, размещенного в точке  $\eta^i$ ,  $i = 1, \dots, N_c$ . В точках  $\xi^j$ ,  $j = 1, \dots, N_o$ , осуществляются замеры температуры:

$$\tilde{u}^j(t) = u(\xi^j, t), j = 1, \dots, N_o.$$

По текущим замерам с использованием линейной обратной связи формируются управляющие параметры:

$$\vartheta^i(t) = \sum_{j=1}^{N_o} k_j^i [u(\xi^j, t) - z_j^i], \quad i = 1, \dots, N_c. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получим нагруженное дифференциальное уравнение

$$u_t(x, t) = a^2 \Delta u(x, t) - \lambda_0 [u(x, t) - \theta] + \sum_{i=1}^{N_c} \sum_{j=1}^{N_o} k_j^i [u(\xi^j, t) - z_j^i] \delta(x - \eta^i).$$

Задача синтеза управления процессом (1) приводится к параметрической задаче оптимального управления с некоторым заданным целевым функционалом с оптимизируемыми параметрами:  $K = ((k_j^i))$ ,  $Z = ((z_j^i))$ ,  $\xi^j$ ,  $\eta^i$ ,  $i = 1, \dots, N_c$ ,  $j = 1, \dots, N_o$ .

Для решения полученной задачи получены необходимые условия оптимальности, проведены компьютерные эксперименты с применением численных методов оптимизации первого порядка.

**ОБ ОДНОМ ОВОБЩЕНИИ ЗАДАЧИ ЖЕВРЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ  
ДРОБНОЙ ДИФФУЗИИ С ПЕРЕМЕННЫМ НАПРАВЛЕНИЕМ  
ВРЕМЕНИ**

**Геккиева С.Х.**

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; gekkiewa\_s@mail.ru

Пусть  $\Omega = \Omega^- \cup \Omega^+ \cup AB$ , где  $\Omega^- = \{(x, y) : -l < x < 0, 0 < y < h\}$ ,  
 $\Omega^+ = \{(x, y) : 0 < x < l, 0 < y < h\}$ ,  $AB = \{(0, y) : 0 < y < h\}$ .

Рассмотрим уравнение

$$u_{xx} = \begin{cases} D_{0y}^\alpha u, & x > 0, \\ D_{hy}^\alpha u, & x < 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $D_{ts}^\alpha$  – оператор Римана – Лиувилля порядка  $\alpha$  [1],  $0 < \alpha < 1$ .

**Задача G.** Найти функцию

$$u(x, y) = \begin{cases} u^+(x, y), & (x, y) \in \Omega^+, \\ u^-(x, y), & (x, y) \in \Omega^-, \end{cases}$$

удовлетворяющую уравнению (1) в областях  $\Omega^+$ ,  $\Omega^-$ , граничным условиям

$$u^+(l, y) = \psi_1(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad u^-(-l, y) = \psi_2(y), \quad 0 \leq y \leq h,$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-1} u^+(x, y) = \varphi_1(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$\lim_{y \rightarrow h} D_{hy}^{\alpha-1} u^-(x, y) = \varphi_2(x), \quad -l \leq x \leq 0,$$

и условию линейного сопряжения

$$\alpha(y)u_x^+(0, y) + \beta(y)u_x^-(0, y) = \gamma(y), \quad 0 < y < h,$$

где  $\alpha(y)\beta(y) \leq 0$ ,  $\alpha(y), \beta(y), \gamma(y) \in C^{(1, \lambda)}(0, h)$ ,  $\varphi_1(x) \in C[0, l]$ ,  $\varphi_2(x) \in C[-l, 0]$ ,  $\psi_1(y), \psi_2(y) \in C[0, h]$ . Здесь  $C^{(k, \lambda)}(0, h)$  означает множество функций, обладающих непрерывными производными до порядка  $k$  включительно, которые удовлетворяют условию Гельдера с показателем  $\lambda$  ( $\lambda > 0$ ).

Используя свойства функции Грина первой краевой задачи для уравнения дробной диффузии [2], задача редуцируется к сингулярному интегральному уравнению нормального типа.

**Литература**

1. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. 301 с.
2. Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.

## КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВЛАГОПЕРЕНОСА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Геккиева С.Х.<sup>1</sup>, Керевов М.А.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; gekkiewa\_s@mail.ru

<sup>2</sup>КБГУ, Нальчик, Россия; kerefov@mail.ru

В области  $\Omega_T = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$  рассматривается уравнение влагопереноса

$$A_1 D_{0t}^{\alpha+1} u + D_{0t}^\alpha u = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + A D_{0t}^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (1)$$

где  $D_{0t}^\gamma$  – оператор дробного дифференцирования Римана – Лиувилля [1, с. 9],  $A_1, A = \text{const} > 0, 0 < \alpha < 1$ .

Регулярным решением уравнения (1) в области  $\Omega$  назовем функцию  $u = u(x, t)$  из класса  $D_{0t}^{\alpha-1} u(x, t), D_{0t}^\alpha u(x, t) \in C(\bar{\Omega}_T); D_{0t}^{\alpha+1} u(x, t), u_{xx}(x, t), D_{0t}^\alpha u_{xx}(x, t) \in C(\Omega_T)$ , которая удовлетворяет уравнению (1) во всех точках  $(x, t) \in \Omega_T$ .

**Задача 1.** Найти регулярное решение  $u(x, t)$  уравнения (1) в области  $\Omega_T$ , удовлетворяющее краевым условиям

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 < t < T,$$

и начальными условиями

$$\lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-1} u(x, t) = \tau(x), \quad \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^\alpha u(x, t) = \nu(x),$$

где  $\tau(x), \nu(x)$  – заданные функции.

В работе исследована задача 1 для уравнения влагопереноса Аллера – Лыкова с дробной производной Римана – Лиувилля. Существование решения (при  $k(x, t) = 1$ ) доказано методом Фурье. С помощью метода энергетических неравенств для решения задачи получена априорная оценка в терминах дробной производной Римана – Лиувилля, из которой следует единственность решения.

### Литература

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

**СРЕДНИЕ ВАЛЛЕ ПУССЕНА В ОБОБЩЕННЫХ ГЁЛЬДЕРОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ**

**Голава М.Р.**

*АГУ, Сухум, Абхазия; marianagolava@yandex.ru*

Пусть  $S[f]$  – тригонометрический ряд Фурье непрерывной  $2\pi$ -периодической функции с нормой  $\|f\|_C := \max_x |f(x)|$ ,  $\sigma_{n,p}(f, x)$  – суммы Валле Пуссена ряда  $S[f]$ ,

$$H_{\omega^*, 2} := \left\{ f : \|f\|_{\omega^*, 2} := \|f\|_C + |f|_{\omega^*, 2} \right\},$$

где

$$|f|_{\omega^*, 2} := \sup_{h>0} \frac{\|\dot{\Delta}_h^2 f\|_C}{\omega^* h},$$

$\omega^*(t)$  – неубывающая при  $t > 0$  функция,  $\omega^*(t) > 0$  [1].

**Теорема.** Пусть  $0 \leq \beta < \eta \leq 1$ ,  $\frac{n}{2} \leq p \leq n - 1$ . Тогда для любой функции  $f \in H_{\omega, 2} \subset H_{\omega^*, 2}$  справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \|\sigma_{n,p}(f) - f\|_{\omega^*, 2} &\leq \|f\|_{\omega, 2} \left( 4^{\frac{\beta}{\eta}} + 4 \sup_{h>0} \frac{\omega^{\frac{\beta}{\eta}}(h)}{\omega^*(h)} \right) \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{\pi(p+1)} \sum_{k=n-p}^n \omega^{1-\frac{\beta}{\eta}} \left( \frac{1}{k} \right) + O(1) \omega^{1-\frac{\beta}{\eta}} \left( \frac{1}{n-p} \right) \right\}, \end{aligned}$$

где  $O(1)$  – величина, равномерно ограниченная по  $n$ .

**Литература**

1. Ласурдия Р.А., Голава М.Р. Средние Фейера в обобщенном гёльдеровом пространстве // Труды Абх. гос. ун-та. Сухум: РИО АГУ, 2011. С. 5–11.

## Об аппроксимации конфликтно-управляемых динамических систем с дробными производными

Гомоюнов М.И.

ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия; m.i.gotoyupov@gmail.com

В работе в рамках подхода [1] рассматривается динамическая система, движение которой описывается обыкновенным дифференциальным уравнением с дробной производной Капуто порядка  $\alpha \in (0, 1)$ :

$$({}^C D_{t_0}^\alpha x)(t) = f(t, x(t), u(t), v(t)), \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n,$$

где  $t$  — время,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  — фазовый вектор,  $u(t) \in P \subset \mathbb{R}^r$  — управление,  $v(t) \in Q \subset \mathbb{R}^s$  — помеха,  $P$  и  $Q$  — известные компакты. Для этой системы вводится вспомогательная аппроксимирующая система, описываемая функционально-дифференциальным уравнением с запаздыванием:

$$\frac{d}{dt} z_h(t) = f\left(t, x_0 + (\Delta_h^{1-\alpha} z_h)(t)/h^{1-\alpha}, \tilde{u}(t), \tilde{v}(t)\right), \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad z_h(t_0) = 0,$$

где  $h > 0$ ,  $z_h(t) \in \mathbb{R}^n$  — фазовый вектор,  $(\Delta_h^{1-\alpha} z_h)(t)$  — конечная разность порядка  $1 - \alpha$  (см. [2, с. 289]),  $\tilde{u}(t) \in P$  и  $\tilde{v}(t) \in Q$  — управления.

Предложена процедура взаимного прицеливания между исходной и аппроксимирующей системами, которая заключается в формировании по шагам разбиения отрезка времени  $[t_0, \vartheta]$  кусочно-постоянных управлений  $u : [t_0, \vartheta] \rightarrow P$  и  $\tilde{v} : [t_0, \vartheta] \rightarrow Q$ . Доказано, что для любого  $\varepsilon > 0$  при достаточно малом  $h > 0$  и достаточно мелком разбиении эта процедура гарантирует выполнение неравенства

$$\|x(t) - x_0 - (\Delta_h^{1-\alpha} z_h)(t)/h^{1-\alpha}\| \leq \varepsilon, \quad t \in [t_0, \vartheta],$$

для любых измеримых помехи  $v : [t_0, \vartheta] \rightarrow Q$  и управления  $\tilde{u} : [t_0, \vartheta] \rightarrow P$ . Основу доказательства составляет факт равностепенной по  $h > 0$  липшицевости движений аппроксимирующей системы и подходящая оценка сверху дробной производной квадратичной функции Ляпунова [3].

### Литература

1. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 516 с.
2. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
3. Gomoyunov M.I. Fractional derivatives of convex Lyapunov functions and control problems in fractional order systems // arXiv:1710.07003. 2017.

**ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ИСКАЖЕНИЙ В ИСХОДНЫХ ДАННЫХ НА  
КАЧЕСТВО РЕКОНСТРУКЦИИ В ЗАДАЧАХ РЕНТГЕНОВСКОЙ  
ТОМОГРАФИИ**

**Горбунова Е.Б.<sup>1</sup>, Ковтун Д.Г.<sup>2</sup>, Угольков А.В.<sup>3</sup>**

*НТЦ «Техноцентр» ЮФУ, Таганрог, Россия;* <sup>1</sup>*egorvunova@sfedu.ru;*  
<sup>2</sup>*dan-kav@ya.ru;* <sup>3</sup>*ya.ugolkov.andrey@yandex.com*

Задачей томографического синтеза является реконструкция внутренней структуры трехмерного объекта по набору его двухмерных проекций. В основе реконструкции лежит операция обратного проецирования, однако без использования дополнительных преобразований результат имеет малую контрастность и значительно размыт ввиду эффекта наложения [1]. Этот эффект корректируется при использовании более сложных методов реконструкции. На качестве реконструкции также сказывается количество проекций, диапазон углов обзора, инструментальная погрешность геометрической конфигурации рентгеновской установки. Данная работа направлена на исследование влияния инструментальной погрешности. Под ней в данном контексте следует понимать точность позиционирования источника излучения и детектора, угол получения проекции, положение точки фокуса. Исследование проводилось на трехмерном математическом фантоме. Для реконструкции использовались алгоритмы Фельдкампа [2], SART [3] и MENT [4]. В процессе реконструкции в исходные данные, отражающие углы получения проекции и положение точки фокуса, вносился шум с заданным СКО. Результатом исследования являются зависимости нормированной СКО реконструкции для различных областей изображения от СКО вносимого шума.

**Литература**

1. *Gomi T., Hirano H.* Clinical potential of digital linear tomosynthesis imaging of total joint arthroplasty // Journal of Digital Imaging 21, 2008. P. 312–322.
2. *Feldkamp L.A., Davis L.C., Kress J.W.* Practical cone-beam algorithm // Journ. Opt. Soc. Amer. A. 1984. Vol. 1, iss. 6. P. 612–619.
3. *Andersen A. H., Kak A. C.* Simultaneous algebraic reconstruction technique (SART): a superior implementation of the ART algorithm // Ultrasonic imaging. 1984. Vol. 6, № 1. P. 81–94.
4. *Minerbo G.* MENT: A Maximum entropy algorithm for reconstructing a source from projection data // Computer Graphics and Image Processing 10, Los Alamos, New Mexico, USA. 1979. P. 48–68.

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках постановления Правительства Российской Федерации № 218.

## ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ МЕТОД АРНОЛЬДИ ПОИСКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ

Григорян Л.А.<sup>1</sup>, Саиег Т.Х.<sup>2</sup>

СКФУ, Ставрополь, Россия; <sup>1</sup>[honey.lusine@mail.ru](mailto:honey.lusine@mail.ru); <sup>2</sup>[dr.timor@mail.ru](mailto:dr.timor@mail.ru)

Рассмотрим подпространство Крылова и сформулируем последовательность векторов  $v, Av, A^2v, \dots, A^{k-1}v$ . Также как и при решении линейных алгебраических систем уравнений, собственные векторы можно искать во всем пространстве  $K_k(A, v)$ . В этом подпространстве можно вычислить наилучшие приближения к собственным значениям и собственным векторам. Эти наилучшие приближения называются числами и векторами Ритца.

Решая задачу на собственные значения  $AX = \lambda X$ , введем обозначения:  $v$  – приближенное значение собственного вектора, а  $\mu$  – приближенное значение собственного числа. Вектор  $v$  и число  $\mu$  связаны условием Рэлея – Ритца, т. е. условием ортогональности  $r = Av - \mu v$  невязки к подпространству ( $k$ -мерное подпространство)  $Av - \mu v \perp P$ .

В данной работе для нахождения собственных векторов и собственных значений используются стандартные функции библиотеки CUBLAS для работы с разреженными матрицами.

### Литература

1. Smith B., Bjorstad P., Gropp W. Domain decomposition: parallel multilevel methods for elliptic partial differential equations. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
2. Saad Y. Iterative methods for sparse linear systems // Society for Industrial and Applied Mathematics. Philadelphia. USA. 2003.
3. Saad Y. Analysis of some Krylov subspace approximations to the matrix exponential operator // SIAM Journal on Numerical Analysis. 1992. Vol. 29, № 1. P. 209–228.

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАВНОВЕСНЫХ ФОРМ  
МАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ В ОКРЕСТНОСТЯХ ПЛАСТИНЫ**

**Гришанина О.А., Литвин Д.Б. Симоновский А.Я.**

*СтГАУ, Ставрополь, Россия; inf@stgau.ru*

Разработана математическая модель, описывающая равновесные формы свободной поверхности магнитной жидкости вблизи поверхности ферромагнитной пластины, помещенной в однородное внешнее магнитное поле. Показано, что распределение магнитной жидкости вблизи пластины зависит от соотношения размеров поперечного сечения пластины, а также соотношения объема магнитной жидкости, окружающей пластину, к объему самой пластины. Вблизи центральной части «короткой» пластины в объеме магнитной жидкости образуются две конусообразных полости по обе стороны пластины. Вблизи торцов «длинной» пластины образуются по две конусообразных полостей по обе стороны каждого торца пластины. Распределение свободной поверхности магнитной жидкости вблизи «длинной» пластины с выполненным вдоль ее вертикальной оси симметрии отверстием, превращающим пластину в составную из двух «коротких» таково – вблизи поверхности этой пластины в объеме магнитной жидкости формируются уже восемь воздушных полостей. Образование описанных полостей, наблюдаемых в экспериментах, моделировалось математическими методами теории функций комплексного переменного. Теоретический анализ формы свободной поверхности магнитной жидкости вблизи поверхности пластины осуществлен следующим образом. Магнитное поле  $H$  пластины с бесконечной магнитной проницаемостью во внешнем однородном параллельном пластине магнитном поле  $H_0$ , как обычно, определяется из уравнения Лапласа:  $H = \Delta\varphi$ . Потенциал магнитного поля  $\varphi$  может быть представлен в виде вещественной части некоторой комплексной функции  $\Phi$ , то есть, как  $\varphi = \operatorname{Re}\Phi$ . Используя функцию Жуковского, было осуществлено конформное преобразование. В результате была получена функция  $\Phi$ , описывающая распределения свободной поверхности магнитной жидкости:

$$\Phi = \frac{H_0 L}{2} \left[ z + \sqrt{z^2 - 1} - \frac{1}{z + \sqrt{z^2 - 1}} \right].$$

Здесь  $z = x + iy$  – безразмерная координата точки свободной поверхности магнитной жидкости;  $L$  – длина пластины.

---

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 17-01-00037.

**ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ  
НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ПЕРВОГО  
РОДА ВТОРОГО ПОРЯДКА В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ**

**Джамалов С.З.<sup>1</sup>, Ашуроев Р.Р.<sup>2</sup>**

*ИМ АН РУз, Ташкент, Узбекистан; <sup>1</sup>siroj63@mail.ru; <sup>2</sup>ashurovr@gmail.ru;*

В докладе излагаются некоторые результаты об однозначной разрешимости нелокальной краевой задачи с постоянными коэффициентами для нагруженного уравнения смешанного типа первого рода второго порядка в плоскости [1].

В области  $Q = (-\alpha, \beta) \times (0, T) = \{(x, t); -\alpha < x < \beta; 0 < t < T < +\infty\}$  рассмотрим нагруженное дифференциальное уравнение второго порядка

$$Lu = K(x)u_{tt} - u_{xx} + \alpha(x, t)u_t + c(x, t)u = f(x, t) + Pu(x, 0), \quad (1)$$

где  $xK(x) > 0$  при  $x \neq 0$ ,  $-\alpha < x < \beta$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ,

$$Pu(x, 0) = b_2(x, t)u_{xx}(x, 0) + b_1(x, t)u_x(x, 0) + b_0(x, t)u(x, 0).$$

**Задача.** Найти обобщенное решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям:

$$\gamma D_t^p u|_{t=0} = D_t^p u|_{t=T}, \quad (2)$$

$$\eta D_x^p u|_{x=-\alpha} = D_x^p u|_{x=\beta}, \quad (3)$$

где  $\gamma$  и  $\eta$  — const  $\neq 0$ ,  $D_t^p u = \frac{\partial^p u}{\partial t^p}$ ,  $D_t^0 u = u$ ,  $D_x^p u = \frac{\partial^p u}{\partial x^p}$ ,  $D_t^0 u = u$ , при  $p = 0, 1$ .

В данной работе в случае, когда  $Pu(x, 0) \neq 0$  и при выполнении некоторых условий на коэффициенты уравнения (1), доказывается методами « $\varepsilon$ -регуляризации», априорных оценок и последовательных приближений однозначная разрешимость задачи (1)–(3) из пространства Соболева  $W_2^3(Q)$ .

**Литература**

1. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их приложения // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19, № 1. С. 86–94.

## Об одном алгоритме обучения логических нейронных сетей

Димитриченко Д.П.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; dimdp@rambler.ru

В процессе интеллектуальной обработки данных при помощи нейронных сетей [1] совокупность объектов и характеризующих их свойств (признаков), представима в виде логической системы, как совокупности производственных правил:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Конъюнкция признаков } 1 \rightarrow \text{Объект } 1 \\ \text{Конъюнкция признаков } 2 \rightarrow \text{Объект } 2 \\ \dots \\ \text{Конъюнкция признаков } m \rightarrow \text{Объект } m. \end{array} \right.$$

В результате логических преобразований [2] формируется функция  $F(X, W)$ , образующая соответствующие подклассы объектов с различными степенями близости.

В работе [3] был предложен схемотехнический подход для построения логической нейронной сети.

Доказана теорема [4]:

**Теорема.** Всякая переменнозначная логическая функция представлена в виде логической нейронной сети, совокупность логических связей в которой взаимно однозначно определяется структурой производственных дизъюнктов и дизъюнктов свободных знаний.

Предложен алгоритм обучения логической нейронной сети, использующий особенности вычислений в алгебре логики при использовании переменнозначных предикатов.

### Литература

1. Тимофеев А.В., Косовская Т.М. Нейросетевые методы логического описания и распознавания сложных образов // Труды СПИИРАН. 2013. Вып. 27. С. 144–155.
2. Лютикова Л.А. Моделирование и минимизация баз знаний в терминах многозначной логики предикатов. Нальчик. Препринт, 2006. 33 с.
3. Барский А.Б. НЕЙРОННЫЕ СЕТИ: распознавание, управление, принятие решений. Москва: «Финансы и статистика», 2004. 170 с.
4. Димитриченко Д.П. Применение переменнозначных логических функций и нейронных сетей в системах принятия решений // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2016. № 4-1(16). С. 93–100.

---

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-01-00050-а.

**НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА С ДИНАМИЧЕСКИМИ ГРАНИЧНЫМИ  
УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ**

**Дюжева А.В.**

*Самарский университет, Самара, Россия; aduzheva@rambler.ru*

Рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - (a(x, t)u_x)_x + c(x, t)u = f(x, t) \quad (1)$$

в области  $Q_T = (0, l) \times (0, T)$ , где  $l, T < \infty$  и поставим для него следующую задачу: *найти решение уравнения (1) в области  $Q_T$ , удовлетворяющее начальным данным*

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0 \quad (2)$$

и *граничным условиям*

$$a(0, t)u_x(0, t) = (\alpha_1(t)u_t(0, t))_t + (\beta_1(t)u_t(l, t))_t, \quad (3)$$

$$a(l, t)u_x(l, t) = (\alpha_2(t)u_t(0, t))_t + (\beta_2(t)u_t(l, t))_t. \quad (4)$$

Будем предполагать, что коэффициенты уравнения (1), его правая часть, а так же функции  $\alpha_i(t)$ ,  $\beta_i(t)$  в (3), (4) достаточно гладкие,  $a(x, t) > 0$  в  $\bar{Q}_T$ .

**Теорема.** *Пусть выполняются следующие условия:*

$$a \in C(\bar{Q}_T), \quad a_t \in C(\bar{Q}_T), \quad c \in C(\bar{Q}_T), \quad c_t \in C(\bar{Q}_T),$$

$$f \in L_2(Q_T), \quad f(x, 0) = 0;$$

$$\alpha_i, \beta_i \in C^1[0, T], i = 1, 2$$

$$\alpha_2(t) + \beta_1(t) = 0, \quad \forall t \in [0, T];$$

$$\alpha_1(t)\xi_1^2 + 2\beta_2(t)\xi_1\xi_2 - \beta_2(t)\xi_2^2 \geq 0, \quad \forall t \in [0, T];$$

$$\alpha'_1(t)\xi_1^2 + 2\beta'_2(t)\xi_1\xi_2 - \beta'_2(t)\xi_2^2 \leq 0, \quad \forall t \in [0, T];$$

$$\alpha''_1(t)\xi_1^2 + 2\beta''_2(t)\xi_1\xi_2 - \frac{1}{2}\beta''_2(t)\xi_2^2 \geq 0, \quad \forall t \in [0, T].$$

*Тогда существует единственное обобщенное решение задачи (1)-(4).*

**Литература**

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 42 с.
2. Дюжева А.В. Задача с динамическими условиями для гиперболического уравнения // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2017. Т. 23, № 1. С. 7–14.

**О МОДЕЛИРОВАНИИ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЯ В  
ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ ВОДНЫМИ И ЗЕМЕЛЬНЫМИ РЕСУРСАМИ  
ОРОСИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ**

**Жемухов Р.Ш., Жемухова М.М.**

*КБГУ, Нальчик, Россия;*

Нарушение естественного водного режима почв при орошении сопровождается резким нарушением установившегося уровня грунтовых вод, изменением баланса органического вещества, энергии направленности почвообразовательного процесса, формированием возвратного стока и его влиянием на качество водных ресурсов. Поэтому задача исследования развития оросительной системы должна в себя включать не только вопросы управления водоземельными ресурсами, но также необходим учет природоохраных требований.

В работе предлагается один из возможных подходов к решению указанной задачи. Для оценки минерализации грунтовых вод вследствие их подъема применялся метод, предложенный С.Ф. Аверьяновым [1]:

$$C_2 = \alpha C_1 + 10 \cdot \frac{a \cdot C_3 \cdot d}{m},$$

где  $C_1, C_2$  – соответственно исходная и прогнозируемая минерализация грунтовых вод, г/л;  $C_3$  – содержание солей в почвогрунте, %;  $a = 0,5$  – количество солей, переходящих из почвогрунта в грунтовую воду, в долях единицы;  $\alpha$  – доля участия грунтовых вод в подъеме их уровня (принимается равным единице);  $d$  – объемный вес почвы, г/см<sup>3</sup>;  $m$  – порозность, в долях единицы.

Прямыми следствием подъема уровня грунтовых вод и изменения их минерализации является нарушение естественного солевого баланса орошаемых земель. Для расчетов солевого режима почв был использован метод В.Р. Волобуева [2]:

$$C_3 = C_0 \cdot e^{\left( \frac{E_{\text{сум}}}{\gamma \eta} - \frac{D}{\beta \eta} \right)},$$

где  $\gamma$  и  $\eta$  – постоянные;  $\gamma = 2,718$ ;  $\eta = 0,434$ ;  $\beta$  – показатель солеотдачи;  $C_0, C_3$  – содержание солей в метровом слое соответственно в начале и в конце водохозяйственного года, %;  $D$  – дренажный сток, м<sup>3</sup>/га;  $E_{\text{сум}}$  – суммарное испарение за расчетный период.

Результаты расчетов позволяют сделать вывод, что указанные модели могут быть использованы при решении задач по управлению водными и земельными ресурсами оросительной системы при развитии орошения.

**Литература**

1. Аверьянов С.Ф. Борьба с засолением орошаемых земель. М.: Колос, 1978. 288 с.
2. Волобуев В.Р. Расчет промывки засоленных почв. М.: Колос, 1975. 71 с.

## **ПРИМЕНЕНИЕ ЛОГИЧЕСКИХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ В ЗАДАЧАХ КЛАССИФИКАЦИИ**

**Жилов Р.А.**

*ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; zhilov91@gmail.com*

Задачи классификации возникают в различных областях знаний в процессе интеллектуальной обработки данных и решаются с целью построения прогнозной модели. Существует огромное количество алгоритмов классификации, применяющиеся в решении определенных задач. Требуется построить классификатор, подходящий под более широкий круг задач и обладающий возможностью обучения и дообучения в изменяющихся условиях. При решении этой задачи предлагается использовать нейронные сети.

В этой связи хорошо зарекомендовал себя особый подкласс нейронных сетей: логическая нейронная сеть с булевыми выходами, которую при необходимости легко можно адаптировать для работы с нечеткой логикой [1]. В такой нейронной сети на выходном слое нейронов столько, сколько классов, и принадлежность объекта классификации к данному классу определяется 1 на выходе данного нейрона и 0 на всех остальных. При решении задачи классификации сетью Ванга – Менделя появляются некоторые трудности при увеличении количества классов, так как данная сеть имеет один выходной нейрон. Это приводит к увеличению вероятности ошибки [2].

При построении логической нейронной сети для задачи классификации выходные нейроны будут соответствовать классам, а входные нейроны будут соответствовать характеристикам объектов, подлежащих классификации. Обучение нейронной сети будет проводиться методом трассировки. Применяя алгоритм трассировки к полученной нейронной сети, мы устанавливаем связи между всеми нейронами входного слоя и нейронами выходного слоя либо напрямую, либо через скрытый слой. При обучении проводится отсеивание тех связей, которые не ведут к нужному (требуемому) выходному нейрону.

### **Литература**

1. Димитриченко Д.П. Применение переменнозначных логических функций и нейронных сетей в системах принятия решений // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2016. № 4-1(16). С. 93–100.
2. Солдатова О.П., Лёзин И.А. Решение задачи классификации с использованием нейронных нечетких производственных сетей на основе модели вывода Мамдани – Заде // Вестник Самарского гос. тех. Университета. Физ.-мат. науки. 2014. № 2 (35). С. 136–148.

## Аддитивная задача с $k$ числами специального вида

Жукова А.А.<sup>1</sup>, Шутов А.В.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Владимирский филиал РАНХиГС, Владимир, Россия; georg967@mail.ru

<sup>2</sup>БлГУ, Владимир, Россия; a1981@mail.ru

Пусть  $\alpha$  – иррационально и  $I \subset [0; 1)$  – некоторый интервал. Определим множество  $\mathbb{N}(\alpha, I) = \{n \in \mathbb{N} : \{\{n\alpha\} \in I\}\}$ , где  $\{\cdot\}$  означает дробную долю числа.

Обозначим через  $r_k(\alpha_1, \dots, \alpha_k, I_1, \dots, I_k, N) = r_k(N)$  – число решений уравнения  $n_1 + \dots + n_k = N$ , где  $k \geq 2$ , слагаемые удовлетворяют условием  $n_i \in \mathbb{N}(\alpha_i, I_i)$  при всех  $1 \leq i \leq k$ ,  $\alpha_i$  – произвольные иррациональные числа.

В работе [1] решена бинарная аддитивная задача вида  $n_1 + n_2 = N$  с дополнительными условиями  $n_1 \in \mathbb{N}(\alpha_1, I_1)$ ,  $n_2 \in \mathbb{N}(\alpha_2, I_2)$  и произвольными иррациональными  $\alpha_1, \alpha_2$ , решена в работе.

Аддитивная задача о числе решений уравнения  $n_1 + \dots + n_k = N$  с дополнительными условиями на слагаемые  $n_i \in \mathbb{N}(\alpha, I_i)$ , с произвольным количеством слагаемых  $k$  и произвольным иррациональным  $\alpha$  рассмотрена в работе [2].

Рассмотрим линейное пространство  $\mathbb{A}^n$  над полем рациональных чисел, порожденное числами  $1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , где  $\alpha_i$  – иррациональные числа, такие что  $0 < \alpha_i < 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Пусть  $d$  – размерность пространства  $\mathbb{A}^n$  над  $\mathbb{Q}$ . В силу того, что все  $\alpha_i$  – иррациональны, выполняется неравенство  $2 \leq d \leq n + 1$ .

Справедлива следующая теорема.

**Теорема.** Справедлива асимптотическая формула

$$r_k(N) \sim \begin{cases} \frac{1}{(k-1)!} \rho_k(\{\hat{\alpha}_k\}) N^{k-1}, & \text{если } d = 2, \\ \frac{1}{(k-1)!} \prod_{i=1}^k |I_i| N^{k-1}, & \text{если } d \geq 3, \end{cases}$$

здесь  $\hat{\alpha}_k$  – эффективно выражаемая через  $1, \alpha_1, \dots, \alpha_k$  величина,  $\rho_k(x)$  – кусочный многочлен степени  $k - 1$  и  $k \geq 2$ .

### Литература

1. Жукова А.А., Шутов А.В. Бинарная аддитивная задача с числами специального вида // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16, № 3. С. 247–275.
2. Шутов А.В. Об одной аддитивной задаче с дробнымиолями // Научные ведомости БелГУ. Серия Математика. Физика. 2013. Т. 5 (148), № 30. С. 111–120.

**ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ**

**Жураев А.Х.**

*НамИСИ, Наманган, Узбекистан; abdulla jurayev@mail.ru*

Рассмотрим уравнение

$$U_{xxx} - U_{yy} + AU_{xx} + BU_x + CU_y + DU = 0,$$

где  $A, B, C, D \in R$ . Заметим, что заменой  $U(x, y) = u(x, y) e^{-\frac{A}{3}x + \frac{C}{2}y}$ , это уравнение преобразуется в следующий вид:

$$u_{xxx} - u_{yy} + au_x + cu = 0, \quad (1)$$

где  $a = -\frac{A^2}{3} + B$ ,  $c = \frac{2A^3}{27} + \frac{C^2}{4} - \frac{AB}{3} + D$ . В дальнейшем будем считать, что  $c > 0$ ,  $a > 0$ .

В области  $D = \{(x, y) : 0 < x, y < 1\}$  рассмотрим следующую задачу.

**Задача B.** Найти в области  $D$  решение уравнения (1) из класса  $C_{x,y}^{3,2}(D) \cap C_{x,y}^{2,1}(\overline{D})$ , удовлетворяющее следующим краевым условиям:

$$\begin{cases} \alpha u(x, 0) + \beta u_y(x, 0) = 0, \\ \gamma u(x, 1) + \delta u_y(x, 1) = 0, \end{cases} \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u_x(1, y) = \varphi_2(y), \quad u_{xx}(1, y) = \varphi_3(y),$$

где  $\varphi_i(y) \in C^3[0, 1]$ ,  $i = 1, 3$ , заданные, гладкие функции, кроме того:

$$\alpha \varphi_i(0) + \beta \varphi'_i(0) = 0, \quad \gamma \varphi_i(1) + \delta \varphi'_i(1) = 0, \quad \varphi''(0) = \varphi''(1) = 0.$$

Здесь  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  – постоянные числа, причем  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ ,  $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$ .

Отметим, что случай  $a = c = 0$  исследован в работе [1]. Справедлива теорема.

**Теорема.** Если  $\varphi_i(y) \in C^3[0, 1]$ ,  $\alpha \varphi_i(0) + \beta \varphi'_i(0) = 0$ ,  $\gamma \varphi_i(1) + \delta \varphi'_i(1) = 0$ , то задача B однозначно разрешима.

**Литература**

1. Анаков Ю.П. Решение краевых задач для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками методом разделения переменных // Узбекский математический журнал. 2007. № 1. С. 14–23.

**НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ С НЕЛИНЕЙНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ**

**Жураев Б.Б., Сакиева О.**

Термезский филиал ТГТУ, Термез, Узбекистан; bakhodir.zhuraev.52@mail.ru

В настоящей работе изучается для одного типа неклассического уравнения третьего порядка с кратными характеристиками с нелинейным граничным условием.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + C(x, y)u = F(x, y). \quad (1)$$

Рассмотрим следующую краевую задачу: *найти в области  $D$  решение  $u(x, y)$  уравнения (1) из класса  $C^{2,1}(\bar{D}) \cap C^{3,2}(D)$  удовлетворяющее следующим краевым условиям:*

$$u(x, 0) = \varphi_0(x), 0 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

$$\alpha_1(x)u(x, 0) + \alpha_1(x)u(x, 1) = \varphi_1(x), 0 \leq x \leq 1, \quad (3)$$

$$\beta_0(y)u(0, y) + \beta_1(y)u_x(1, y) = \psi_0(y), 0 \leq y \leq 1, \quad (4)$$

$$\gamma_0(y)u_x(0, y) = \gamma_1(y)u_{xx}(1, y) = \psi_1(y), 0 \leq y \leq 1, \quad (5)$$

$$u(0, y) = \psi_2(u), 0 \leq y \leq 1, \quad (6)$$

где  $D = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y \leq 1\}$ ,  $F(x, y), \alpha_i(x), \beta_i(x), \gamma_i(x)$  ( $i = 0, 1$ ) заданные непрерывные функции своих аргументов.

При определенных условиях на заданные функции доказана однозначная разрешимость задачи (2)–(6).

**Литература**

1. Джсураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: ФАН, 1979. 240 с.
2. Абдиназаров С. Об одной краевой задаче для одного неклассического уравнения // Узбек. мат. журн. 1991. № 4. С. 3–13.

**КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ  
ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ**

**Зайцева Н.В.**

*КФУ, Казань, Россия; n.v.zaiceva@yandex.ru*

Рассмотрим в области  $D = \{(x, t) | 0 < x < l, 0 < t < T\}$ , где  $l, T > 0$  – заданные действительные числа, гиперболическое уравнение с оператором Бесселя

$$\square_B u(x, t) \equiv u_{tt} - x^{-k} \frac{\partial}{\partial x} \left( x^k \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0, \quad (1)$$

где  $k \leq -1$  – заданное действительное число.

**Задача.** Найти функцию  $u(x, t)$ , удовлетворяющую условиям:

$$\begin{aligned} u(x, t) &\in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D), \\ \square_B u(x, t) &\equiv 0, \quad (x, t) \in D, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \\ u(0, t) &= 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ \left. \left( x^{k-1} u(x, t) \right)' \right|_{x=l} + \int_0^l u(x, t) x \, dx &= 0, \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  – заданные, достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям согласования

$$\left. \left( x^{k-1} \varphi(x) \right)' \right|_{x=l} + \int_0^l \varphi(x) x \, dx = 0, \quad \left. \left( x^{k-1} \psi(x) \right)' \right|_{x=l} + \int_0^l \psi(x) x \, dx = 0.$$

Условие (2) называется нелокальным интегральным условием второго рода. Краевые задачи для уравнения (1) при  $k > -1$  и  $k \neq 0$  с интегральным условием второго рода ранее были изучены в работе [1].

В данной работе методом спектрального анализа доказаны теоремы единственности, существования и устойчивости решения задачи. Решение построено в явном виде, в виде ряда Фурье – Бесселя и приведено обоснование сходимости ряда в классе регулярных решений.

**Литература**

1. Сабитов К.Б., Зайцева Н.В. Начальная задача для  $B$ -гиперболического уравнения с интегральным условием второго рода // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54, № 1. С. 123-135. DOI: 10.1134/S0374064118010107

## ПРИМЕНЕНИЕ ГРЕБНЕВОЙ РЕГРЕССИИ В МАШИННОМ ОБУЧЕНИИ

Захарова Н.И.<sup>1</sup>, Захаров В.В.<sup>2</sup>

СКФУ, Ставрополь, Россия; <sup>1</sup>nizakharova@mail.ru; <sup>2</sup>vvzakharov@mail.ru

В методе наименьших квадратов нахождение коэффициента регрессии  $\beta_0; \beta_1; \dots; \beta_k$  происходит путем минимизации функции

$$RSS = \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^k \beta_j x_{ij})^2 \rightarrow \min.$$

Гребневая регрессия очень похожа на регрессию по методу наименьших квадратов, но происходит минимизация несколько другой функции

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^k \beta_j x_{ij})^2 + \lambda \sum_{j=1}^k \beta_j^2 = RSS + \lambda \sum_{j=1}^k \beta_j^2.$$

Здесь  $\lambda \geq 0$  – параметр, который находится отдельно. При  $\lambda \rightarrow 0$  оценки параметров  $\beta_j$  совпадут с оценками метода наименьших квадратов.

При  $\lambda \rightarrow \infty$  оценки параметров  $\beta_j$  будут стремится к нулю.

Таким образом в отличии от метода наименьших квадратов гребневая регрессия будет порождать отдельный набор оценок коэффициента  $\beta_j$  для каждого значения  $\lambda$ . Выбор наилучшего значения  $\lambda$  определяется методом перекрестных оценок.

Метод гребневой регрессии был применен для расчета и предсказания в статистическом пакете R затрат газа в Ставропольском крае по данным региональной энергетической комиссии.

### Литература

1. Bishop C. Pattern recognition and machine learning. New York: Springer, 2006.
2. Zhdanov F., Vovk V. Competing with Gaussian linear experts // arXiv preprint arXiv:0910.4683

**Об одной нелокальной задаче с интегральными условиями для уравнения третьего порядка**

**Зикиров О.С.**

*НУУз, Ташкент, Узбекистан; zikirov@yandex.ru*

В данной работе рассматривается вопрос о разрешимости одной нелокальной задачи с интегральными условиями для линейного гиперболического уравнения третьего порядка.

В области  $D = \{(x, y) : 0 < x < l, 0 < y < h\}$  исследуется следующая задача: *найти в области  $D$  решение  $w(x, y)$  уравнения*

$$Mw \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) w_{xy} + c(x, y)w = F(x, y), \quad (1)$$

*удовлетворяющее условиям:*

$$w(x, 0) = \Psi_1(x), \quad \int_0^h w(x, y)dy = \Psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$w(0, y) = \Phi_1(y), \quad \int_0^l w(x, y)dx = \Phi_2(y), \quad 0 \leq y \leq h,$$

где  $F(x, y)$ ,  $\Psi_i(x)$ ,  $\Phi_i(y)$ , ( $i = 1, 2$ ) – заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие следующим условиям согласования  $\Phi_1(0) = \Psi_1(0)$ ,

$$\int_0^h \Phi_1(y)dy = \Psi_2(0), \quad \int_0^l \Psi_1(x)dx = \Phi_2(0), \quad \int_0^h \Phi_2(y)dy = \int_0^l \Psi_2(x)dx.$$

Очевидно, что прямые  $x = const, y = const$  являются характеристиками уравнения (1) и граничные условия задаются в интегральном виде.

Доказаны теоремы существования и единственности классических решений. Методом энергетических неравенств получены априорные оценки для решения рассматриваемой задачи. Из полученных оценок следует единственность и непрерывная зависимость решения от данных задач. Исследование разрешимости классических решений приводится к изучению системы интегральных уравнений Вольтерра второго рода.

---

Работа выполнена при поддержке фонда фундаментальных исследований РУз., проект ОТ-Ф4-36+32.

## Аддитивные задачи с простыми числами

Зинченко Н.А.

НИУ «БелГУ», Белгород, Россия; zinchenko@bsu.edu.ru

Аддитивная теория чисел занимается задачами о разбиении чисел на слагаемые различного вида. Среди них особое место занимают задачи с простыми числами. В этих задачах простые числа встречаются в качестве слагаемых. Наиболее известной является проблема Гольдбаха – Эйлера, в которой объединены две задачи, поставленные знаменитыми учеными еще в 18 веке. Задача Гольдбаха о представлении нечетного числа в виде суммы трех простых чисел получила название тернарной проблемы и была решена окончательно только в 20 веке в результате применения И.М. Виноградовым развитого им метода тригонометрических сумм [1], основы которого были разработаны Г. Харди и Дж. Литтлвудом. Метод Виноградова был использован для решения многих аддитивных задач с простыми числами, например, проблемы Варинга с простыми числами. Но к бинарным аддитивным задачам с простыми числами не удавалось применить круговой метод Харди – Литтлвуда-Виноградова. Многие из этих задач были решены дисперсионным методом Ю.В. Линника [2]. В дальнейшем для решения бинарных аддитивных задач с простыми числами стали применять теорему Бомбьери – Виноградова [3, 4].

Представляют интерес аддитивные задачи с простыми числами из промежутков, введенных И.М. Виноградовым, и получивших название «виноградовских» или просто – «коротких». Бинарные аддитивные задачи, в отличие от тернарных, пока не поддаются решению, так как не удается получить аналога теоремы Бомбьери – Виноградова, равного ей по силе, для простых чисел из коротких промежутков. Удалось решить ряд бинарных аддитивных задач с полупростыми числами из коротких промежутков, например, вывести асимптотические формулы для числа решений уравнений  $p_1 p_2 - xy = 1$ ,  $xy + p_1 p_2 = n$ ,  $p_1 p_2^a - xy = 1$ , где простые числа  $p_1$  и  $p_2$  удовлетворяют дополнительным условиям.

### Литература

1. Виноградов И.М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. М.: Наука, 1976. 120 с.
2. Линник Ю.В. Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах. Л.: Изд-во ЛГУ, 1961. 208 с.
3. Bombieri E. On the large sieve // Mathematica. 1965. Т. 12. Р. 201–225.
4. Виноградов А.И. О плотностной гипотезе для  $L$ -рядов Дирихле // Изв. АН СССР. Сер. Математика. 1965. Т. 29, № 4. С. 903–934.

**Об одной задаче для системы уравнений смешанного типа в неограниченной области**

Зуннунов Р.Т.<sup>1</sup>, Эргашев А.А.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ИМиСС АН РУз, Ташкент, Узбекистан; <sup>1</sup>zunnunov@mail.ru

<sup>2</sup>КГПИ, Коканд, Узбекистан;

Рассмотрим систему уравнений смешанного типа

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{sign} y|y|^m u_x - v_y = 0 \\ u_y + v_x = 0 \end{array} \right\}, \quad m > 0 \quad (1)$$

в неограниченной смешанной области  $\Omega = \Omega_1 \cup AB \cup \Omega_2$ , где  $\Omega_1 = \{(x, y) : -\infty < x < +\infty, 0 < y < 1\}$ , а  $\Omega_2$  – область ограниченная, при  $y < 0$  отрезком  $\overline{AB}$  оси  $y = 0$  где  $A(-1, 0), B(0, 1)$ , и характеристиками  $AC : x - [2/(m+2)](-y)^{(m+2)/2} = -1$  и  $BC : x + [2/(m+2)](-y)^{(m+2)/2} = 1$ , системы (1).

**Задача  $T^\infty$ .** Найти систему функций  $u(x, y), v(x, y)$  обладающую следующими свойствами:

- 1)  $u(x, y), v(x, y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega);$
- 2) функции  $u(x, 0), v(x, 0) \in C^1(0, 1);$
- 3)  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  удовлетворяет следующим условиям

$$u(x, 1) = 0, \quad -\infty < x < +\infty;$$

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{при} \quad |x| \geq 1;$$

$$u|_{AC} = \varphi(x) \quad \text{при} \quad -1 \leq x \leq 0;$$

$$v(-1, 0) = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, y) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} v(x, y) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad y \in [0, 1];$$

где  $\varphi(x) = x^{1+\varepsilon}\bar{\varphi}(x)$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $\bar{\varphi}(x) \in C^2[-1, 0]$ ,  $(\bar{\varphi}(x))'' \in H[-1, 0]$ .

Методами интегральных уравнений и принципа экстремума доказывается однозначная разрешимость исследуемой задачи.

**ЗАДАЧА Коши для одной системы трёх дифференциальных уравнений с производной дробного порядка**

**Ибавов Т.И.**

*ДГУ, Махачкала, Россия; ibavov94@mail.ru*

На отрезке  $[0, T]$  рассмотрим систему трех дифференциальных уравнений с производными дробного порядка вида:

$$\begin{aligned}\partial_{0t}^\alpha x &= -y - z, \\ \partial_{0t}^\alpha y &= x + ay, \\ \partial_{0t}^\alpha z &= kx + qz.\end{aligned}\tag{1}$$

где  $0 \leq \alpha < 1$ ,  $a, q, k$  – некоторые постоянные,  $\partial_{0t}^\alpha u(t) = \frac{1}{(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u'(s)ds}{(t-s)^\alpha}$  – дробная производная Капuto.

Сформулируем задачу Коши для системы (1).

**Задача.** Найти решение  $x(t), y(t), z(t)$  системы дифференциальных уравнений (1) удовлетворяющих начальным условиям

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad z(0) = z_0.\tag{2}$$

Имеет место следующая теорема.

**Теорема.** Решение задачи (1)–(2) из класса  $AC^2[0, T]$  представимо в виде

$$\begin{aligned}x(t) &= Q(t)(x_0(1 - q - a + aq) + y_0(q - 1) + z_0(a - 1)), \\ y(t) &= Q(t)(y_0(1 - q + k) - x_0(q - 1) + z_0), \\ z(t) &= Q(t)(z_0(2 - a) + kx_0(1 - a) - ky_0), \\ Q(t) &= \frac{(\lambda_2 - \lambda_3)E_{\alpha,1}(\lambda_1 t^\alpha) - (\lambda_1 - \lambda_3)E_{\alpha,1}(\lambda_2 t^\alpha) + (\lambda_1 - \lambda_2)E_{\alpha,1}(\lambda_3 t^\alpha)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)},\end{aligned}$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  – корни характеристического уравнения:

$$p^{3\alpha} - (q + a)p^{2\alpha} + (aq + k + 1)p^\alpha - (ak + q) = 0.$$

## **Необходимость внедрения СЭД в ВУЗе**

**Ибрагим А.С.**

*КБГУ, Нальчик, Россия; asibragim@gmail.com*

Внедрение системы электронного документооборота (СЭД) в вузе обеспечит: увеличение скорости обработки информации; сокращение затрат на бумажную волокиту; своевременный обмен данными между структурными подразделениями, находящимися на удалении друг от друга; строгую систематизацию; минимизацию вероятности потерь; повысится надежность и качество работы сотрудников. Будет облегчена работа профессорско-преподавательского состава. При использовании СЭД возникает необходимость защиты конфиденциальной информации, которой будут обмениваться посредством СЭД. Для этой цели можно использовать электронно-цифровую подпись (ЭЦП), которая обеспечит такие характеристики документам, как: подлинность – подтверждение авторства документа; целостность – невозможность изменения документа после подписи; неотказуемость – невозможность отказа автором от своей подписи. Внедрение ЭЦП в СЭД можно будет использовать при дистанционном обучении - при выставлении промежуточных результатов текущей и итоговой аттестации [1].

СЭД должна обеспечивать автоматизацию процессов: приема, обработки, распределения, подписания, регистрации, рассылки поступающей и исходящей корреспонденции, внутренних и внешних организационно - распорядительных документов; переписки между организациями и отдельными подразделениями [2]. Информация будет систематизирована и объединена в единую систему, что значительно облегчит поиск документов. Введение ЭЦП в университет приведет к облегчению работы профессорско-преподавательского состава и обеспечит надежность его работы, немаловажное значение имеет дистанционное выставление оценок, без присутствия преподавателей непосредственно в университете. При использовании электронного документооборота произойдет разграничение прав доступа к различным документам и системным функциям.

### **Литература**

1. Ибрагим А.С. Концепция внедрения электронных ведомостей в учебных заведениях // Материалы Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Перспектива-2015», том IV. Нальчик: 2015. С. 319–322.
2. Уваров С.В. Системы электронного документооборота: развитие и трансформация // Управленец. Ур ГЭУ. Екатеринбург. 2012. № 7-8. С. 70–71.

**ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДМОДЕЛИ ДВУХФАЗНОЙ СИСТЕМЫ  
АНДЕРСОНА В СЛУЧАЕ ОДНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ  
ПЕРЕМЕННОЙ**

**Иванова Н.Д.**

*ЮУрГУ (НИУ); ЧелГУ, Челябинск, Россия; natalia.d.ivanova@gmail.com*

Рассмотрим модель Андерсона динамики двухфазной среды в одномерном изотермическом случае [1], которая имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_1 u_1)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\rho_1 u_1)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_1 u_1^2 + m_1 p_1)}{\partial x} = p_1 \frac{\partial m_1}{\partial x} - \frac{\rho_2(u_1 - u_2)}{\tau}, \\ \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_2 u_2)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\rho_2 u_2)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_2 u_2^2 + m_2 p_1)}{\partial x} + \frac{\partial p_2}{\partial x} = p_1 \frac{\partial m_2}{\partial x} + \frac{\rho_2(u_1 - u_2)}{\tau}. \end{cases}$$

Здесь  $p_1 = \frac{a_1^2 \rho_1}{1 - \rho_2 \rho_{22}}$ ,  $p_2 = a_2^2 \rho_2$ . В отличие от модели Рахматулина динамики двухфазной среды [2], модель Андерсона учитывает взаимодействие частиц второй фазы. Групповые свойства уравнения Рахматулина были ранее исследованы в работах [3, 4].

В данной работе исследуются свойства симметрий представленной модели Андерсона. Для найденных групп симметрий строится оптимальная система подалгебр. Для каждой подгруппы составляется инвариантная подмодель [5].

**Литература**

1. Федоров А.В., Бедарев И.А. Структура ударных волн в газовзвеси с хаотическим давлением частиц // Матем. моделирование. 2017. Т. 29, № 6. С. 3–20.
2. Рахматулин Х.А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред // Прикл. математика и механика. 1956. Т. 20, № 2. С. 184–195.
3. Панов А.В. Точные решения уравнений динамики двухфазной среды. Коллапс газа и частиц в пространстве // Сибирский журнал индустриальной математики. 2017. Т. 20, № 2 (17). С. 71–82.
4. Федоров В.Е., Панов А.В. Инвариантные и частично инвариантные решения системы уравнений механики двухфазной среды // Челябинский физико-математический журнал. 2011. № 38. С. 65–68.
5. Овсянников Л.В. Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, № 4. С. 30–55.

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта № 18-31-00226.

## АНАЛОГ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Иргашев Б.Ю.

НамИСИ, Наманган, Узбекистан; bahromirgasev@gmail.com

Рассмотрим уравнение в частных производных

$$Lu \equiv D_x^{2n}u(x, y) + (\operatorname{sgn} y) D_y^{2n}u(x, y) = 0,$$

в прямоугольной области  $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < l, -a < y < b\}$ , где  $l, a, b$  – заданные положительные действительные числа,  $n \in N$ . Пусть  $\Omega_+ = \Omega \cap (y > 0)$ ,  $\Omega_- = \Omega \cap (y < 0)$ .

**Задача Дирихле.** Найти в области  $\Omega$  функцию  $u(x, y)$ , удовлетворяющую условиям:

$$u \in C^{2n-1}(\overline{\Omega}) \cap C^{2n}(\Omega_+ \cup \Omega_-),$$

$$Lu(x, y) \equiv 0, (x, y) \in \Omega_+ \cup \Omega_-,$$

$$D_x^{2s}u(0, y) = D_x^{2s}u(l, y) = 0, -a \leq y \leq b,$$

$$D_y^{2s}u(x, -a) = \varphi_s(x), 0 \leq x \leq l,$$

$$D_y^{2s}u(x, b) = \psi_s(x), 0 \leq x \leq l,$$

где  $s = 0, \dots, n-1$ ,  $\varphi_s(x), \psi_s(x)$  – заданные гладкие функции.

В данной работе установлен критерий единственности решения задачи Дирихле. Решение построено в виде суммы по собственным функциям одномерной задачи. При обосновании сходимости ряда возникает проблема малых знаменателей. Получены условия отделимости малого знаменателя от нуля, которые оказались идентичными условиям, которые были получены в работах [1-4].

### Литература

1. Сабитов К.Б., Хаджи И.А. Краевая задача для уравнения Лаврентьева-Бицадзе с неизвестной правой частью // Известия высших учебных заведений. Математика. 2011. № 5. С. 44-52.
2. Хаджи И.А. Обратная задача для уравнения смешанного типа с оператором Лаврентьева-Бицадзе // Математические заметки. 2012. Т. 91, № 6. С. 908-919.
3. Сабитов К.Б., Новикова В.А. Нелокальная задача АА Дезина для уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Известия высших учебных заведений. Математика. 2016. № 6. С. 61-72.
4. Сабитов К.Б., Мартемьянова Н.В. Обратная задача для уравнения Лаврентьева-Бицадзе, связанная с поиском элементов правой части // Известия высших учебных заведений. Математика. 2017. № 2. С. 44-57.

## ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ТОЧЕЧНЫМИ СИНГУЛЯРНОСТЯМИ

Исраилов С.В.<sup>1</sup>, Сагитов А.А.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> ЧГПУ, Грозный, Россия;

<sup>1,2</sup> ЧГУ, Грозный, Россия; segitov@mail.ru

Рассматриваются вопросы существования решения интегрального уравнения типа Вольтерра с точечными сингулярностями на концах сегмента  $[a, b]$ .

В интегральном уравнении

$$y(x) = \int_a^x \mathcal{K}(x, s, y(s)) ds \quad (1)$$

считается, что функция  $\mathcal{K}(x, s, y)$  определена в области

$$\mathcal{D}: \{x, s \in (a, b], |y| \leq d\},$$

$d$  – заданное число, при  $x = a, s = a$  имеет неограниченные разрывы, а для других значений  $x, s$  и  $y$  непрерывна и допускает ограничение [1]

$$|\mathcal{K}(x, s, y(s))| \leq \psi(x) \bar{\psi}(s),$$

где  $\psi(x), \bar{\psi}(s)$  непрерывны при  $x, s \in (a, b]$  и

$$\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) \int_a^x \bar{\psi}(s) ds = 0,$$

$$\max_{x \in [a, b]} \psi(x) \int_a^x \bar{\psi}(t) dt \leq d.$$

Решение уравнения (1) ищется в множестве непрерывных функций  $y(x) \in C(a, b)$  с нормой  $\|y\| = \max |y(x)|$  и соответствующей метрикой [2].

### Литература

1. Огандэсанян В.Г. Теоремы существования для сингулярных интегральных уравнений с разрывным оператором // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. V, № 9. С. 1641-1651.
2. Шаталов Ю.С. К вопросу о единственности решений систем сингулярных интегральных уравнений типа Вольтерра // Дифференциальные уравнения. 1967. Т. III, № 6. С. 905-911.

## **К ВОПРОСУ ОБ ОПТИМИЗАЦИИ КОНСТРУКТИВНОГО МЕТОДА ОБУЧЕНИЯ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ**

**Казаков М.А.**

*ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; f\_wolfgang@mail.ru*

Одной из важных задач при проектировании нейронных сетей является проектирование топологии и оценка оптимального количества нейронов в сети. Существуют методы, которые позволяют произвести расчёт оптимального количества нейронов, в зависимости от поставленной задачи и выбранной топологии, однако сложность такой оценки существенно возрастает с ростом глубины нейронной сети. Другая проблема связана с обучением нейронных сетей на выборке нового класса данных. В этом случае имеется риск ухудшения качества работы нейронной сети на старых данных, на которых она обучалась на предыдущих этапах.

Одним из эффективных методов решения задачи оценки количества нейронов является конструктивный метод обучения, который заключается в добавлении в сеть новых нейронов в процессе обучения по мере необходимости. Преимуществом такого метода является адаптивность и гибкость, позволяющая менять структуру и масштаб нейронной сети непосредственно в процессе обучения. Однако оценка необходимого количества добавляемых нейронов на каждой эпохе обучения и их топологическое размещение вызывает свои трудности.

Для обеспечения устойчивости качества работы нейронной сети по отношению к обучению на новых классах данных, предлагается конструктивный метод обучения [1], при котором нейроны, добавленные непосредственно перед текущей эпохой обучения, принимают на себя основную нагрузку обучения на новом классе. Это достигается за счет коррекции алгоритма обучения, при котором параметры интенсивности обучения для «старых» нейронов снижаются, в то время как новые нейроны обучаются интенсивно. Такой метод одновременно обеспечивает высокую пластичность обученной сети за счет новых неспециализированных нейронов и при этом сохраняет эффективность работы нейронной сети на данных предыдущих классов, на которых была обучена нейронная сеть.

### **Литература**

1. Шибзухов З.М. Конструктивное обучение ΣΠ-нейронных сетей. М.: Наука, 2006. 159 с.

---

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-01-00050-а.

## ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННЫХ ВОЛНОВОГО И ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЙ, ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

**Казиев В.М.<sup>1</sup>, Кайгермазов А.А., Керефов М.А.<sup>2</sup>,  
Кудаева Ф.Х.<sup>3</sup>**

*КБГУ, Нальчик, Россия;* <sup>1</sup>*kaziev@ns.kbsu.ru;* <sup>2</sup>*kerefov@mail.ru;*  
<sup>3</sup>*kfatimat@yandex.ru*

Рассматривается нагруженное (см. [1]) уравнение колебаний струны:

$$u_{xx} - u_{yy} - \sum_{i=1}^n a_i(x, y)u(s_i(y), y) = 0,$$

где  $x = s_i(y)$ ,  $i = \overline{1, n}$  – некоторые кривые, имеющие точки в  $\bar{\Omega}$ , причем  $s_i(y)$  не пересекаются (не самопересекаются). Здесь  $\Omega$  – область, ограниченная прямыми  $AB$ ,  $AC$ ,  $BC$ ,  $A(0; 0)$ ,  $B(1; 0)$ ,  $C\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ .

Исследуется задача Коши вида:

$$u(x, 0) = \tau(x),$$

$$u_y(x, 0) = \nu(x),$$

которая сводится эквивалентно к системе уравнений типа Вольтерра, решаемой методом последовательных приближений.

Также рассмотрено приложение рассмотренной задачи Коши для решения телеграфного уравнения методом поиска интерполянты малой погрешности по узлам  $(x_i; y_i)$ , расположенным на линиях  $x = s_i(y)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , например, сплайн-функцией [2], т.е. поиска точек «нагружения» (узлов), которые минимизировали бы погрешность интерполянты.

Можно рассмотреть задачу идентификации параметра  $\lambda$ , если задана «нагрузка» в точках («пунктах наблюдений»), например, с учетом аддитивной случайной ошибки наблюдений.

### Литература

1. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их приложения. М.: Наука, 2012. 232 с.
2. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989. 608 с.

## СИСТЕМА «РЕСУРС-ПОТРЕБИТЕЛЬ» С ВОЗРАСТНОЙ СТРУКТУРОЙ

Кайгермазов А.А., Кудаева Ф.Х.<sup>1</sup>, Казиев В.М.<sup>2</sup>

КБГУ, Нальчик, Россия; <sup>1</sup>kfatimat@yandex.ru; <sup>2</sup>kaziev@ns.kbsu.ru

Рассмотрим систему

$$\nu_\tau + \nu_t = -\mu\nu, \quad (1)$$

$$\nu(\tau, 0) = \varphi(\tau), \quad (2)$$

$$\nu(0, t) = \frac{cR(t)}{\eta + R(t)} \int_0^\infty \nu(\tau, t) d\tau, \quad (3)$$

$$\frac{R(t)}{dt} = [b_0 - b_1 R(t)] R(t), \quad (4)$$

$$R(0) = R_0. \quad (5)$$

Здесь  $\nu(r, t)$  – плотность распределения консумента,  $R(t)$  – плотность ресурса,  $\mu$  – коэффициент естественной смертности консумента,  $c$  – постоянная, задающая максимально возможное увеличение рождаемости при избытке ресурса,  $\varphi(\tau)$  – функция начального распределения консумента,  $R_0$  – начальная биомасса ресурса,  $b_0$ ,  $b_1$ ,  $\eta$  – заданные константы.

Для системы (1)–(5) имеем:

$$P(t) = P_0 \left\{ \frac{(b_0 + R_0 b_0) e^{b_0 t}}{\eta b_1 R_0 + R_0 b_0 + (b_0 - \eta b_1 R_0) e^{b_0 t}} \right\}^{\frac{c_0}{\eta b_1 + b_0}} e^{-\mu t}, \quad (6)$$

где  $P_0$  – начальная общая численность консумента.

Формула (6) дает общую биомассу консумента, представленную системой (1)–(5).

Разработан численный метод решения системы (1)–(5). Проведены тестовые расчеты на ЭВМ.

### Литература

1. Алексев В.В., Крышев И.И., Сазыкина Т.Г. Физическое и математическое моделирование экосистем. Санкт-Петербург: Гидрометеоиздат, 1992. 350 с.
2. Кайгермазов А.А., Кудаева Ф.Х. Математический анализ системы «ресурс-потребитель» с возрастной структурой // Материалы 3-й Международной научно-практической конференции «Проблемы мелиорации земель и воспроизводства почвенного плодородия». Краснодар. 2010. С. 92–97.

## **Использование ГИС «AutoCAD Map» для решения прикладных геоэкологических задач**

**Канкулова Л.И.**

*КБГАУ, Нальчик, Россия; lina\_ismailovna@mail.ru*

Картографическая наука постоянно развивается, и в первую очередь совершенствуются представления о ее методах и целях, структуре, особенно с внедрением новых методов и технологий. Это привело к возникновению новой отрасли картографии: геоинформационному картографированию (ГК), отражающей тесную взаимосвязь картографии, геоинформатики и дистанционного зондирования, развивающейся как прямое продолжение системного картографирования в новой геоинформационной среде [1]. В данной работе поставлена задача: нанести на карту распределение родников по линейным системам разрывных тектонических разрушений. Основой для данной карты-схемы послужила Геологическая карта КБР М 1:700 000, взятая из ГИС-Атласа «Недра России», а также данные по тектоническим оползневым массивам [2]. Для этого были использованы программные продукты компании Autodesk – это Raster Design и AutoCAD Map 3D. При помощи первой были преобразованы растровые данные отсканированной карты в формат вектора с расширением \*.dwg, а при помощи Map 3D исправлены ошибки геометрии. При построении карты выполнены следующие этапы: 1) преобразование растровых данных отсканированной карты в векторный формат; 2) корректировка данных; 3) подключение данных (местоположения родников) к карте; 4) добавление метаданных; 5) добавление легенды; 6) публикация карты. Результатом проведенных операций стала карта-схема распределения родников по линейным системам разрывных тектонических нарушений. Полученный картографический материал позволяет наглядно увидеть взаимосвязь между тектоникой и малыми водными объектами, а также их распределение по территории КБР не только по вертикали (в широтном направлении), но и по горизонтали.

### **Литература**

1. *Лурье И.К.* Геоинформационное картографирование. Учебник. М.: Издательство МГУ, 2008. 428 с.
2. *Кюль Е.В.* Тектонические оползневые массивы Центрального Кавказа // Геология и геофизика Юга России. 2017. № 2. С. 67-81.

## **ГЕОЭКОЛОГИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА РОДНИКОВО-РУЧЬЕВЫХ СИСТЕМ ПРИ ПОМОЩИ ГИС**

**Канкулова Л.И.<sup>1</sup>, Кюль Е.В.<sup>2</sup>, Калов Р.О., Назранов Х.М.**

<sup>1</sup>*КБГАУ, Нальчик, Россия; lina\_ismailovna@mail.ru*

<sup>2</sup>*ЦГИ, Нальчик, Россия; elenakyul@mail.ru*

При исследовании природных водных объектов территории традиционно большое внимание уделяется крупным объектам таким, как реки и озёра, хотя малые водотоки (родниковые ручьи и родники) обычно занимают до 90% и более от общего числа постоянных водных объектов [1]. При этом они имеют большое рекреационно-хозяйственное и даже промышленное значение. Ввиду малых размеров они очень неустойчивы к антропогенному воздействию, что для горных территорий с очень низким порогом устойчивости является актуальной проблемой. В КБР малые водотоки распространены достаточно широко, но практически не изучены [2]. Для изучения РРГ (космокартографический метод) применение ГИС оправдано, так как позволяет за короткий период провести их инвентаризацию и паспортизацию по основным параметрам на большой площади. Для этого могут быть использованы общедоступные ГИС, например, MapInfo и др. При этом большой массив полученной как географической (ОПП), так и экологической (освоенность территории) информации может быть отображен в удобном картографическом виде в виде серии цифровых карт. **Выводы.** Ввиду динаминости природной среды РРГ наличие комплекта цифровых картдат дает возможность в рабочем режиме отслеживать геоэкологическую обстановку на исследуемой территории на данный момент времени. Причём могут дополняться, исходя из поставленных дополнительных задач, как рабочие слои цифровых карт, так и информация на уже составленных слоях карт. Такое ежедневное отслеживание состояния РРГ позволит вести геоэкологический мониторинг и сохранить данные природные объекты. В первую очередь как памятники природы.

### **Литература**

1. Всеволожский В.А. Основы гидрогеологии. М.: Изд-во МГУ, 1991. 351 с.
2. Канкулова Л.И. Проблемы защиты и обустройства родников и экологического туризма в КБР // Материалы V Всероссийской конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. Нальчик, 2015. С. 196–201.

**Моделирование процесса разрушения ударно-сжатого полиметилметакрилата**

**Канукоева Л.В., Куготова А.М., Езаова А.Г.<sup>1</sup>, Цechoева А.Х,  
Желдашева А.О., Кунижев Б.И.**

*КБГУ, Нальчик, Россия; <sup>1</sup>alena\_ezaova@mail.ru*

В работе [1] исследован процесс разрушения мишени из полиметилметакрилата при высокоскоростном динамическом нагружении. Показано, что при скоростях ударника выше  $v_0 = 3.0$  км/с и временах воздействия больше 20 мкс механизм хрупкого разрушения ПММА переходит в хрупко-пластический.

Для описания состояния ударно-сжатого ПММА и объяснения изменения механизма разрушения, рассмотрим систему уравнений механики сплошной среды. Приведенный анализ прохождения сильной ударной волны через среду, подчиняющейся условиям упругопластиичности и уравнению Ми-Грюнайзена, используется для описания процесса высокоскоростного разрушения ПММА при воздействии ударника из полиэтилена. Точка пересечения АГ и кривой РМ с параметрами ( $P_L, V_L$ ) соответствует переходу хрупкого разрушения к хрупко-пластическому, т.е. условиям  $v_0 > 3,0 \frac{\text{км}}{\text{с}}$ ,  $u_L \sim 1,5 \frac{\text{км}}{\text{с}}$ ,  $t > 20\text{мс}$ .

**Литература**

1. Кунижев Б.И., Костин В.В., Красюк И.К., Темроков А.И., Фортов В.Е. Исследование ударно-волновых и деструкционных процессов при высокоскоростном ударе и лазерном воздействии на мишень из органического материала // ТВТ. 1997. Т. 33, № 6. С. 962–967.

**ЗАДАЧА В ПОЛУПОЛОСЕ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ  
ВЫСОКОГО ЧЕТНОГО ПОРЯДКА С ОПЕРАТОРОМ РИМАНА –  
Лиувилля по временной переменной**

**Карашева Л.Л.**

*ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; k.liana86@mail.ru*

Рассмотрим в области  $D = \{(x, t) : 0 < x < \infty, 0 < t < T\}$  уравнение

$$D_{0t}^\alpha u(x, t) + (-1)^n \frac{\partial^{2n} u(x, t)}{\partial x^{2n}} = f(x, t), \quad (1)$$

где  $D_{0t}^\alpha$  – оператор дробного (в смысле Римана – Лиувилля) интегро-дифференцирования порядка  $\alpha$  [1, с. 28],  $0 < \alpha \leq 1$ .

В полубесконечной области в работе [2] исследована краевая задача для уравнения (1) при  $n = 1$ . Наиболее полную библиографию посвященную уравнению (1) можно найти в работе [3].

**Задача.** Найти решение  $u(x, t)$  уравнения (1) в области  $D$ , удовлетворяющее начальному условию

$$\lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-1} u(x, t) = \tau(x), \quad x > 0 \quad (2)$$

и краевым условиям

$$\left. \frac{\partial^{m_k} u}{\partial x^{m_k}} \right|_{x=0} = \varphi_k(t), \quad 0 < t < T, \quad (3)$$

$m_k \in \{0, 1, 2, \dots, 2n - 1\}, k = 0, 1, 2, \dots, n - 1; m_k \neq m_j, \text{ при } k \neq j,$

где  $\tau(x), \varphi_k(t)$  – заданные функции.

В работе построено представление решения задачи (1)–(3), доказана теорема единственности в классе функций быстрого роста.

**Литература**

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 272 с.
2. Геккиева С.Х. Краевая задача для обобщенного уравнения переноса с дробной производной в полубесконечной области // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2002. № 1(8). С. 6–8.
3. Карашева Л.Л. Оценка фундаментального решения уравнения параболического типа высокого порядка с производной Римана – Лиувилля по временной переменной // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2016. № 4-1(16). С. 30–35.

---

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-01-00462 А.

**Коэрцитивная разрешимость уравнения Шредингера в гильбертовом пространстве**

**Каримов О.Х.**

*Институт математики, Душанбе, Таджикистан; karimov\_olim@mail.ru*

В данной работе речь идёт о коэрцитивной разрешимости оператора Шредингера. В работах (см. [1-3] и имеющиеся там ссылки) исследуется разделимость и коэрцитивная разрешимость.

Рассмотрим в пространстве  $L_2(R^n)$  дифференциальный оператор

$$L[u] = -\Delta u(x) + V(x)u(x) = f(x), \quad (1)$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа,  $V(x)$  – положительная функция.

Результат о разделимости оператора Шредингера (см. [3]) влечёт коэрцитивную оценку

$$\begin{aligned} & \|\Delta u(x); L_2(R^n)\| + \|V(x)u(x); L_2(R^n)\| + \\ & + \sum_{i=1}^n \|V^{\frac{1}{2}}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}; L_2(R^n)\| \leq M \|L[u]; L_2(R^n)\|, \end{aligned}$$

где положительное число  $M$  не зависит от  $u(x)$ .

На основе вышеизложенного доказывается следующая

**Теорема.** Пусть оператор Шредингера разделяется в пространстве  $L_2(R^n)$ , и пусть существует положительная функция  $\Psi(x) \in C^1(R^n)$ , удовлетворяющая неравенству

$$\|\Psi^{-1}(x) \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} V^{-\frac{1}{2}}\| < \sigma_1, \quad \sigma_1 < \sqrt{2\alpha}, \quad \forall x \in R^n.$$

Тогда дифференциальное уравнение (1) при всех  $f(x) \in L_2(R^n)$  имеет единственное решение в пространстве  $L_2(R^n)$ .

**Литература**

1. Everitt W.N., Giertz M. Some properties of the domains of certain differential operators // London Math. Soc. 1971. Vol. 23, № 3. P. 301–324.
2. Бойматов К.Х. О методе Эверитта и Гирца для банаховых пространств // Докл. РАН. 1997. Т. 356, № 1. С. 10–12.
3. Каримов О.Х. Коэрцитивные оценки решений нелинейной системы дифференциальных уравнений второго порядка на всей оси // В сборнике: Дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения. Душанбе. 1995. Вып. 3. С. 20–21.

**ЗАДАЧА Коши для неоднородного итерированного  
УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА – ПУАССОНА – ДАРБУ**

**Каримов Ш.Т.**

*ФерГУ, Ферганы, Узбекистан; shaxkarimov@gmail.com*

Рассмотрим задачу Коши нахождения решения  $u(x, t) \in C^{2m-1}(\bar{\Omega}) \cap C^{2m}(\Omega)$  неоднородного уравнения высокого порядка вида

$$L_\alpha^m(u) \equiv \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{2\alpha}{x} \frac{\partial}{\partial x} \right)^m u(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega, \quad (1)$$

удовлетворяющее однородным начальным условиям

$$\left. \frac{\partial^k u}{\partial t^k} \right|_{t=0} = 0, \quad k = \overline{0, 2m-1}, \quad (2)$$

где  $m \in N$ ,  $\alpha \in R$ ,  $\alpha \geq 0$ ,  $L_\alpha^m = L_\alpha^1(L_\alpha^{m-1})$ ,  $f(x, t)$  – заданная гладкая функция, а  $\Omega = \{(x, t) : 0 < t < x < \infty\}$ .

Справедлива следующая теорема.

**Теорема.** Пусть функция  $U(x, t, \tau)$ , зависящая от параметра  $\tau$ , является решением задачи

$$L_\alpha^m(U) = 0, \quad \left. \frac{\partial^k U}{\partial t^k} \right|_{t=\tau} = 0, \quad k = \overline{0, 2m-2}, \quad \left. \frac{\partial^{2m-1} U}{\partial t^{2m-1}} \right|_{t=\tau} = f(x, \tau), \quad t > \tau.$$

Тогда функция

$$u(x, t) = \int_0^t U(x, t, \tau) d\tau$$

будет решением задачи (1), (2).

Применяя теорему, находим решение задачи (1), (2) в виде:

$$u(x, t) = [x^{-\alpha} 2^{-2m+1}] / [(m-1)!]^2 \times \\ \times \int_0^t d\tau \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} f(s, \tau) s^\alpha [(t-\tau)^2 - (s-x)^2]^{m-1} F(\alpha, 1-\alpha; m; \sigma) ds,$$

где  $F(\alpha, 1-\alpha; m; \sigma)$  – гипергеометрическая функция Гаусса,  $\sigma = [(t-\tau)^2 - (s-x)^2]/(4xs)$ , причем  $0 < \sigma < 1$ .

**Замечание.** Аналогично можно получить решение и в случае многомерного уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу.

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ЭЛЕКТРОННО-ЛУЧЕВОЙ ЛИТОГРАФИИ**

**Кармоков М.М., Кудаева Ф.Х., Керефов Б.М.**

*КБГУ, Нальчик, Россия;*

В работе статистическим методом моделируется канонический ансамбль на примере разработки физико-математической модели взаимодействия электронов с твердым телом.

Системы канонического и микроканонического ансамбля успешно применяются для исследования и описания сложных физических процессов рассеяния электронов численными методами.

В электронно-лучевой литографии для экспонирования полимерных резистивных слоев используются сфокусированные электронные пучки. Взаимодействие и рассеяние электронов внутри пленки резиста и лежащей под ней подложки зависят от энергии пучка, типа резиста и его толщины, параметров подложки и т. п. Достижение наилучшего результата процесса экспонирования (разрешения) определяется скорее всего не характеристиками падающего пучка, а рассеянием электронов. Процесс рассеяния электронов в твердых телах настолько сложен, что для получения количественных результатов приходится применять, например, метод Монте-Карло.

Для расчета энергии, вносимой электронным пучком в пленку резиста, моделируется большое число отдельных траекторий электронов.

Разработана методика расчета распределения электронов в твердых телах методом Монте-Карло, а также алгоритм и программа расчета для практического применения.

Для изучения рассеяния электронов в качестве образца выбран алюминий, в котором распределение электронов имеет типичную картину.

Рассчитано распределение десятков тысяч электронов в пленке алюминия при энергии пучка  $E = 29$  кэВ.

Установлено, что при рассчитанных режимах большинство электронов проникает на глубину 150 нм.

**РЕГУЛИРОВАНИЕ УРОВНЯ ГРУНТОВЫХ ВОД В  
ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ПОСТАНОВКЕ**

**Кармоков М.М., Кудаева Ф.Х., Нахушева Ф.М.**

*КБГУ, Нальчик, Россия; kfatimat@yandex.ru*

При длительном прогнозе уровня грунтовых вод (УГВ) возникает необходимость регулирования депрессионной кривой в некотором интервале с использованием дренажной системы.

Целью настоящей работы является исследование поведения УГВ при длительных прогнозах с использованием метода конечных элементов в гидродинамической постановке. В этом случае пьезометрический напор  $h(x, y, z, t)$  в области движения ГВ  $\Omega$  в каждый момент времени  $t$  удовлетворяет уравнению неразрывности в пространстве.

На свободной поверхности  $z = H(x, y, t)$  выполняются следующие условия:

$$\mu \frac{\partial H}{\partial t} = K \left( 1 - \frac{\partial h}{\partial z} \right) \left[ \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial H}{\partial y} \right)^2 \right] - K \frac{\partial h}{\partial z} \Big|_{z=H} + W(x, y),$$

$$h(x, y, z)|_{z=H} = H(x, y, t),$$

$$H(x, y, 0) = H_0(x, y),$$

где  $K(x, y, z)$  и  $\mu = \mu(x, y, z)$  – коэффициенты фильтрации и пористости соответственно,  $W = W(x, y)$  – инфильтрация.

На боковых гранях для уравнения неразрывности заданы соответствующие граничные условия, а на водоупоре  $s(x, y)$  задается условие непроницаемости.

Как видно из соотношений, основной задачей является решение уравнения неразрывности при соответствующих начальных и граничных условиях.

При долгосрочных прогнозах, после нескольких шагов по времени, уровень, как правило, устанавливается. Поэтому для сокращения машинного времени распределение напора в области движения ГВ рассматривается с момента времени  $t_0$  до момента времени  $t_1$ , где нарушается условие

$$\max_w |H(x, y, t) - H(x, y, t_0)| < \varepsilon,$$

$w = \{0 \leq x \leq l_1, 0 \leq y \leq l_2\}$  – прогнозируемый участок,  $\varepsilon$  – наперед заданная малая величина.

## ИССЛЕДОВАНИЕ СИММЕТРИЙНЫХ СВОЙСТВ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ ФИЛЬТРАЦИИ

**Касаткин А.А.**

УГАТУ, Уфа, Россия; alexei\_kasatkin@mail.ru

При описании процессов фильтрации в сложных средах в последние годы всё чаще применяется аппарат дробного интегро-дифференцирования. Производные дробного порядка позволяют в некотором приближении учитывать эффекты памяти и релаксации, а также нелокальные эффекты, связанные, например, с наличием в среде трещин и каналов.

Значительная часть классических моделей, описывающих фильтрационные процессы в реальных средах, содержит существенно нелинейные уравнения. Для построения некоторых классов решений успешно применяются методы группового анализа дифференциальных уравнений. Такие методы с определёнными ограничениями могут быть применены и для уравнений с производными дробного порядка. Отличием от классического случая является невозможность рассмотрения конечного набора независимых переменных в определяющих уравнениях  $\tilde{X}F_{F=0} = 0$  (здесь  $\tilde{X}$  – продолжение искомого оператора  $X$  группы преобразований на производные требуемых порядков). Для поиска симметрий требуется решать бесконечные переопределённые системы линейных уравнений, что делает процесс достаточно трудоёмким [1].

Для поиска симметрий могут быть успешно применены алгоритмы, реализуемые в системах компьютерной алгебры (см., например, [2]). В данном докладе предлагается простой альтернативный алгоритм поиска симметрий в виде линейной комбинации  $X = \sum C_i X_i$  заданных базисных операторов. Процесс построения полностью автоматизируется с применением численных методов решения переопределённых систем, независимо от сложности исходных уравнений, и может применяться для проверки ручных вычислений в задачах классификации и быстрой оценки симметрийных свойств модели. Демонстрируется программная реализация с использованием открытой библиотеки SymPy на языке Python.

### Литература

1. Gazizov R.K., Kasatkin A.A., Lukashchuk S.Yu. Symmetries and exact solutions of fractional filtration equations // AIP Conference Proceedings. 2017. Vol. 1907, № 1. 020010.
2. Jefferson G.F., Carminati J. FracSym: Automated symbolic computation of Lie symmetries of fractional differential equations // Computer Physics Communications. 2014. Vol. 185, № 1. P. 430–441.

---

Работа выполнена в рамках Государственного задания Минобрнауки РФ № 1.3103.2017/4.6.

**ХАОТИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ ОСЦИЛЛЯТОРА ДУФФИНГА С ПРОИЗВОДНОЙ ПЕРЕМЕННОГО ДРОБНОГО ПОРЯДКА РИМАНА – ЛИУВИЛЛЯ**

**Ким В.А.<sup>1</sup>, Паровик Р.И.<sup>2</sup>**

<sup>1,2</sup> КамГУ им. Витуса Беринга, Петропавловск-Камчатский, Россия;  
valentinekim@mail.ru

<sup>2</sup> ИКИР ДВО РАН, Парамунка, Россия; romanparovik@gmail.com

Рассмотрим следующую задачу Коши для смещения  $x(t) \in C^2(0, T)$  [1]:

$$\ddot{x}(t) + \alpha D_{0t}^{q(t)} x(\tau) - x(t) + x^3(t) = \delta \cos(\omega t), \quad x(0) = x_0, \dot{x}(0) = y_0, \quad (1)$$

где  $D_{0t}^{q(t)} x(\tau) = \frac{1}{\Gamma(1-q(t))} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{q(t)}}$  – производная Римана – Лиувилля переменного дробного порядка  $0 < q(t) < 1$ ,  $\alpha$  – коэффициент вязкого трения,  $\delta$  и  $\omega$  – амплитуда и частота внешней периодической силы,  $x_0$  и  $y_0$  – заданные константы, начальные условия,  $T$  – время моделирования.

В работе с помощью численного решения задачи (1) и алгоритма Вольфа [2] проведено исследование эредитарного осциллятора Дуффинга с целью идентификации его хаотических режимов. Были построены спектры показателей Ляпунова относительно  $\alpha$ ,  $\delta$  и  $q(t)$ , которые содержат положительные значения, что указывает на существование хаотических режимов.

Дальнейшее исследование эредитарного осциллятора Дуффинга может быть связано с исследованием точек покоя системы (1) по аналогии с работой [3].

**Литература**

1. Kim V.A. Duffing oscillator with external harmonic action and variable fractional Riemann-Liouville derivative characterizing viscous friction // Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences. 2016. Vol. 13, № 2. P. 46–49.
2. Wolf A. et al. Determining Lyapunov exponents from a time series // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1985. Vol. 16, № 3. P. 285–317.
3. Паровик Р.И. Об исследовании устойчивости эредитарного осциллятора Ван-дер-Поля // Фундаментальные исследования. 2016. № 3-2. С. 283–287.

---

Работа выполнена в рамках темы НИР КамГУ имени Витуса Беринга «Применение дробного исчисления в теории колебательных процессов» № АААА-А17-117031050058-9 и при финансовой поддержке гранта президента Российской Федерации № МК-1152.2018.1.

**О ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ АНАЛОГА ЗАДАЧИ А.А. ДЕЗИНА  
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО ПОРЯДКА  
МЕТОДОМ ФУНКЦИИ ГРИНА**

**Киржинов Р.А.**

*ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; kirzhinov.r@mail.ru*

В области  $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < r, -\alpha < y < \beta\}$  евклидовой плоскости точек  $(x, y)$ , где  $r$ ,  $\alpha = mr$  и  $\beta$  – действительные положительные числа,  $m$  – натуральное число, рассматривается аналог задачи А.А. Дезина [1, с. 174] для уравнения в частных производных смешанного параболо-гиперболического типа второго порядка

$$f(x, y) = \begin{cases} u_{xx}(x, y) - u_y(x, y), & y > 0, \\ u_{xx}(x, y) - u_{yy}(x, y), & y < 0, \end{cases}$$

где  $u(x, y)$  – неизвестная функция,  $f(x, y)$  – заданная, достаточно гладкая функция в  $\overline{\Omega}$ .

В данной работе методом функции Грина выписано решение  $u(x, y)$  исследуемой задачи в области  $\Omega$ .

Отметим, что результаты данной работы обобщают результаты работ [2, 3].

**Литература**

1. Нахушева З.А. Нелокальные краевые задачи для основных и смешанного типов дифференциальных уравнений. Нальчик: Издательство Учреждения Российской академии наук Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2011. 196 с.
2. Киржинов Р.А. Аналог задачи А.А. Дезина для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2014. Т. 16, № 2. С. 41–46.
3. Киржинов Р.А. О единственности решения аналога задачи А.А. Дезина для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2015. Т. 17, № 3. С. 28–30.

**ЗАДАЧА С ВЫРОЖДАЮЩИМИСЯ НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ  
ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ**

**Киричек В.А.**

*Самарский университет, Самара, Россия; Vitalya29@gmail.com*

В работе рассматривается гиперболическое уравнение

$$u_{tt} - (a(x, t)u_x)_x + c(x, t)u = f(x, t)$$

и ставится следующая задача: *найти в области  $Q_T = (0, l) \times (0, T)$  решение данного уравнения, удовлетворяющее начальным и нелокальным условиям*

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0$$

*и нелокальным условиям*

$$\alpha(t)u(0, t) + \int_0^l K_1(x)u dx = 0, \quad \beta(t)u(l, t) + \int_0^l K_2(x)u dx = 0, \quad (1)$$

где  $\alpha, \beta \in C^2[0, T]$ , причем  $\alpha(0) = 0, \beta(T) = 0$ .

При исследовании поставленной задачи оказалось что метод, разработанный для доказательства разрешимости задачи с нелокальными условиями такого вида в предположении что  $\alpha(t), \beta(t)$  ни в одной точке  $[0, T]$  не обращаются в нуль [1], не пригоден для исследования задачи с вырождающимися нелокальными условиями. Для преодоления возникшей трудности предлагается перейти к другому нелокальному условию, вид которого позволяет применить известный метод доказательства разрешимости поставленной задачи.

Доклад посвящен доказательству эквивалентности вырождающихся нелокальных условий (1) и динамических нелокальных условий, а также доказательству единственности решения.

Случай вырождающегося только в точке  $t = 0$  интегрального условия был рассмотрен для многомерного гиперболического уравнения в [2].

**Литература**

1. Коjsанов А.И., Пулькина Л.С. О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 9. С. 1166–1179.
2. Pulkina L.S. Nonlocal problems for hyperbolic equations with degenerate integral conditions // Electronic Journal of Differential Equations. 2016. Vol. 2016, № 193. P. 1–12.

**ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМЫЕ РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНОГО  
ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ЛИНИЯМИ  
ВЫРОЖДЕНИЯ**

**Китайбеков Е.Т.**

*КазНПУ им. Абая, Алматы, Казахстан; Er-kaz\_89@mail.ru*

Рассмотрим уравнение

$$y^m u_{xx} + x^n u_{yy} - y^m x^n u_{tt} = 0, \quad m > 0, \quad n > 0 \quad (1)$$

в области  $R_3^{2+} = \{(x, y, t); x > 0, y > 0\}$  и решение уравнения (1) будем искать в виде

$$u = (r^2)^{-\alpha-\beta-\frac{1}{2}} \omega(\xi, \eta), \quad \alpha = \frac{n}{2(n+2)}, \quad \beta = \frac{m}{2(m+2)}, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} r^2 &= \left( \frac{2}{n+2} x^{\frac{n+2}{2}} - \frac{2}{n+2} x_0^{\frac{n+2}{2}} \right)^2 + \left( \frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}} - \frac{2}{m+2} y_0^{\frac{m+2}{2}} \right)^2 - (t - t_0)^2, \\ \xi &= -\frac{16}{r^2(n+2)^2} x^{\frac{n+2}{2}} x_0^{\frac{n+2}{2}}, \quad \eta = -\frac{16}{r^2(m+2)^2} y^{\frac{m+2}{2}} y_0^{\frac{m+2}{2}}, \quad (x_0, y_0, t_0) \in R_3^{2+}. \end{aligned}$$

Подставив функцию (2) в уравнение (1) получим такую систему уравнений, одним из решений которой является известная функция

$$F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', x, y) = \sum \frac{(\alpha)_{m+n} (\beta)_m (\beta')_n}{(\gamma)_m (\gamma')_n m! n!} x^n y^m. \quad (3)$$

С помощью функции (3) в работе найдены 4 линейно независимых решения уравнения (1):

$$\begin{aligned} u_1 &= k_1 (r^2)^{-\alpha-\beta-\frac{1}{2}} F_2 \left( \alpha + \beta + \frac{1}{2}, \alpha, \beta, 2\alpha, 2\beta; \xi, \eta \right), \\ u_2 &= k_2 (r^2)^{\alpha-\beta-\frac{3}{2}} x x_0 F_2 \left( -\alpha + \beta + \frac{3}{2}, 1 - \alpha, \beta, 2 - 2\alpha, 2\beta; \xi, \eta \right), \\ u_3 &= k_3 (r^2)^{-\alpha+\beta-\frac{3}{2}} y y_0 F_2 \left( \alpha - \beta + \frac{3}{2}, \alpha, 1 - \beta, 2\alpha, 2 - 2\beta; \xi, \eta \right), \\ u_4 &= (r^2)^{\alpha+\beta-\frac{5}{2}} x x_0 y y_0 F_2 \left( -\alpha - \beta + \frac{5}{2}, 1 - \alpha, 1 - \beta, 2 - 2\alpha, 2 - 2\beta; \xi, \eta \right). \end{aligned}$$

## ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ НА ДВУМЕРНОЙ СЕТИ

Ковалева Л.А.<sup>1</sup>, Солдатов А.П.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Бел ЮИ МВД России им. И.Д. Путилина, Белгород, Россия;  
*kova1eva1ida@yandex.ru*

<sup>2</sup> Вычислительный центр ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия;  
*soldatov48@gmail.com*

В пространстве  $\mathbb{R}^3$  рассмотрим конечное множество  $\mathcal{M}$  плоских выпуклых многоугольников  $M$ , которые попарно могут пересекаться только по своим сторонам. Совокупность отрезков  $L$ , являющихся сторонами одного или нескольких многоугольников, обозначим  $\mathcal{L}$ , а множество их концов —  $F$ . Объединение  $K$  многоугольников  $M \in \mathcal{M}$ , рассматриваемых как замкнутые подмножества  $\mathbb{R}^3$ , назовем двумерным комплексом или сетью, если дополнительно каждый отрезок  $L \in \mathcal{L}$  служит границей не более двух многоугольников. С каждым элементом  $L \in \mathcal{L}$  связем совокупность  $\mathcal{M}_L$  всех граней, граничащих с  $L$ . Пусть подмножество  $K^1 \subseteq \mathbb{R}^3$  означает объединение всех отрезков  $L \in \mathcal{L}$ , взятых без своих концов, так что замкнутое множество  $F \cup K^1$  представляет собой ломаную в  $\mathbb{R}^3$ . Аналогично под  $K^2$  условимся понимать объединение всех граней, взятых без своей границы. Множество  $\mathcal{L}$  всех ребер разобьем на два попарно непересекающихся подмножества  $\mathcal{L}_D$  и  $\mathcal{L}_H$ , первое из которых состоит из некоторого подмножества сторон. Соответствующие объединения этих ребер, взятые без своих концов, обозначим  $K_D^1$  и  $K_H^1$ .

Следя [1], функцию  $u(x) \in C(K \setminus F)$  назовем гармонической на множестве  $K^2 \cup K_H^1$ , если внутри каждой грани  $M \in \mathcal{M}_L$  она гармонична, непрерывно дифференцируема вплоть до внутренних точек отрезка  $L$  и сумма нормальных производных  $\frac{\partial u}{\partial \nu_M}$ , взятых изнутри  $M$ , равна нулю.

Задача Дирихле заключается в отыскании гармонической на  $K^2 \cup K_H^1$  функции  $u(x) \in C(K \setminus F)$ , принимающей на границе заданное значение. Эта задача подробно изучена в [1] в весовых гельдеровых пространствах  $C_{-\delta}^\mu$  и  $C_{(+\delta)}^\mu$  на произвольном двумерном комплексе. В случае двумерной сети, рассматриваемой в данной работе, удается несколько дополнить результаты указанной работы. Показано, что рассматривая задача фредгольмова в этих пространствах и ее индекс принимает значение  $\alpha_- = n(H)$ ,  $\alpha_+ = 0$ , где  $n(H)$  — число вершин множества  $F$ , не входящих в границу комплекса. Кроме того, была также изучена асимптотика поведения решения задачи в окрестности точек множества  $F$ .

### Литература

1. Ковалева Л.А., Солдатов А.П. Задача Дирихле на двумерных стратифицированных множествах // Известия РАН, сер. матем. 2015. Т. 79, № 1. С. 77–114.

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ КОНСОЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ В ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ

Коваль К.А.<sup>1</sup>, Сухоруков А.Л.<sup>2</sup>

АО «ЦКБ МТ «Рубин», Санкт-Петербург, Россия;

<sup>1</sup>koval.kir2014@yandex.ru; <sup>2</sup>su\_andr@yahoo.com

В работе рассмотрены колебания консольных конструкций в потоке жидкости. Данный тип задач является достаточно актуальным для большого числа устройств современной техники [1, 2]. Целью работы является разработка методики численного моделирования гидроупругих колебаний консольных конструкций с применением пакета ANSYS [3].

В рамках работы была поставлена и численно решена сопряженная задача гидроупругости консольной конструкции для резонансного режима. Задача решалась средствами пакета ANSYS (Mechanical, Fluent, модуль обмена данными System Coupling). Использовался как односторонний обмен данными (значения сил, действующих на конструкцию, передавались из Fluent в Mechanical), так и двусторонний обмен данными (решатели обмениваются между собой данными о силах и перемещениях, таким образом, учитывается влияние деформаций конструкции на структуру потока). Проведена верификация, основанная на сопоставлении результатов, полученных с помощью используемых методов, с экспериментальными данными и аналитическими оценками [4, 5].

Разработанная методика позволяет определять вибропрочностные характеристики конструкции с учетом влияния ее деформаций на структуру потока.

### Литература

1. Сухоруков А.Л. Срывной флаттер как одна из причин возникновения вибраций подъемно-мачтовых устройств // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2014. Т. 7, № 3. С. 42–66.
2. Шиманский Ю.А. Динамический расчет судовых конструкций. Л.: Государственное издательство судостроительной литературы, 1948. 404 с.
3. Снегирёв А.Ю. Высокопроизводительные вычисления в технической физике. Численное моделирование турбулентных течений: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2009. 143 с.
4. Девнин С.И. Аэрогидромеханика плохообтекаемых конструкций. Справочник. Л.: Судостроение, 1983. 331 с.
5. Коваль К.А., Сухоруков А.Л., Чернышев И.А. Результаты верификации численного метода расчета гидродинамических и гидроакустических характеристик плавникового движителя // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2016. Т. 9, № 4. С. 60–72.

**ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ И УЛЬТРАПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ С  
НЕОБРАТИМЫМИ ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ПРИ  
ВРЕМЕННЫХ ПРОИЗВОДНЫХ**

**Кожанов А.И.**

*ИМ СО РАН, Новосибирск, Россия; kozhanov@math.nsc.ru*

В докладе излагаются результаты о разрешимости краевых задач для дифференциальных уравнений

$$(\alpha_0(t) + \alpha_1(t)\Delta)u_t - Bu = f(x, t), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad 0 < t < T < +\infty;$$

$$(\alpha_0(t) + \alpha_1(t)\Delta)u_{tt} - Bu_t - Cu = f(x, t), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad 0 < t < T < +\infty;$$

$$(\alpha_0(t, a) + \alpha_1(t, a)\Delta)u_t + (\beta_0(t, a) + \beta_1(t, a)\Delta)u_a - Bu = f(x, t, a), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

$$0 < t < T < +\infty, \quad 0 < a < A < +\infty,$$

а также для некоторых их обобщений (операторы  $B$  и  $C$  здесь есть эллиптические операторы, действующие по пространственным переменным,  $\Delta$  есть оператор Лапласа, также действующий по пространственным переменным). Особенностью изучаемых уравнений является то, что операторы  $\alpha_0(t) + \alpha_1(t)\Delta$ ,  $\alpha_0(t, a) + \alpha_1(t, a)\Delta$ ,  $\beta_0(t, a) + \beta_1(t, a)\Delta$  не предполагаются обратимыми (знаки функций  $\alpha_0(t)$ ,  $\alpha_1(t)$ ,  $\alpha_0(t, a)$ ,  $\beta_0(t, a)$  не фиксируются, и эти функции могут менять знак произвольным образом). Для изучаемых задач доказываются теоремы существования и единственности регулярных (имеющих все обобщенные по С.Л. Соболеву производные, входящие в уравнение) решений.

**Компьютерное моделирование дефектов  
радиочастотного усилителя мощности в сетях 5G с  
массивным MIMO**

**Кожемякин И.И.**

*УлГУ, Ульяновск, Россия; kozhilya@gmail.com*

Сети пятого поколения 5G на данный момент только разрабатываются, но основы для будущего стандарта высокоскоростного интернета уже заложены. Одной из основополагающих идей сетей 5G является метод MIMO (Multiple Input Multiple Output), который позволяет увеличить пропускную способность канала для систем с несколькими антеннами для приёма и передачи данных. Однако использование данного метода имеет ряд проблем.

Часть проблем разработки 5G систем связана с усилителями мощности (PA) сигналов в беспроводных системах. В сети 5G увеличение пропускной способности достигается за счёт увеличения пропускной способности сигнала, но подобное увеличение вызывает критические эффекты для аналоговых схем, такие как нелинейность и эффекты памяти. Существуют методы для компенсации подобных искажений, но они слишком сложны для массивного MIMO. Наиболее приемлемым вариантом считается метод цифровой линеаризация с предыскажением (DPD). В массивном MIMO подобная цифровая линеаризация необходима для каждого усилителя каждой антенны, и требуемое количество цифровых линеаризаторов совпадает с количеством антенн. Это означает, что требования к вычислительным ресурсам также увеличиваются.

Задачей работы является создание модели радиочастотного усилителя сигналов, которые используются в системах 5G сетей, с учётом проблем, которые возникают при эксплуатации этих элементов системы.

**Литература**

1. *Osseiran A. Scenarios for 5G mobile and wireless communications: the vision of the METIS project // IEEE Communications Magazine. 2014. Т. 52, № 5. С. 26–35.*
2. *5G Massive MIMO Testbed: From Theory to Reality // <http://www.ni.com/white-paper/52382/en/>*

**АЛГОРИТМ ОБУЧЕНИЯ МЕТОДОМ ОБРАТНОГО  
РАСПРОСТРАНЕНИЯ ОШИБКИ, ПОЗВОЛЯЮЩИЙ ОБУЧИТЬ  
РАЗРАБОТАННУЮ НЕЙРОННУЮ СЕТЬ**

**Кононов Н.Б.<sup>1</sup>, Коробейникова П.К.<sup>2</sup>, Кононов М.Н. А.А.<sup>3</sup>**

*СКФУ, Ставрополь, Россия;* <sup>1</sup>*kononovk78@gmail.com;*

<sup>2</sup>*KorobeynikovaPK@energomera.ru;* <sup>3</sup>*mikhail\_kononov\_2014@mail.ru*

В качестве обучающего алгоритма был выбран алгоритм с обратным распространением ошибки. Выбор был сделан на основе уже существующего анализа алгоритмов обучения нейронных сетей, а также на основании проведенного анализа преимуществ и недостатков алгоритмов применительно к поставленным задачам [1].

1. Инициализировать  $\{w_{ij}\}$  маленькими случайными значениями,  $\{w_{ij}\} = 0$ .
2. Повторить «число шагов»  $m$  раз: Для всех  $d$  от 1 до  $m$ :
  - 2.1 подать  $\{x_i^d\}$  на вход сети и подсчитать выходы  $0_i$  каждого узла;
  - 2.2 для всех  $\delta_j = -2 * o_j * (1 - o_j) * (t_j - o_j)$ ;
  - 2.3 для каждого ребра сети  $\{i,j\}$
3. Выдать значения  $w_{ij}$ .

$$\Delta w_{ij} = \alpha \Delta w_{ij} + (1 + \alpha) \eta \delta_j o_j, w_{ij} = w_{ij} + \Delta w_{ij}.$$

В записи данного алгоритма  $d$  – это число имеющихся учебных выборок. После подачи учебной выборки выполняется вычисление значений нейронной сети [2]. В результате получено значение функции активизации для данной входной выборки. Используя полученное значение, вычисляется  $\delta_j$  – величина ошибки. Используя величину ошибки, выполняется изменение весовых коэффициентов значимости связи  $i$ -го и  $j$ -го нейронов. Последним шагом выдаются итоговые значения весовых коэффициентов между имеющимися парами нейронов.

**Литература**

1. Николенко С. Нейронные сети. Учебное пособие. Академический университет, 2011.
2. Терехов С.А. Многослойный персепtron. Учебное пособие. Снежинск: Лаборатория Искусственных Нейронных Сетей НТО-2, ВНИИТФ.

**РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ТОЧЕК НА ЕДИНИЧНОЙ ОКРУЖНОСТИ (по совместной работе с А.В. Устиновым)**

**Королёв М.А.**

МИАН, Москва, Россия; korolevma@mi.ras.ru

Пусть  $Q \geq 2$ , и пусть  $(u_1, v_1), \dots, (u_N, v_N)$  – все точки дуги  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$  единичной окружности, координаты которых – рациональные несократимые дроби, знаменатели которых не превосходят  $Q$ . Будем считать, что точки  $(u_j, v_j)$  упорядочены в порядке возрастания величины  $\operatorname{tg} \varphi_j = v_j/u_j$ . Ставится вопрос о том, как распределены точки  $(u_j, v_j)$ . Именно, пусть  $t > 0$  – произвольное фиксированное число. Обозначим через  $N(Q; t)$  количество дуг, образованных соседними точками  $(u_j, v_j)$  и  $(u_{j+1}, v_{j+1})$ , длина которых не превосходит величины  $t/Q$ . Имеет место

**Теорема.** При  $Q \rightarrow +\infty$  справедлива следующая асимптотическая формула:

$$N(Q; t) = \frac{Q}{\pi} \int_0^t h(x) dx + O_t(R),$$

где  $R = Q^{5/6}(\ln Q)^{4/3}$ , а функция  $h$  задаётся равенствами

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x \leq \sqrt{2}; \\ x^{-2}(2 \ln x - \ln 2), & \text{если } \sqrt{2} \leq x \leq 2; \\ x^{-2}(4 \ln x - 3 \ln 2), & \text{если } 2 \leq x \leq 4; \\ x^{-2}(2 \ln x - 4 \ln(1 + \sqrt{1 - 4/x}) + \ln 2), & \text{если } 4 \leq x \leq 2\sqrt{2} + 2; \\ x^{-2}(2 \ln x - \ln 2), & \text{если } 2\sqrt{2} + 2 \leq x \leq 8; \\ x^{-2}(11 \ln 2 - 2 \ln x - 8 \ln(1 + \sqrt{1 - 8/x})), & \text{если } 8 \leq x \leq 3\sqrt{2} + 4; \\ x^{-2}(4 \ln 2 - 4 \ln(1 + \sqrt{1 - 8/x})), & \text{если } x \geq 3\sqrt{2} + 4. \end{cases}$$

**Замечание.** Поскольку

$$N = N(Q) = \frac{Q}{\pi} + O(\sqrt{Q} \ln Q),$$

то

$$N(Q; t) = N(Q) \int_0^t h(x) dx + O_t(R).$$

**ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕНДЕНЦИЙ ВРЕМЕННЫХ  
РЯДОВ МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ В ГОРНЫХ РАЙОНАХ  
КАРАЧАЕВО-ЧЕРКЕСИИ С 1961 ПО 2016 ГГ.**

**Корчагина Е.А.**

*ЦГИ, Нальчик, Россия; helen.a.k@mail.ru*

Результаты многолетних инструментальных измерений характеристик атмосферы на метеостанциях дают наиболее объективный материал для анализа их динамики в изучаемом регионе. В качестве методов исследования динамики средних годовых и сезонных показателей температуры воздуха и сумм атмосферных осадков в горной зоне КЧР выбраны методы математической статистики и регрессионного анализа.

Исходные ряды обладают неоднородностью по причине изменений в режиме проведения измерений на метеостанциях до 1966 г. Неоднородность в рядах температуры воздуха устранена применением поправок для перехода от средних суточных по 4-м срокам измерений к средним за 24 часа по данным ближайшей метеостанции (аналогично [1]).

Рассчитаны характеристики трендов и показатели колеблемости составленных рядов уровней метеопараметров атмосферы в горной зоне КЧР по данным метеостанции Клухорский перевал. Степень полноты устойчивости выявленных тенденций оценивалась непараметрическим методом корреляции рангов Ч. Спирмэна. Дополнительно проведены тесты на их статистическую значимость, дана качественная характеристика степени полноты устойчивости по шкале Чеддока.

Например, для сумм атмосферных осадков получено, что из выделенных трендов признаками статистической значимости не обладает ни один (нулевая гипотеза не противоречит фактическим данным). При этом ряд уровней сумм осадков, осредненных за осенние месяцы ( $b_{\text{осень}} = 1,03 \text{ мм/мес.}$ ) имеет  $p$ -значение, близкое к заданному уровню значимости  $\alpha$ , поэтому здесь оценка является не очень надежной. Степень полноты устойчивости тенденции определяется как слабая ( $r_S < 0,3$ ) для всех сезонов. Статистическая значимость коэффициентов корреляции Ч. Спирмэна на уровне 0,05 для исследуемых рядов сумм атмосферных осадков по результатам проведенных тестов не подтверждается.

**Литература**

1. Корчагина Е.А. Исследование температурного режима в высокогорье Карачаево-Черкесской Республики с 1951-го по 2016 гг. // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2017. № 6(80). С. 73–81.

## **ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ПОЛОЖЕНИЯ КЛЮЧЕВЫХ ТОЧЕК ОБЪЕКТА В ВИДЕОПОТОКЕ.**

**Котец А.Ф.**

*СОГУ, Владикавказ; ИИПРУ, Нальчик; Россия; aktec@mail.ru*

### **1. Ключевые точки изображения.**

Под ключевой точкой изображения будем понимать такую точку (и небольшую область вокруг нее), которая имеет некоторые признаки, существенно отличающие ее от основной массы точек. Предполагая, что ключевые точки присутствуют на образце всегда, то можно поиск образца свести к поиску на сцене ключевых точек образца. А поскольку ключевые точки сильно отличаются от основной массы точек, то их число будет существенно меньше, чем общее число точек образца. Наиболее качественными и популярными методами поиска ключевых точек являются алгоритмы SURF и SIFT.

### **2. Динамика изменения ключевых точек в видеопотоке.**

Цель работы заключается в изучении процесса изменения положения точек наблюдаемого объекта. Это исследование поможет решить обратную задачу математической физики по подбору коэффициентов в системе дифференциальных уравнений, описывающих динамику этих частиц. С помощью ключевых точек планируется исследовать процесс деформации объекта в реальном времени.

### **Литература**

1. *Herbert B., Tinne T., Luc V.G.* SURF: speeded up robust features // Computer Vision and Image Understanding. 2008. Vol. 110. P. 346–359.
2. *Lowe D.G.* Distinctive image features from scale-invariant keypoints // International Journal of Computer Vision. 2004. Vol. 2, № 60. P. 91–110.

**ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ С ПОМОЩЬЮ АЛС  
МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ЭЙЛЕРА НА  $n$ -ВЗВЕШЕННОМ  
 $m$ -ЦВЕТНОМ ПРЕДФРАКТАЛЬНОМ ГРАФЕ**

**Кочкаров А.М.<sup>1</sup>, Коркмазова З.О.<sup>2</sup>**

*СевКавГГТА, Черкесск, Россия;*

<sup>1</sup>*ahmat\_kochkarov@mail.ru;* <sup>2</sup>*zareta300672@mail.ru*

Рассмотрим взвешенный предфрактальный граф  $G_L = (V_L, E_L)$  порожденный затравкой  $H = (W, Q)$ , у которой  $|W| = n$ ,  $|Q| = q$ .

Выделим на предфрактальном графе  $G_L = (V_L, E_L)$  эйлеров путь так, чтобы смежные ребра имели разные цвета [1,2].

**Теорема.** *Многокритериальная задача покрытия  $n$ -взвешенного  $m$ -цветного предфрактального графа эйлеровым циклом не разрешима с помощью алгоритма линейной свертки.*

**Литература**

1. Кочкаров А.М. Распознавание фрактальных графов. Алгоритмический подход. Нижний Архыз: РАН САО, 1998.
2. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. Москва, 1990.

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-07-00231а.

**ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ МОДЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ  
ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА, ЗАДАННОГО НА ПРЕДФРАКТАЛЬНОМ  
ГРАФЕ**

**Кочкаров А.М.<sup>1</sup>, Токова А.А.<sup>2</sup>**

*СевКавГГТА, Черкесск, Россия;*

<sup>1</sup>ahmat\_kochkarov@mail.ru; <sup>2</sup>tokova-aa@yandex.ru

Рассматривается начально-краевая задача для модельного параболического уравнения заданного на предфрактальном графе  $G$  с затравкой [1]  $H$  – геометрическим графом [2], с краевыми условиями содержащими производную по времени. Устанавливается существование решения краевой задачи. В каждой граничной вершине  $a$  графа  $G$  решение уравнения должно удовлетворять нелокальному условию. А в каждой внутренней вершине  $a$  на решение уравнения накладываются условия непрерывности и одно условие согласования. Ставится однородное начальное условие.

**Литература**

1. Кочкаров Р.А. Многозвездные предфрактальные графы с недетерминированными весами. Приложения в экономике, астрофизике и сетевых коммуникациях. М.: Ленанд, 2017. 432 с.
2. Кулаев Р.Ч. О существовании решения параболической задачи на графе с краевыми условиями, содержащими производные по времени // Владикавказский математический журнал. 2011. Т. 13, вып. 3. С. 42–52.

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-07-00231а.

## ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРЕДФРАКТАЛЬНОГО И ФРАКТАЛЬНОГО ГРАФОВ

**Кочкаров А.М.<sup>1</sup>, Хубиева Д.А.-З.<sup>2</sup>**

*СевКавГГТА, Черкесск, Россия;*

<sup>1</sup>*ahmat\_kochkarov@mail.ru;* <sup>2</sup>*khubieva-diana@mail.ru*

Рассматриваются задачи о топологических характеристиках [1] на предфрактальных и фрактальных графах [2]. Используем обозначение  $G = (V, E)$  для всякого конечного или бесконечного графа. Поэтапно замещая все вершины графа  $G_1 = (V_1, E_1)$  затравками  $H$  [2], получаем граф  $G_2 = (V_2, E_2)$ . Продолжая этот процесс, получаем предфрактальный граф  $G_l = (V_l, E_l)$ ,  $l = \overline{1, L}$ . При  $L \rightarrow \infty$   $G_L = (V_L, E_L)$  – фрактальный граф. На фрактальных и предфрактальных графах найдены условия, при которых, зная свойства затравки, определяем свойства всего графа.

**Теорема.** *Всякий предфрактальный граф  $G_l = (V_l, E_l)$ ,  $l = \overline{1, L}$  пла-  
нарен с затравкой  $H$ , где  $H$  – лес.*

### Литература

1. Емеличев В.А. и др. Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990. 384 с.
2. Кочкаров А. А. Структурная динамика: свойства и количественные ха-  
рактеристики предфрактальных графов. М.: Вега Инфо, 2012. 120 с.

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаменталь-  
ных исследований, проект № 16-07-00231а.

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ САМООБУЧЕНИЯ  
ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ СИСТЕМ В ПРОБЛЕМНОЙ СРЕДЕ ПРИ  
НАЛИЧИИ В НЕЙ ПРИЧИННО-СЛЕДСТВЕННЫХ СВЯЗЕЙ**

**Красовская Л.В.**

*БелГУ, Белгород, Россия; krasovskaya@bsu.edu.ru*

Рассматривается алгоритм самообучения интеллектуального робота (ИР) на нечетких семантических сетях в проблемной среде (ПС) при наличии в ней причинно-следственных связей [2]. При выполнении в ПС независимых от интеллектуальной системы (ИС) событий, связанных с появлением в ней соответствующих им сигналов среду следует отнести к классу динамических сред. В такой ПС происходят независимые от интеллектуальной системы преобразования допустимых ситуаций, влияющих на процесс ее адаптации к изменяющимся условиям среды. В процессе самообучения ИС при наличии в ПС причинно-следственных связей, обусловленных выполнением в ней различных по своему содержанию событий, необходимо исключить возможность закрепления в вырабатываемых программой целесообразного поведения (ПЦП) случайных импликативных решающих правил  $S_{тек} \& B_j \rightarrow S_{рез}^1$ , формирующихся в результате неверного определения причин изменения ситуаций среды.

Алгоритмы самообучения позволяют ИР адаптироваться к сложным условиям функционирования в ПС при наличии в ней взаимосвязанных событий. Робот формирует модель своего функционирования в виде совокупности ПЦП, приводящим в среде к различным целевым ситуациям [2].

**Литература**

1. Красовская Л.В. Алгоритмы самообучения интеллектуальных систем в проблемной среде при наличии в ней причинно-следственных связей. Современные информационные технологии в проектировании, управлении и экономике. Часть 1. Сборник научных трудов. Махачкала: ДГТУ, 2005. С. 55–59.
2. Красовская Л.В. Моделирование процессов самообучения интеллектуальных систем на нечетких семантических сетях в недоопределенных средах. Автореф. дисс. канд. техн. наук. Махачкала: Полиграфист, 2006. 16 с.

**РЕАЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА ПЕРЕНОСА  
ДАВЛЕНИЯ МНОГОКОМПОНЕНТНОГО РАССОЛА В ПОРИСТОЙ  
СРЕДЕ  
С ПОМОЩЬЮ СХЕМ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНОЙ  
ПРОГОНКИ**

***Крахоткина Е.В.***

*СКФУ, Ставрополь, Россия; elena-stv@yandex.ru*

Процесс перераспределения давления многокомпонентных рассолов в мышечной ткани как аналоге пористой среды может быть задан с помощью уравнения пьезопроводности, которое в дальнейшем может быть расщеплено на три одномерных уравнения, каждое из которых соответствует процессу перераспределения вдоль осей  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  соответственно [1].

Решением этого уравнения является функция  $p(t, x, y, z)$ , удовлетворяющая равенству:

$$p(t, x, y, z) = p_1(t, x) \cdot p_2(t, y) \cdot p_3(t, z)$$

где  $p_1(t, x)$ ,  $p_2(t, y)$ ,  $p_3(t, z)$  – функции, являющиеся решениями соответствующих краевых задач с начальными и однородными граничными условиями [1].

В работе [1] приведено решение данной задачи с помощью метода параллельной прогонки и метода сеток. Цель данной работы найти решение перераспределения давления многокомпонентного рассола, используя схему параллельной продольно-поперечной прогонки [2] и показать ее графическую интерпретацию с помощью средств программирования системы автоматизации математических вычислений MathCAD [3].

**Литература**

1. Борисенко А.А., Семенчин Е.А., Крахоткина Е.В., Брацихин А.А. Математическое моделирование фильтрационно-диффузионных процессов в пористых средах (на примере мышечной ткани). Монография. Ставрополь: СевКавГТУ, 2009. 170 с.
2. Жадан М.И. Методы решения сеточных уравнений : практическое пособие. Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2017. 47 с.
3. Поршинев С.В., Беленкова И.В. Численные методы на базе MathCAD. Спб.: БХВ-Петербург, 2005. 464 с.

**ОЦЕНКИ МНОГОЧЛЕНОВ ОТ СОВОКУПНОСТЕЙ ПОЛИАДИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ**

**Крупицын Е.С.**

*МПГУ, Москва, Россия; krupitsin@gmail.com*

В 1972 г. Цайсов [1] установил оценку меры трансцендентности некоторых лиувиллевых чисел.

Кольцо целых полиадических чисел представляет собой прямое произведение колец целых  $p$ -адических чисел.

Полиадическое число  $\alpha$  называется лиувиллевым, если для любых натуральных чисел  $P, D$  и любого числа  $p$ ,  $p \leq P$  существует натуральное число  $A$  такое, что

$$|\alpha - A|_p < A^{-D}.$$

Рассматриваются полиадические числа вида

$$a_i = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,i} \cdot (\varphi_i(n))!, \quad i = 1, \dots, m, \quad a_{n,i} \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq a_{n,i} \leq \varphi_i(n),$$

в которых  $\varphi_i(n)$  – быстро растущие функции натурального аргумента, принимающие натуральные значения. Указаны условия, при которых для заданных  $p_0$  и  $\varepsilon$  существует  $H_0(p, \varepsilon)$  такое, что для любого ненулевого многочлена  $P(x_1, \dots, x_m)$  с целыми коэффициентами и высоты  $H$ ,  $H \geq H_0$  и любого простого  $p \leq p_0$  справедлива оценка снизу

$$|P(\alpha_1, \dots, \alpha_m)|_p \geq H^{-\psi(H)}$$

с явно выписываемой (но громоздкой)  $\psi(H)$ .

**Литература**

1. Cijssow P.L. Transcendental measures. Doctoral Dissertation, Univ. Amsterdam. 1972.

**ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОЛИАДИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ В  
ВИДЕ СУММЫ ЛИУВИЛЛЕВЫХ ПОЛИАДИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ**

**Крупицын Е.С.<sup>1</sup>, Чирский В.Г.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>МПГУ, Москва, Россия; krupitsin@gmail.com

<sup>2</sup>МГУ; МПГУ; РАНХиГС, Москва, Россия; vgchirskii@yandex.ru

Полиадические числа имеют каноническое представление вида

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n!, \quad a_n \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq a_n \leq n.$$

Эти ряды сходятся в любом поле  $\mathbb{Q}_p$   $p$ -адических чисел. Возможны и другие представления полиадических чисел.

Полиадическое число  $\alpha$  называется лиувиллевым, если для любых натуральных чисел  $P, D$  и любого простого числа  $p$ ,  $p \leq P$  существует натуральное число  $A$  такое, что

$$|\alpha - A|_p < A^{-D}.$$

Следуя подходу П. Эрдеша [1] для действительных чисел доказывается, что любое полиадическое число представляется суммой лиувиллевых полиадических чисел.

Возможность получения такого результата упомянута в работе [2].

Предложен алгоритм, пригодный для произвольного представления, в частности, канонического [3], полиадических чисел.

**Литература**

1. Erdő P. Representations of real number as sums and product of Liouville numbers // Michigan Math. J. 1962. Vol. 9, № 1. P. 59–60.
2. Burger E.D. On Liouville decompositions in local fields // Proceedings of the American Mathematical Society. 1996. Vol. 124, № 11. P. 3305–3310.
3. Chirskii V.G., Krupitsin E.S. On Liouville decompositions of polyadic integers // Global Journal of Science Frontier Research(F) Mathematics and Decision Sciences. 2018. Vol. 18, № 1.

**МОДЕЛИРОВАНИЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ПОЛИКОМПОНЕНТНОЙ СРЕДЕ ПРИ ЭКСТРЕМАЛЬНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ НА ЕЕ ПОВЕРХНОСТЬ**

**A.K. Кубанова<sup>1</sup>, А.А. Иманкулиева<sup>2</sup>**

*РУДН, Москва, Россия; <sup>1</sup>a.k.kubanova@mail.ru; <sup>2</sup>imankuliyeva@gmail.com*

Работа содержит решение проблемы о двумерном движении поликомпонентной среды, состоящей из твердой, жидкой и газообразной компонент, которая инициируется бегущей вдоль плоской границы среды волновой нагрузкой.

Суть предложенного нами подхода заключается в развитии методов математического моделирования достаточно сложных процессов движения поликомпонентных сред на основе модификации метода характеристик, учитывающего самосогласованность поля скоростей многокомпонентной среды, положение характеристик, а также наличие поверхности сильного разрыва, позволяющее по известному локально-экстремальному воздействию на многофазную среду определить ее динамическое состояние.

В силу локальной определенности внешнего воздействия на многофазную среду на начальном этапе моделирования необходимо определить параметры, характеризующие реакцию среды в области локализации этого воздействия. Следующим шагом является аналитическое задание формы ударной волны в среде, содержащей параметры, подлежащие самосогласованному определению в соответствии с алгоритмом расчета, учитывающее характерную реакцию среды на ударное воздействие.

Получено уравнение состояния поликомпонентной среды, что позволяет провести исследование параметров возмущенной среды, а также параметры движения за фронтом среды. Определено положение фронта ударной волны в среде. Исследовано влияние содержаний компонент среды на эти параметры. Определен угол наклона фронта ударной волны к границе полупространства и влияние на этот угол содержания компонент и величины постоянной нагрузки.

**Литература**

1. Крайко А.Н. Механика многофазных сред. Сборник «Итоги науки и техники». Гидромеханика. М.: ВИНТИ, 1972. Т. 6. С. 93–174.
2. Рахматуллин Х.А. Газовая и волновая динамика. М.: МГУ, 1983.
3. Ляхов Г.М. Волны в грунтах и пористых средах. М.: Наука, 1982. 288 с.

**О МОДЕЛИРОВАНИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИНФОРМАЦИИ  
С УЧЕТОМ ЗАБЫВАНИЯ**

**Куготова М.Н.**

*ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия;  
kugotova.radima@mail.ru*

В работе предложена модель распространения информации в группе взаимодействующих индивидов с дискретным временем. Рассматриваемая модель предполагает, что неохваченный информацией индивид может ее получить только путем межличностного общения. Модель имеет вид :

$$u_{n+1} = u_n + bu_n(c - u_n) - \gamma(u_{n-s+1} - u_{n-s})H(n - s), \quad (1)$$

где  $u_n$  – количество (плотность) адептов в момент времени  $t_n$ ,  $c$  – численность индивидов,  $b > 0$  – параметр распространения информации через информированного ранее индивида (слухи),  $\gamma$  – параметр интенсивности забывания информации,  $s$  – время памяти,  $H$  – функция Хевисайда.

За основу взята непрерывная модель распространения информации в социуме [1]. Также ранее была рассмотрена непрерывная модель распространения информации с дробной производной в работе [2]. Для модели (1) создана имитационная модель, позволяющая проведение идентификации параметров модели.

**Литература**

1. Михайлов А.П., Петров А.П., Маревцева Н.А., Третьякова И.В. Развитие модели распространения информации в социуме // Математическое моделирование. 2014. Т. 26, № 3. С. 65–73.
2. Куготова М.Н. Математическое моделирование информационного взаимодействия // Материалы тезисов Международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и информатики» и XIV Школы молодых ученых «Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики». Нальчик, 2016. С. 167.

## РАНГОВАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ПОТОКОВЫХ СЕТЕЙ

Кудаев В.Ч.<sup>1</sup>, Абазоков М.Б.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ИИПРУ КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; iipru@rambler.ru

<sup>2</sup>ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; abazokov.mukhammad@yandex.ru

Математической моделью задачи проектирования оптимальных распределительных сетей является задача:

$$C(v) = \sum_{ij \in D} c_{ij}(v_{ij})l_{ij} \rightarrow \min, \quad \sum_{i \in \Gamma_j^+} v_{ij} - \sum_{k \in \Gamma_j^-} v_{jk} = g_j \quad \forall j \neq 1 \in B, \quad (1), \quad (2)$$

$$\sum_{j \in \Gamma_1^-} v_{1j} = \sum_{i \in B} q_i, \quad v_{ij} \geq 0 \quad \forall (i, j) \in D, \quad (3)$$

где  $\Gamma(B, D)$  – заданный орграф возможных соединений узлов (вершин) сети;  $v_{ij}$ ,  $c_{ij}$ ,  $l_{ij}$  – искомое значение величины потока, его удельная стоимость и длина  $(i, j)$ -й дуги;  $q_i$  – заданное потребление потока в  $i$ -м узле сети;  $c_{ij}(v_{ij})$  – непрерывная, строго вогнутая возрастающая функция,  $c_{ij}(0) = 0$ . Задача (1)–(3) существенно многоэкстремальна и относится к классу  $NP$ -полных задач [1, 2]. Поскольку в задаче локальные и глобальный экстремум могут достигаться лишь в угловых точках транспортного многогранника (2), (3), в [3] введено понятие экстремума  $p$ -го ранга – глобального на выпуклой линейной комбинации всех угловых точек МДР имеющих смежность к точке экстремума в промежутке  $[0, p]$ , дано определение фрагмента  $p$ -го ранга сети и показано, что сеть только тогда  $p$ -оптимальна, когда любой ее фрагмент  $p$ -го ранга оптимален.

В работе на этой основе представлен метод синтеза сетей 3-го ранга оптимальности и результаты компьютерного проектирования сетей.

### Литература

1. Михалевич В.С., Трубинин В.А., Шор Н.З. Оптимационные задачи производственно-транспортного планирования. М.: Наука, 1986. 260 с.
2. Меренков А.П., Сеннова Е.В., Сумароков С.В. и др. Математическое моделирование и оптимизация систем тепло-, водо-, нефте- и газоснабжения. Новосибирск: Наука, 1992. 407 с.
3. Кудаев В.Ч. Ранги экстремумов и структурная оптимизация больших сетевых систем // Известия КБНЦ РАН. 2016. № 4(72). С. 15–23.

**ПОСТРОЕНИЕ БАЗОВОГО ГРАФА И НАЧАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ  
ЗАДАЧИ СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНОЙ ПОТОКОВОЙ СЕТИ**

**Кудаев В.Ч., Багов М.А., Скорикова Л.В.<sup>1</sup>**

*ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; <sup>1</sup>mila.skorikova.67@mail.ru*

**1. Построение базового графа (БГ) сети.**

Проблема состоит в построение такого связного избыточного геометрического графа соединений заданных узлов сети, который не содержит нерациональных соединений (дуг графа). БГ позволяет снизить размерность задачи синтеза оптимальной потоковой сети, являющейся существенно многоэкстремальной и относящейся к классу NP-полных задач [1-3]. Метод построения БГ сети основан на следующем. Перспективность включения в БГ любой дуги  $(i, j)$  полного графа оценивается разностью затрат на подключение узлов  $i$  и  $j$  непосредственно к источнику 1 и подключения узла  $j$  к источнику через узел  $i$ .

$$\Phi_{ij} = (f(q_i)l_{1i} + f(q_j)l_{1j}) - (f(q_i + q_j)l_{1i} + f(q_j)l_{ij}), \quad (1)$$

где  $q_i$  и  $q_j$  – потребности узлов  $i$  и  $j$ ,  $f(q)$  – удельная стоимость потока  $q$ ,  $l_{ij}$  – длина дуги  $(i, j)$ . Функция (1) дает также возможность определить узел который следует подключить непосредственно к источнику сети. Это тот узел, который не выгодно подключать к сети через любой иной узел, т. е. тот, на котором достигается  $\min_j \max_i [\Phi_{ij}]_{j=2,\dots,n; i=2,\dots,n}$ , где  $[\Phi_{ij}]_{j=2,\dots,n; i=2,\dots,n}$  – квадратная матрица в диагональных ячейках которой стоят нули.

**2. Начальное решение задачи синтеза сети.**

Поскольку каждой дуге  $(i, j)$  БГ поставлен в соответствие вес  $\Phi_{ij}$  (1), то в качестве начального решения задачи синтеза сети на БГ строится оствовное дерево наибольшего веса на основе алгоритма Прима – Крускала.

**Литература**

1. Михалевич В.С., Трубинин В.А., Шор Н.З. Оптимационные задачи производственно-транспортного планирования. М.: Наука, 1986. 260 с.
2. Меренков А.П., Сеннова Е.В., Сумароков С.В. и др. Математическое моделирование и оптимизация систем тепло-, водо-, нефте- и газоснабжения. Новосибирск: Наука, 1992. 407 с.
3. Кудаев В.Ч. Ранги экстремумов и структурная оптимизация больших сетевых систем // Известия КБНЦ РАН. 2016. № 4(72). С. 15–23.

**Компьютерное проектирование протяженных  
трубопроводов в сети городского водоснабжения**

**Кудаев В.Ч., Буздов А.К.**

*ИИПРУ КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; iiipru@rambler.ru*

В настоящее время возникает необходимость встраивания в существующую сеть водоснабжения городов магистральных (протяженных) трубопроводов (МТ). Проектировщики и конструкторы при этом ориентируются на многолетнюю инженерную практику строительства и эксплуатации трубопроводов. В данной работе представлен метод, основанный на формализации и оптимизации инженерного подхода и получены явные формулы для основных технико-экономических параметров МТ и, главное, диаметров труб по участкам МТ:

$$d_r = \frac{k^{\frac{1}{\gamma}} q_r^{\frac{\beta}{\alpha+\gamma}}}{P_{0n}^{\frac{1}{\gamma}}} \left( \sum_{i=1}^n q_i^{\frac{\beta\alpha}{\alpha+\gamma}} l_i \right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad r = 1, 2, \dots, n,$$

где  $1 < \alpha \leq 2$ ,  $k > 0$ ,  $\beta > 1$ ,  $\gamma > 4$  – известные числовые коэффициенты, зависящие от материалов труб [1, 2],  $q_r$  – величина потока по  $r$ -му участку МТ,  $l_i$  – длина  $i$ -го участка МТ,  $P_{0n}$  – заданная разность давлений воды между началом и концом МТ.

**Литература**

1. Абрамов Н.Н. и др. Расчет водопроводных сетей. М.: Стройиздат, 1983. 278 с.
2. Меренков А.П., Сеннова Е.В., Сумароков С.В. и др. Математическое моделирование и оптимизация систем тепло-, водо-, нефте- и газоснабжения. Новосибирск: Наука, 1992. 407 с.

**ОПТИМИЗАЦИЯ ЗОНАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ  
ПРИ УПРАВЛЕНИИ ПРОЦЕССОМ НАГРЕВА СТЕРЖНЯ**

**Кулиев С.З.**

АГУНП, Баку, Азербайджан; azcopal@gmail.com

Рассматривается задача синтеза управления сосредоточенными точечными источниками при нагреве стержня длиной  $l$  при  $t \in [0, T]$ :

$$u_t' = au_{xx}'' + \sum_{i=1}^m q_i(t) \delta(x - \bar{x}_i) + f(x, t),$$

$$u_x'(0, t) = u_x'(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = u_0 \in U_0,$$

где  $q_i(t) \in Q_i$ ,  $Q_i$  и  $U_0$  – множество управлений и начальных состояний.

Пусть  $\tilde{x}_j \in [0, l]$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , – точки (замера) состояния процесса

$$\tilde{u}_j(t) = u(\tilde{x}_j, t), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad t \in [0, T].$$

Разобъем диапазон значений всевозможных состояний процесса  $\underline{u} \leq u(x, t) \leq \bar{u}$  на  $N$  зон точками  $\tilde{u}_s$ ,  $s = 0, 1, \dots, N$ ,  $\tilde{u}_0 = \underline{u}$ ,  $\tilde{u}_N = \bar{u}$ . Синтезируемое управление будем искать в следующем виде

$$q_i(t) = \sum_{i=1}^n K_{ij}^s [u(\tilde{x}_j, t) - r_{ij}], \quad \text{если } \tilde{u}_{s-1} \leq u(\eta_j, t) \leq \tilde{u}_s, \quad (1)$$

где  $K_{ij}^s$  – зональный коэффициент усиления для  $i$ -го источника относительно  $j$ -ой точки замера;  $r_{ij}$  – номинальное значение температуры, которое надо поддерживать  $i$ -ым источником в  $j$ -ой точке замера;  $K_{ij}^s$  и  $r_{ij}$  оптимизируются. Подставляя (2) в (1), получим нагруженное уравнение:

$$u_t' = au_{xx}'' + \sum_{i=1}^m \delta(x - \bar{x}_i) \sum_{i=1}^n K_{ij}^s [u(\tilde{x}_j, t) - r_{ij}].$$

Пусть требуется минимизировать функционал:

$$J(K, r) = \int_{U_0} \int_0^l [u(x, T; K, r, u_0) - U(x)]^2 dx du_0 \rightarrow \min_{K, r}.$$

С целью использования методов оптимизации первого порядка для численного решения задачи синтеза управляющих параметров  $K = (K_{ij}^s)$ ,  $r = (r_{ij})$ , в работе получены формулы градиента целевого функционала по оптимизируемым параметрам.

**ВАРИАЦИОННЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ОДНОЙ  
КОЭФФИЦИЕНТНО-ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО  
УРАВНЕНИЯ**

**Кулиев Г.Ф.<sup>1</sup>, Сафарова З.Р.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>БГУ, Баку, Азербайджан; hkuliyev@rambler.ru

<sup>2</sup>НГУ, Нахичевань, Азербайджан; seferovazumrud@gmail.com

В работе рассматривается следующая задача определения пары функций  $(u(x, t), \vartheta(x)) \in W_2^1(Q) \times L_2(\Omega)$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u^3 + \vartheta \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t), (x, t) \in Q = (0, l) \times (0, T), \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = u_1(x), x \in [0, l], \quad (2)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, t \in [0, T], \quad (3)$$

$$I_0(\vartheta, u) = \frac{1}{2} \int_0^l (u(x, T) - \varphi(x))^2 dx \rightarrow \min_{\vartheta \in V}, \quad (4)$$

$$V = \{\vartheta \in W_2^1[0, l] : \alpha \leq \vartheta(x)\beta, \left| \frac{d\vartheta(x)}{dx} \right| \leq \mu \text{ п.в.в}[0, l]\}, \quad (5)$$

где  $l > 0$ ,  $T > 0$ ,  $\mu > 0$ ,  $\alpha, \beta, f \in L_2(Q)$ ,  $u_0 \in W_2^1[0, l]$ ,  $u_1 \in L^2[0, l]$ ,  $\varphi \in W_2^1[0, l]$  – заданы,  $u(x, t) \in L_6(Q)$ .

С помощью метода адаптированного штрафа при условиях (1)–(5) получены необходимые условия оптимальности в форме вариационного неравенства для задачи минимизации функционала

$$I(\vartheta, u) = I_0(\vartheta, u) + \frac{1}{6} \|u - u_d\|_{L_6(Q)}^6.$$

**ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ НАЧАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ В СМЕШАННОЙ  
ЗАДАЧЕ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО  
ПОРЯДКА С НЕЛОКАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ**

**Кулиев Г.Ф.<sup>1</sup>, Тагиев Х.Т.<sup>2</sup>**

*БГУ, Баку, Азербайджан; <sup>1</sup>hkuliyev@rambler.ru, <sup>2</sup>tagiyevht@gmail.com*

Рассмотрим задачу определения пары  $(u(x, t), \vartheta(x))$  из  $W_2^1(Q) \times L_2(\Omega)$  из следующих соотношений

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_j} \right) + f(x, t), (x, t) \in Q, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \vartheta(x), x \in \Omega, \quad (2)$$

$$\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_j} \cos(\nu, x_i) = \int_{\Omega} K(x, y, t) u(y, t) dy, (x, t) \in S, \quad (3)$$

$$I_{\alpha} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u(x, T; \vartheta) - g(x))^2 dx + \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} (\vartheta(x) - \omega(x))^2 dx \rightarrow \min. \quad (4)$$

Здесь  $Q = \{(x, t) : x \in \Omega, 0 < t < T\}$ ,  $\Omega$  – ограниченная область в  $R^m$  с гладкой границей  $\partial\Omega$ ,  $T > 0$ ,  $S = \{(x, t) : x \in \partial\Omega, 0 < t < T\}$  – боковая поверхность цилиндра  $Q$ ,  $\nu$  – внешняя нормаль к  $S$ ,  $f(x, t)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $K(x, y, t)$ ,  $\alpha > 0$ ,  $g(x) \in W_2^1(\Omega)$ ,  $\omega(x) \in L_2(\Omega)$  – заданы.

**Теорема.** Пусть выполняются вышенаписанные условия на данные задачи (1)–(4). Тогда для оптимальности управления  $\vartheta_* = \vartheta_*(x) \in U_{ad}$  в задаче (1)–(4), необходимо и достаточно чтобы выполнялось неравенство

$$\int_{\Omega} (\alpha(\vartheta_* - \omega) - \psi(x, 0; \vartheta_*)) (\vartheta - \vartheta_*) dx dt \geq 0$$

при всех  $\vartheta \in U$ , где  $\psi(x, t; \vartheta)$  – решение сопряженной задачи.

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФОРМИРОВАНИЯ И РОСТА  
КРИСТАЛЛОВ ЛЬДА ВО ФРАКТАЛЬНОЙ ОБЛАЧНОЙ СРЕДЕ**

**Кумыков Т. С.**

*ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; macist20@mail.ru*

Достижение определенных успехов в разработке математических моделей различных геопроцессов в облачной среде с фрактальной структурой стало реальностью благодаря тому, что в основе этих моделей лежат дифференциальные уравнения дробного порядка как по временной, так и по пространственной переменной, и их разностные аналоги. Этим и обусловлены рост внимания геофизиков к фрактальному анализу [1, 2], дробному исчислению и актуальность развития методов решения начальных и краевых задач для таких уравнений, выступающих в качестве инструмента для исследования влияния фрактальности среды на различные геопроцессы в облаках, к примеру, формирование и рост ледяных частиц.

Ледяные частицы в атмосфере зарождаются в результате конденсации водяного пара на аэрозольных частицах и гетерогенной кристаллизации микроскоплений переохлаждённой воды в неоднородностях их поверхности. Для последующего роста возникшего кристалла необходимо, чтобы содержание водяного пара в атмосфере превышало равновесную концентрацию пара. При этом также следует учитывать фрактальность облачной среды, значение которой существенно оказывает влияние на рост кристаллов в атмосфере.

В настоящей работе проводится исследование особенностей зарождения и роста облачных ледяных частиц с учетом фрактальности среды.

**Литература**

1. *Iudin D.I., Trakhtengerts V.Y., Hayakawa M.* Fractal dynamics of electric discharges in a thundercloud // Phys. Rev. E. 2003. Vol. 68. P. 016601.
2. *Кумыков Т.С.* Математическое моделирование формирования разности потенциалов при кристаллизации облачных капель с учетом фрактальности среды // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2017. Т. 10, № 3. С. 16–24.

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ РЕШЕТОЧНОГО АНГАРМОНИЗМА  
НА ПРОЦЕСС ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ**

**Кунижев Х.Л.**

*ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; kh.kunizhev@gmail.com*

В работах [1], [2] было выявлено влияние решеточного ангармонизма на зависимость теплоемкости от температуры. В частности, в данных работах было показано, что решеточный ангармонизм оказывает сильное влияние на теплоемкость при температурах выше температуры Дебая.

В этой работе исследуется влияние ангармонизма колебаний атомов в кристаллической решетке на теплопроводность неметаллов подгруппы углерода (алмаз, кремний, германий).

Численно решается уравнение теплопроводности с учетом ангармонизма колебаний атомов:

$$(1 + T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}.$$

**Литература**

1. Рехвиашвили С.Ш. Теплоемкость твердых тел фрактальной структуры с учетом ангармонизма колебаний атомов // ЖТФ. 2008. Т. 78, № 12. С. 54–58.
2. Рехвиашвили С. Ш., Кунижев Х. Л. Исследование влияния решеточного ангармонизма на теплоемкость алмаза, кремния и германия // Теплофизика высоких температур. 2017. Т. 55, № 2. С. 320–323.

## О ЧИСЛЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ С КВАДРАТИЧНЫМИ ФОРМАМИ РАЗНЫХ ДИСКРИМИНАТОВ

Куртова Л.Н.<sup>1</sup>, Васильева Н.В.<sup>2</sup>

НИУ «БелГУ», Белгород, Россия; <sup>1</sup>kurtova@bsu.edu.ru; <sup>2</sup>vasileva@bsu.edu.ru

Пусть  $d_1, d_2$  – отрицательные бесквадратные числа;  $F_1 = Q(\sqrt{d_1})$ ,  $F_2 = Q(\sqrt{d_2})$  – мнимые квадратичные поля с дискриминантами  $\delta_{F_1}$ ,  $\delta_{F_2}$ ;  $Q_1(\overline{m})$ ,  $Q_2(\overline{k})$  – бинарные положительно определенные примитивные квадратичные формы с определителями  $-\delta_{F_1}, -\delta_{F_2}$ .

Для суммы

$$I_F(n, 1, 1, h) = \sum_{Q_1(\overline{m}) - Q_2(\overline{k})=h} e^{-\frac{Q_1(\overline{m}) + Q_2(\overline{k})}{n}}$$

получена асимптотическая формула.

**Теорема.** Пусть  $\varepsilon$  – произвольное положительное число,  $\delta_{F_i}$  – дискриминант поля  $F_i$ ,  $i = 1, 2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $h \in \mathbb{N}$ ,  $h \leq n^\varepsilon$ . Тогда

$$\begin{aligned} I_F(n, 1, 1, h) &= \frac{2\pi^2 n}{\sqrt{\delta_{F_1} \delta_{F_2}}} \sum_{q=1}^{+\infty} q^{-4} \sum_{\substack{l=1 \\ (l,q)=1}}^q e^{-2\pi i hl/q} G_1(q, l, \overline{0}) G_2(q, -l, \overline{0}) + \\ &\quad + O(n^{3/4+\varepsilon}), \end{aligned}$$

где  $G_i(q, l, \overline{0}) = \sum_{\overline{m} \pmod{q}} \exp(2\pi i l Q_i(\overline{m})/q)$  ( $i = 1, 2$ ) – двойные суммы Гаусса. Сумма особого ряда асимптотической формулы положительна.

Доказательство проводится круговым методом с использованием оценки

А. Вейля [1] для суммы Клоостермана. Данная проблема является аналогом задачи получения асимптотических формул для сумм  $I(n, 1, 1, 1)$  [2] и  $I(n, 1, 1, h)$  [3], содержащих квадратичные формы одного дискриминанта.

### Литература

1. Estermann T. On Kloostermann's sum // Mathematika. 1961. № 8. P. 83-86.
2. Куртова Л.Н. Об одной бинарной аддитивной задаче с квадратичными формами // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. Математика. 2007. № 7(57). С. 107–121.
3. Куртова Л.Н. Об одном аналоге аддитивной проблемы делителей с квадратичными формами // Чебышевский сборник. 2014. Т. 15, № 2. С. 33–49.

## О ВИДАХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ЛАГРАНЖА

Куртова Л.Н.<sup>1</sup>, Мотькина Н.Н.<sup>2</sup>

НИУ «БелГУ», Белгород, Россия; <sup>1</sup>kurtova@bsu.edu.ru; <sup>2</sup>motkina@bsu.edu.ru

Х. Клоостерман (1926) получил асимптотическую формулу для количества представлений числа  $n$  диагональной квадратичной формой с четырьмя целыми переменными  $n = ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$  [1]. В главном члене формулы возникает особый ряд

$$S(n) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^4} \sum_{\substack{l=1 \\ (l,q)=1}}^q e^{-\frac{2\pi i n l}{q}} S(q, al, 0) S(q, bl, 0) S(q, cl, 0) S(q, dl, 0),$$

где

$$S(q, a, b) = \sum_{1 \leq j \leq q} e^{2\pi i (aj^2 + bj)/q}$$

— сумма Гаусса.

Клоостерман привел примеры отдельных случаев, когда число представлений равно нулю. Случай, когда  $n$  или некоторые из коэффициентов  $a, b, c, d$  делятся на  $p = 2$ , рассмотрены Клоостерманом более подробно, чем случаи для нечетного простого  $p$ .

Применение точных формул для сумм Гаусса [2]–[5] позволило дополнить [1] для нечетного простого  $p$ , при которых уравнение  $n = ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$  не имеет решений.

### Литература

1. Kloosterman H.D. On the representation of number in the form // Acta mathematica. 1926. Vol. 49. P. 407–464.
2. Малышев А.В. О представлении целых чисел положительными квадратичными формами // Тр. МИАН СССР. 1962. Т. 65. С. 3–212.
3. Hua Loo-Keng. Introduction to number theory. Springer, 1982. 572 p.
4. Estermann T. A new application of the Hardy-Littlewood-Kloosterman method // Proc. London Math. Soc. 1962. Vol. 12. P. 425–444.
5. Estermann T. On Kloosterman’s sum // Mathematica. 1961. Vol. 8, № 1. P. 83–86.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК В MATCAD

**Кучерявенко С.В.**

*ЮФУ, Ростов-на-Дону, Россия; svkucheryavchenko@sfedu.ru*

Многомерное комплексное нормальное распределение используется при исследованиях радиоканала распространения телекоммуникационных сигналов. Матричные элементы канала имеют такое распределение модулей и аргументов, которое хорошо описывается законами распределения и эти матричные записи можно рассматривать как комплексные нормальные случайные переменные [1].

Двумерная плотность вероятности двух нормально распределенных случайных величин ( $X, Y$ ) задается параметрами: математическим ожиданием  $m_x$  и  $m_y$ , среднеквадратическим отклонением (СКО)  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ , коэффициентом корреляции  $r$ . Рассекая поверхность двумерного распределения плоскостями, перпендикулярными оси  $z$ , получим семейство кривых равной плотности вероятности с центром в точке  $(m_x, m_y)$  и главными осями, повернутыми относительно осей  $x, y$  на некоторый угол  $\alpha$ . Кривые равной плотности вероятности являются кривыми второго порядка, имеют форму кругов или эллипсов в зависимости от значения коэффициента корреляции  $r$  [2]. Кривые равной плотности вероятности являются эллипсами рассеивания, используются для определения направления на источник сигнала.

При моделировании вероятностных характеристик распространения радиосигналов задаются СКО  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  и коэффициент корреляции  $r$  процессов. Моделируется эллипс рассеивания для данных параметров. По эллипсу вычисляется система собственных векторов, собственных чисел, пропорциональных мощности источников сигналов. Рассчитывается корреляционная матрица и определяется направление на источник сигнала, используемое для настройки расположения антенн приемо/передатчика радиосистемы.

### Литература

1. Федосов В.П., Ломакина А.В. Алгоритмы обработки пространственно-временных сигналов. Ростов-на-Дону: Издательство ЮФУ, 2015. 73 с.
2. Кучерявенко С.В., Рыжов В.П. Использование технологии National Instruments для моделирования случайных процессов и их преобразований // Материалы Международной научной конференции «Технологии National Instruments в науке, технике и образовании». Таганрог: Издательство ЮФУ, 2006. С. 15–17.

**РАЙОНИРОВАНИЕ ЛАВИННОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПРИ ПОМОЩИ  
АВТОРСКОЙ ПРОГРАММЫ «ОЦИФРОВЩИК ТОПОГРАФИЧЕСКИХ  
КАРТ»**

**Кюль Е.В.**

*ЦГИ, Нальчик, Россия; elenakyul@mail.ru*

Для районирования деятельности опасных природных процессов (ОПП) необходимо выявление их распространения в границах конкретного географического объекта по методике ландшафтно-геоморфологического районирования лавинной опасности территории КБР [2]. При представлении пространственного распределения больших массивов разнородных данных в строгой привязке к конкретной территории наиболее оправдано применение ГИС-технологий (применена трёхмерная программа «Оцифровщик топографических карт») [1 ,3]. По результатам трассировки изогипс топокарт, фильтрации изображения, ввода высот и их интерполяции получены цифровые карты рельефа местности. При вводе различных параметров склона составлены среднемасштабные цифровые карты. По разработанным градациям критических значений данных параметров для схода лавин проводится выделение участков лавинообразования с различной степенью опасности (крупномасштабные карты). Для выделения зоны разгрузки лавин строится профиль горизонтального сечения рельефа по уровню заданной изогипсы. Для расчёта параметров лавинообразований строятся поперечные профили вертикального сечения рельефа на месте их расположения. **Выводы.** Районирование опасности при помощи трехмерной ГИС позволяет наиболее достоверно провести оценку подверженности территории как по отдельным типам ОПП, так и комплексно с использованием максимального количества показателей.

**Литература**

1. Алита С.Л. Оценка рисков развития опасных склоновых явлений и паводков на основе применения ГИС-технологий // Материалы Международной научной конференции с элементами научной школы «Инновационные методы и средства исследований в области физики атмосферы, гидрометеорологии, экологии и изменения климата». Ставрополь, 2013. С. 189–196.
2. Кюль Е.В. Геоэкологические последствия схода снежных лавин на территории Кабардино-Балкарской республики. Автореф. дис... канд. геогр. наук. Ростов-на-Дону: Издательство РГУ, 2004. 26 с.
3. Кюль Е.В. Использование ГИС при картографировании опасных природных процессов // Материалы тезисов «Актуальные проблемы прикладной математики и информатики». Терскол, 2016. С. 173–176.

## **Создание баз данных для целей картографирования природной опасности**

**Кюль Е.В.<sup>1</sup>, Чернышев Г.В.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*ЦГИ, Нальчик, Россия; elenakyul@mail.ru*

<sup>2</sup>*ИИПРУ, Нальчик, Россия; chern\_gen@mail333.com*

При картографировании природной опасности возникает необходимость в инвентаризации данных, как по самим опасным природным процессам (ОПП), так и по характеристикам участков территории, на которых они сходят [1]. Базы данных (БД) по ОПП, созданные ранее, нуждаются в обновлении и дополнении (по бассейнам образования ОПП). Когда общая структура БД и конкретная нормативно-справочная информация будут определены, можно будет переходить к построению ГИС, тем более учитывая, что БД является ее составной частью. Поскольку в БД будет представлена картографическая информация из различных атласов, полученная при картографировании природной опасности, основными являются вопросы кодирования основных объектов данной предметной области в БД (например, лавиносборов), позволяющие проводить однозначную привязку этих объектов к местности [1]. При этом общая структура БД должна отражать все картографические блоки атласа (4 по числу стадий ОПП) [2] и содержать информацию об объектах, попадающих в зону действия ОПП.

**Выводы.** Разработанная структура БД для бассейнов лавинно - и селебразования более полная и содержит сведения по всем стадиям ОПП («постадийная» блоковая структура формирования БД), что дает возможность провести полную комплексную оценку влияния ОПП на ландшафты. Для однозначной идентификации других ОПП и экспериментального наполнения БД для КБР требуется создание ряда кодификаторов, в том числе локальных, что является задачей, имеющей самостоятельное значение.

### **Литература**

1. Чернышев Г.В., Кюль Е.В. В сб.: Атласное картографирование: традиции и инновации. Материалы X научной конференции по тематической картографии. Иркутск: Издательство ИГ СО РАН, 2015. С. 175–177.
2. Кюль Е.В. Методические основы создания Атласа лавинной деятельности Кабардино-Балкарской Республики. В сб. :Физика, химия и механика снега // Сборник докладов III Международного симпозиума. Южно-Сахалинск: Полиграфическая компания «Кано», 2017. С. 73–77.

**НЕРАВЕНСТВА ТИПА ДЖЕКСОНА В ПРОСТРАНСТВАХ  
 $S^{(p,q)}(\sigma^{m-1})$**

**Ласурия Р.А.**

*АГУ, Сухум, Абхазия; rlasuria67@yandex.ru*

В работе устанавливаются неравенства типа Джексона в случае наилучших приближений  $E_n(f)_{S^{(p,q)}}$  в так называемых пространствах  $S^{p,q}(\sigma^{m-1})$ ,  $m \geq 3$ , функций, заданных на единичной сфере  $\sigma^{m-1}$  [1], для классов функций  $L^\psi S^{(p,q)}$ , определяемых преобразованиями их рядов Фурье – Лапласа с помощью мультипликаторов  $\psi$ , в терминах операторов  $\Delta_u^r := (E - S_{u,h})^{\frac{r}{2}}$ , определяемых некоторой системой функций  $h = \{h_k(u)\}$  и преобразованиями рядов Фурье – Лапласа. При некоторых условиях на системы  $\psi$  и  $h$ , справедливо неулучшаемое неравенство

$$E_n^q(f)_{S^{(p,q)}} \leq \frac{|\psi(n)|^q}{|1 - h_n(\tau)|^{r\frac{q}{2}}} \left\| \Delta_\tau^r f^\psi \right\|_{S^{(p,q)}}^q, \quad \tau \in (\tau_0, \tau_1),$$

где  $r > 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $f^\psi$  –  $\psi$ -производная функции  $f \in L^\psi S^{(p,q)}$ ,  $q \in [1, \infty)$ ,  $p \in (1, \infty]$ .

**Литература**

1. Ласурия Р.А. Прямые и обратные теоремы приближения функций суммами Фурье–Лапласа в пространствах  $S^{(p,q)}(\sigma^{m-1})$  // Мат. заметки. 2015. Т. 98, № 4. С. 530–543.

**МЕТОД ДРОБНЫХ ШАГОВ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ  
МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С  
ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ**

**Лекомцев А.В.**

*УрФУ, Екатеринбург, Россия; avlekomtsev@urfu.ru*

Рассмотрим  $q$ -мерное уравнение теплопроводности вида:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \sum_{\alpha=1}^q \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_\alpha^2} + f(x, t, u(x, t), u_t(x, \cdot)), \quad (1)$$

здесь  $x = (x_1, \dots, x_q) \in \overline{G} = \{0 \leq x_\alpha \leq X_\alpha, \alpha = \overline{1, q}\}$  — пространственная и  $t \in [t_0, \theta]$  — временная независимые переменные;  $u(x, t)$  — искомая функция;  $u_t(x, \cdot) = \{u(x, t+s), -\tau \leq s < 0\}$  — функция-предыстория искомой функции к моменту  $t$ ;  $\tau$  — величина запаздывания. Пусть заданы начальные и граничные

$$u(x, t) = \varphi(x, t), x \in \overline{G}, t \in [t_0 - \tau, t_0], \quad (2)$$

$$u(x, t)|_{\Gamma} = 0, \Gamma \text{ — граница области } G. \quad (3)$$

Существование и единственность решения задачи (1)–(3) рассматривались в [1]. Отметим, что техника исследования порядка сходимости метода дробных шагов основывается как на общей теории разностных схем [2], так и на общей методике исследования разностных схем решения функционально-дифференциальных уравнений [3]. В данной работе наличие нескольких пространственных переменных потребовало и модификации этой общей методики исследования разностных схем решения функционально-дифференциальных уравнений, и применения метода дробных шагов для сведения многомерной задачи к цепочке одномерных задач, которые были рассмотрены в работе [4].

**Литература**

1. Wu J. Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1996. 429 p.
2. Самарский А.А. Теория разностных схем, 3-е изд. М.: Наука, 1989. 616 с.
3. Пименов В.Г. Общие линейные методы численного решения функционально-дифференциальных уравнений // Дифф. уравнения. 2001. Т. 37, № 1. С. 105–114.
4. Пименов В.Г., Ложников А.Б. Разностные схемы численного решения уравнения теплопроводности с последействием // Труды ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17, № 1. С. 178–189.

**ИССЛЕДОВАНИЕ ХАОТИЧЕСКИХ И РЕГУЛЯРНЫХ РЕЖИМОВ  
ФРАКТАЛЬНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ФИТЦХЬЮ-НАГУМО**

**Липко О.Д.<sup>1</sup>, Паровик Р.И.<sup>2</sup>**

<sup>1,2</sup>КамГУ имени Витуса Беринга, Петропавловск-Камчатский, Россия;

<sup>2</sup>ИКИР ДВО РАН, Паратунка, Россия;

<sup>1</sup>olgalipko95@mail.ru, <sup>2</sup>parovik@ikir.ru

Рассмотрим следующую задачу Коши [1]:

$$\partial_{0t}^\alpha x(\tau) - c [x^2(t) + p] \partial_{0t}^\beta x(\tau) + qx(t) + gx^3(t) = a + bz, \quad (1)$$

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = y_0,$$

где  $a, b, c$  – константы, удовлетворяющие условиям  $1 - 2b/3 < a < 1$ ,  $0 < b < 1$ ,  $b < c^2$ ,  $x(t)$  – мембранный потенциал,  $x_0, y_0$  – заданные константы,  $z$  – интенсивность раздражителя, константа в первом приближении, которая также может иметь вид прямоугольного импульса или дельта-функции,  $t \in [0, T]$  – время процесса,  $T > 0$  – время моделирования, а дифференциальные операторы:

$$\partial_{0t}^\alpha x(\tau) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t \frac{\ddot{x}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-1}}, \quad \partial_{0t}^\beta x(\tau) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \frac{\dot{x}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^\beta},$$

определенны в смысле Герасимова-Капуто с дробными порядками  $1 < \alpha < 2$ ,  $0 < \beta < 1$ .

В работе с помощью численного анализа [2] и максимальных показателей Ляпунова [3] проведено исследование хаотических и регулярных колебательных режимов для осциллятора (1).

**Литература**

1. Lipko O.D. Mathematical model of nerve impulse propagation with regard to heredity // Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences. 2017. Vol. 16. № 1. P. 52–60.
2. Паровик Р.И. Математическое моделирование нелинейных эредитарных осцилляторов. Петропавловск-Камчатский: КамГУ им. Витуса Беринга, 2017. 134 с.
3. Wolf A. et al. Determining Lyapunov exponents from a time series // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1985. Vol. 16. № 3. P. 285–317.

---

Работа выполнена в рамках темы НИР КамГУ имени Витуса Беринга «Приложение дробного исчисления в теории колебательных процессов» № АААА-А17-117031050058-9 и при финансовой поддержке гранта президента Российской Федерации № МК-1152.2018.1.

**АВТОМАТИЗИРОВАННАЯ СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ  
ДИНАМИЧЕСКИМ ОБЪЕКТОМ С ИДЕАЛЬНОЙ МОДЕЛЬЮ В  
КОНТУРЕ УПРАВЛЕНИЯ**

**Литвин Д.Б.<sup>1</sup>, Шепеть И.П.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> СтГАУ, Ставрополь, Россия; litvin-372@yandex.ru

<sup>2</sup> ТИС, Ставрополь, Россия; ship.1963@mail

Рассматривается актуальная задача снижения чувствительности системы автоматизированного управления движением самолета к параметрическим и сигнальным возмущениям, действующим на нее при изменении режима полета.

В настоящее время коррекция передаточных чисел пилотажного комплекса самолета осуществляется, как правило, по разомкнутому принципу в функции некоторых, наиболее значимых параметров полета: высоты, скорости, иногда, угла атаки, что сопряжено с низкой точностью коррекции. При этом показатели устойчивости и управляемости объекта управления существенно варьируются, а качество управления снижается.

В работе предлагается структура и алгоритм функционирования робастного автомата продольного управления с идеальной моделью и векторной обратной связью.

Структурно предлагаемая система состоит из традиционного автомата управления с обратными связями по угловой скорости тангажа и нормальной перегрузке и желаемой модели движения. Управляющее воздействие поступает одновременно и на реальный объект управления и, посредством датчиков, на его идеальную (желаемую) модель. Возмущения же действуют лишь на объект управления, приводя к возмущенному изменению его вектора состояния.

Вектор невязки между реакциями объекта управления и модели обуславливается как структурным несоответствием модели, так и влиянием параметрических и сигнальных возмущений на управляемый объект.

В работе исследовалось влияние параметров жесткой векторной отрицательной обратной связи объекта управления по сигналу невязки с помощью корневого годографа и временных характеристик. Показана высокая эффективность предлагаемого решения.

**Литература**

1. Красовский А.А., Вавилов Ю.А., Сучков А.И. Системы автоматического управления летательных аппаратов. Москва: ВВИА им. Жуковского, 1985. 476 с.

**РЕШЕНИЕ ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННЫХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В СИСТЕМЕ  
ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**Лобанова Н.И.**

*МУДО ЦВР, Зеленокумск, Россия; АГУ, Астрахань, Россия;  
lobantchik@yandex.ru*

При изучении основ курса дифференциальных уравнений в рамках дополнительного образования важная роль отводится решению практико-ориентированных задач, связанных с явлениями, возникающими в окружающем нас мире. Формулировки таких задач и анализ их решения вызывают, как правило, живой интерес у старшеклассников, развивают творческое мышление, помогают глубже усвоить классические понятия, методы и результаты теории дифференциальных уравнений. Цель занятий школьников по математике в системе дополнительного образования состоит в расширении и углублении знаний, добытых ими во время изучения школьного курса, в развитии их способностей и навыков в сочетании с общеобразовательной подготовкой, в зарождении интереса к математике на первичном уровне, поддерживании его до познавательного уровня. В данном случае практико-ориентированные задачи выступают как стимулирующий мотив изучения дифференциальных уравнений. Учащиеся должны уметь анализировать заданную ситуацию, рассматривать её с разных сторон, не теряя при этом из виду целое, выделять различные аспекты и связывать их между собой [1]. В докладе будут рассмотрены практико-ориентированные задачи, касающиеся геометрии и физики, решение которых сводится к интегрированию дифференциальных уравнений первого порядка. Эти задачи дополняют и обобщают известные задачи, приведенные, например, в [2] и [3].

**Литература**

1. Дорофеев А.В. Проектирование математической учебной деятельности в профессиональном образовании будущего педагога // Образование и наука. 2005. № 2. С. 82–90.
2. Лобанова Н.И., Аммосова Н.В. Обучение методу моделирования средствами дифференциальных уравнений при решении геометрических задач в системе дополнительного образования // Современные проблемы науки и образования. 2017. № 5. С. 287–298.
3. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Иж.: «Регулярная и хаотическая динамика», 2006. 176 с.

## СВОЙСТВА РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ХОПФА

Лобанов А.И., Пастухов С.И.

МФТИ, Москва, Россия; alexey@crec.mipt.ru

Простейшее нелинейное уравнение, моделирующее, например, уравнения газовой динамики – уравнение Хопфа

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

В зависимости от выбора начальных условий решениями уравнения Хопфа могут быть как гладкие функции, так и разрывные.

На примере решения уравнения Хопфа сравниваются три разностных схемы на явном четырехточечном шаблоне. Первая схема – гибридная разностная схема Р.П. Федоренко [1] в консервативном варианте. Вторая схема построена на основе сеточно-характеристического метода [2] первого порядка аппроксимации для решения системы уравнений гиперболического типа, причем в качестве уравнений системы использованы две дивергентные формы уравнения Хопфа, записанные в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{2}{3} \frac{\partial uv}{\partial x} = 0,$$

и величина  $v$  играет роль второй независимой переменной системы (для уравнения Хопфа, очевидно,  $v = u^2$ ). В качестве третьей схемы выбрана авторская схема, основанная на минимизации функционала погрешности на гладком решении уравнения Хопфа. Идея построения схем изложена в публикации [3]. Там же подробно рассмотрена техника исследования разностных схем на основе решения пары двойственных задач линейного программирования.

На основе численных расчетов можно сделать вывод о том, что все три схемы аппроксимируют гладкие решения уравнения Хопфа с хорошей точностью. При наступлении градиентной катастрофы лучшими свойствами обладает сеточно-характеристическая схема.

### Литература

1. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. Долгопрудный: Издательский дом «Интеллект», 2009.
2. Магомедов М.-К.М., Холодов А.С. Сеточно-характеристические численные методы. М.: Наука, 1988. 288 с.
3. Лобанов А.И. Разностные схемы в пространстве неопределенных коэффициентов и двойственные задачи линейного программирования // ЖВ-МиМФ. 2018. Т. 58, № 6.

**Об одной модели динамики численности населения с учетом половой структуры популяции**

**Лосанова Ф.М.<sup>1</sup>, Кенетова Р.О.<sup>2</sup>**

*ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия;*

<sup>1</sup>*losanova@yandex.ru;* <sup>2</sup>*raisa.kenetova@mail.ru*

В работе проведен анализ математической модели, описывающей динамику численности населения с учетом половой структуры популяции следующего вида

$$\begin{aligned}\dot{x} &= az - \mu_x x - F(x, y), \\ \dot{y} &= bz - \mu_y y - F(x, y), \\ \dot{z} &= F(x, y) - cz,\end{aligned}\tag{1}$$

где  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  – плотность численности неженатых мужчин и незамужних женщин;  $z = z(t)$  – число семейных пар;  $0 < t < T$ ,  $a, b, c$  – параметры модели,  $\mu_x, \mu_y$  – интенсивности смертности мужчин и женщин,  $F(x, y)$  – интенсивность образования семейных пар.

За основу взята модель, предложенная в работе [1]. В нашей модели учет интенсивности образования семейных пар ведется посредством оператора  $F(x, y)$ , который задается в виде

$$F(x, y) = x * y * \alpha$$

и обладает следующими свойствами:

1)  $F(0, y) = F(x, 0) = 0$ , для всех  $x \geq 0, y \geq 0$ ;

2) если  $u \geq 0, v \geq 0$ , то  $F(x + u, y + v) \geq F(x, y)$ ,  $u, v = const$ ,

где  $(s * h)(x) = \int_0^x s(x-t)h(t)dt$  – свертка Лапласа.

**Литература**

1. Hadeler K.P., Waldstatter R., Worz-Busekros A. Models for pair formation in bisexual populations // J. Math. Biol. 1988. Vol. 26, № 6. P. 635–639.

**ПРИБЛИЖЕННЫЕ СИММЕТРИИ И ПРИБЛИЖЕННЫЕ ЗАКОНЫ  
СОХРАНЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО  
ПОРЯДКА**

**Лукашук С.Ю.**

УГАТУ, Уфа, Россия; lsu@ugatu.su

Построение точных решений нелинейных дифференциальных уравнений дробного порядка в общем случае представляет собой весьма сложную задачу. Одним из эффективных подходов к ее решению является использование методов современного группового анализа. Однако допускаемая дробно-дифференциальным уравнением группа точечных преобразований оказывается достаточно бедной по сравнению с группой аналогичного уравнения целого порядка (см., например, [1]), что ограничивает класс возможных инвариантно-групповых решений.

Вместе с тем, практический интерес представляет случай, когда порядок дробных производных, входящих в уравнение, оказывается близок к целому. В этом случае в уравнение может быть введен соответствующий малый параметр. В работе [2] получены разложения производных дробного порядка типа Римана – Лиувилля и Капuto по такому малому параметру. Это дает возможность приблизить дробно-дифференциальное уравнение дифференциальным уравнением с малым параметром.

В докладе рассматриваются особенности построения приближенных симметрий, решений и законов сохранения для таких приближенных уравнений с малым параметром. Показывается, что допускаемая приближенная группа оказывается шире точной группы исходного дробно-дифференциального уравнения, и возникают существенные приближенные симметрии, не имеющие аналогов в точной группе. Это дает возможность строить новые приближенные инвариантно-групповые решения и законы сохранения для таких уравнений. В качестве примеров рассматриваются дробно-дифференциальные модели аномальной диффузии и нелинейной фильтрации.

**Литература**

1. Gazizov R.K., Kasatkin A.A., Lukashchuk S.Yu. Symmetry properties of fractional diffusion equations // Physica Scripta. 2009. Т. 136.
2. Лукашук С.Ю. Приближение обыкновенных дробно-дифференциальных уравнений дифференциальными уравнениями с малым параметром // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2017. Т. 27, № 4. С. 515–531.

---

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ, государственное задание № 1.3103.2017/4.6.

## О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА УРАВНЕНИЯ ИБРАГИМОВА – МАМОНТОВА

**Ляхов Л.Н.<sup>1</sup>, Елецких К.С.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*ВГУ, Воронеж, Россия; levnlyya@mail.ru*

<sup>2</sup>*ЕГУ им. И.А. Бунина, Елец, Россия; kostan.yeletsky@gmail.com*

Рассмотрим уравнение вида

$$u_{tt} = u_{xx} + \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{i,j}(x-t) (D_B)_{ij} u, \quad (D_B)_{ij} = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial y_j}, & i \neq j, \\ \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} + \frac{\gamma_i}{y_i} \frac{\partial}{\partial y_i}, & i = j, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\gamma_i \geq 0$ . Коэффициенты уравнения (1) симметричны  $a_{ij} = a_{ji}$  и бесконечно дифференцируемы. Если все  $\gamma_i = 0$ , то это уравнение Ибрагимова–Мамонтова [1].

Рассмотрим задачу Коши:

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = f(x, y). \quad (2)$$

Функция  $f(x, y)$  предполагается четной по  $y$ , финитной и бесконечно дифференцируемой. Решение задачи (1), (2) ищем в классе функций, четных по каждой переменной  $y = (y_1, \dots, y_{n-1})$ .

К задаче (1), (2) применим  $\mathcal{F}_B$ -преобразование [2] по переменным  $y$ . Обозначая  $\mathcal{F}_B[u] = \hat{u}$ , получим следующую задачу Коши

$$\hat{u}_{tt} = \hat{u}_{xx} + \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{i,j}(x-t) \lambda_i \lambda_j \hat{u}_{y_i y_j}, \quad \hat{u}|_{t=0} = 0, \quad \hat{u}_t|_{t=0} = f(x, \lambda), \quad (3)$$

которая не отличается от задачи Коши в [1], полученной применением преобразования Фурье к уравнению Ибрагимова – Мамонтова. С помощью функции Римана определим следующее решение задачи (3)

$$\hat{u}(t, x, \lambda) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} j_0 \left( k \sqrt{Q(\lambda)} \right) \mathcal{F}_B[f](\xi, \lambda) d\xi. \quad (4)$$

Применим обратное преобразование Фурье – Бесселя к равенству (4). В рамках весовых обобщенных функций имеем

$$u(t, x, y) = \frac{1}{2c_\gamma} \int_{x-t}^{x+t} (F_B[j_0(k|\mu|)](\eta), T_\eta^y f(\xi, \eta))_\gamma d\xi.$$

Используя формулы  $F_B$ -преобразования радиальной функции Бесселя

$j_p(k|x|)$ , для индекса  $p = 0$  в случае четного и нечетного числа  $n + |\gamma|$  получим представление решения задачи (1), (2).

### Литература

1. Ибрагимов Н.Х., Мамонтов Е.В. О задаче Коши для уравнения  $u_{tt} - u_{xx} - \sum_{i,j=1}^{n-1} u_{y_i y_j} = 0$  // Математ. сб. 1977. № 3. С. 391–409.
2. Ляхов Л.Н., Рощупкин С.А. Об априорной оценке решений сингулярных  $B$ -эллиптических псевдодифференциальных уравнений с  $\partial_B$  оператором Бесселя // Проблемы математ. анализа. 2013. № 74. С. 109–116.

## ПРИМЕНЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОЙ ЛОГИКИ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ РОБАСТНЫХ ПРОЦЕДУР ОБУЧЕНИЯ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

Лютикова Л.А

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; lylarisa@yandex.ru

При построении процедуры обучения нейронных сетей возникает задача идентификации (распознавания) данных, включение которых в рабочую модель обучения нейронных сетей приводит к существенному исказению этой модели. Это требует минимизации влияния данных такого рода на процесс обучения нейронной сети. Такие данные называются выбросами [1]. Они, как правило, порождаются ошибками, возникающими при измерениях, передаче по каналам связи и разного рода системными сбоями.

Один из путей преодоления этой проблемы состоит в привлечении неклассических логических систем для построения робастных процедур, позволяющих минимизировать влияние выбросов на формирования адекватной модели данных, отражающих искомый процесс.

В данной работе при проведении логического анализа построения процедур робастного обучения используются методы непрерывной логики [2]. Непрерывная логика представляет собой логику высказываний, в которой значения истинности представляется непрерывным симметричным набором действительных чисел.

Основные операции непрерывной логики на замкнутом интервале  $C = [A, B]$  [3]:

$$A \vee B = \max(A, B), \quad A \wedge B = \min(A, B), \\ \bar{A} = 2M - A, \text{ где } M = (A + B)/2.$$

При помощи непрерывной логики можно построить метод изображения кусочно-линейных функций одной и многих переменных. Что позволит провести логическую оценку входных данных и надежного отсеваивания выбросов.

### Литература

1. Шибзухов З.М. Минимизации некоторых робастных сумм параметризованных функций // Известия КБНЦ РАН. 2017. № 6(80), часть II. С. 190–194.
2. Гинзбург С.А. Непрерывная логика и ее применения // Автомат. и телемех. 1967. № 2. С. 115–132.
3. Левин В.И. Непрерывная логика. Ее обобщения и применения // Автомат. и телемех. 1990. № 8. С. 3–22.

---

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-01-00050-а.

## ГАУССОВО СООТНОШЕНИЕ № 3 ДЛЯ ФУНКЦИЙ ГОРНА $H_3$

**Мавлявиев Р.М.<sup>1</sup>, Гарипов И.Б.<sup>2</sup>**

*КФУ, Казань, Россия;* <sup>1</sup>*mavly72@mail.ru;* <sup>2</sup>*ilnur\_garipov@mail.ru*

В теории осесимметрического уравнения Гельмгольца используется конфлюэнтная функция Горна [1]

$$H_3(\alpha, \beta; \delta; z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{n-m} (\beta)_n}{(\delta)_n} \frac{z^n}{n!} \frac{t^m}{m!}.$$

В работе [2] была доказана формула

$$(\beta - \alpha)H_3(\alpha, \beta; \delta; z, t) = \beta H_3(\alpha, \beta + 1; \delta; z, t) - \\ - \alpha H_3(\alpha + 1, \beta; \delta; z, t) + \frac{t}{1 - \alpha} H_3(\alpha - 1, \beta; \delta; z, t),$$

из которой при  $t = 0$  как частный случай следует

$$(\beta - \alpha)F(\alpha, \beta; \delta; z) = \beta F(\alpha, \beta + 1; \delta; z) - \alpha F(\alpha + 1, \beta; \delta; z).$$

В этой работе доказана формула

$$(\delta - \beta - \alpha)H_3(\alpha, \beta; \delta; z, t) = (\delta - \beta)H_3(\alpha, \beta - 1; \delta; z, t) - \\ - \alpha(1 - z)H_3(\alpha + 1, \beta; \delta; z, t) + \frac{t}{\alpha - 1} H_3(\alpha - 1, \beta, \delta; z, t),$$

из которой при  $t = 0$  как частный случай следует

$$(\delta - \alpha - \beta)F(\alpha, \beta; \delta; z) = (\delta - \beta)F(\alpha, \beta - 1; \delta; z) - \alpha(1 - z)F(\alpha + 1, \beta; \delta; z).$$

### Литература

1. Капилевич М.Б. О конфлюэнтных функциях Горна // Дифференциальные уравнения. 1966. Т. 2, № 9. С. 1239-1254.
2. Мавлявиев Р.М., Гарипов И.Б. Гауссово соотношение для смежных функций Горна  $H_3$  // Материалы Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и информатики» и XIV Школы молодых ученых «Нелокальные краевые задачи и современные проблемы анализа и информатики». Терскол, Кабардино-Балкарская республика, 2016. С. 184-186.

## ПРИМЕНЕНИЕ ДРОБНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТА ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК КРИПТОНА

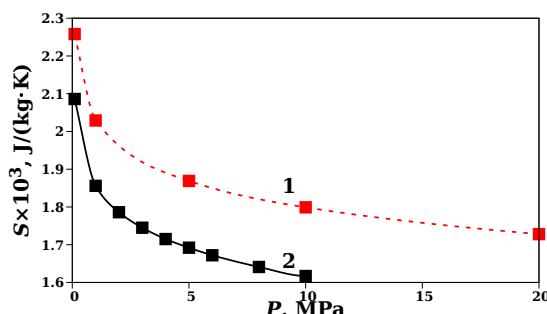
**Магомедов Р.А.<sup>1</sup>, Ахмедов Э.Н.<sup>1</sup>, Мейланов Р.Р.<sup>1</sup>,**  
**Бейбалаев В.Д.<sup>1,2</sup>, Аливердиев А.А.<sup>1,2</sup>**

<sup>1</sup>ИПГ ДНЦ РАН, Махачкала, Россия; ramazan\_magomedov@rambler.ru

<sup>2</sup>ДГУ, Махачкала, Россия;

Из обобщения термодинамики в производных дробного порядка [1] для потенциала Гельмгольца имеем:  $d^{\alpha}F = -\frac{PV^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}dV^{\alpha} + \frac{TS^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}dS^{\alpha}$ , где  $P = -\frac{\Gamma(2-\alpha)}{V^{1-\alpha}}\frac{\partial^{\alpha}F}{\partial V^{\alpha}}\Big|_T$ . Далее, пользуясь правилами интегро-дифференцирования, получим «фрактальное» уравнение состояния:  $P = \frac{\rho RT}{M} \left\{ 1 + \rho B + (1 - \alpha) \left[ \ln \left( \frac{eM}{\rho N_A} \left[ \frac{mkT}{2\pi\hbar} \right]^{3/2} \right) + \psi(1) - \psi(2 - \alpha) - \rho B \right] \right\}$ .

На основе «фрактального» уравнения состояния с учетом второго вириального коэффициента  $B$  [2] проведен расчет теплофизических параметров криптона (Kr): энтропии  $S$  и изохорной теплоемкости  $C_V$ . На рисунке представлена расчётная зависимость энтропии от давления (1 -  $T = 1000$  K; 2 -  $T = 500$  K). Результаты хорошо согласуются со справочными данными (точки на графике) [3], отклонение для значений энтропии (теплоемкости):  $\sim 0.02\%$  ( $\sim 0.03\%$ ), что позволяет надеяться на перспективность предлагаемого метода.



### Литература

1. Magomedov R.A. et al Generalization of thermodynamics in fractional-order derivatives and calculation of heat-transfer properties of noble gases // Journal of Thermal Analysis and Calorimetry. 2018. С. 1-6.
2. Зубарев В.Н. и др. Термофизические свойства технически важных газов при высоких температурах и давлениях: Справочник. М.: Энергоатомиздат, 1989. 232 с.
3. Григорьев И.С., Мейлихов Е.З. Физические величины: Справочник. М.: Энергоатомиздат, 1991. 316 с.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-08-00067а.

**НАХОЖДЕНИЕ ФУНКЦИИ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ЧИСЛА  
ДЕПОЗИТОВ БАНКОВСКИХ ВКЛАДОВ С ПОМОЩЬЮ  
ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ**

**Магомедов Р.И., Магомедов И.И.**

ДГУ, Махачкала, Дагестан;

Через  $x$  обозначим величину банковского депозита, а  $x(t)$  – его величину в денежном выражении. Точка  $x$  будет перемещаться со временем по оси  $Ox$ . В простейшем случае функция  $x(t)$  подчиняется стохастическому дифференциальному уравнению [1], [2]  $dx = F(x)dt + \sigma x dX$ .

На оси  $Ox$  рассмотрим два промежутка:  $[x_1, x_2]$  и его дополнение  $\Delta_0$ . Обозначим через  $\Delta Q(x, t)$  суммарное число депозитов, на малом промежутке  $\Delta x$ . Тогда  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = U(x, t)$  выражает функцию плотности депозитов, расположенных на  $[x_1, x_2]$

$$\int_{x_1}^{x_2} U(x, t) dx = Q(t). \quad (1)$$

Необходимо получить значение функции  $U(x, t)$ . Для этого разбиваем ось  $Ox$  на  $\Delta = [x_1, x_2] \cup \Delta_0$  за время  $\Delta t$ , поэтому

$$\Delta Q_{t_1, t_2} = \Pi_1 + \Pi_2, \quad (2)$$

где  $\Pi_1$  – количество детерминированных депозитов, а  $\Pi_2$  – количество случайных депозитов. Эти величины вычисляются равенствами

$$\Delta Q_{t_1, t_2} = \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial U}{\partial t} dt dx, \quad (3) \quad \Pi_1 = - \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial(FU)}{\partial x} dx dt, \quad (4)$$

$$\Pi_2 = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left[ dU + \beta x \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \gamma x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right] dX dt. \quad (5)$$

Подставим значение (3)–(5) в равенство (2). После замены переменных и некоторых преобразований, получим математическую модель в виде уравнения для плотности банковских депозитов

$$\frac{\partial U}{\partial t} = ax^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + bx \frac{\partial U}{\partial x} + CU(x),$$

которая выражает закон сохранения числа депозитов банка и их величину независимо от времени.

**Литература**

1. Магомедов Р.И. Матмоделирование банковских вкладов с помощью стохастических дифуравнений. Махачкала: ДГУ, № 1. С. 152–153.
2. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. М.: Фазис, 1998. Т. 1.

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МНОГОШАГОВОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ИГРЫ ЗАЩИТЫ ИНФОРМАЦИИ

Магомедова Е.С.<sup>1</sup>, Раджабова М.Т.

ДГУ, Махачкала, Дагестан; <sup>1</sup>magomedova.e.s@mail.ru

В данной работе предполагается для защиты информации использовать несколько методов из теории игр, а именно, метод решения антогонистической игры двух лиц в общем виде [1], метод итераций, называемый методом Брауна-Робинсона, и игра с «Природой» [2].

В матричной игре двух лиц игра многошаговая, в которой имеются  $k$ -позиций  $k = 1, 2, \dots$ , для каждой позиции определяется цена игры, а затем среднее значение цен всех позиций. Если у каждой позиции игры нет седловой точки, то для каждой позиции, для нахождения цены игры и для выбора оптимальных решений обоих игроков, применяют смешанные стратегии. В частности, если математическая модель защиты информации задана в виде матрицы  $\{a_{i,j}\}$ , где  $i = 1, 2, \dots, m$  и  $j = 1, 2, \dots, n$ , то строки – стратегии первого игрока, а столбцы – второго игрока. Для выбора своих оптимальных стратегий каждый игрок в смешанных стратегиях пользуется вероятностями выбора любой из своих стратегий  $P(A = A_i) = p_i, i = 1, 2, \dots, m$  и  $P(B = B_j) = g_j, j = 1, 2, \dots, n$ , где  $A_i$  и  $B_j$  – строка и столбец стратегий обоих игроков. Выбор игроком той или другой стратегии случайный.

Для определения вероятностей используем двойственность в линейном программировании. Для ограничения количества позиций в игре, можно ввести вероятность позиции  $\beta_k$ . По методу итераций первый игрок  $A$  или второй игрок  $B$  делает ход, выбрав наилучшую из своих стратегий  $A_i(B_j)$  так, чтобы сопернику можно было бы нанести наибольший вред. А другой – выбрав из своих смешанных стратегий такую, которая минимизирует выигрыш от действий другого игрока. Игра заканчивается, когда хотя бы у одного игрока не закончатся стратегии или выигрыш (проигрыш) приводит к нулю.

Задачу защиты информации можно свести к задаче игры с «Природой» и применить несколько критериев из теории статистических решений. По их результатам сравнения применить ту стратегию, которая дает наилучший результат для игрока.

### Литература

1. Магомедова Е.С., Раджабова М.Т. Математическая модель стохастической игры защиты информации // Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики. Махачкала: ДГУ, 2017. С. 152–153.
2. Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология. Учебное пособие для вузов. М.: Дрофа, 2004. 208 с.

**КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С УСЛОВИЯМИ ТРЕТЬЕГО РОДА ДЛЯ  
ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ  
ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ**

**Мажгихова М.Г.**

*ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; mazhgihova.madina@yandex.ru*

Рассмотрим уравнение

$$D_{0t}^\alpha u(t) - \lambda u(t) - \mu H(t - \tau)u(t - \tau) = f(t), \quad 0 < t < 1, \quad (1)$$

где  $1 < \alpha \leq 2$ ,  $\lambda, \mu$  – произвольные постоянные,  $\tau$  – положительное число,  $H(t)$  – функция Хевисайда,  $D_{0t}^\alpha$  – оператор дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана – Лиувилля [1]

$$D_{st}^\nu g(t) = \begin{cases} \frac{\text{sign}(t-s)}{\Gamma(-\nu)} \int_s^t \frac{g(\xi)d\xi}{|t-\xi|^{\nu+1}}, & \nu < 0; \\ g(t), & \nu = 0; \\ \text{sign}^n(t-s) \frac{d^n}{dt^n} D_{st}^{\nu-n} g(t), & n-1 < \nu \leq n, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

В данной работе ищется решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$a \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-1} u(t) + b \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-2} u(t) = 0,$$

$$c \lim_{t \rightarrow 1} D_{0t}^{\alpha-1} u(t) + d \lim_{t \rightarrow 1} D_{0t}^{\alpha-2} u(t) = 0,$$

причем  $a^2 + b^2 \neq 0$  и  $c^2 + d^2 \neq 0$ .

Доказана теорема существования решения поставленной краевой задачи и найдено условие его единственности. Построена функция Грина, в терминах которой записано решение исследуемой задачи. Получено условие, обеспечивающее однозначную разрешимость задачи. Показано, что условие разрешимости может нарушаться лишь для конечного числа вещественных значений  $\lambda$ .

**Литература**

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

---

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-01-00462 А.

## СТРУКТУРА СЕМАНТИЧЕСКОЙ СЕТИ ДЛЯ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОЙ ГЕНЕРАЦИИ ТЕСТОВ

Макаренко М.Д., Гутнова А.К.<sup>2</sup>

СОГУ, Владикавказ, Россия; <sup>1</sup>mahadrum@yandex.ru; <sup>2</sup>agutnova@yandex.ru

Предлагается разработать систему автоматической генерации тестов на основе существующего конспекта лекций. Под семантической сетью здесь понимается информационная модель предметной области, имеющая вид ориентированного графа, вершины которого соответствуют объектам предметной области, а дуги (ребра) задают отношения или связи этих объектов. В инженерии знаний под ней подразумевается граф, отображающий смысл целостного образа. Узлы графа соответствуют понятиям и объектам, а дуги – отношениям между объектами. Формально сеть можно задать в следующем виде:  $H = \langle I, C, G \rangle$ , где  $I$  – множество информационных единиц, смысловых объектов;  $C$  – множество типов связей между информационными единицами;  $G$  – отображение, задающее конкретные отношения из имеющихся типов  $C$  между элементами  $I$ .

Множество информационных единиц  $I$  текста представляют собой основные понятия лекционного курса. В основном это имена существительные или словосочетания. На основе анализа существующих тестов, имеющих закрытую форму ответа, т.е. предполагающих выбор одного или нескольких заранее предложенных ответов, сформулировано 4 типа связи в семантической сети и шаблоны вопросов для этих связей: *HP* (*HasPart*), *AKO* (*a kind of*), *ISA* (*is a, member of*) и *DESC* (*description*).

Особенностью механизма генерации сети является обработка текстов, имеющего специфическую структуру, и построение не полной семантической сети, а описывающей основные понятия и их взаимосвязь. Подходы подобного рода используются при построении диалоговых систем [1], построения антологий[3] и визуализации содержания текста [2].

Построенная сеть позволит провести проверку знаний обучающегося в МООК абсолютно автономно.

### Литература

1. Гурина Н.И., Жук Я.А. Генератор семантической сети информационной системы в таблицу реляционной базы данных // Труды БГТУ. 2015. № 6.
2. Ермаков А.Е., Плешко В.В. Семантическая сеть текста в задачах аналитика // Информатизация и информационная безопасность правоохранительных органов: XI Международная научная конференция. Сборник трудов. Москва. 2002. 343 с.
3. Грант С., Томас С., Эндрю Л. Обработка неструктурированных текстов. Москва: ДМК Пресс, 2015. 413 с.

## ВЗАИМОСВЯЗЬ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ЧИСЕЛ $e$ И $\pi$

**Макаров А.М.<sup>1</sup>, Ермаков А.С.<sup>2</sup>, Постовалов С.С.<sup>3</sup>**

<sup>1,3</sup>ПГУ, Пятигорск, Россия; mellin\_22@mail.ru; poroh20100@yandex.ru

<sup>2</sup>ООО «Каскад»; СКФУ, Пятигорск, Россия; ermakov@cascad-kmv.ru

Одной из древних задач, решаемых человечеством, является создание теории чисел. На сегодняшний день, существуют нерешенные задачи теории чисел, например, доказательство или недоказуемость нормальности числа  $\pi$ , случайность числа  $\pi$ , алгебраическая взаимосвязь трансцендентных чисел  $e$  и  $\pi$ .

Особо выделяются две трансцендентных константы:  $\pi$  и  $e$ . А. Эйнштейн считал, что  $\pi$  является фундаментальной константой в геометрии Вселенной. Эйлер в своей гипотезе о числе простых чисел использовал логарифмы по основанию  $e$ . Неоценимое значение имеет теорема Пифагора, как эталон меры фундаментального понятия расстояния в евклидовых и неевклидовых геометриях Вселенной. Она давала меру расстояния между точками пространства, не выходя за пределы исследуемого внутреннего пространства.

В данной статье рассматривается алгебраическая связь двух трансцендентных чисел  $\pi$  и  $e/1, 2, 3, 4/$ . Существующая знаменитая формула Эйлера о комплексной экспоненте в степени  $\pi$  указывает на взаимосвязь между этими величинами. В данном случае определяется точное числовое значение  $e$  через  $\pi$  и наоборот.

Задача формируется следующим образом: рассмотрим окружность радиусом  $\pi$ , и свяжем ее с декартовой системой координат. Центр окружности и начало координат совпадают.

В правой верхней четверти окружности построим перпендикулярный отрезок к оси абсцисс длиной  $e$ . Затем отрезок равный радиусу окружности, помещаем в начало координат и наклоним на угол, при котором отрезок длиной  $\pi$  будет иметь общую точку соприкосновения с отрезком длиной  $e$ . Получим прямоугольный треугольник с гипotenузой и катетами, имеющих трансцендентную величину.

Численные расчеты показывают что относительная погрешность составляет не более 0.000352. Далее в статье рассматриваются численные расчеты и показано, что деление двух бесконечных, но ограниченных по величине трансцендентных чисел приводит к результату, выражющемуся иррациональным числом.

**ЗАДАЧА ТРИКОМИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ВНУТРИ ОБЛАСТИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА**

**Макаова Р.Х.**

*ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; makaova.ruzanna@mail.ru*

В евклидовой плоскости точек  $(x, y)$  рассматривается уравнение

$$0 = \begin{cases} u_y - au_{xx} - bu_{xxy}, & y > 0, \\ (-y)^m u_{xx} - u_{yy} - c(-y)^{\frac{m-2}{2}} u_x, & y < 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $a, b, m, c$  – заданные действительные числа,  $a > 0, b > 0, m > 0, |c| \leq \frac{m}{2}$ ;  $u = u(x, y)$  – искомая действительная функция.

Пусть  $\Omega^+ = \{(x, y) : 0 < x < r, 0 < y < T\}$ . Через  $\Omega^-$  обозначим область, ограниченную характеристиками уравнения (1) при  $y < 0$ :  $x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0, x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = r$ , выходящими из точек  $(0, 0), (r, 0)$  и пересекающимися в точке  $\left(r/2, -[(m+2)r/4]^{2/(m+2)}\right)$  и  $J = \{(x, 0) : 0 < x < r\}; \Omega = \Omega^+ \cup \Omega^- \cup J$ .

Уравнение (1) при  $y > 0$  совпадает с уравнением Аллера [1], а при  $y < 0$  – с вырождающимся гиперболическим уравнением первого рода. В работе [2] для уравнения (1) в области  $\Omega$  исследована краевая задача, для которой доказана теорема существования и единственности регулярного решения.

В данной работе для уравнения (1) в области  $\Omega$  исследуется вопрос об однозначной разрешимости задачи Трикоми.

**Литература**

1. Hallaire M. L'eau et la productions vegetable // Institut National de la Recherche Agronomique. 1964. Vol. 9.
2. Макаова Р.Х. Краевая задача для гиперболического уравнения третьего порядка с вырождением порядка внутри области // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: физико-математические науки. 2017. Т. 21, № 4. С. 651–664.

**Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа в пятиугольной области**

**Мамажонов М.<sup>1</sup>, Шерматова Х.М.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*КГПИ, Коканд, Узбекистан;* <sup>2</sup>*ФерГУ, Ферганы, Узбекистан;*

В настоящем сообщении ставится и изучается одна краевая задача для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа в пятиугольной области  $D$  плоскости  $xOy$ . Рассмотрим уравнение вида

$$\frac{\partial}{\partial x} (Lu) = 0 \quad (1)$$

где

$$Lu = \begin{cases} u_{xx} - u_y, & (x, y) \in D_1, \\ u_{xx} - u_{yy}, & (x, y) \in D_i \ (i = 2, 3, 4), \end{cases}$$

а  $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4 \cup J_1 \cup J_2$ ,

$$D_1 = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 1\},$$

$$D_2 = \{(x, y) \in R^2 : -1 < y < 0, 0 < x < y + 1\},$$

$$D_3 = \{(x, y) \in R^2 : -1 < x < 0, -x - 1 < y < 0\},$$

$$D_4 = \{(x, y) \in R^2 : -1 < x < 0, 0 < y < 1\},$$

$$J_1 = \{(x, y) \in R^2 : y = 0, 0 < x < 1\}, J_2 = \{(x, y) \in R^2 : y = 0, -1 < x < 0\}.$$

Для уравнения (1) ставится следующая задача:

**Задача 1.** Требуется найти функцию  $u(x, y)$ , которая 1) непрерывна в замкнутой области  $\bar{D}$ ; 2) удовлетворяет уравнению (1) в области  $D$  при  $x \neq 0, y \neq 0$ ; 3) удовлетворяет следующим краевым условиям:

$$u(1, y) = \varphi_1(y), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad u(-1, y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq 1,$$

$$u_x(-1, y) = \varphi_3(y), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad u|_{y=x-1} = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u|_{y=-x-1} = \psi_2(x), \quad -1 \leq x \leq -\frac{1}{2}, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{DC} = \psi_4(x), \quad -1 \leq x \leq 0;$$

4) удовлетворяет следующим непрерывным условиям склеивания на линиях изменения типа: функция  $u(x, y)$  и ее производные первого порядка удовлетворяют непрерывным условиям склеивания на линии изменения типа  $J_1$ , а на линии  $J_2$  – кроме самой функции  $u(x, y)$  и производных первого порядка и вторые производные удовлетворяют непрерывным условиям склеивания.

Здесь  $\psi_i, \varphi_i (i = 1, 2, 4)$  – заданные достаточно гладкие функции,  $n$  – внутренняя нормаль к прямой  $x + y = -1$ .

**Теорема.** Если  $\varphi_1, \varphi_2 \in C^3[0, 1], \varphi_3 \in C^2[0, 1], \psi_1 \in C^3[0, 1], \psi_2 \in C^3[-1, -\frac{1}{2}], \psi_3 \in C^2[-1, 0]$ , причем выполняются условия согласования  $\varphi_1(0) = \psi_1(1)$ ,  $\varphi_2(0) = \psi_2(-1)$ , то задача 1 допускает единственное решение.

Теорема доказывается методом построения решения, а также методом продолжения.

**ЗАДАЧИ ТИПА БИЦАДЗЕ – САМАРСКОГО ДЛЯ ОДНОГО  
ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С СИНГУЛЯРНЫМ  
КОЭФФИЦИЕНТОМ**

**Маманазаров А.О.**

*ФерГУ, Ферганы, Узбекистан; mega.mamanazarov@mail.ru*

В области  $Q = Q_0 \cup Q_1 \cup Q_2$  рассматривается следующее параболо-гиперболическое уравнение

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) - \left(\frac{\partial^{2-H(x)} u}{\partial t^{2-H(x)}}\right) + (k/x) \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \lambda^2 u = 0, \quad (1)$$

где  $H(x)$  – функция Хевисайда,  $Q_0 = \{(x, t) : x = 0, 0 < t < T\}$ ,  $Q_1 = \{(x, t) : x < t < T + x, x \in (-T/2, 0)\}$ ,  $Q_2 = \{(x, t) : x > 0, 0 < t < T\}$ ,  $k, \lambda, T \in \mathbb{R}$ , причем  $k \in (0, 1)$ ,  $T > 0$ .

Доказана однозначная разрешимость следующей нелокальной задачи:

**Задача БС.** Найти функцию  $u(x, t) \in \bigcap_{j=1}^2 \left[ C(\bar{Q}_j) \cap C_{x,t}^{2,j}(Q_j) \right]$ , удовлетворяющую уравнению (1) в области  $Q_1 \cup Q_2$ , краевым условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), x \in [0, +\infty); \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, t) = 0, t \in [0, T];$$

$$A_{0t}^{1,\lambda} D_{0t}^{k/2} \left[ t^{k-1} u(-t/2, t/2) \right] + c(t) u(0, t) = \psi(t), t \in (0, T),$$

и следующим условиям склеивания на отрезке  $Q_0$

$$u(-0, t) = u(+0, t), \quad \lim_{x \rightarrow -0} (-x)^k u_x(x, t) = \lim_{x \rightarrow +0} x^k u_x(x, t),$$

где  $\varphi(x)$ ,  $c(t)$ ,  $\psi(t)$  – заданные функции,

$$D_{0t}^{k/2} [f(t)] \equiv \frac{1}{\Gamma(1-k/2)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-z)^{-k/2} f(z) dz,$$

$$A_{0t}^{1,\lambda} [g(t)] \equiv g(t) + \int_0^t g(z) \frac{z}{t} \frac{\partial}{\partial z} J_0 \left[ \lambda \sqrt{(t)(t-z)} \right] dz,$$

$J_0(z)$  – функция Бесселя первого рода.

**ЗАДАЧА СО СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ  
ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА**

**Маматова З.Х.**

*ФерГУ, Ферганы, Узбекистан; zilola3989@mail.ru*

Рассмотрим уравнение Бицадзе – Лыкова

$$y^2 U_{xx} - U_{yy} + aU_x = 0, \quad |a| < 1 \quad (1)$$

в характеристической области ограниченной интервалом  $J = (0, 1)$  и характеристиками данного уравнения  $AC = \{(x, y) : x - \frac{y^2}{2} = 0, y \leq 0\}$ ,  $BC = \{(x, y) : x + \frac{y^2}{2} = 1, y \leq 0\}$ .

**Задача.** Найти функцию  $U(x, y)$ , удовлетворяющую условиям:

- 1)  $U(x, y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega \cup AB) \cap C^2(\Omega)$ ;
- 2) регулярное решение уравнение (1) в области  $\Omega$ ;
- 3)

$$U(x, 0) = \tau(x), \quad x \in \overline{J}, \quad (2)$$

$$(x^2)^{-\beta} F_{0x} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & x^2 \end{bmatrix} U[\theta(x)] = d(x)U_y(x, 0) + \delta(x), \quad (x, 0) \in J, \quad (3)$$

здесь  $\alpha, \beta, \gamma$  – действительные числа,  $F_{0x}$  – обобщенный оператор интегрирования дробного порядка,  $\tau(x)$ ,  $d(x)$ ,  $\delta(x)$  – заданные функции,  $\theta(x)$  – точки пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из произвольной точки  $x \in (0, 1)$ , с характеристиками  $AC$  и  $BC$  соответственно.

**Теорема.** Если  $\gamma > \frac{a-3}{4}$ ,  $\gamma - \beta > -\frac{a}{4}$ ,  $d(x) \neq 0$ ,  $x \in AB$ ,  $d(x), \delta(x) \in C^1(\overline{AB})$ ,  $\tau(x) \in C(\overline{AB}) \cap C^2(AB)$ , то решение задачи (1)-(3) существует и единствено.

**Литература**

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника. 1987, 688 с.

**О КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ  
ОБОВЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ МАНЖЕРОНА С НЕГЛАДКИМИ  
КОЭФФИЦИЕНТАМИ**

**Мамедов И.Г.**

*ИСУ, Баку, Азербайджан; ilgar-tamedov-1971@mail.ru*

Вторая краевая задача или задача Неймана, хорошо известная для дифференциальных уравнений эллиптического типа, является одной из основных краевых задач математической физики [1]. С этой точки зрения эта работа посвящена актуальным проблемам математической физики.

**Постановка задачи.** Рассмотрим обобщенное уравнение Манжерона [2]:

$$(V_{2,2}u)(x) \equiv D_1^2 D_2^2 u(x) + \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j < 4}}^2 a_{i,j}(x) D_1^i D_2^j u(x) = Z_{2,2}(x) \in L_p(G), \quad (1)$$

здесь  $u(x) \equiv u(x_1, x_2)$  – искомая функция, определенная на  $G$ ;  $a_{i,j}(x)$  – заданные измеримые функции на  $G = G_1 \times G_2$ , где  $G_k = (0, h_k)$ ,  $k = 1, 2$ ;  $Z_{2,2}(x)$  – заданная измеримая функция на  $G$ ;  $D_k^j = \partial^j / \partial x_k^j$ , ( $j = 0, 1, 2$ ;  $k = 1, 2$ ) – оператор обобщенного дифференцирования в смысле С.Л. Соболева и  $D_k^0$  – оператор тождественного преобразования.

В работе получена эквивалентная система интегральных уравнений при исследовании задачи Неймана для обобщенного уравнения Манжерона (1) в неклассической трактовке. При негладких условиях на коэффициенты уравнения, в прямоугольной области для этой задачи найдены условия корректной разрешимости в интегральном виде на основе метода интегральных представлений. Отметим, что задача Дирихле для обобщенного уравнения Манжерона в неклассической трактовке исследована в работе автора [3].

**Литература**

1. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976.
2. Mangeron D. New methods for determining solution of mathematical models governing polyvibrating phenomena // Bul. Inst. politehn. Jasi. Sectia 1. 1968. Vol. 14, № 1-2. P. 433–436.
3. Мамедов И.Г. О корректной разрешимости задачи Дирихле для обобщенного уравнения Манжерона с негладкими коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51, №6. С. 733–742.

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ  
РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА С МИНИМАЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ В  
СРЕДЕ С ТЕМПЕРАТУРНОЙ ВЯЗКОСТЬЮ**

**Мамедов Р.С.<sup>1</sup>, Гасымов С.Ю.<sup>2</sup>**

АГУНП, Баку, Азербайджан;

<sup>1</sup>*rasadmatmadow@mail.ru*; <sup>2</sup>*sardarkasumov1955@mail.ru*

Рассматривается процесс распространения тепла в среде с температурной вязкостью, который описывается начально-краевой задачей [1]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \xi \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + p(x, t), \quad (x, t) \in (0, 1) \times (0, T), \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (2)$$

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u(1, t)}{\partial x} + \alpha u(1, t) = 0. \quad (3)$$

Здесь  $a = \text{const}$ ,  $\alpha = \text{const} > 0$ ,  $\xi = \text{const} > 0$  – коэффициент температурной вязкости,  $u_0(x) \in L_2(0, 1)$  – начальное распределение температуры,  $p(x, t)$  – внутренние тепловые источники, являющиеся управлением.

Требуется найти такое управление, что для соответствующего ему решения задачи (1)–(3) выполнено условие

$$u(x, T) = \varphi(x),$$

и при этом минимизировался функционал

$$I[p] = \int_0^T \int_0^l p^2(x, t) dx dt.$$

Методом Фурье строится решение краевой задачи (1)–(3), а поставленная задача приводится к проблеме моментов и определяется:

$$p(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n}{\alpha_n} e^{-\alpha_n^2 \nu_n^2 (T-t)} X_n(x), \quad \alpha_n = \frac{1}{2a^2 \nu_n^2} (1 - e^{-2a^2 \nu_n^2}),$$

где  $X_n(x)$  собственные функции, а  $\lambda_n$  соответствующие собственные значения краевой задачи

$$X''(x) + \lambda_n^2 X(x) = 0, \quad X'(0) = X(1) + \alpha, \quad X(1) = 0, \quad \nu_n = 1 + \xi \lambda_n^2.$$

**Литература**

1. Mamedov R.S., Qasimov S.Y. Solution of the synthesis problem of boundary optimal control of a rod cooling process with a heat conductive viscositu // EUREKA: Physics and Engineering. 2017. Vol. 4. P. 42–48.

## КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

*Мамчуюев Мурат О.*

*ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; matchuev@rambler.ru*

В области  $\Omega = \{x = (x_1, \dots, x_m) : 0 < x_i < a_i, i = \overline{1, m}\}$  рассмотрим систему уравнений

$$\sum_{i=1}^m A_i D_{0x_i}^{\alpha_i} u(x) = Bu(x) + f(x), \quad 0 < \alpha_i < 1, \quad (1)$$

где  $f(x)$  и  $u(x)$  –  $n$ -мерные векторы,  $A_i, B$  – заданные постоянные квадратные матрицы порядка  $n$ ,  $D_{ay}^\nu$  – оператор дробного интеграло-дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля порядка  $\nu$  [1].

**Задача.** Найти решение  $u(x)$  системы (1), такое, что

$$\lim_{x_i \rightarrow 0} D_{0x_i}^{\alpha_i-1} u = \varphi_i(x_{(i)}), \quad x_{(i)} \in \Omega^i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (2)$$

где  $x_{(i)} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m)$ ,  $\Omega^i = \omega_{a_1} \times \dots \times \omega_{a_{i-1}} \times \omega_{a_{i+1}} \times \dots \times \omega_{a_m}$ ,  $\omega_{a_j} = \{x_j : 0 < x_j < a_j\}$ ,  $\varphi_i(x_{(i)})$  – заданные функции.

Регулярным решением системы (1) в области  $\Omega$  назовём функцию  $u(x)$ , удовлетворяющую системе (1), такую, что  $\prod_{i=1}^m x_i^{1-\mu_i} u(x) \in C(\bar{\Omega})$ ,  $D_{0x_i}^{\alpha_i} u \in C(\Omega)$ , для некоторых  $\mu_i > 0$ ,  $i = \overline{1, m}$ .

**Теорема.** Пусть все собственные числа матриц  $A_i$  положительны,  $A_i B = B A_i$ ,  $\mu_i < \alpha_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ ;  $\prod_{i=1, i \neq j}^m x_i^{1-\mu_i} \varphi_j(x_{(j)}) \in C(\bar{\Omega}^j)$ ,  $j = \overline{1, m}$ ;

$\prod_{i=1}^m x_i^{1-\mu_i} f(x) \in C(\bar{\Omega})$ ;  $f(x)$  удовлетворяет условию Гёльдера. Тогда существует единственное регулярное решение задачи (1), (2), представимое в виде

$$u(x) = \int_{\Omega_x} G(x-t) f(t) dt + \sum_{i=1}^m \int_{\Omega_x^i} A_i G(x-t^i) \varphi_i(t_{(i)}) dt_{(i)}, \quad (3)$$

где  $G(x) = \int_0^\infty e^{B\tau} \prod_{i=1}^m x_i^{-1} \phi(-\alpha_i, 0; -A_i \tau x_i^{-\alpha_i}) d\tau$ ,  $\Omega_x = \omega_{x_1} \times \dots \times \omega_{x_m}$ ,  $\Omega_x^i = \omega_{x_1} \times \dots \times \omega_{x_{i-1}} \times \omega_{x_{i+1}} \times \dots \times \omega_{x_m}$ ,  $\omega_{x_j} = \{t_j : 0 < t_j < x_j\}$ ,  $t^i = (t_1, \dots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \dots, t_m)$ ,  $\phi(\alpha, \beta; z)$  – функция Райта [2].

### Литература

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
2. Wright E.M. On the coefficients of power series having exponential singularities // J. London Math. Soc. 1933. 8:29. P. 71–79.

**ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК  
МНОГОСЛОЙНЫХ ПЕЧАТНЫХ ПЛАТ**

**Мамчуев Мухтар О.**

*ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; matchuevmo@yandex.ru*

К электронной аппаратуре (ЭА), устанавливаемой на кораблях, самолетах и спутниках, предъявляются повышенные требования по виброзащите [1]. В работе [1] проводились исследования образцов многослойных печатных плат (ПП), которые представляли собой прямоугольные пластины с одинаковыми размерами и с различной плотностью поверхностного монтажа компонентов. Был разработан и изготовлен измерительный стенд, принцип работы которого состоит в следующем. Образец ПП жестко закрепляется с одной выбранной стороны. На противоположную сторону образца с помощью двухсторонней липкой ленты приклеивается небольшой магнит. На определенном (фиксированном) расстоянии от магнита размещается катушка с сердечником, которая служит для детектирования колебаний образца. Колебания ПП возбуждаются механическим способом. Для этого используется электродвигатель с малыми оборотами, на вал которого прикреплена гибкая отклоняющая пластина: в процессе вращения эта пластина цепляет образец за свободный край и тем самым возбуждает его колебания. Таким образом, при колебаниях в начальный момент времени имеется определенный профиль изгиба исследуемого образца. Измерения электрических сигналов осуществлялись с помощью компьютерного генератора-осциллографа PCSGU-250 фирмы Velleman.

Были исследованы три образца ПП цифрового устройства с разным количеством SMD-компонентов. Образцы имели пять чередующихся слоев из меди и стеклотекстолита FR4. Средние значения коэффициентов заполнения слоев: Power и Gnd - 0.9 (90%); Bottom и Top - 0.3 (30%). Размер образцов: длина  $l = 13$  см; ширина  $a = 2.8$  см; толщина  $h = 2$  мм.

В работе показано, что на частоту, амплитуду и логарифмический декремент затухания колебаний оказывает влияние не масса SMD-компонентов, а структура поверхностного монтажа и металлических слоев ПП.

**Литература**

1. Талицкий Е.Н. Защита электронных средств от механических воздействий. Теоретические основы. Владимир: Владим. гос. ун-т., 2001. 256 с.
2. Рехвиашвили С.Ш., Мамчуев М.О., Нарожнов В.В., Ошхунов М.М., Тлибеков А.Х. // Известия высших учебных заведений. Электроника. 2018. Т. 23, № 2. С. 49–57.

**ОПТИМАЛЬНЫЙ КАЛЕНДАРЬ ДЛЯ ГРАФИКОВ, ПЛАНОВ,  
РАСПИСАНИЙ, РАСЧЁТА ДАТ**

**Маршан Р.Б.**

*АГУ, Абхазия, Сухум; ramgar28@rambler.ru*

Аварийность григорианского календаря связана с его известными недостатками [2]: 1) Год и месяцы не заполнены полными неделями, поэтому одни и те же числа разных месяцев находятся в разных днях недели. Несогласованность чисел дней в месяце с днями недели. Ежегодно происходит смещение чисел всех месяцев с дней недели. Наступление каждого нового года начинается с другого дня недели. 2) Меняется в течение года количество дней в месяце. Неодинаковая продолжительность месяцев. Известно также, что система високосных годов в григорианском календаре не точна: смещение календаря составляет до 26 секунд в год [1, стр. 54].

Составленный мной «Календарь планеты Земля» имеет следующие характеристики: 12 месяцев в году; в каждом месяце, кроме февраля, 30 дней - 6 полных недель по 5 дней; в феврале 35 дней - 7 полных недель по 5 дней; в високосные годы в последней неделе февраля - 6 дней; високосным считаем каждый год, число которого делится на 4, кроме годов, которые следуют по одному, с периодом 128 лет; день весеннего равноденствия - 30 февраля; начало нового календарного года – 1 марта. Все характеристики календаря оптимальны для планеты Земля, с периодом обращения вокруг Солнца 365,242199 суток. Календарь планеты Земля - стабильный, не меняется из года в год, числа в нем всегда находятся в одинаковых и тех же днях пятидневной недели. Календарь планеты Земля, снимает нагрузку, связанную с определением того, сколько дней в месяце 30 или 31, и на какой день недели попадает число месяца и сокращает время на составление разных календарных расчетов.

Расчет показывает: период пропуска одного високосного года - 128 лет оптимален – смещение календаря составит до 1 секунды в год. Календарь станет точнее в 25 раз.

Календарь планеты Земля не отменяет известные праздники и позволяет отметить на числах месяцев субботы и воскресенья как выходные, начиная с понедельника 1 марта до конца года.

**Литература**

1. Цыбульский В.В. Календари и хронология стран мира. Москва: Просвещение, 1982.
2. Володомонов Н.В. Календарь: прошлое, настоящее, будущее. Москва: Наука, 1987.

## КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Масаева О.Х.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; olesya.masaeva@yandex.ru

В верхней полуплоскости рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x, y) + \frac{\partial}{\partial y}D_{0y}^{\alpha-1}\frac{\partial}{\partial y}D_{0y}^{\alpha-1}u(x, y) = 0, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (1)$$

где  $D_{0y}^{\alpha-1}$  – оператор дробного интегрирования Римана – Лиувилля порядка  $\alpha - 1$  [1, с. 9],

$$D_{0y}^{\alpha-1}u(x, y) = \int_0^y \frac{(y-t)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} u(x, t) dt.$$

Заметим, по определению,  $D_{0y}^\alpha u(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}D_{0y}^{\alpha-1}u(x, y)$ .

Регулярным решением уравнения (1) в области  $\Omega = \{(x, y) : -\infty < x < \infty, 0 < y < \infty\}$  назовем функцию  $u(x, y)$  такую, что  $y^{1-\alpha}D_{0y}^\alpha u(x, y) \in C(\bar{\Omega})$ ,  $u_{xx}(x, y), D_{0y}^\alpha D_{0y}^\alpha u(x, y) \in C(\Omega)$ , и удовлетворяющую уравнению (1).

В работе [2] доказана теорема единственности решения задачи Дирихле для обобщенного уравнения Лапласа дробного порядка в ограниченной области. В работе [3] исследована задача Дирихле для уравнения (1) в верхней полуплоскости. В данной работе получено представление решения и доказана единственность решения второй краевой задачи для уравнения (1) в верхней полуплоскости.

**Задача.** Найти в области  $\Omega$  регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условию

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-1} \frac{\partial}{\partial y} D_{0y}^{\alpha-1} u(x, y) = \tau(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (2)$$

где  $\tau(x)$  – заданная непрерывная функция на всей действительной оси.

### Литература

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
2. Масаева О.Х. Единственность решения задачи Дирихле для уравнения с фрактальным оператором Лапласа в главной части // Известия КБНЦ РАН. 2015. Т. (68)-2, № 6. С. 127–130.
3. Масаева О.Х. Задача Дирихле в полуплоскости для обобщенного уравнения Лапласа с дробной производной // Материалы Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и физики», Нальчик-Терскол.: Издательство, 2017. С. 146–147.

**РЕАЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА ПЕРЕНОСА  
ДАВЛЕНИЯ МНОГОКОМПОНЕНТНОГО РАССОЛА В ПОРИСТОЙ  
СРЕДЕ С ПОМОЩЬЮ СХЕМ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ  
ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНОЙ ПРОГОНКИ**

**Маслова О.И.<sup>1</sup>, Шагрова Г.В.<sup>2</sup>**

*СКФУ, Ставрополь, Россия; <sup>1</sup>oksmaslova@inbox.ru; <sup>2</sup>g\_shagrova@mail.ru*

Разработка различных методов распознавания позволяет оценить эффективность методов встраивания скрытой информации в изображения и их робастность [1], что в дальнейшем позволит создавать более стойкие и качественные методы формирования изображений, содержащих скрытую информацию.

Проведено сравнение качества скрытой в изображениях, сформированных на основе методов, разработанных в работах [2, 3], информации, представляющей собой цветные изображения. Для этого была разработана в системе Matlab программа, позволяющая как формировать изображения, содержащие скрытую информацию, так и выявлять её.

Оценивалось качество, сформированных различными методами, изображений визуально и с помощью наиболее распространенных коэффициентов оценки качества изображений [4]: PSNR (пиковое отношение сигнала к шуму); SSIM (индекс структурного сходства). Для выявления степени влияния различных преобразований на качество полученных изображений, содержащих скрытую информацию, они подвергались сжатию, обрезке и изменению размера. После чего вычислялись коэффициенты, позволяющие оценить качество изображений, подвергшихся преобразованию.

Установлено, что изображения, полученные методом, описанным в работе [3], имеют лучшее визуальное качество и более высокие коэффициенты PSNR и SSIM.

**Литература**

1. Федосеев В.А. Унифицированная модель систем встраивания информации в цифровые сигналы // Компьютерная оптика. 2016. Т. 40, № 1. С. 87–98.
2. Шагрова Г.В., Топчиев И.Н. Способы формирования и выявления латентных изображений // Наукомкие технологии. М.: Радиотехника. № 7. 2012. С. 88–93.
3. Жарких А.А., Шагрова Г.В. Способ формирования цифрового латентного изображения // Вестник СевКавГТИ: научный журнал. 2015. Т. 1. № 3 (22). С. 188–195.
4. Монич Ю.И., Старовойтов В.В. Оценки качества для анализа цифровых изображений // Искусственный интеллект. 2008. №4. С. 376–386.

**Осцилляция решений некоторых классов нелинейных  
дискретных разностных уравнений второго порядка с  
отклоняющимся аргументом**

**Матахаев А.И., Кидакоев М.М.**

*СевКавГГТА, Черкесск, Россия; kf\_matematiki@mail.ru*

**Теорема 1.** Если  $\Delta\sigma(n) > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{s=a_0}^n s^\beta p(s) = \infty$ ,  $0 < \beta < 1$ , то все решения уравнения  $\Delta^2 u(n) + p(n)u^a(n - \sigma(n)) = 0$ ,  $a > 1$  осциллируют.

**Теорема 2.** Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{s=a_0}^n (\sigma(s) - 1)^a p(s) = \infty$ , то все решения уравнения  $\Delta(|\Delta u(n)|sgn\Delta u(n)) + p(n)u^a(n - \sigma(n)) = 0$ ,  $0 < a < 1$  осциллируют.

**Литература**

1. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. 301 с.
2. Матахаев А.И. Колебание решений некоторых классов уравнений в конечных разностях второго порядка // Материалы третьей Международной научной конференции «Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения». Махачкала, 2007. С. 155–161.

## АРИФМЕТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ ПОЧТИ ПОЛИАДИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

Матвеев В.Ю.

ООО «НИИ» Транснефть, Москва, Россия; salomaa@mail.ru

Кольцо целых полиадических чисел представляет собой прямое произведение колец целых  $p$ -адических чисел по всем  $p$ .

Можно рассматривать прямое произведение колец целых  $p$ -адических чисел по всем простым числам  $p$ , кроме, быть может, конечного их числа. При этом получаем почти полиадические числа.

Полиадические и почти полиадические числа имеют важные приложения в теории групп, в аналитической теории чисел. Они имеют практическое значение [1–2].

Теория арифметических свойств полиадических чисел получила развитие в работах В.Г. Чирского [3–9].

Предлагаемый доклад посвящен бесконечной алгебраической независимости совокупностей почти полиадических чисел.

### Литература

1. Чирский В.Г., Матвеев В.Ю. О представлениях натуральных чисел // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2013. №6. С. 57–59.
2. Чирский В.Г., Матвеев В.Ю. О некоторых свойствах полиадических разложений // Чебышевский сборник. 2013. Т. 14, вып. 2. С. 164–172.
3. Chirskii V.G. Topical problems of the theory of transcendental numbers: Development of approaches to their solution in the works of Yu. V. Nesterenko // Russian Journal of Mathematical Physics. Vol 24, № 2. P. 153–171.
4. Chirskii V.G., Bertrand D., Yebbou J. Effective estimates for global relations on Euler-type series // AFST. 2004. Vol. 13, №2. P. 241–260.
5. Чирский В.Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Известия РАН. Серия математическая. Т. 81, вып. 2. С. 215–232.
6. Чирский В.Г. О рядах, алгебраически независимых во всех локальных полях // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 1978. № 3. С. 29–34.
7. Чирский В.Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Доклады академии наук. 2014. Т. 459, № 6. С. 677–679.
8. Чирский В.Г. Об арифметических свойствах обобщенных гипергеометрических рядов с иррациональными параметрами // Известия РАН. Серия математическая. 2014. Т. 786, вып. 6. С. 193–210.
9. Чирский В.Г. Об арифметических свойствах ряда Эйлера // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2015. № 1. С. 59–61.

**АЛГОРИТМЫ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ  
НАПРЯЖЕННОСТИ ПРИЗЕМНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ С  
ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФИЛЬТРА КАЛМАНА**

**Машуков И.Х.<sup>1</sup>, Шаповалов В.А.<sup>2</sup>, Аджиева А.А.<sup>3</sup>**

<sup>1,2</sup>ВГИ, Нальчик, Россия; idar84@rambler.ru

<sup>3</sup>КБГАУ, Нальчик, Россия; adzhieva@mail.ru

Одной из актуальных задач геофизического мониторинга является отслеживание вариации напряжённости электрического поля атмосферы. К настоящему времени исследования атмосферного электричества достигли высокого уровня автоматизации и производятся массово. Сопоставление данных измерений датчиков различных моделей, встречает ряд серьёзных трудностей. Это связано не только с различным темпом измерений или характеристиками сенсоров, но и с шумами, возникающими в результате внешних и внутренних воздействий на измерительный прибор, которые составляют так называемую погрешность измерений.

Для устранения шумов и другой лишней информации существуют специальные алгоритмы цифровой обработки данных называемые фильтрами [1, 2]. Фильтр Калмана является разновидностью рекурсивного фильтра, который оценивает состояние динамической системы по серии неточных измерений [3]:

$$\begin{cases} z_k = H_k x_k + v_k, \\ x_k = A_k x_{k-1} + B_k u_{k-1} + w_k. \end{cases} \quad (1)$$

Чтобы иметь возможность применить фильтр (1), необходимо определить матрицы переменных определяющих динамику системы и измерений, при этом нужно указать матрицы  $A_k$ ,  $H_k$  и  $B_k$  для каждого шага по времени  $k$ .

Фильтр достаточно прост в реализации, он автоматически подбирает усиление в зависимости от ошибки прогноза, причём это хорошо работает даже в присутствии шума. Благодаря итерационной природе алгоритма он может в реальном времени отслеживать состояние наблюдаемого процесса изменений напряжённости электрического поля атмосферы.

**Литература**

1. Шахтарин Б.И. Фильтры Винера и Калмана. М.: Гелиос АРВ, 2008. 408 с.
2. Welch G., Bishop G. An Introduction to the Kalman Filter // Department of Computer Science, UNC-Chapel Hill, TR 95-041. 2006. 16 р.
3. Аджиева А.А., Машуков И.Х., Шаповалов В.А. Использование фильтра Калмана в обработке данных хода напряжённости электрического поля атмосферы // Инженерный вестник Дона. 2017. № 2(45). С. 87–97.

**Моделирование влияния экологического загрязнения  
на индекс развития человеческого потенциала в  
условиях неопределенности**

**Мирзоев Ф.А., Кулиев Р.М., Аббасова Ш.А., Юсифов М.Ю.**

*БГУ, Баку, Азербайджан; farhad\_1958@mail.ru*

В условиях устойчивого развития экономики моделирование экономики следует проводить с одновременным учетом мер по защите окружающей среды, т.е. в сфере охраны природы обеспечение контроля за развитием и внедрением политики защиты окружающей среды является одной из самых актуальных проблем сегодняшнего дня. Поэтому при принятии каких-либо политических и экономических решений следует учитывать возможность негативных экологических последствий. К сожалению не всегда учитываются негативные последствия развития экономики. Это можно объяснить тем, что процессы глобализации современной мировой экономики делают необходимым обеспечение рациональных взаимосвязей, а с другой стороны огромное количество входной информации делает невозможным решение поставленных проблем. Проблема сложности решения многих экономических задач характеризуется неопределенностью. Для анализа и решения задач, описывающих процессы с неточными параметрами, успешно применяются методы интервального анализа [1]. В управлентческой деятельности лицо, принимающее решение, часто сталкивается с ситуацией, когда невозможно избежать проблемы учета неопределенности иного рода – неопределенности, обусловленной нечеткостью (fuzzy) цели и (или) ограничений. Для формулировки, анализа и решения такого типа задач широко используется аппарат нечеткой математики Л.А. Заде [2].

В представленной работе разработан методологический подход к проблеме принятия решения в условиях неопределенности. Представлена схема решения задачи оптимизации, описываемой моделью с нечеткими параметрами. Данна эконометрическая оценка влияния экологического загрязнения на индекс развития человеческого потенциала [3].

**Литература**

1. *Moore R.E., Kearfott R.B., Cloud M.J. Introduction to interval analysis.* SIAM, Philadelphia, PA, 2009. 234 p.
2. *Zadeh L.A. The role of fuzzy logic in modeling, identification and control // Modeling, identification and control. 1994. Vol. 15, № 3. P. 191–203.*
3. *Gujarati D. Basic Econometrics, 4th edition. McGraw-Hill companies, 2004. 1002 p.*

**ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С УСЛОВИЕМ  
БИЦАДЗЕ – САМАРСКОГО НА ХАРАКТЕРИСТИКАХ ОДНОГО  
СЕМЕЙСТВА**

**Мирсабуров М.<sup>1</sup>, Хуррамов Н.Х.<sup>2</sup>**

ТерГУ, Термез, Узбекистан; <sup>1</sup>mirsaburov@mail.ru; <sup>2</sup>nurramov22@mail.ru

Рассмотрим уравнение

$$(signy)|y|^m u_{xx} + u_{yy} + (\beta_0/y)u_y = 0, \quad m > 0, \quad \beta_0 \in (-m/2, 1), \quad (1)$$

в смешанной области  $D$  [1].

**Задача А.** Требуется найти в области  $D$  функцию  $u(x, y)$ , удовлетворяющую следующим условиям:

- 1)  $u(x, y) \in (\bar{D}^+) \cup C(\bar{D}^-)$ ;
- 2)  $u(x, y) \in C^2(D^+)$  и удовлетворяет уравнению (1) в этой области;
- 3)  $u(x, y)$  является в области  $D^-$  обобщенным решением класса  $R_1$ ;
- 4) на интервале вырождения  $AB$  имеет место условие сопряжения

$$u(x, -0) = a(x)u(x, 0) + a_0(x), \quad x \in I,$$

$$\lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y} = b(x) \lim_{y \rightarrow +0} y^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y} + b_0(x), \quad x \in I;$$

5) выполняются равенства

$$u(x, y) = c(x)u(x, +0) + c_0(x), \quad (x, y) \in \sigma_0,$$

$$u(x, y) |_{AC_0} = \psi(x), \quad x \in [-1, (c-1)/2],$$

$$u[\theta(x)] = \mu u[\theta^*(x)] + \rho(x), \quad x \in [c, 1],$$

где  $\mu$  – некоторая постоянная,  $\theta(x_0), (\theta^*(x_0))$  – аффикс точки пересечения характеристик  $AC$  ( $EC_1$ ) с характеристикой, исходящей из точки  $M(x_0, 0)$ , где  $x_0 \in [c, 1]$ ,  $E = E(c, 0)$ ,  $-1 < c < 1$ .

**Теорема.** Задача A при  $\mu \leq 0$ ,  $a(x) > 0$ ,  $b(x) > 0$ ,  $|c(x)| < 1$  однозначно разрешима.

Доказательство теоремы проводится методом работы [1].

**Литература**

1. Мирсабуров М. Краевая задача для одного класса уравнений смешанного типа с условием Бицадзе – Самарского на параллельных характеристиках // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37, № 9. С. 1281–1284.

## НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

Мирсабурова Г.М.<sup>1</sup>, Нормуродов Ш.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Термезский филиал ТГПУ им. Низами, Термез, Узбекистан;

<sup>2</sup> ТерГУ, Термез, Узбекистан; mirsaburov@mail.ru

Рассмотрим уравнение

$$(signy)|y|^m u_{xx} + u_{yy} + (\beta_0/y)u_y = 0, \quad m > 0, \quad \beta_0 \in (-m/2, 1), \quad (1)$$

в смешанной области  $D$  [1].

**Задача ТБС.** Требуется найти функцию  $u(x, y) \in C(\bar{D})$ , удовлетворяющую следующим условиям:

1) функция  $u(x, y)$  принадлежит  $C^2(D_1)$  и удовлетворяет уравнению (1) в этой области;

2) функция  $u(x, y)$  является обобщенным решением из класса  $R_1$  [1] в области  $D_2$ ;

3) на  $AB$  выполняются условия склеивания

$$\lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y \rightarrow +0} y^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y},$$

4) выполняются условия:

$$u(x, y) = \mu_0(x)u[E(x)] + \rho_0(x), \quad (x, y) \in \Gamma[-1, d_0],$$

$$u[S(x)] = \mu_1(x)u(x, 0) + \rho_1(x), \quad x \in \bar{I},$$

$$u(x, y) = \varphi(x), \quad (x, y) \in \Gamma[d_0, d],$$

$$u|_{AC} = \psi(x), \quad x \in [-1, 0],$$

где  $u[E(x)] = u(ReE(x); ImE(x))$ ,  $u[S(x)] = u(ReS(x); ImS(x))$ ,  $\Gamma(a, b)$  – часть кривой  $\Gamma$ , соответствующей  $x \in [a, b] \in \bar{I}$ .

Обозначения см. в [1]. Доказательство корректности задачи ТБС проводится методом работы [1].

### Литература

- Салахутдинов М.С., Мирсабуров М. Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами. Ташкент: Universitet, 2005. 213 с.

**Об одном обобщении задачи Трикоми для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом**

**Мирсабурова У.М., Омонов Б.**

*ТерГУ, Термез, Узбекистан; mirsaburov@mail.ru*

Рассмотрим уравнение

$$(signy)|y|^m u_{xx} + u_{yy} + (\beta_0/y)u_y = 0, \quad m > 0, \quad \beta_0 \in (-m/2, 1), \quad (1)$$

в смешанной области  $D$ .

Введем обозначения  $D^+ = D \cap \{y > 0\}$ ,  $D^- = D \cap \{y < 0\}$ .

**Задача  $T_0$ .** Требуется найти в области  $D$  функцию  $u(x, y) \in C(\bar{D})$ , удовлетворяющую следующим условиям:

- 1) функция  $u(x, y)$  принадлежит  $C^2(D^+)$  и удовлетворяет уравнению (1) в области  $D^+$ ;
- 2) в области  $D^-$  функция  $u(x, y)$  является обобщенным решением из класса  $R_2$  [1];
- 3) на интервале вырождения  $AB$  имеет место условие сопряжения

$$\lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y \rightarrow +0} y^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y},$$

- 4) выполняются условия:

$$u(x, y) |_{\Gamma} = a(x)u(x, 0) + \varphi(x), \quad x \in [-1, 1],$$

$$u(x, y) |_{AC} = \psi(x), \quad x \in [-1, 0],$$

где  $a(x)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  – заданные непрерывно дифференцируемые функции в замыкании множества их определения.

**Теорема.** Задача  $T_0$  при  $|a(x)| \leq 1$  однозначно разрешима.

Доказательство теоремы проводится методом работы [1].

**Литература**

1. Мирсабуров М. Задача типа задачи Бицадзе – Самарского для одного класса уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 35. № 5. С. 829–834.

## КОРОТКИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ СУММЫ Г. ВЕЙЛЯ В МАЛЫЕ ДУГИ

**Назрублоев Н.Н.**

*Институт математики, Душанбе, Таджикистан; nasrulo\_86@bk.ru*

Согласно теореме Дирихле о приближении действительных чисел рациональными числами, каждое действительное  $\alpha$  представимо в виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1, \quad 1 \leq q \leq \tau, \quad |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}.$$

Через  $\mathfrak{M}(P)$  обозначим те числа  $\alpha$ , для которых  $q \leq P$ , через  $\mathfrak{m}(P)$  обозначим оставшиеся  $\alpha$ .  $\mathfrak{M}(P)$  и  $\mathfrak{m}(P)$  соответственно называются большими и малыми дугами.

Основным моментом изучения аддитивных задач с почти равными слагаемыми, к которым относится проблема Варинга, проблема Эстермана является поведение коротких тригонометрических сумм Г. Вейля вида

$$T_k(\alpha; x, y) = \sum_{x-y < n \leq x} e(\alpha n^k),$$

в большие дуги и их оценка в малые дуги. Поведение  $T_k(\alpha; x, y)$  большие дуги последовательно изучено в работах [1–3].

**Теорема.** Пусть  $x \geq x_0 > 0$ ,  $y_0 < y \leq 0, x$ ,  $\alpha$  – вещественное число,

$$\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2}, \quad (a, q) = 1.$$

Тогда справедлива оценка

$$|T(\alpha; x, y)| \ll y^{1+\varepsilon} \left( \frac{1}{q} + \frac{1}{y^{k-1}} + \frac{q}{y^k} \right)^{\frac{1}{2k}}.$$

### Литература

1. Рахмонов З.Х. Трннарная задача Эстермана с почти равными слагаемыми // Математические заметки. 2003. Т. 74, вып. 4. С. 564–572.
2. Рахмонов З.Х. Кубическая задача Эстермана с почти равными слагаемыми // Математические заметки. 2014. Т. 95, вып. 3. С. 445–456.
3. Рахмонов З.Х., Нарзублоев Н.Н., Рахимов А.О. Короткие суммы Г. Вейля и их приложения // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16, № 1(53). С. 232–247.

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОБЛЕМЫ  
ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ С ПРИМЕНЕНИЕМ  
ПОЛИНОМОВ ЧЕБЫШЕВА 2-ГО РОДА**

**Нармурадов Ч.Б., Турсунова Б.А.<sup>1</sup>**

*ТерГУ, Термез, Узбекистан; <sup>1</sup>barno.tursunova.2016@mail.ru*

Рассмотрим линейное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$L_0 u = \frac{d^m u}{dy^m} + \sum_{i=0}^{m-1} q_i(y) \frac{d^i u}{dy^i} = f(y), \quad -1 < y < 1 \quad (1)$$

при линейных однородных краевых условиях

$$\sum_{i=0}^{m-1} \left( \alpha_{ik} \frac{d^k u(-1)}{dy^k} + \beta_{ik} \frac{d^k u(+1)}{dy^k} \right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (2)$$

В спектрально-сеточном методе (ССМ) интервал интегрирования  $[-1, 1]$  разбивается на произвольную сетку.

Приближенное решение задачи (1)–(2) на каждом из элементов сетки  $[y_{j-1}, y_j]$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$  будем искать в виде линейной комбинации различного числа полиномов Чебышева второго рода  $U_n$ :

$$u_j^{(p_j)}(y) = \sum_{n=0}^{p_j} a_n^{(p_j)} U_n(\tilde{y}), \quad y \in [y_{j-1}, y_j], \quad y = \frac{m_j}{2} + \frac{l_j}{2} \tilde{y}, \quad (3)$$

где  $m_j = y_j - y_{j-1}$ ,  $l_j = y_j - y_{j-1}$ ,  $-1 \leq \tilde{y} \leq 1$ , причем,  $l_j$  – длина  $j$ -го элемента сетки,  $p_j$  – количество полиномов, используемых для аппроксимации решения на  $j$ -ом интервале сетки.

В ССМ во внутренних узлах сетки налагается требование непрерывности приближенного решения (3) и его производных до  $(m-1)$ -го порядка, а в граничных узлах сетки удовлетворения соответствующих краевых условий (1)–(2).

**Литература**

1. Абуталиев Ф.Б., Нармурадов Ч.Б. Математическое моделированное про-  
блемы гидродинамической устойчивости. Т.: Фан ва технология. 2011.  
188 с.

**МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА С  
СОУДАРЕНИЯМИ**

**Нарожнов В.В.**

*ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; narojnov.victor@gmail.com*

Нелинейные дифференциальные уравнения, описывающие колебания осциллятора, возникают в электротехнике при описании автоколебаний в цепях с активными и пассивными элементами; в трибологии при исследовании механизмов трения поверхностей; в микроэлектромеханических системах; в биологических и биохимических системах при изучении кинетики гомогенных процессов и др. Задачи об осцилляторе с соударениями возникают, в частности, при рассмотрении физических процессов в атомно-силовом микроскопе, который используется для диагностики поверхностей твердых тел на атомном и наноразмерном уровне разрешения как в воздушной, так и в жидкой среде.

В настоящей работе проводится моделирование нелинейного осциллятора с соударениями с помощью программ Simulink и Wavelet Toolbox, входящих в состав пакета MATLAB. Результаты моделирования сравниваются с результатами натурных экспериментов, проведенных на специально разработанном стенде [1, 2].

**Литература**

1. Рехвиашвили С.Ш., Нарожнов В.В. Нелинейная динамика и акустические сигналы при упругих соударениях зонда с поверхностью твердого тела // Известия ВУЗов. Прикладная и нелинейная динамика. 2013. Т. 21, № 6. С. 49–57.
2. Стенд для исследования вязкоупругих свойств металлов и сплавов с помощью зондового акустического метода: пат. №2552600 Рос. Федерации: G01N11/00 / Нарожнов В.В., Рехвиашвили С.Ш.; заявитель и патентообладатель Институт прикладной математики и автоматизации – №201312-4372/28; дата приоритета 27.05.2013; выдан 04.03.2015.

**О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПРАВОЙ ЧАСТИ, НАЧАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ И КОЭФФИЦИЕНТА УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ**

**Насибзаде В.Н.<sup>1</sup>, Сафарова З.Р.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> СГУ, Сумгаит, Азербайджан; nasibzade87@mail.ru

<sup>2</sup> НГУ, Нахичевань, Азербайджан; seferovazumrud@ymail.com

В работе рассматриваются задачи определения правой части, начальной функции и коэффициента уравнения колебания струны. Все задачи приводятся к соответствующим задачам оптимального управления и исследуются методами теории оптимального управления. Доказывается дифференцируемость соответствующих функционалов по Фреше, выводятся условия оптимальности в форме вариационного неравенства. Приводятся численные результаты, полученные с применением метода проекции градиента.

**Литература**

1. Кабанихин С.И., Исаков К.Т. Оптимизационные методы решения коэффициентных обратных задач. Новосибирск: 2001. 315 с.
2. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: 2009. 457 с.
3. Лионс Ж.Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 414 с.
4. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981. 400 с.
5. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Издательство, 1977. 657 с.

**ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА  
ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ В-ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ**

**Нигмедзянова А.М.<sup>1</sup>, Чеботарева Э.В.<sup>2</sup>**

*КФУ, Казань, Россия;* <sup>1</sup>*aigmani23@rambler.ru;* <sup>2</sup>*chebotareva.elv@gmail.com*

В работе рассматривается класс вырождающихся В-эллиптических уравнений вида

$$L_B[u] = \sum_{i=1}^{n-p} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum_{i=n-p+1}^n \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \frac{k_i}{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \\ \sum_{i=1}^{N_1} y_i^{m_i} \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2} + \sum_{i=1}^{N_2} \frac{\partial}{\partial z_i} \left( z_i^{\alpha_i} \frac{\partial^2 u}{\partial z_i^2} \right) = 0. \quad (1)$$

С помощью обобщенного преобразования Фурье – Беселя [1, 2] построено фундаментальное решение оператора  $L_B$  в пространстве обобщенных функций  $\mathcal{S}'_B(\mathbb{R}_+^\nu)$ :

$$\mathcal{E}(x, y, z) = -2^{\gamma-2} \pi^{\frac{\gamma-n}{2}} \Gamma \left( \frac{\nu + k + m + \alpha - 2}{2} \right) r^{2-\nu-k-m-\alpha}, \quad (2)$$

где  $\nu = n + N_1 + N_2$ ,  $\gamma = p + N_1 + N_2$ ,  $k = \sum_{i=n-p+1}^n k_i$ ,  $m = \sum_{i=1}^{N_1} \frac{m_i}{m_i-2}$ ,  
 $\alpha = \sum_{i=1}^{N_2} \frac{\alpha_i}{2-\alpha_i}$ ,  $r = \sqrt{|x|^2 + \sum_{i=1}^{N_1} \frac{4}{(m_i-2)^2} y_i^{2-m_i} + \sum_{i=1}^{N_2} \frac{4}{(2-\alpha_i)^2} z_i^{2-\alpha_i}}$ ,  $\mathcal{S}'_B$  - пространство обобщенных функций медленного роста, четных по переменным  $x_i$ ,  $i = \overline{n-p+1, n}$ .

Фундаментальное решение уравнения (1) с особенностью в произвольной точке получено из (2) с помощью оператора обобщенного сдвига [3].

**Литература**

1. Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи. М.: Наука, 1997. 208 с.
2. Katrakhov V.V., Lyakhov L.N. Full Fourier – Bessel transform and the algebra of singular pseudo differential operators // Differential Equations. 2011. Т. 47, № 5. С. 681–695.
3. Левитан Б.М. Теория операторов обобщенного сдвига. М.: Наука, 1973. 312 с.

## **Обучение глубокой модели распознавания жестов на виртуальных данных**

**Николаев Е.И.<sup>1</sup>, Журавлев В.В.<sup>2</sup>**

*СКФУ, Ставрополь, Россия; <sup>1</sup>notdeveloper@gmail.com; <sup>2</sup>guravlevv@mail.ru*

Актуальность разработки модели распознавания жестов обусловлена повышающимися требованиями к системам человеко-машинного взаимодействия. Технологии глубоких сверточных нейронных сетей (Deep Convolutional Neural Network, DCNN) выводят интеллектуальные системы на новый качественный уровень, особенно в таких областях как классификация и детектирование изображений [1, 2]. В данной работе предлагается использование предобученной DCNN для реализации вычислительного ядра библиотеки распознавания жестов. Одним из вызовов в области глубокого обучения является большой объем тренировочных данных. В работе предлагается обучать DCNN на виртуальных данных, сгенерированных в автоматическом режиме. За счет способности к обобщению, полученная DCNN демонстрирует точность 93% на тестовой выборке и 87% – на проверочной.

Обучение DCNN производится на графическом процессоре NVidia Tesla K40C. В качестве программной платформы применяется TensorFlow. Разрабатываемая модель состоит из единого блока выделения признаков (набор сверточных и обобщающих слоев), а также раздельных классифицирующих блоков (набор полносвязных слоев), предназначенных для предсказания положения (вектор ориентации ладони) и класса входного изображения жеста. При обучении DCNN используется технология дополнения данных [3].

Предлагаемый подход позволяет обучать DCNN на виртуальных данных и использовать их в качестве вычислительного ядра в системах человеко-машинного взаимодействия. Дальнейшие исследования направлены на комбинирование DCNN с регрессионными моделями машинного обучения для предсказания координат ключевых точек ладони.

### **Литература**

1. Yang Z., Li Y., Chen W., Zheng Y. Dynamic hand gesture recognition using Hidden Markov models // ICCSE, Melbourne, Australia, 2012. P. 360–365.
2. Simonyan K. and Zisserman A. Two-stream convolutional networks for action recognition in videos // NIPS, Montreal, Canada, 2014. P. 568–576.
3. Nikolaev E.I., Dvoryaninov P.V., Lensky Y.Y. and Drozdovsky N.S. An Intelligent system for content generation // YSIP2, Dombai, Russia, 2017. P. 152–157.

**ИССЛЕДОВАНИЕ ХАОСТИЧЕСКИХ И РЕГУЛЯРНЫХ РЕЖИМОВ  
ФРАКТАЛЬНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ВАН ДЕР ПОЛЯ – ДУФИНГА**

**Новикова Е.Р.<sup>1</sup>, Паровик Р.И.<sup>2</sup>**

<sup>1,2</sup>КамГУ имени Витуса Беринга, Петропавловск-Камчатский, Россия;

<sup>2</sup>ИКИР ДВО РАН, Паратунка, Россия; <sup>1</sup>elizaveta\_333@mail.ru,

<sup>2</sup>parovik@ikir.ru

Рассмотрим следующую задачу Коши для смещения  $x(t) \in C^2(0, T)$  [1]:

$$\partial_{0t}^\alpha x(\tau) - [\lambda - x^2(t)] \partial_{0t}^\beta x(\tau) + x(t) + \xi x^3(t) = c \sin(\omega t), \quad (1)$$

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = y_0,$$

где  $\lambda$  – управляющий параметр,  $\omega$  и  $c$  – частота и амплитуда внешнего воздействия,  $x_0, y_0$  – заданные константы,  $\xi$  – параметр фазовой нелинейности, определяющий неизохронность колебаний,  $t \in [0, T]$  – время процесса,  $T > 0$  – время моделирования, а дифференциальные операторы:

$$\partial_{0t}^\alpha x(\tau) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t \frac{\ddot{x}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-1}}, \quad \partial_{0t}^\beta x(\tau) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \frac{\dot{x}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^\beta},$$

определенны в смысле Герасимова – Капuto с дробными порядками  $1 < \alpha < 2, 0 < \beta < 1$ .

В работе, с помощью численного анализа [2] и максимальных показателей Ляпунова [3], проведено исследование хаотических и регулярных колебательных режимов для осциллятора (1).

**Литература**

1. Новикова Е.Р. Осциллятор Ван дер Поля-Дуффинга с эффектом эредитарности // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2017. № 18(2). С. 65–75.
2. Паровик Р.И. Математическое моделирование нелинейных эредитарных осцилляторов: монография. Петропавловск-Камчатский: КамГУ им. Витуса Беринга, 2017. 134 с.
3. Wolf A. et al. Determining Lyapunov exponents from a time series // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1985. Vol. 16. № 3. P. 285–317.

---

Работа выполнена в рамках темы НИР КамГУ имени Витуса Беринга «Приложение дробного исчисления в теории колебательных процессов» № АААА-А17-117031050058-9 и при финансовой поддержке гранта президента Российской Федерации № МК-1152.2018.1.

## МЕТОД ПОДПРОСТРАНСТВ КРЫЛОВА ДЛЯ РЕШЕНИЯ БОЛЬШИХ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА GPU

Обласова И.Н.<sup>1</sup>, Тимофеева Е.Ф.<sup>2</sup>

СКФУ, Ставрополь, Россия; <sup>1</sup>pravotor@list.ru; <sup>2</sup>teflena@mail.ru

Методы подпространств Крылова – итеративные методы для решения больших и разреженных линейных алгебраических систем. Данные методы входят в ТОП-10 алгоритмов 20 века.

В нашей работе распараллеливается решение систем линейных разреженных уравнений на GPU.

Для решения задачи применялся один из методов CMRES(m). Дан-  
ный метод один из методов подпространств Крылова. Он оказался наи-  
более оптимальен по числу итераций и времени решения. В заданной си-  
стеме уравнений

$$AX = B. \quad (1)$$

Задаем подпространство Крылова  $K_m(A, v_1)$ , где  $v_1 = r^{(0)}\beta$ ,  $\beta = \|r^{(0)}\|_2$ .

Для построения векторов подпространства  $K_m$  использовалась орто-  
гонализация Арнольди. Поправка к очередному решению строилась на  
основе минимизации евклидовой нормы невязки. Решение системы GPU  
осуществлялось в библиотеке CUBLAS.

### Литература

1. Smith B., Bjorstad P., Gropp W. Domain decomposition: parallel multilevel methods for elliptic partial differential equations. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
2. Saad Y. Iterative methods for sparse linear systems // Society for Industrial and Applied Mathematics. Philadelphia. USA. 2003.
3. Saad Y. Analysis of some Krylov subspace approximations to the matrix exponential operator // SIAM Journal on Numerical Analysis. 1992. Vol. 29, № 1. P. 209–228.

**ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ НЕЛИНЕЙНЫХ  
МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ НАСЛЕДСТВЕННО-УПРУГОГО ТЕЛА  
НА ОСНОВЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ  
УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О ПОЛЗУЧЕСТИ**

**Огородников Е.Н.<sup>1</sup>, Унгарова Л.Г.<sup>2</sup>**

*СамГТУ, Самара, Россия; <sup>1</sup>eugen.ogo@gmail.com; <sup>2</sup>algluiza@gmail.com*

В работе рассмотрены некоторые нелинейные варианты дробных аналогов классических моделей Фойхта, Максвелла, Кельвина и Зенера, возникающие в предположении, что зависимость между напряжением  $\sigma(t)$  и деформацией  $\varepsilon(t)$  в упругих элементах структурных моделей определяется равенством  $\sigma = E\varepsilon^n$  ( $n > 0$ ); зависимость между напряжением и дробной производной  $D_{0t}^\alpha \varepsilon(t)$  в модели Скотт Блэра – равенством  $\sigma = \eta (D_{0t}^\alpha \varepsilon)^m$  ( $m > 0$ ), где  $E$  и  $\eta$  – некоторые положительные константы. Как отмечено в работе [1], в этом случае определяющие соотношения будут являться существенно нелинейными дифференциальными уравнениями, не разрешенными относительно дробных производных Римана – Лиувилля искомой функции деформации. С однородными начальными условиями они эквивалентным образом редуцируются к интегральным уравнениям типа Вольтерры с ядром Абеля в канонической форме Гаммерштейна.

Цель настоящей работы заключается в решении проблемы идентификации параметров математических моделей в случае, когда определяющие соотношения не позволяют найти функцию деформации в явном виде. В этом случае неизвестные параметры моделей находятся методом координатного спуска с обращением на каждом шаге к численному решению определяющего интегрального уравнения, требуя минимума среднего квадратического отклонения приближенных значений деформации от ее экспериментальных значений в указанные дискретные моменты времени. Для построения итерационных процедур численного решения нелинейных интегральных уравнений используются квадратурные формулы приближенного вычисления дробных интегралов, аналогичные формулам прямоугольников и формуле трапеций.

**Литература**

1. Огородников Е.Н., Унгарова Л.Г., Латыпова Н.М. Решение задачи о ползучести для некоторых нелинейных математических моделей наследственно-упругого тела // Материалы международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и физики», Нальчик, 2017. С. 161.

**СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ  
УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА СО СВЕРХСИНГУЛЯРНОЙ  
ТОЧКОЙ**

**Олимов А.Г.**

*ХГУ, Худжанд, Таджикистан; Abdumalon1950@mail.ru*

Пусть, в системе

$$y_j'' + \frac{2p_j(x)}{x^\alpha} y_j' + \sum_{k=1}^2 \frac{r_{jk}(x)}{x^{2\alpha}} y_k = \frac{f_j(x)}{x^{2\alpha}}, \quad j = 1, 2, \quad x \in \Gamma = (0, a), \quad \alpha > 1, \quad (1)$$

$p_j(x) \in C^1(\bar{\Gamma})$ ,  $r_{jk}(x), f_j(x) \in C(\bar{\Gamma})$ ,  $j, k = 1, 2$ , а в случае  $\alpha \geq 2$  функция  $p_1(x)$  удовлетворяет дополнительному условию  $|p_1(x) - p_1(0)| \leq H_1 x^{h_1}$ ,  $H_1 > 0$ ,  $h_1 > \alpha - 1$  при  $x \rightarrow +0$  и  $p_1(0) > 0$ . Функции

$$\Omega_{jj}^\alpha(x) = r_{jj}(x) - x^\alpha p_1'(x) + \alpha x^{\alpha-1} p_1(x) - p_1^2(x), \quad j = 1, 2, \quad r_{12}(x), r_{21}(x),$$

$\Omega_{12}(x) = 2[p_1(x) - p_2(x)]$  в точке  $x = 0$  обращаются в нуль с асимптотическим поведением  $\Omega_{jj}^\alpha(x)$ ,  $j = 1, 2$ ,  $r_{12}(x)$ ,  $r_{21}(x)$ ,  $\Omega_{12}(x) = o(x^\lambda)$ ,  $\lambda > 2\alpha - 1$  при  $x \rightarrow +0$ .

Тогда общее решение системы из класса  $C^2(\Gamma)$  выражается формулой

$$y_j(x) = \exp[-w_{p_1}^\alpha(x) + p_1(0)\omega^\alpha(x)]\varphi_j(x), \quad j = 1, 2, \quad (2)$$

где  $w_{p_1}^\alpha(x) = \int_0^x \frac{p_1(t) - p_1(0)}{t^\alpha} dt$ ,  $\omega^\alpha(x) = [(\alpha - 1)x^{\alpha-1}]^{-1}$ , а  $\varphi_j(x)$ ,  $j = 1, 2$  является решением системы интегральных уравнений Вольтерра второго рода

$$\varphi_j(x) + \sum_{k=1}^2 \int_0^x K_{jk}^\alpha(x, \xi) \varphi_k(\xi) d\xi = T^\alpha[f_j(x), p_1(x) c_{j1}, c_{j0}], \quad j = 1, 2,$$

с ядрами, имеющими слабую особенность и непрерывной правой частью [1] ( $c_{jk}$ ,  $j = 1, 2$ ,  $k = 0, 1$  – произвольные постоянные).

Приведенное утверждение имеет место и в случае  $p_1(0) < 0$  при определенных условиях на функции  $f_j(x)$ ,  $j = 1, 2$ .

Из (2) следует, что при  $x \rightarrow +0$  поведение решений системы (1) зависит от знака числа  $p_1(0)$  и они удовлетворяют характеристическим равенствам  $[\exp[-p_1(0)\omega^\alpha(x)]B_{\alpha, p_1}^k y_j(x)]|_{x=+0} = c_{jk}$ ,  $j = 1, 2$ ,  $k = 0, 1$ , где  $B_{\alpha, p_1}^1 y = y' + \frac{p_1(x)}{x^\alpha} y$ ,  $B_{\alpha, p_1}^0 y \equiv y$ , что позволяет найти в явном виде решение задачи типа Коши с условиями  $[\exp[-p_1(0)\omega^\alpha(x)]B_{\alpha, p_1}^k y_j(x)]|_{x=+0} = y_{jk}$ , где  $y_{jk}$ ,  $j = 1, 2$ ,  $k = 0, 1$  – заданные числа.

**Литература**

1. Олимов А.Г., Раджабов Н. Интегральные представления и задачи типа Коши для одной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка со сверх сингулярной точкой // Доклады АН Республики Таджикистан. 2017. Т. 60, № 7-8. С. 279–285.

**ЦЕНТРАЛЬНО СИММЕТРИЧНЫЕ УСТАНОВИВШИЕСЯ ДВИЖЕНИЯ  
САМОГРАВИТИРУЮЩЕГО ГАЗА**

**Панов А.В., Воронин С.М.**

ЧелГУ, Челябинск, Россия; gjd.y@ya.ru

Рассматривается система уравнений самогравитирующего газа [1]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v}) &= 0, \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \nabla \Phi + \frac{\nabla p}{\rho} &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla p + A(\rho, p) \nabla \cdot \vec{v} &= 0, \\ \Delta \Phi &= 4\pi G \rho, \end{aligned}$$

где  $\rho, p, \vec{v}$  – плотность, давление и скорость газа,  $\Phi$  – гравитационный потенциал,  $A(\rho, p) = \gamma p$  – уравнение состояния политропного газа.

Ранее, для исследуемой системы была найдена допускаемая группа Ли, выведена подмодель центрально симметричных движений [2].

В данной работе выделяются центрально симметричные установившиеся течения. Динамика таких движений описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} u \rho_r + \rho \left( \frac{2u}{r} + u_r \right) &= 0, u p_r + \gamma p \left( \frac{2u}{r} + u_r \right) = 0, \\ u u_r + \Phi_r + \frac{p_r}{\rho} &= 0, \Phi_{rr} + \frac{2\Phi_r}{r} = \rho. \end{aligned}$$

Здесь производные берутся по переменной  $r$  – длина радиус-вектора. Эта система частично интегрируется. А для последнего уравнения строится фазовый портрет.

**Литература**

1. Weinberg S. Cosmology. Oxford University press, 2008. 608 p.
2. Klebanov I., Panov A., Ivanov S., Maslova O. Group analysis of dynamics equations of self-gravitating polytropic gas // Commun Nonlinear Sci Numer Simulat. 2018. 59. P. 437–443.

## ХАОТИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ ФРАКТАЛЬНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

**Паровик Р.И.**

*ИКИР ДВО РАН, Паратунка, Россия; parovik@ikir.ru*

*КамГУ им. Витуса Беринга, Петропавловск-Камчатский, Россия;*

*rotanparovik@gmail.com*

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\partial_{0t}^\beta x(\eta) + \lambda \partial_{0t}^\gamma x(\eta) + \omega^\beta \sin(x(t)) = \delta \cos(\varphi t), x(0) = x_0, \dot{x}(0) = y_0, \quad (1)$$

где  $x(t) \in C^2(0, T)$  – функция смещения,  $t \in [0, T]$  – время, рассматриваемого процесса,  $T > 0$  – время моделирования,  $\lambda > 0$  – коэффициент трения,  $\omega$  – собственная частота,  $\delta$  и  $\varphi$  – амплитуда и частота внешнего воздействия, а операторы:

$$\begin{aligned}\partial_{0t}^\beta x(\eta) &= \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \int_0^t \frac{\ddot{x}(\eta) d\eta}{(t-\eta)^{\beta-1}}, \quad 1 < \beta < 2, \\ \partial_{0t}^\gamma x(\eta) &= \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t \frac{\dot{x}(\eta) d\eta}{(t-\eta)^\gamma}, \quad 0 < \gamma < 1,\end{aligned}$$

понимаются в смысле Герасимова – Капуто [1].

В работе с помощью максимальных показателей Ляпунова проведено исследование фрактального нелинейного осциллятора с целью идентификации его хаотических колебательных режимов. Были построены спектры показателей Ляпунова, которые содержат положительные значения, что указывает на существование хаотических режимов.

Дальнейшее исследование нелинейного фрактального осциллятора может быть связано с исследованием точек покоя системы (1) по аналогии с работой [2] или с построением сечений Пуанкаре [3].

### Литература

1. Паровик Р.И. Математическое моделирование нелинейных эредитарных осцилляторов. Петропавловск-Камчатский: КамГУ им. Витуса Беринга, 2017. 135 с.
2. Паровик Р.И. Об исследование устойчивости эредитарного осциллятора Ван дер Поля // Фундаментальные исследования. 2016. № 3-2. С. 283–287.
3. Parovik R.I. Mathematical modeling of nonlocal oscillatory Duffing system with fractal friction // Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences. 2015. Vol. 10, № 1. P. 16–21.

---

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта президента РФ № МК-1152.2018.1.

**ОБ ОЦЕНКЕ СВЕРХУ ЧИСЛА РЕШЕНИЙ СРАВНЕНИЯ ОТ  
НЕСКОЛЬКИХ НЕИЗВЕСТНЫХ ПО ПРОСТОМУ МОДУЛЮ**

**Пачев У.М.<sup>1</sup>, Алачев Б.М.<sup>2</sup>**

*КБГУ, Нальчик, Россия;* <sup>1</sup>*urusbi@rambler.ru* <sup>2</sup>*beslan.alachev@yandex.ru*

Вопрос о числе решений алгебраического сравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \equiv 0 \pmod{p},$$

где  $p$  – простое число, был решен Лагранжем, получившим, что такое сравнение имеет не более  $n$  решений.

Для изложения нашего основного результата об оценке сверху числа решений сравнения  $f(x_1, \dots, x_n) \equiv 0 \pmod{p}$  нам понадобится следующее обобщение указанного результата Лагранжа.

**Предложение.** Пусть  $f = f(x_1, \dots, x_n)$  – многочлен степени  $d$  из кольца  $F_p[x_1, \dots, x_n]$  над простым конечным полем. Тогда для числа решений  $N_n(f; p)$  сравнения  $f(x_1, \dots, x_n) \equiv 0 \pmod{p}$  справедлива оценка сверху

$$N_n(f; p) \leq d \cdot p^{n-1}.$$

Доказательство имеется в [2].

Опираясь на это вспомогательное предложение получаем следующий основной результат.

**Теорема.** Пусть  $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=0}^{\alpha_j} \varphi_k(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) x_j^k \in F_p[x_1, \dots, x_n]$ , где  $\varphi_k$  – многочлен от  $n - 1$  переменных, независящий от  $x_j$ . Тогда для числа  $N_n(f; p)$  решений сравнения  $f(x_1, \dots, x_n) \equiv 0 \pmod{p}$  справедлива оценка сверху

$$N_n(f; p) \leq (\deg f) \cdot p^{n-1} - \min_{1 \leq j \leq n} \left\{ \deg_{x_j} f \cdot N_{n-1}(\varphi_{\alpha_j}; p) \right\},$$

где  $\alpha_j = \deg_{x_j} f$  – степень многочлена  $f$  относительно  $x_j$ .

**Литература**

1. Степанов С.А. Сравнения. М.: Знание, 1975. 64 с.
2. Лидл Р., Нидеррайтер Г. Конечные поля: В 2-х т. Т. 1. Пер. с англ. М.: Мир, 1988. 430 с.

**ОБ ОСОВЫХ ФУНКЦИЯХ В ЗАДАЧЕ О ВЗВЕШЕННОМ ЧИСЛЕ ЦЕЛЫХ ТОЧЕК НА ГИПЕРБОЛОИДАХ**

**Пачев У.М.<sup>1</sup>, Дохов Р.А.<sup>2</sup>**

*КБГУ, Нальчик, Россия;* <sup>1</sup>*urusbi@rambler.ru;* <sup>2</sup>*dokhov@yandex.ru*

Мы рассматриваем задачу об асимптотике величины

$$J_h(n, s) = \sum_{p(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})=h} e^{-\frac{1}{n}\omega(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})},$$

при вещественном параметре  $n \rightarrow \infty$ , называемой взвешенным числом целых точек на  $4s$ -мерном гиперболоиде

$$p(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}) = \sum_{i=1}^s Q_i^{(1)}(x_i, y_i) - Q_i^{(2)}(z_i, t_i) = h,$$

$h$  – целое число;  $Q_i^{(1)}$  и  $Q_i^{(2)}$  – положительные бинарные квадратичные формы одного и того же определителя.

В [1] получена асимптотическая при  $n \rightarrow \infty$  формула, которую запишем так (см. [2])

$$J_h(n, s) = \pi^{2s} n^{2s-1} W(n) H(p) + O\left(n^{s-\frac{1}{4}+\varepsilon}\right),$$

где  $\varepsilon > 0$  – сколь угодно малое число;  $W(n)$  – особый интеграл и  $H(p)$  – особый ряд, выражения которых приводятся в [2].

**Теорема.**

- 1) Особый ряд  $H(p)$  в задаче для асимптотики  $J_h(n, s)$  абсолютно сходится и его сумма положительна.
- 2) Для особого интеграла  $W(n)$  справедлива асимптотическая эквивалентность

$$W(n) \sim \frac{2\Gamma(2s-1)}{\Gamma^2(s)} \frac{1}{\sqrt{|d|}} e^{-\frac{h}{n}},$$

где  $\Gamma$  – гамма-функция;  $d$  – определитель квадратичной формы  $p$ .

**Литература**

1. Дохов Р.А., Пачев У.М. О взвешенном числе целых точек на некоторых многомерных гиперболоидах // Чебышевский сборник. 2015. Т. XVI, вып. 3(55). С. 220–246.
2. Малышев А.В. О взвешенном количестве целых точек, лежащих на поверхности второго порядка // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1966. Т. 1.

**ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И АРИФМЕТИЧЕСКИХ СООТНОШЕНИЯХ  
ДЛЯ ГАУССОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ**

**Пачев У.М.<sup>1</sup>, Эсмурзиева С.Д.<sup>2</sup>**

*КБГУ, Нальчик, Россия; <sup>1</sup>urusbi@rambler.ru; <sup>2</sup>snejana.esmурзиеva@gmail.com*

Гауссовые коэффициенты, введённые Гауссом в [1] как вспомогательное средство для решения некоторых важных вопросов теории чисел имеют также дальнейшие применения в комбинаторике и теории конечных  $p$ -групп в [2].

Для натурального числа  $q$  и целых неотрицательных чисел  $n$  и  $k$  с условием  $0 \leq k \leq n$  гауссовый коэффициент  $\binom{n}{k}_q$  определяется равенством

$$\binom{n}{k}_q = \frac{1+q+q^2+\dots+q^{n-1}}{1} \cdot \frac{1+q+q^2+\dots+q^{n-2}}{1+q} \cdot \dots \cdot \frac{1+q+q^2+\dots+q^{n-k}}{1+q+q^2+\dots+q^{k-1}},$$

откуда при  $q=1$  получается биномиальный коэффициент, т.е.  $\binom{n}{k}_1 = \binom{n}{k}$ .

Если  $q$  есть степень простого числа, то гауссовый коэффициент  $\binom{n}{k}_q$  совпадает с числом  $k$ -мерных подпространств  $n$ -мерного векторного пространства над конечным полем из  $q$  элементов (см. [3]).

Учитывая этот факт, получаем следующий результат.

**Теорема 1.** Число  $k$ -мерных подпространств  $n$ -мерного векторного пространства над конечным полем из  $q$  элементов равно числу  $(n-k)$ -мерных его подпространств.

В следующей теореме устанавливаются арифметические свойства гауссовых коэффициентов.

**Теорема 2.** Если  $p$  – простое число и  $q$  – первообразный корень по модулю  $p$ , то для гауссового коэффициента имеют место следующие соотношения:

$$1) p \mid \binom{n}{k}_q \quad \text{при } 2 \leq k \leq p-1; \quad 2) \sum_{k=0}^p \binom{p}{k}_q \equiv 4 \pmod{p}.$$

**Литература**

1. Гаусс К.Ф. Арифметические исследования. М.: Издательство Академии наук СССР, 1959. 981 с.
2. Шокуев В.Н. Гауссовые коэффициенты. Нальчик: КБГУ, 1988. 98 с.
3. Айгнер М. Комбинаторная теория. М.: Мир, 1982. 558 с.

## О ТОЧКАХ СИЛЬНОЙ СУММИРУЕМОСТИ ИНТЕГРАЛОВ ФУРЬЕ

**Пачулиа Н.Л.**

*АГУ, Сухум, Абхазия; niaz-pachulia@rambler.ru*

Пусть  $L(R)$  – множество суммируемых на  $R = (-\infty, +\infty)$  функций,  $f \in L(R)$  и

$$\int_{R_+} (a(f, t) \cos xt + b(f, t) \sin xt) dt, \quad R_+ = [0, \infty) \quad (1)$$

ее интеграл Фурье, где  $a(f, t)$  и  $b(f, t)$  преобразования Фурье функции  $f$ . Частичный интеграл интеграла (1) имеет вид:

$$J_\sigma(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\sigma \int_R f(x+t) \cos tu dt du = \frac{1}{\pi} \int_R \frac{f(x+t)}{t} \sin \sigma t dt. \quad (2)$$

Отметим, что равенство (2) может выполняться и в случае, когда функция  $f(t)(1+|t|)^{-1} \in L(R)$  и  $f(t)$  убывая стремится к нулю при  $t \rightarrow \pm\infty$ , только внешний интеграл в точке  $u=0$  надо понимать в смысле его главного значения.

Обозначим через  $\Phi$  множество непрерывных и возрастающих функций  $\varphi$  заданных на  $[0, \infty)$  таких, что  $\varphi(0) = 0$ ;  $\varphi(u) > 0$  при  $u > 0$ ,  $\varphi(2u) \leq a\varphi(u), \forall u \in [0, \sigma]$ ,  $\ln \varphi(u) = 0(u)$ ,  $u \rightarrow \infty$ .

**Теорема.** Пусть функция  $f \in L_p(\Delta)$ ,  $p > 1$ ,  $\Delta = [a, b]$ , точка  $x \in (a, b)$  удовлетворяет условию

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h |f(x+t) - f(x)|^p dt = 0.$$

Тогда, если  $f(t)(1+|t|)^{-1} \in L(R)$  и  $f(t)$ , убывая, стремится к нулю при  $t \rightarrow \pm\infty$ , и  $\varphi \in \Phi$ , то выполняется равенство

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu} \int_{-\mu}^{2\mu} \varphi(|J_\sigma(f, x) - f(x)|) d\sigma = 0.$$

**ОСОБЕННОСТИ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ИТЕРАЦИОННЫХ  
АЛГОРИТМОВ ТОМОГРАФИЧЕСКОЙ РЕКОНСТРУКЦИИ С  
ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГЕТЕРОГЕННОЙ СИСТЕМЫ CPU-GPU**

**Петров Н.С.<sup>1</sup>, Линьков В.С.<sup>2</sup>, Хоружий Р.В.<sup>3</sup>, Иванов Я.В.<sup>4</sup>**

*НТЦ «Техноцентр» ЮФУ, Таганрог, Россия;* <sup>1</sup>*nazpetrov@gmail.com;*

<sup>2</sup>*fatal666@mail.ru;* <sup>3</sup>*snakern1@mail.ru;* <sup>4</sup>*xwester.n1@gmail.com;*

Большинство методов томографической реконструкции в коническом пучке, использующихся на практике, основаны на методе фильтрованных обратных проекций FBP, несмотря на то, что итерационные методы ART (с определенными модификациями) и SART могут реконструировать обычные конические данные с высокой точностью и для достаточно больших конических углов, а также имеют преимущества при решении множества других задач [1,2]. Это объясняется высокой вычислительной сложностью итерационных методов. Однако, стремительное развитие возможностей графических процессоров (GPU), которые можно применять и для неграфических вычислений в качестве аппаратных ускорителей, нивелируют этот недостаток [3]. Графический процессор выполняет наиболее ёмкие параллельные вычисления, а центральный процессор (CPU) подготавливает для первого данные, составляя вместе гетерогенную вычислительную систему (архитектура OpenCL или CUDA). В работе описывается взаимодействие компонентов гетерогенной системы при выполнении массивно-параллельных вычислений, описываются основные проблемы интенсивного обмена данными и способы их решения, приводятся результаты вычислений на гетерогенной системе итерационных алгоритмов реконструкции ART и SART.

**Литература**

1. Xu F. Accelerating popular tomographic reconstruction algorithms on commodity PC graphics hardware // IEEE Trans. Nucl. Sci. 2005. Vol. 52. P. 654–663.
2. Mueller K. Anti-aliased 3-D cone-beam reconstruction of low-contrast objects with algebraic methods // IEEE Trans. Med. Imag. 1999. Vol. 18. P. 519–537.
3. Золотарев С.А. Трехмерная итерационная томографическая реконструкция с использованием графических процессоров // Дефектоскопия. 2009. № 8. С. 82–94.

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках постановления Правительства Российской Федерации № 218.

## НЕЛИНЕЙНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ С ПАМЯТЬЮ

**Пименов В.Г.<sup>1</sup>, Солодушкин С.И., Горбова Т.В.**

УрФУ; ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия; <sup>1</sup>v.g.pimenov@urfu.ru

Исследуются на устойчивость и сходимость нелинейные разностные схемы с памятью

$$y_{j+1} = S_j(y_j) + \Delta \Phi_j(I(\{y_n\}_j)), \quad (1)$$

где  $y_j$  – элемент банахова пространства,  $\{y_n\}_j$  – дискретная предыстория к моменту  $t_j$ ,  $\Delta$  – шаг по времени,  $I$  – оператор интерполяции предыстории [1],  $S_j$  и  $\Phi_j$  – нелинейные операторы, которые являются липшицевыми с константами липшица  $L_S \leq 1$  и  $L_\Phi$  соответственно.

Результаты применяются для построения разностных схем решения нелинейного уравнения в частных производных с функциональным запаздыванием

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \omega(u)}{\partial x^2} + f(x, t, u_t(x, \cdot)), \quad (2)$$

где  $u_t(x, \cdot) = \{u(x, t+s), -\tau \leq s \leq 0\}$  – функция-предыстория,  $\omega(u)$  – нелинейная функция, например,  $\omega(u) = u^2$ . Такие задачи возникают в популяционных моделях [2].

Конструируется неявная разностная схема, которая на каждом времennom слое требует решения нелинейной системы уравнений для нахождения приближенного решения уравнения (2). Для этого мы используем итерационную технику, сводящую решение нелинейных уравнений к последовательности линейных систем с трехдиагональной матрицей, изложенную в [3]. Путем сведения к схеме (1) обоснована устойчивость и сходимость метода. Проведены численные эксперименты на тестовых и модельных задачах.

### Литература

1. Пименов В.Г. Разностные методы решения уравнений в частных производных с наследственностью. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2014. 132 с.
2. Srivastava V.K., Kumar S., Awasthi M.K., Singh B.K. Two dimensional time fractional-order biological population model and its analytical solution // Egypt J Basic Appl Sci. 2014. Vol. 1. P. 71–76.
3. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. 656 с.

---

Исследования поддержаны Программой повышения конкурентоспособности ведущих университетов РФ (соглашение 02.А03.21.0006 от 27 августа 2013 г.) .

**ВОПРОСЫ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО  
УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ВЫРОЖДЕННЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ  
УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА**

**Плеханова М.В.<sup>1</sup>, Байбулатова Г.Д.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> ЮУрГУ (НИУ), Челябинск, Россия; mariner79@mail.ru

<sup>1,2</sup> ЧелГУ, Челябинск, Россия; baybulatova\_g\_d@mail.ru

Пусть  $D_t^\alpha$  – дробная производная в смысле Герасимова – Капuto,  $P_n(\lambda)$ ,  $Q_{n_1}(\lambda)$  – многочлены с комплексными коэффициентами порядка  $n$  и  $n_1$  соответственно,  $n \geq n_1$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  – ограниченная область с гладкой границей  $\partial\Omega$ , пучок операторов  $A, B_1, B_2, \dots, B_r$  регулярно эллиптичен.

Рассмотрим задачу оптимального управления для системы

$$D_t^\alpha P_n(A)w = Q_{n_1}(A)w + g(x, P_n(A)w, \dots, D_t^s P_n(A)w) + Bu(x, t), \quad (1)$$

$$B_l A^k w(x, t) = 0, \quad k = \overline{0, n-1}, \quad l = \overline{1, r}, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [t_0, T], \quad (2)$$

$$P_n(A)w(x, t_0) = w_0(x), \dots, D_t^{m-1} P_n(A)w(x, t_0) = w_{m-1}(x), \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

$$u(x, t) \in U_\partial, \quad (x, t) \in \Omega \times [t_0, T], \quad (4)$$

$$J(w, u) \rightarrow \inf,$$

где  $w(x, t)$  – неизвестная вектор-функция,  $u(x, t)$  – функция управления,  $\alpha > 0$ ,  $m - 1 \leq \alpha < m$ ,  $s \in \{0, 1, \dots, m - 1\}$ ,  $U_\partial$  – множество допустимых управлений,  $J(w, u)$  – функционал качества. Пусть  $U$  – ба-нахово пространство, выберем  $j \in \mathbb{N}$  такое, что  $4rj > d$  и положим  $\mathcal{X} = \{v \in H^{2r(n+j)}(\Omega) : B_l A^k v(x) = 0, k = \overline{0, n-1}, l = \overline{1, r}, x \in \partial\Omega\}$ ,  $\mathcal{Y} = H^{2rj}(\Omega)$ ,  $Z = \{w \in W_q^s(t_0, T; \mathcal{X}) : D_t^\alpha P_n(A)w - Q_{n_1}(A)w - g(x, P_n(A)w, \dots, D_t^s P_n(A)w) \in W_q^s(t_0, T; H^{2rj}(\Omega))\}$ .

**Теорема.** Пусть  $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$ ,  $n \geq n_1$ ,  $\sigma(A)$  не содержит общих нулей многочленов  $P_n$  и  $Q_{n_1}$ ,  $s = [\frac{m-1}{2}]$ ,  $g \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^{s+1}; \mathbb{R})$ , все частные производные от  $g$  до порядка  $2rj + 1$  включительно ограничены на  $\Omega \times \mathbb{R}^{s+1}$ ,  $\mathcal{U} \cap W_q^s(t_0, T; H^{2rj}(\Omega)) \neq \emptyset$ ,  $\langle w_l, \varphi_k \rangle = 0$  при  $P_n(\lambda_k) = 0$ ,  $l = 0, \dots, m - 1$ ,  $U_\partial$  – непустое выпуклое замкнутое подмножество в  $W_q^s(t_0, T, U)$ ,  $Z$  непрерывно вложено в ба-нахово пространство  $\mathcal{Y}$ , которое вложено в  $W_q^s(t_0, T, \mathcal{X}_1)$ , функционал качества  $J$  выпуклый, ограниченный снизу на  $\mathcal{Y} \times W_q^s(t_0, T, U)$ , коэрцитивный на  $Z \times W_q^s(t_0, T, U)$ . Тогда существует решение  $(\hat{w}, \hat{u}) \in Z \times U_\partial$  задачи (1)–(4).

**О РЕАЛИЗАЦИИ ЦИФРОВОГО ТОМОСИНТЕЗА НА  
РЕНТГЕНОВСКОМ ТЕЛЕУПРАВЛЯЕМОМ СТОЛЕ-ШТАТИВЕ  
«КОСМОС-Д»**

**Пономаренко Р.Н.<sup>1</sup>, Табухов А.М.<sup>2</sup>, Коков З.А.<sup>3</sup>,  
Хамукова Л.А.<sup>4</sup>, Синютин С.А.<sup>5</sup>, Беляев А.О.<sup>6</sup>**

<sup>1,2</sup> ООО «Севкаврентген-Д», Майский, Россия;

<sup>1</sup> r-ponomarenko@skrz.ru, <sup>2</sup> a\_tabuhov@skrz.ru

<sup>3,4</sup> КБГУ, Нальчик, Россия; <sup>4</sup> zak@kbsu.ru

<sup>5,6</sup> ЮФУ, Таганрог, Россия; <sup>5</sup> ssin@mail.ru, <sup>6</sup> alexysob@gmail.com

Метод цифрового томосинтеза (ЦТ) позволяет получать послойные рентгенограммы без эффекта наложения проекционных данных и с лучшей детализацией, чем в рентгеновской компьютерной томографии. Но практическая реализация функции ЦТ возможна и оправдана при выполнении ряда технических требований к рентгеновскому аппарату [1–4].

В работе подробно исследована и показана возможность осуществления ЦТ на рентгеновском управляемом столе-штативе «Космос-Д» ООО «Севкаврентген-Д». Приведена схема рентгеновской установки с реализованной функцией томосинтеза, показаны результаты исследования кинематики такой схемы, ход лучей через объект при различных взаимных положениях источника и приемника излучения, возможные источники погрешностей и артефактов в реконструированном изображении.

**Литература**

1. Гуржисев С.Н., Новиков В.П., Соколов С.Н. Оценка возможностей на рентгенографическом аппарате «ПРОГРАФ-7000» // Медицинская техника. 2011. № 6(270). С. 34–40.
2. Гуржисев С.Н., Новиков В.П., Соколов С.Н. Томосинтез на флюорографическом цифровом аппарате «Флюоро-ПроГраф-РП» // Медицинская техника. 2013. № 5(281). С. 17–21.
3. Хермен Г. Восстановление изображений по проекциям. М.: Мир, 1983. 352 с.
4. Календер В. Компьютерная томография. М.: Техносфера, 2006. 344 с.

---

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ в рамках постановления Правительства Российской Федерации № 218.

**УРАВНЕНИЕ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ДРОБНОГО ПОРЯДКА  
С КОМПЛЕКСНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ**

**Псху А.В.**

*ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; pskhu@list.ru*

Рассмотрим уравнение

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + \lambda \frac{\partial^\sigma}{\partial y^\sigma} \right) u(x, y) = f(x, y), \quad (1)$$

где  $\sigma \in (0, 1)$ ,  $\lambda = e^{i\varphi}$ ,  $\varphi \in (-\pi, \pi]$ ; через  $\partial^\sigma / \partial y^\sigma$  обозначена дробная производная порядка  $\sigma$  по переменной  $y$  [1],  $u(x, y)$  и  $f(x, y)$  – искомая и заданная, соответственно, комплекснозначные функции.

Уравнение (1) исследовалось в работах [2] и [3] в случае вещественного  $\lambda$ , и в работе [4] в случае, когда  $\lambda = i$ .

В работе обсуждаются особенности постановок краевых задач для уравнения (1).

**Литература**

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
2. Clément Ph., Gripenberg G., Londen S-O. Schauder estimates for equations with fractional derivatives // Transactions of the American Mathematical Society. 2000. V. 352, № 5. P. 2239–2260.
3. Псху А.В. Решение краевой задачи для уравнения с частными производными дробного порядка // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 8. С. 1092–1099.
4. Псху А.В. Аналог формулы Шварца для системы Коши – Римана дробного порядка // Современные методы в теории краевых задач. Понtryгинские чтения - XIII. Сборник материалов, Воронеж: БГУ, 2002. С. 127.

---

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-01-00462.

**ЗАДАЧА ДАРБУ ДЛЯ ОВОБЩЕННОГО ТЕЛЕГРАФНОГО  
УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА**

**Пшибихова Р.А.**

*ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; pshibihova@mail.ru*

В области  $D = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1 - x\}$  рассмотрим уравнение

$$D_{0x}^\alpha D_{0y}^\beta u(x, y) + \lambda u(x, y) = f(x, y), \quad (1)$$

$\alpha, \beta \in (0, 1)$ ,  $\lambda = const$ ,

**Задача.** Найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x, 1 - x) = \tau(x), \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} D_{0x}^{\alpha-1} u(x, y) = \varphi(y), \quad 0 < y < b, \quad 0 < b < \infty, \quad (3)$$

где  $\varphi(y), \tau(x)$  – заданные непрерывные функции.

В работе [1] для уравнения (1) был исследован аналог задачи Гурса. В данной работе в явном виде получено общее представление решения задачи Дарбу и построен аналог функции Римана.

**Литература**

1. Пшибихова Р.А. Задача Гурса для обобщенного телеграфного уравнения дробного порядка // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50, № 6. С. 839–843.

**К РЕШЕНИЮ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ  
ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ**

**Рагимов А.Б.**

*ИСУ, Баку, Азербайджан; anar\_r@yahoo.com, anar.rahimov@fresnel.fr*

Рассматривается обратная задача для гиперболического уравнения:

$$v_{tt}(x, t) = a_0(x, t)v_{xx}(x, t) + a_1(x, t)v_x(x, t) + a_2(x, t)v_t(x, t) + \\ + a_3(x, t)v(x, t) + f(x, t) + \sum_{s=1}^L B_s(x, t)C_s(x), \quad (1)$$

где  $(x, t) \in \Omega = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t \leq T\}$ , при следующих условиях:

$$v(x, 0) = \varphi_0(x), \quad v_t(x, 0) = \varphi_1(x), \quad x \in [0, l], \quad (2)$$

$$v(0, t) = \psi_0(t), \quad v(l, t) = \psi_1(t), \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

$$v(x, \bar{t}_s) = \varphi_{2s}(x), \quad x \in [0, l], \quad \bar{t}_s \in (0, T], \quad s = 1, \dots, L. \quad (4)$$

Участвующие в постановке задачи параметры и функции удовлетворяют известным условиям существования и единственности для ее решения.

Задача (1)–(4) заключается в определении непрерывной  $L$ -мерной вектор-функции  $C(x) = (C_1(x), \dots, C_L(x))^*$  и соответствующего решения краевой задачи  $v(x, t)$  – дважды непрерывно дифференцируемой по  $x$  и  $t$ , удовлетворяющих условиям (1)–(4).

Предлагается численный метод решения задачи (1)–(4), основанный на использовании метода прямых. Задача сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с неизвестными параметрами, далее используя метод типа прогонки, задача приводится к линейной алгебраической системе относительно дискретизированных значений неизвестных параметров  $C(x)$  [1, 2].

**Литература**

1. Aida-zade K.R., Rahimov A.B. An approach to numerical solution of some inverse problems for parabolic equations // Journal of Inverse Problems in Science and Engineering. 2014. Vol. 22, № 1. P. 96–111.
2. Айда-заде К.Р., Рагимов А.Б. Решение классов коэффициентно-обратных задач и задач с нелокальными условиями для параболических уравнений // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51, № 1. С. 84–94.

**СМЕШАННАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ  
ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО  
ПОРЯДКА**

**Рахимова М.М.**

*ФерГУ, Фергана, Узбекистан; maftuna.raximova.1996@mail.ru*

Рассмотрим следующее интегро-дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} & y''(x) + \alpha(x)y'(x) + \beta(x)y(x) + \gamma(x) \int_0^x (x-t)^{-a} ch(x+t) y(t) dt + \\ & + \delta(x) \int_x^1 (t-x)^{-b} ch(x+t) y(t) dt = f(x), \quad 0 < x < 1, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $a, b - const \in (0, 1)$ ,  $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x), \delta(x), f(x)$  – заданные непрерывные функции.

**Задача.** Найти решение  $y(x) \in C^1[0, 1] \cap C^2(0, 1)$  уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям  $y(0) - y'(0) = k_1$ ,  $y(1) + y'(1) = k_2$ , где  $k_1, k_2 \in R$  – заданные числа.

Доказано, что справедлива следующая

**Теорема.** Если  $\alpha(x), \gamma(x), \delta(x) \in C^1[0, 1]$ ,  $\alpha(0) \geq 0$ ,  $\alpha(1) \leq 0$ ,  $\gamma(1) \leq 0$ ,  $\delta(0) \leq 0$ ,  $\gamma'(x) \geq 0$ ,  $\delta'(x) \leq 0$ ,  $\alpha'(x) - 2\beta(x) \geq 0$ ,  $x \in [0, 1]$ , то задача имеет единственное решение.

Доказательство единственности решения задачи опирается на следующую лемму: при выполнении условия теоремы, однородная задача имеет только тривиальное решение.

Эта лемма доказывается методом интегралов энергии.

Существование решения задачи доказано методом интегральных уравнений. При этом используется тот факт, что решение задачи  $z''(x) = g(x)$ ,  $z(0) = z'(0)$ ,  $z(1) = -z'(1)$  определяется формулой  $z(x) = \int_0^1 G(x, t) g(t) dt$ , где  $G(x, t)$  – функция Грина:  $G(x, t) = (1/3)(t-2)(x+1)$  при  $x < t$ ;  $G(x, t) = (1/3)(t+1)(x-2)$  при  $x > t$ ,  $z(x) = y(x) + (1/3)k_1(x-2) - (1/3)k_2(x+1)$ .

**Об оценке сумм значений характеристера Дирихле с простыми числами и их приложения**

**Рахмонов З.Х.**

*Институт математики, Душанбе, Таджикистан; zarullo-r@rambler.ru*

Доклад посвящен новой нетривиальной оценке коротких сумм значений неглавных характеров по модулю, являющимся составным числом от последовательности сдвинутых простых чисел и её арифметическим приложениям.

**Теорема.** Пусть  $D$  – достаточно большое натуральное число,  $\chi$  – неглавный характер по модулю  $D$ ,  $(l, D) = 1$ ,  $\varepsilon$  – положительное, сколь угодно малое постоянное число. Тогда при  $x \geq D^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$  имеем

$$\sum_{n \leq x} \Lambda(n) \chi(n - l) \ll x \exp\left(-0,6\sqrt{\ln D}\right),$$

где постоянная под знаком  $\ll$  зависит только от  $\varepsilon$ .

**Литература**

1. Рахмонов З.Х. Суммы значений неглавных характеров по последовательности сдвинутых простых чисел // Тр. МИАН. 2017. Т. 299. С. 1–27.
2. Рахмонов З.Х. Об оценке суммы значений неглавных характеров в последовательности сдвинутых простых чисел // ДАН РТ. 2017. Т. 60, № 9. С. 378–382.

## ВЛИЯНИЕ ИЗОТЕРМЫ МОНОСЛОЙНОЙ АДСОРБЦИИ НА ПОВЕРХНОСТНУЮ ЭНЕРГИЮ ТВЕРДОГО ТЕЛА

*Рехвиашвили С.Ш.<sup>1</sup>, Мурга З.В.<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>*ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; rsergo@mail.ru*

<sup>2</sup>*РУДН, Москва, Россия;*

В настоящей работе с использованием термодинамики Гиббса выведена формула для поверхностной энергии, которая изменяется в зависимости от монослойной адсорбции нейтральных атомов из парогазовой или жидкокой фазы:

$$\gamma = \gamma_0 - n_s k_B T \int_0^\theta \left( \frac{d \ln p}{d\theta} \right) \theta d\theta = \gamma_0 - n_s k_B T J(\theta), \quad (1)$$

где  $\gamma_0$  -- поверхностная энергия чистой поверхности,  $n_s$  -- максимально возможная поверхностная концентрация атомов адсорбата,  $\theta$  -- степень покрытия поверхности монослоем.

Изотермы адсорбции и функции  $J(\theta)$  в формуле (1).

| Изотерма адсорбции |  | Функция $J(\theta)$   |
|--------------------|--|---|
| 1                  | Ленгмюр-Фрейндлих<br>$p = \frac{1}{b} \left( \frac{\theta}{1-\theta} \right)^a$  | $J(\theta) = a \ln \left( \frac{1}{1-\theta} \right)$                             |
| 2                  | Фаулер-Гуггенгейм<br>$p = \frac{\theta}{b(1-\theta)} \exp(-a\theta)$   | $J(\theta) = \ln \left( \frac{1}{1-\theta} \right) - \frac{a\theta^2}{2}$         |
| 3                  | Двумерный идеальный газ<br>$p = \frac{\theta}{b}$  | $J(\theta) = \theta$  |
| 4                  | Двумерный идеальный газ<br>$p = \frac{\theta}{b(1-\theta)} \exp \left( \frac{\theta}{1-\theta} \right)$                            | $J(\theta) = \frac{\theta}{1-\theta}$   |
| 5                  | Двумерный газ Ван-дер-Ваальса<br>$p = \frac{\theta}{b(1-\theta)} \exp \left( \frac{\theta}{1-\theta} - a\theta \right)$            | $J(\theta) = \frac{\theta}{1-\theta} - \frac{a\theta^2}{2}$                       |
| 6                  | Двумерный газ Ван-дер-Ваальса<br>$p = \frac{\theta}{b(1-\theta)} \exp \left( \frac{\theta}{1-\theta} - a\theta^2 \right)$          | $J(\theta) = \frac{\theta}{1-\theta} - \frac{2a\theta^3}{3}$                      |
| 7                  | Двумерный газ Ван-дер-Ваальса<br>$p = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{\theta}{1-\theta}} \exp \left( \frac{1}{1-\theta} - a\theta \right)$ | $J(\theta) = \frac{\theta}{1-\theta} + \ln \sqrt{1-\theta} - \frac{a\theta^2}{2}$ |

**МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ МАГНИТОЖИДКОСТНЫХ  
МИКРОКАПЕЛЬ С УЧЕТОМ ЗАВИСИМОСТИ ПОВЕРХНОСТНОГО  
НАТЯЖЕНИЯ ОТ ПОЛЯ**

**Романенко М.Г.<sup>1</sup>, Шагрова Г.В.<sup>2</sup>, Дроздова В.И.<sup>3</sup>**

*СКФУ, Ставрополь, Россия;* <sup>1</sup>*romarina216@mail.ru;*

<sup>2</sup>*shagrova@rambler.ru;* <sup>3</sup>*victoria\_drozdova@rambler.ru;*

Работа посвящена исследованию возможности применения современной системы компьютерной математики MATLAB для исследования сложных нелинейных систем и процессов, в частности, вынужденных колебаний намагничивающихся микрокапель. Сложный характер зависимости концентрации магнитных частиц на границах раздела магнитожидкостных микрокапель с окружающей их магнитной жидкостью от величины и направления внешнего магнитного поля приводит к тому, что поверхностное натяжение, имеющее в общем случае тензорный характер, может увеличиваться с ростом напряженности магнитного поля [1].

В данной работе предложена математическая модель, описывающая вынужденные колебания магнитожидкостных микрокапель в переменном магнитном поле с учетом функциональной зависимости поверхностного натяжения от поля  $\sigma(H)$ , которая получена на основе экспериментальных результатов.

Математическая модель, полученная ранее в предположении об эллипсоидальности формы и о линейном характере намагничивания микрокапель [2], дополнена уравнениями, описывающими характер изменения  $\sigma(H)$  при различных значениях  $\sigma(0) < 10^{-3} H/m$ :

$$\sigma(H) = \begin{cases} 1,5e^{5,7H} \cdot 10^{-7} & \text{при } 10^{-7} \leq \sigma(0) < 10^{-6}, \\ 0,6e^{1,5H} \cdot 10^{-5} & \text{при } 10^{-5} \leq \sigma(0) < 10^{-4}, \\ 0,3e^{0,7H} \cdot 10^{-4} & \text{при } 10^{-4} \leq \sigma(0) < 10^{-3}. \end{cases}$$

Предложенная модель, реализованная в MATLAB и Simulink, позволяет успешно исследовать колебания магнитожидкостных микрокапель.

**Литература**

1. Afkhami S., Tyler A. J., Renardy Y. et al. Deformation of a hydrophobic ferrofluid droplet suspended in a viscous medium under uniform magnetic fields // J. Fluid Mech. 2010. Vol. 663. P. 358–384.
2. Shagrova G. V., Drozdova V. I., Romanenko M. G. Modeling oscillations of magnetizable microdrops // Journal of Nano- and Electronic Physics. 2015. Vol. 7, № 4.

**ИДЕНТИФИКАЦИЯ ОБЛАСТИ, ДИАПАЗОНОВ И ЗНАЧЕНИЙ  
КОМПЛЕКСНЫХ КОРНЕЙ ПОЛИНОМА С КОМПЛЕКСНЫМИ  
КОЭФФИЦИЕНТАМИ НА ОСНОВЕ УСТОЙЧИВОЙ АДРЕСНОЙ  
СОРТИРОВКИ**

**Ромм Я.Е.**

*ТИ имени А.П. Чехова (филиал) РГЭУ (РИНХ), Таганрог, Россия;  
romm@list.ru*

При вычислении корней полинома сохраняются проблемы определения области корней, их локализации, погрешности, вычислительной устойчивости, трудоемкости. Ниже предприняты попытки обойти трудности на основе алгоритмов устойчивой адресной сортировки с программной реализацией взаимно однозначного соответствия входных и выходных индексов. Пусть  $n$  элементов массива  $a = (a_1, a_2 \dots, a_n)$  после сортировки принимают вид  $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ ,  $c_i \leq c_{i+1}$ ,  $1 \leq i \leq n - 1$ . Индексы образуют перестановку  $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ . Массив  $e$  формируется программно,  $e_i$  располагаются в порядке элементов  $c_i$ , что позволяет определить все экстремальные элементы массива при произвольном радиусе локализации. Локально минимальный элемент идентифицируется по условию:  $\neg \exists \ell \in \overline{1, k-1} : |e_\ell - e_k| \leq \varepsilon_0$ ,  $2 \leq k \leq n$ . Условие применяется к массиву дискретизированных на равномерной сетке в декартовой плоскости значений квадрата модуля полинома, получаемого умножением на комплексно-сопряженное значение. При фиксировании мнимой части локализуется действительная часть корня, затем, при фиксировании действительной, локализуется мнимая часть. К локализованному комплексному корню выполняется спуск на сужаемой равномерной сетке. Сортировка сравнивает элементы, их индексы также лишь сравниваются, поэтому удается избежать накопления погрешности. По принципу минимума модуля идентифицируются все корни полинома и только они. Эксперимент проводился в среде Delphi на комплексной плоскости в квадрате со сторонами 4000 и более. На вход поступал полином 45-й степени с разбросом корней по всему диапазону. Некоторые мнимые или действительные части совпадали или были отделены на 0.0001. В результате идентифицировалась область корней, диапазоны действительной и мнимой части и все корни без потери значащих цифр в формате данных.

ВАРЬИРУЕМОЕ КУСОЧНО-ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЕ РЕШЕНИЕ  
УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

Ромм Я.Е.<sup>1</sup>, Джанунц Г.А.<sup>2</sup>

ТИ имени А.П. Чехова (филиал) РГЭУ (РИНХ), Таганрог, Россия;

<sup>1</sup>romm@list.ru, <sup>2</sup>janunts@inbox.ru

Для уравнений в частных производных актуально повышение точности приближенного решения задачи Коши. Предлагается кусочно-интерполяционное решение с погрешностью  $10^{-18}$ . При этом используется итерационное уточнение. В условиях существования и единственности рассматривается задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t), \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad (1)$$

в области  $G = \{(x, t) | x \in [a, b], t \in [c, d]\}$ , разбиваемой на подобласти

$$G_{ij} = \{(x, t) | x \in [x_i, x_{i+1}], t \in [t_j, t_{j+1}]\}, i = \overline{0, 2^{k_x} - 1}, j = \overline{0, 2^{k_t} - 1}. \quad (2)$$

Для  $\forall G_{ij}$  из (2) строится интерполяционный полином Ньютона от двух переменных  ${}^t P_{u2nkr}(x, t)$ , приближающий  $u(x, t)$ . Пусть в  $G$  существуют и непрерывны все смешанные производные решения  $u(x, t)$  до порядка  $2n + 1$  включительно. Тогда имеет место

**Лемма.** Кусочно-интерполяционное приближение решения задачи (1) в каждой подобласти (2) может быть выполнено с погрешностью

$$|R_{G_{ij}}(x, t)| \leq Ch^{2n+1}2^{-k(2n+1)}, \quad 2^k = 2^{k_x} \times 2^{k_t}, \quad C = \text{const}, \quad h < 1,$$

где  $R_{G_{ij}}(x, t)$  – остаточный член интерполяции.

Интерполяционный полином переводится в форму с числовыми коэффициентами. В каждой подобласти выполняются итерации

$${}^t P_{u2nkr}(x, t) = \int_{t_0}^t \left( f(x, t) - a(x, t) \frac{\partial {}^t P_{u2nk(r-1)}(x, t)}{\partial x} \right) dt + {}^t c_{uk2n},$$

где  ${}^t c_{uk2n}$  – остаточный член приближения. При  $r \rightarrow \infty$  погрешность  $\varepsilon_{kr} \leq \tilde{C}h^{2n+1}2^{-k(2n+2)}(c(b-a)2^{-k})^r 1/r! \rightarrow 0$ ,  $\tilde{C} = \text{const}$ ,  $c = \text{const}$ , отсюда следует равномерная сходимость итераций к решению в области (2). Практически, при вариации  $n, k, r$ ,  $\varepsilon_{kr} \leq 10^{-18}$ . Метод распространяется на случай нелинейного уравнения переноса.

---

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, код проекта 16-07-00100а.

**О НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ  
ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ  
ПРОИЗВОДНОЙ**

**Рузиев М.Х.**

*ИМ АН РУз, Ташкент, Узбекистан; mruziev@mail.ru*

Рассмотрим уравнение

$$\begin{cases} u_{xx} - D_{0y}^\alpha u = 0, \quad (y > 0, \ 0 < \alpha < 1), \\ -(-y)^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0, \quad (m > 0, \ y < 0), \end{cases} \quad (1)$$

где  $D_{0y}^\alpha$  – частная дробная производная Римана – Лиувилля порядка  $\alpha$  от функции  $u(x, y)$  [1], в области  $D$ , которая представляет собой объединение верхней полуплоскости  $D^+ = (x, y) : -\infty < x < +\infty, y > 0$  и области  $D^-$ , лежащей в нижней полуплоскости ( $y < 0$ ) и ограниченной характеристиками  $OC : x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0$ ,  $BC : x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1$ , и отрезком  $[0, 1]$  прямой  $y = 0$ .

**Задача.** Найти решение  $u(x, y)$  уравнения (1) в области  $D$ , удовлетворяющее условиям:  $u(x, y)$  стремится к нулю при  $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$ ,  $y^{1-\alpha}u|_{y=0} = 0$ ,  $-\infty < x \leq 0$ ,  $1 \leq x < \infty$ ,

$$\begin{aligned} & x^\beta D_{0x}^{1-\beta} u[\theta_0(x)] + \mu(x)(1-x)^\beta D_{x1}^{1-\beta} u[\theta_k(x)] = \\ & = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)} (D_{0x}^{1-2\beta} u(x, 0) - D_{x1}^{1-2\beta} u(x, 0)) + \delta(x), \quad x \in [0, 1], \end{aligned}$$

где  $\delta(x)$ ,  $\mu(x)$  – заданные функции;  $\theta_0(x) = \frac{x_0}{2} - i(\frac{m+2}{4}x_0)^{\frac{2}{m+2}}$  – точка пересечения характеристики  $OC$  с характеристикой исходящей из точки  $(x_0, 0)$ ,  $x_0 \in (0, 1)$ ;  $\theta_k(x) = \frac{x_0+k}{1+k} - i(\frac{(m+2)(1-x_0)}{2(1+k)})^{\frac{2}{m+2}}$  – точка пересечения характеристики  $BC$  с кривой  $x - \frac{2k}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = x_0$ ,  $k = const > 1$ ;  $\beta = \frac{m+2\beta_0}{2(m+2)}$ , а также условиям сопряжения  $\lim_{y \rightarrow +0} y^{1-\alpha} u(x, y) = \lim_{y \rightarrow -0} u(x, y)$ ,  $x \in [0, 1]$ ,  $\lim_{y \rightarrow +0} y^{1-\alpha} (y^{1-\alpha} u(x, y))_y = \lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{\beta_0} u_y$ ,  $x \in (0, 1)$ .

**Литература**

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

**НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ТИПА ЗАДАЧИ БИЦАДЗЕ –  
САМАРСКОГО ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО  
ТИПА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ**

**Рустамова Л.Р.**

*ИнгГУ, Магас, Россия; rustamoval@mail.ru*

В данной работе рассматривается нелокальная краевая задача типа задачи Бицадзе – Самарского для нагруженного уравнения смешанного типа с кратными характеристиками. Доказывается существование и единственность решения поставленной задачи.

Рассматривается уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xxx} - u_y + \lambda_1 u(x, 0), & y > 0, \\ \frac{\partial}{\partial y}(u_{xx} - u_{yy}) + \lambda_2 u(x, 0), & y < 0, \end{cases} \quad (1)$$

в области  $\Omega$  – односвязная смешанная область плоскости независимых переменных  $x$  и  $y$ , ограниченная отрезками  $AA_0$ ,  $A_0B_0$ ,  $B_0B$  прямых  $x = 0$ ,  $y = h$ ,  $x = l$  соответственно и характеристиками  $AC : x + y = 0$ ,  $BC : x - y = 1$ ,  $\Omega_+ = \Omega \cap (y > 0)$  и  $\Omega_- = \Omega \cap (y < 0)$ ;  $I$  ( $I_1$ ) – интервал  $(0, l)[(0, h)]$ .

**Задача 1.** Найти функцию  $u(x, y)$ , удовлетворяющую условиям:

- 1)  $u(x, y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^{3,1}_{x,y}(\Omega_+)$ ,  $\frac{\partial}{\partial y}(u_{xx} - u_{yy}) \in C(\Omega_-)$ ;
- 2)  $u(x, y)$  – решение уравнения (1) в областях  $\Omega_+ \cup \Omega_-$ ;
- 3)  $u(x, y)$  удовлетворяет краевым условиям

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u_x(0, y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (2)$$

$$\left[ \alpha_1(y) \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_1(y) u \right] \Big|_{x=x_0} = \left[ \alpha_2(y) \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_2(y) u \right] \Big|_{x=l} + \delta(y), \quad (3)$$

$$u_{AC} = \psi_1(x), \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{AC} = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{l}{2}, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{BC} = \psi_3(x), \quad \frac{l}{2} \leq x \leq l, \quad (4)$$

где  $n$  – внутренняя нормаль;  $\varphi_i(y) \in C^1(\bar{I}_1)$ ,  $i = 1, 2$ ;  $\psi_1(x) \in C^2[0, l/2]$ ,  $\psi_2(x) \in C^1[0, l/2]$ ,  $\psi_3(x) \in C^1[l/2, l]$ , причем  $\varphi_1(0) = \psi_1(0)$  и  $\psi_2'(\frac{l}{2}) = -\psi_3'(\frac{l}{2})$ ,  $u_x \in C(\Omega_+ \cup AA_0 \cup BB_0)$ ,  $\delta(y)$ ,  $\alpha_i(y)$ ,  $\beta_i(y) \in C[0, h]$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\alpha_i^2(y) + \beta_i^2(y) \neq 0$ .

**Литература**

1. Нагорный А.М. Краевые задачи для нагруженного уравнения смешанного типа третьего порядка. Дифференц. уравнения и их приложения к механике. Ташкент: ФАН, 1985. С. 55–66.
2. Мюнти Г. Интегральные уравнения. Т. 1. ГТТИ, 1934 330 с.

## ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА СО СТЕПЕННЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ

Сабитов К.Б.

СФ ИСИ; СФ БашГУб, Стерлитамак, Россия; *sabitov\_fmf@mail.ru*

Для уравнения смешанного типа, которое имеет важные приложения в газовой динамике, в теории околозвуковых течений жидкостей и газов

$$Lu \equiv (\operatorname{sign} y)|y|^n u_{xx} + u_{yy} = f(x), \quad n = \text{const} > 0,$$

в прямоугольной области  $D = \{(x, y) | 0 < x < l, -\alpha < y < \beta\}$ , где  $l, \alpha > 0$  и  $\beta$  – заданные положительные числа, ставится обратная задача: *найти функции  $u(x, y)$  и  $f(x)$ , удовлетворяющие условиям:  $u(x, t) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_+ \cup D_-)$ ;  $f(x) \in C(0, l) \cap L_2[0, l]$ ;  $Lu(x, y) \equiv f(x)$ ,  $(x, y) \in D_+ \cup D_-$ ;  $u(0, y) = u(l, y) = 0$ ,  $-\alpha \leq y \leq \beta$ ;  $u(x, \beta) = \varphi(x)$ ,  $u(x, -\alpha) = \psi(x)$ ,  $0 \leq x \leq l$ ;  $u_y(x, -\alpha) = g(x)$ ,  $0 \leq x \leq l$ , где  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  и  $g(x)$  – заданные достаточно гладкие функции, причем  $\varphi(0) = \lambda(l) = 0$ ,  $\psi(0) = \psi(l) = 0$ ,  $g(0) = g(l) = 0$ ,  $D_+ = D \cap \{y > 0\}$ ,  $D_- = D \cap \{y < 0\}$ .* Прямая задача, т. е. задача Дирихле, при  $f(x) \equiv 0$  ранее изучалась во многих работах (см. [1, 2] и приведенную там обширную библиографию).

В работе [3] методом спектрального анализа исследована данная обратная задача при  $n = 0$ , где были доказаны теоремы единственности и существования решения задачи.

В данной работе установлен критерий единственности решения обратной задачи при всех  $n > 0$ . Решение построено в явном виде как сумма ортогональных рядов с обоснованием сходимости в классах регулярных решений при некоторых достаточных условиях относительно граничных функций  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  и  $g(x)$ . Установлена устойчивость решения задачи от граничных функций.

### Литература

1. Нахушев А.М. Задачи со смешением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006. 287 с.
2. Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа в прямоугольной области // ДАН. 2007. Т. 413, № 1. С. 23–26.
3. Сабитов К.Б., Хаджи И.А. Краевая задача для уравнения Лаврентьева – Бицадзе с неизвестной правой частью // Изв. вузов. матем. 2011. № 5. С. 44–52.

---

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований-РФ, проект № 17-41-020516.

**ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КЕЛДЫША В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ**

**Сабитова Ю.К.**

*Стерлитамакский филиал БашГУ, Стерлитамак, Россия;*  
*sabitova@rambler.ru*

Для уравнения Келдыша

$$Lu = u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)|y|^n u_{yy} + a|y|^{n-1} u_y - b^2 u = 0$$

в прямоугольной области  $D = \{(x, y) | 0 < x < l, -\alpha < y < \beta\}$ ,  $l > 0$ ,  $\alpha, \beta > 0$ ,  $b \geq 0$ ,  $n < 1$ ,  $a$  – заданные действительные числа, решена следующая задача.

**Задача Дирихле.** Найти функцию  $u(x, y)$ , удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x, y) \in C^2(D_+ \cup D_-) \cap C^1(D) \cap C(\overline{D});$$

$$Lu(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in D_+ \cup D_-;$$

$$u(x, \beta) = f(x), \quad u(x, -\alpha) = g(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$u(0, y) = u(l, y) = 0, \quad -\alpha \leq y \leq \beta,$$

где  $D_- = D \cap \{y < 0\}$ ,  $D_+ = D \cap \{y > 0\}$ ,  $f(x)$  и  $g(x)$  – заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям  $f(l) = g(l) = f(0) = g(0) = 0$ .

В данной работе, следуя [1–3], на основании свойства полноты системы корневых функций одномерной спектральной задачи доказана теорема единственности решения задачи. Решение задачи построено в виде суммы ряда Фурье. Также доказана теорема существования решения задачи при определенных условиях на граничные функции и на параметры, входящие в уравнение.

**Литература**

1. Сабитова Ю.К. Нелокальные начально-граничные задачи для вырождающегося гиперболического уравнения // Изв. вузов. Математика. 2009. № 12. С. 49–58.
2. Сабитова Ю.К. Критерий единственности решения нелокальной задачи для вырождающегося уравнения смешанного типа в прямоугольной области // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46, № 8. С. 1205–1208.
3. Сабитова Ю.К. Краевая задача с нелокальным интегральным условием для уравнений смешанного типа с вырождением на переходной линии // Матем. заметки. 2015. Т. 98, № 3. С. 393–406.

---

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-31-00111.

**СТАТИСТИЧЕСКИЙ ТРЕХЯДЕРНЫЙ АНАЛИЗАТОР  
ЭМПИРИЧЕСКИХ ДАННЫХ ОГРАНИЧЕННОГО ОБЪЕМА ПРИ  
НАТУРНЫХ ИСПЫТАНИЯХ ОБЪЕКТОВ АВИАЦИОННОГО  
НАЗНАЧЕНИЯ**

**Самойленко А.П., Панычев А.И., Корниенко В.Т.<sup>1</sup>,  
Тройченков И.Н.**

ЮФУ, Таганрог, Россия; <sup>1</sup>[vtkornienko@sfedu.ru](mailto:vtkornienko@sfedu.ru)

Разработка и исследование методов статистической диагностики сложных технических объектов в нештатных режимах функционирования является актуальной как в научном, так и в прикладном плане. В качестве исходных данных использовался реальный статистический материал по отказам радиолокационных станций (РЛС) типа РПСН-\* и «Гроза». В качестве примера данные по отказам узлов каждого типа РЛС «Гроза», начиная с момента ввода их в эксплуатацию, имели объем статистических данных по отдельным узлам, варьирующийся от 4 до 10 значений, тогда как все известные методики практического расчета для получения оценок показателей безотказности по ансамблю статистически однородных блоков радиоэлектронного оборудования требуют объемов выборок не менее  $40 \div 50$  реализаций потоков отказов при условии, что все потоки по оси наработки ТН будут приведены к началу эксплуатации. В условиях критически малого объема информации целесообразно использовать специальные методы обработки малых выборок. Эти методы реализованы в программном анализаторе стохастических моделей для систем контроля и диагностики состояния технологических объектов. Изменение состояния сложного объекта в нештатных режимах отражается изменением значений выходных параметров с заданными гарантийными допусками рабочего  $[x_i^B, x_i^H]$  и аварийного  $[x_i^{B,ab}, x_i^{H,ab}]$  диапазонов [1], для которых фиксируются значения выбросов выходных параметров над допусковыми зонами, представленные статистическими массивами данных характеристик выбросов,  $X_i^{\text{вых}} = \{x_{i1}^{\text{вых}}, \dots, x_{in}^{\text{вых}}\}$ ,  $i = 1, N$ , где  $n$  – объем массивов выходных статистических данных ограниченного объема ( $n \leq 10$ ),  $N$  – число контролируемых показателей системы. В работе предложен мажоритарный способ реализации трехядерного анализатора эмпирических данных ограниченного объема, основанный на использовании метода вкладов.

**Литература**

1. Samoilenko A.P., Panychev A.I., Panychev S.A. Design principles of integrated criteria for the evaluation of effectiveness of control systems survivability avionics // Proceedings of 2016 IEEE East-West Design and Test Symposium, EWDTS 2016. 2016. P. 252–255.

**О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЧЕТНЫХ ЧИСЕЛ СУММОЙ ДВУХ ПРОСТЫХ  
ИЗ АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ**

**Сафаров А.Ш.**

*ТерГУ, Термез, Узбекистан; asafarov1977@mail.ru*

Пусть  $X$  – достаточно большие вещественные числа, а  $N$  – натуральное число с условием  $\sqrt{N} < X \leq N$ ;  $p, p_1, p_2$  – простые числа;  $D$  положительное целое с условием  $D \ll X \exp(-c_2 \sqrt{\ln X})$ ;  $\ll$  – символ Виноградова;  $M_D(X)$  – множество четных натуральных чисел  $n \leq X$ , которые возможно непредставимо в виде:

$$n = p_1 + p_2, \quad p_i \equiv l_i(\text{mod } D), \quad i = 1, 2; \quad (1)$$

$E_D = \text{card } M_D(X)$ ;  $R(n)$  – число представлений  $n$  в виде (1).

Изучение функции  $R(n)$  можно связать с изучением функции  $\Pi_D(X, D)$  – означающей число пар простых чисел  $p, p + 2n$  из интервала  $(0, X)$ , принадлежащих соответственно арифметическим прогрессиям  $Dt + l_1, Dt + l_2$  с условием  $1 < l_1, l_2 < D$ ,  $(l_1, D) = 1$ ,  $(l_2, D) = 1$ .

В настоящей работе результаты работы [2] обобщаются для простых чисел из арифметической прогрессии с разностью  $D \ll X \exp(-c_2 \sqrt{\ln X})$ . В частности, доказана справедливость оценки  $E_D(X) < \frac{1}{\varphi(D)} X^\delta$ , при достаточно малом  $\delta$  ( $0 < \delta < 1$ ).

В доказательстве используется схема доказательства теоремы 1 работы [1]. Согласно которому  $R(n)$  – представляется виде суммы двух интегралов:  $R(n) = R_1(n) + R_2(n)$ . Для оценки интеграла  $R_2(n)$  используется тождество Парсеваля и метод тригонометрических сумм И.М. Виноградова. Интеграл  $R_1(n)$  исследуются по схеме работы [2]. Доказано, что  $R_1(n) > |R_2(n)|$  для всех четных  $n \leq X$  за исключением не более чем  $E_D(X) < \frac{1}{\varphi(D)} X^\delta$  значений  $n$  из них.

**Литература**

1. Аллаков И. // Известия ВУЗов. Математика. 2000. № 8(459). С. 3–15.
2. Лаврик А.Ф. // Вестник ЛГУ. 1961. № 13. С. 11–27.

## ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НА ПЛОСКОСТИ

Сафаров Д.С.

КТГУ им. Носира Хусрава, Курган-тюбе, Таджикистан;  
safarov-5252@mail.ru

На комплексной плоскости  $C$  рассмотрим эллиптическую систему в комплексной форме [1]

$$w_{\bar{z}\bar{z}} = a(z)w_{\bar{z}} + b^2(z)w^2 + f(z). \quad (1)$$

В заметке показано, что если  $f(z) = -\alpha b^2(z)$  и  $g_2 = 12\alpha$  является инвариантом эллиптической функции Вейерштрасса  $\wp(u)$  [2], то решение уравнения (1) можно получить с помощью обобщенной эллиптической функции  $\wp(\varphi(z))$  [2], с периодами

$$\omega_1^4 = \frac{-5}{\alpha} \sum' (m_1 + im_2)^{-4}, \quad \omega_2 = \omega_1 i.$$

Здесь  $\omega(z)$  – однолистное дифференцируемое квазипериодическое решение уравнения Бельтрами [1]

$$\varphi_{\bar{z}} - q(z)\varphi_z = 0, \quad |q(z)| \leq q_0 < 1, \quad (2)$$

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(z + \omega_j) = \varphi(z) + \omega_j, \quad j = 1, 2,$$

где  $q(z)$  – двоякопериодическая функция с периодами  $\omega_1, \omega_2$  и дифференцируемая в одном из параллелограммов периодов  $\Omega$  решетки  $\Gamma = \{m_1\omega_1 + m_2\omega_2, \} m_1, m_2$  – целые числа, то есть из класса  $C_*^1$  [1].

**Теорема.** Пусть  $a(z), b(z) \in C_*^1$  и

$$\iint_{\Omega} b(z)d\Omega = 0, \quad b(z) = \exp T_{\zeta}a(z), \quad T_{\zeta}a(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} a(z)[\zeta(t-z) - \zeta(t)]d_t\Omega,$$

$$S_{\zeta}a(z) = (T_{\zeta}a(z))_z = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} a(z)\wp(t-z)d_t\Omega, \quad \zeta(z) = -\wp'(z)$$

и

$$|q(z)| = |b(z)||1 + \sqrt{6}S_{\zeta}b(z)|^{-1} \leq q_0 < 1, \quad q_0 - const.$$

Тогда уравнение (1) допускает решение вида

$$w(z) = \wp(z + \sqrt{6}T_{\zeta}b(z) + c),$$

где  $c$  – некоторая постоянная.

### Литература

1. Сафаров Д.С. Двоякопериодические обобщенные аналитические функции и их приложения. Душанбе: Дониш, 2012. 190 с.
2. Гурвиц А., Курант Р. Теория функции. М.: Наука, 1968. 648 с.

## ЧИСЛЕННЫЕ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ *p53*-ЗАВИСИМЫХ МИКРОРНК

Сенотрусова С.Д.<sup>1</sup>, Воропаева О.Ф.<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>ИВТ СО РАН, Новосибирск, Россия; vorop@ict.nsc.ru

<sup>1</sup>НГУ, Новосибирск, Россия; senotrusova.s@mail.ru

Белок *p53* играет одну из ключевых ролей в механизме контроля клеточных делений и клеточной смерти. Нарушения в этом механизме могут привести к развитию ряда серьезных заболеваний (болезнь Альцгеймера, Паркинсона, злокачественные опухоли). Для их диагностики изучаются биологические маркеры, которые могут быть использованы и в качестве мишени терапевтического воздействия. При раке чаще всего наблюдается подавление функции гена-супрессора опухолей *p53*, при этом установлено также, что белок *p53* регулирует целый класс микроРНК (miR). Поэтому *p53* и связанные с ним микроРНК считаются онкомаркерами.

В данной работе предложена иерархия математических моделей динамики сети *p53*-miR для класса miR с прямой положительной зависимостью от *p53*. При построении моделей принят подход, в рамках которого промежуточные стадии процесса передачи сигналов заменены функциями с запаздывающими аргументами, а взаимодействия белок/белок и белок/микроРНК аппроксимируются на основе соотношений типа Гольдбетера – Кошланда.

В ходе численных экспериментов для широкого диапазона значений параметров выполнен сопоставительный анализ решений, изучено влияние проведенных модификаций математических моделей. Исследованы особенности динамики уровня микроРНК при нормальном функционировании *p53* и при дерегуляции, которая может стать причиной онкологических или нейродегенеративных заболеваний. В рамках принятого подхода проведен численный анализ устойчивости диагностических свойств этой группы онкомаркеров, а также моделирование некоторых вариантов восстановления активности *p53* и микроРНК малыми молекулами. Выполнено сопоставление численных решений с известными экспериментальными данными для болезни Альцгеймера и разных форм рака, которое подтверждает адекватность разработанных математических моделей и результатов численных исследований.

### Литература

1. Воропаева О.Ф., Сенотрусова С.Д., Шокин Ю.И. Дерегуляция *p53*-зависимых микроРНК: результаты математического моделирования // Математическая биология и биоинформатика. 2017. Т. 12, № 1. С. 151–175.

**ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ СМЕШАННОГО  
ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ**

**Сидоров С.Н.**

*СФ ИСИ, СФ БашГУб, Стерлитамак, Россия; stsid@mail.ru*

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$Lu = F(x, t),$$

здесь

$$Lu = \begin{cases} t^n u_{xx} - u_t - bt^n u, \\ (-t)^m u_{xx} - u_{tt} - b(-t)^m u, \end{cases} \quad F(x, t) = \begin{cases} f_1(x)g_1(t), & t > 0, \\ f_2(x)g_2(t), & t < 0, \end{cases}$$

в прямоугольной области  $D = \{(x, t) | 0 < x < l, -\alpha < t < \beta\}$ , где  $n > 0$ ,  $m > 0$ ,  $l > 0$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  – заданные действительные числа,  $b$  – заданное любое действительное число, и следующую обратную задачу.

**Задача.** Найти функции  $u(x, t)$ ,  $g_1(t)$ ,  $g_2(t)$ , удовлетворяющие условиям:  $u(x, t) \in C(\overline{D}) \cap C_t^1(D) \cap C_x^1(\overline{D}) \cap C_x^2(D_+) \cap C^2(D_-)$ ;  $g_1(t) \in C[0, \beta]$ ;  $g_2(t) \in C[-\alpha, 0]$ ;  $Lu(x, t) \equiv F(x, t)$ ,  $(x, t) \in D_+ \cup D_-$ ;  $u(0, t) = u(l, t) = 0$ ,  $-\alpha \leq t \leq \beta$ ;  $u(x, -\alpha) = 0$ ,  $0 \leq x \leq l$ ;  $u(x_0, t) = h_1(t)$ ,  $0 < x_0 < l$ ,  $0 \leq t \leq \beta$ ;  $u(x_0, t) = h_2(t)$ ,  $-\alpha \leq t \leq 0$ , здесь  $f_i(x)$ ,  $h_i(t)$ ,  $i = 1, 2$  – заданные функции.

На основе формулы решения прямой начально-граничной задачи, изученной в работах [1, 2], решение обратной задачи эквивалентно редуцировано к разрешимости системы нагруженных интегральных уравнений. Используя теорию интегральных уравнений доказаны теоремы единственности и существования решения поставленной обратной задачи и указана явная формула решения.

**Литература**

1. Сабитов К.Б., Сидоров С.Н. Нелокальные задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа со степенным вырождением // Известия вузов. Математика. 2015. № 12. С. 55–65.
2. Сабитов К.Б., Сидоров С.Н. Начально-граничные задачи для неоднородных вырождающихся уравнений смешанного параболо-гиперболического типа // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2017. Т. 137. С. 26–60.

## **ПРИЛОЖЕНИЕ ДЛЯ РАСПОЗНАВАНИЯ РУССКИХ СЛОВ И СЛОВОСОЧЕТАНИЙ НА ОСНОВЕ MICROSOFT SAPI**

**Синицын Д.Р.<sup>1</sup>, Шагрова Г.В.<sup>2</sup>**

*СКФУ, Ставрополь, Россия; <sup>1</sup>pti4kin850@mail.ru; <sup>2</sup>hagrovagv@mail.ru*

Microsoft Speech API [1] предоставляет разработчикам приложений инструменты для создания речевых функций с поддержкой речи, использование которых позволяет получить качество распознавания 94,9% [2].

В работе исследована возможность интеграции компонентов программного продукта Microsoft Speech API в приложение для распознавания отдельных русских слов и словосочетаний в условиях воздействия шумов.

При создании приложения использованы три компонента: Runtime; Software Development Kit; Runtime Languages, которые представляют собой: библиотеки для распознавания речи; ресурсы разработки, инструменты и образцы для использования их в среде программирования Microsoft Visual Studio и файлы данных всех поддерживаемых в настоящее время языков для Microsoft Speech Platform соответственно. Все эти компоненты находятся в открытом для скачивания доступе на официальном сайте Microsoft [1]. В код программы приложения добавляются ссылки на скачанные и установленные библиотеки, с помощью которых происходит распознавание речи. Для работы программы необходимо загрузить компоненты и подключить микрофон, с помощью которого на вход программы поступает речевой сигнал для распознавания. Качество распознавания различных отдельных русских слов и словосочетаний, полученных в условиях зашумленности, составило 91,4%.

Приложения, разработанные на основе использования компонентов Microsoft Speech API, можно модифицировать, создавая полнофункциональные голосовые помощники, или же программы по управлению автоматизированными устройствами.

### **Литература**

1. Microsoft Speech API overview [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://github.com/MicrosoftDocs/azure-docs/blob/master/articles/cognitive-services/Speech/Home.md>.
2. Xiong W., Wu L., Alleva F., Droppo J., Huang X., Stolcke A. The microsoft 2017 conversational speech recognition system // Microsoft AI and Research Technical Report, August 2017, MSR-TR-2017-39.

## ДРОБНЫЕ СТЕПЕНИ ОПЕРАТОРА БЕССЕЛЯ

Ситник С.М.

БелГУ, Белгород, Россия; sitnik@bsu.edu.ru

Дробные степени оператора Бесселя

$$B_\nu u(x) = \frac{d^2}{dx^2} u(x) + \frac{\nu}{x} \frac{d}{dx} u(x)$$

обычно изучаются в образах классических интегральных преобразований: Ханкеля, Лапласа, Меллина и др. При этом они определяются неявно операционными формулами для этих интегральных преобразований. Явные интегральные формулы для дробных степеней оператора Бесселя и соответствующее дробное исчисление с приложениями сравнительно мало известны. В докладе излагаются результаты именно по такому естественному подходу, основанному на явных определениях дробных степеней операторов Бесселя в форме интегральных операторов со специальными функциями в ядрах, обобщающих классические операторы дробного интегродифференцирования Римана – Лиувилля. Соответствующие исследования были начаты в работах [1–3] и продолжены в работах [4–6] и ряде других. Рассматриваются также приложения данного класса дробных степеней в теории операторов преобразования [7], а также их приложения к дифференциальным уравнениям дробного порядка.

### Литература

1. McBride A.C. Fractional calculus and integral transforms of generalized functions. London: Pitman, 1979. 208 p.
2. Sprinkhuizen-Kuyper I.G. A fractional integral operator corresponding to negative powers of a certain second-order differential operator // J. Math. Analysis and Applications. 1979. Vol. 75. P. 674–702.
3. Dimovski I. Convolutional calculus. Dordrecht: Kluwer, 1990. 208 p.
4. Ситник С.М. Дробное интегродифференцирование для дифференциального оператора Бесселя // Материалы международного Российско-Казахского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики», Нальчик, 2004. С. 163–167.
5. Shishkina E.L., Sitnik S.M. On fractional powers of Bessel operators // Journal of Inequalities and Special Functions. 2017. Vol. 8, № 1. P. 49–67.
6. Ситник С.М., Шишкина Э.Л. О дробных степенях оператора Бесселя на полуоси // Сибирские электронные математические известия. 2018. Т. 15. С. 1–10.
7. Sitnik S.M. Transmutations and Applications: a Survey // arXiv:1012.3741. 2012. 141 p.

**ЧИСЛА МЕРСЕННА В ОСНОВАНИЯХ СИСТЕМЫ ОСТАТОЧНЫХ  
КЛАССОВ ПРИ ПЕРЕДАЧЕ ДАННЫХ В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ  
КАНАЛАХ СВЯЗИ**

**Смирнов А.А., Роженко О.Д., Бондарь В.В., Мирзоян М.В.,  
Даржания А.Д.**

*СКФУ, Ставрополь, Россия; shursun@mail.ru*

В настоящее время [1, 2] перспективной формой представления данных является система остаточных классов (СОК), которая позволяет обрабатывать данные оконечными устройствами в параллельном формате без переносов в разрядах чисел в отличие от позиционной системы счисления (ППС). Вместе с тем, существующие каналы связи (КС) в большей части являются последовательными [2]. Таким образом возникает задача передачи вычетов СОК параллельных данных по двоичным КС, где каждый вычет представляется в ПСС. При этом необходимо оценить характеристики такого КС. Было определено, что минимальные потери скорости передачи данных из-за не кратности двоичной системы значениям максимальных вычетов по взаимно-простым основаниям достигается если в качестве оснований СОК использовать числа Мерсенна. Были доказаны теоремы:

**Теорема.** *Максимальный вычет любого простого числа кодируется в двоичном коде с избыточностью как минимум в одну кодограмму.*

**Теорема.** *Скорость передачи информации в двоичных каналах связи остается неизменной как в ПСС, так и в СОК при использовании в качестве оснований чисел Мерсенна.*

**Теорема.** *Энтропия непозиционных систем счисления равна энтропии ПСС. Информация, содержащаяся в значениях позиций элементов, расходуется на возможность осуществления параллельных операций.*

Кроме того, в работе проведена оценка показателей качества такого КС, на основании полученного закона распределения вычетов [3]. Рассмотрена возможность адаптации существующих протоколов передачи данных в ПСС к данным в формате СОК.

**Литература**

1. Червяков Н.И. и др. Модулярная арифметика и ее приложения в информационных технологиях. М.: Физматлит, 2017. 402 с.
2. Смирнов А.А. Набродов П.А., Чемиров А.Ю. Принципы построения инфокоммуникационных систем для обработки и передачи параллельных данных. Ставрополь: Альфа Принт, 2009. 172 с.
3. Смирнов А.А., Роженко О.Д. и др. // Современные наукоемкие технологии. 2017. № 7. С. 78–82.

**ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА  
РЕГУЛЯРИЗАЦИИ А.Н. ТИХОНОВА К ВОССТАНОВЛЕНИЮ  
МИКРОСТРУКТУРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ГРАДОВЫХ ОБЛАКОВ**

**Созаева Л.Т.<sup>1</sup>, Кагермазов А.Х.<sup>2</sup>**

*ВГИ, Нальчик, Россия; <sup>1</sup>ljk\_62@mail.ru; <sup>2</sup>ka5408@mail.ru*

Данная работа посвящена проблеме восстановления микроструктурных характеристик градовых облаков по результатам радиолокационных измерений, которая сводится к решению уравнения Фредгольма 1-го рода. Эта задача относится к классу некорректных задач. А.Н. Тихонова разработал метод регуляризации, позволяющий решать широкий круг некорректно поставленных задач. Нами исследована возможность применения метода регуляризации к восстановлению микроструктурных характеристик градовых облаков. Для этого разработана математическая модель восстановления микроструктурных характеристик градовых облаков по результатам радиолокационных измерений. Модель построена в предположении, что облако однофазное и состоит из градин сферической формы. Разработан алгоритм и программа для восстановления микроструктурных характеристик облаков. При этом интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода сводится к системе алгебраических уравнений, решаемой с помощью метода регуляризации А.Н. Тихонова.

Для подтверждения эффективности метода регуляризации решены тестовые задачи. Вначале решалась задача при заданной левой части (функции распределения градовых частиц по размерам) системы уравнений, в результате которой находились радиолокационные отражаемости для различных длин волн (правая часть системы уравнений). Затем по модельным значениям отражаемостей восстанавливалась функция распределения. Расчеты проводились с возмущенной правой частью (что соответствует ошибкам измерений радиолокационной отражаемости) для оценки погрешности метода.

Анализ полученных результатов показал, что возмущения правой части уравнений вызывают небольшие погрешности восстановления функции распределения. При этом погрешность уменьшается с увеличением количества уравнений, т.е. количества одновременно измеренных значений отражаемости (правой части системы уравнений).

Таким образом, предложенный алгоритм можно применять для нахождения спектра градовых частиц по данным радиолокационных измерений отражаемости для однофазных облаков и при одновременном измерении отражаемости в одной и той же области облака хотя бы на трех длинах волн.

## ЗАДАЧА О ФОРМЕ ДВУМЕРНОЙ ВИСЯЩЕЙ КАПЛИ И СВОЙСТВА ЕЕ РЕШЕНИЯ

**Сокуров А.А.**

*ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; asokuroff@gmail.com*

Разработка и исследование математических моделей висящих капель представляет большой интерес как с фундаментальной, так и с прикладной точек зрения. В первую очередь, такой интерес обусловлен вопросами изучения процессов смачивания и определения термодинамических характеристик границы раздела фаз, например, коэффициента поверхностного натяжения. Во вторых, результаты таких исследований могут сыграть важную роль при создании новых видов материалов, обладающих супер гидрофобными или гидрофильными свойствами. Чаще всего в качестве математических моделей висящих капель выступают нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка или эквивалентные им системы нелинейных ОДУ первого порядка. В общем случае, ввиду нелинейности, найти точные решения начальных и начально-краевых задач для этих уравнений не представляется возможным. Для этих целей приходится привлекать численные методы и комплексы программ. По этой причине представляют интерес такие нетривиальные конфигурации висящих капель, для которых имелась бы возможность выписать решения в явном виде.

В докладе обсуждается задача о равновесной форме двумерной висящей капли [1–3], находящейся в поле силы тяжести. Капля свисает с участка горизонтальной плоскости, зажатого между двумя вертикальными параллельными пластинами, находящимися на очень близком расстоянии друг от друга. Точное решение искомой задачи выписано в терминах эллиптических интегралов первого и второго родов. По полученным формулам проведен анализ, который наглядно иллюстрирует возможные изменения формы и характеристик двумерной висящей капли в зависимости от входных параметров математической модели.

### Литература

1. Pitts E. The stability of pendent liquid drops. Part 1. Drops formed in a narrow gap // Journal of Fluid Mechanics. 1973. Vol. 59. P. 753–767.
2. Majumdar S.R., Michael D.H. The equilibrium and stability of two dimensional pendent drops // Proceedings of The Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 1976. Vol. 351. P. 89–115.
3. Thampi S., Govindarajan R. The possible equilibrium shapes of static pendant drops // The Journal of Chemical Physics. 2010. Vol. 133. P. 144707–144715.

**О ЗАДАЧЕ УПРАВЛЯЕМОСТИ И ПРЕСЛЕДОВАНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ  
ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМАХ С СУММАРНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ  
НА УПРАВЛЕНИЕ**

**Сотоволдиев А.И.**

*ТФИ, Ташкент, Узбекистан; akmal.sotvoldiyev@mail.ru*

Пусть линейная дискретная управляемая система

$$z(t+1) = Az(t) + Bu(t) \quad (1)$$

получается «уокрачиванием» линейной дискретной игры

$$z(t+1) = Az(t) + Bu(t) + Cv(t), \quad (2)$$

где  $z \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $v \in \mathbb{R}^l$ ,  $t$  – номер шага (всюду параметр  $t$  принимает целые неотрицательные значения),  $A$ ,  $B$ ,  $C$  – постоянные матрицы,  $u$  – управляющий параметр преследователя,  $v$  – управляющий параметр убегающего.

Последовательность,  $u(\cdot) : N \rightarrow \mathbb{R}^m$  ( $v(\cdot) : N \rightarrow \mathbb{R}^l$ ) удовлетворяющая условию

$$\|u(\cdot)\|_{l_p} = \left( \sum_{t=0}^{\infty} |u(t)|^p \right)^{1/p} \leq \rho, \quad \rho > 0,$$

$$\|v(\cdot)\|_{l_p} = \left( \sum_{t=0}^{\infty} |v(t)|^p \right)^{1/p} \leq \sigma, \quad \sigma \geq 0$$

называется управлением преследователя (соответственно убегающего), где  $N$  – множество неотрицательных целых чисел и  $p > 1$ .

Пусть  $S_h^d = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| \leq h\}$  – шар пространства  $\mathbb{R}^d$  с радиусом  $h$  и центром в начале координат.

**Теорема 1.** Пусть существует число  $\mu > 1$ , такое, что  $\mu\sigma CS_1^l \subset \rho BS_1^m$ .

Тогда следующие утверждения равносильны

- a) система (1) 0-управляема в целом;
- б) в игре (2) возможно завершить преследование из любой начальной точки пространства  $\mathbb{R}^n$ .

**Теорема 2.** Если  $C\mathbb{R}^l \not\subset B\mathbb{R}^m$ , то в игре (2) из всех начальных положений  $z_0 \neq 0$  возможны убегания.

---

Работа выполнена при поддержке фонда Республики Узбекистан фундаментальных исследований, проект ОТ-Ф-4-16. Разработка теории краевых задач для дифференциальных уравнений на графах и задачи оптимального управления.

**РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ С РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ  
В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ**

**Стрелецкая Е.М.<sup>1</sup>, Федоров В.Е.<sup>2</sup>**

ЧелГУ, Челябинск, Россия; <sup>1</sup>wwugazi@gmail.com; <sup>2</sup>kar@csu.ru

Пусть  $\mathfrak{X}$  – банахово пространство,  $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ , т.е. линейный и ограниченный оператор. Рассмотрим задачу Коши

$$x(0) = x_0 \quad (1)$$

для уравнения с распределенной производной [1]

$$\int_a^b D_t^\alpha x(t) d\alpha = Ax(t), \quad t \geq 0, \quad (2)$$

где  $D_t^\alpha x(t)$  – дробная производная Герасимова-Капуто [2],  $0 \leq a < b \leq 1$ . Решением задачи (1), (2) будем называть функцию  $x(t) \in C([0, \infty); \mathfrak{X})$ , такую что существует  $\int_a^b D_t^\alpha x(t) d\alpha \in C([0, \infty); \mathfrak{X})$  и выполняются равенства (1), (2).

Обозначим при некотором достаточно большом  $r_0 > 0$

$$\gamma = \bigcup_{k=1}^3 \gamma_k, \quad \gamma_1 = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r_0, \arg \mu \in (-\pi, \pi)\},$$
$$\gamma_2 = \{\mu \in \mathbb{C} : \arg \mu = \pi, |\mu| \in (-a, -\infty)\},$$
$$\gamma_3 = \{\mu \in \mathbb{C} : \arg \mu = -\pi, |\mu| \in (-\infty, -a)\}.$$

**Теорема.** Пусть  $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ ,  $x_0 \in \mathfrak{X}$ . Тогда функция

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{\lambda} \frac{\lambda^b - \lambda^a}{\ln \lambda} \left( \frac{\lambda^b - \lambda^a}{\ln \lambda} I - A \right)^{-1} e^{\lambda t} x_0 d\lambda$$

является решением задачи (1), (2).

**Литература**

1. Jiao Z., Chen Y.Q., Podlubny I. Distributed-order dynamic systems. Stability, Simulation, Applications and Perspectives. London: Springer, 2012. 90 p.
2. Podlubny I. Fractional differential equations. San Diego: Academic Press, 1999. 340 p.

---

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ, задание № 1.6462.2017/БЧ.

**ИССЛЕДОВАНИЕ УСЛОВИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ И  
ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТРАНСПОРТА  
МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ ВЗВЕСИ**

**Сухинов А.И.<sup>1</sup>, Сидорякина В.В.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>ДГТУ, Ростов-на-Дону, Россия; sukhinov@gmail.com

<sup>2</sup>ТИ имени А.П. Чехова (филиал) РГЭУ (РИНХ), Таганрог, Россия;  
cvv9@mail.ru

В работе исследуется непрерывная модель, описывающая трехмерные процессы, связанные с образованием, транспортом и гравитационным осаждением взвесей в водной среде [1–2]. В отличие от других моделей, в данной модели рассматривается распространение взвеси, состоящей из многих фракций, между которыми возможны взаимные переходы и трансформации типа распада-объединения частиц (взаимный переход между фракциями) и разложение частиц (постепенное исчезновение вследствие биохимических реакций). Эта модель также учитывает микротурбулентную диффузию и адвективный перенос взвесей, действие на частицы взвеси силы тяжести, наличие дна и свободной поверхности.

Модель транспорта взвеси позволяет проводить исследования гидрофизических процессов, прогнозировать динамику изменения донной поверхности на основе описания процессов подъема, переноса, осаждения, изменения концентрации взвеси. Модель совместно с моделью транспорта наносов предназначена для прогностических расчетов процессов заилиения дна, изменения профиля судоходных каналов и пр. Исследование единственности решения поставленной начально-краевой задачи базируется на анализе достаточных условий положительности квадратичного функционала, содержащего функцию решения начально-краевой задачи. По результатам исследования авторами определены достаточные условия, при которых решение соответствующей начально-краевой задачи модели транспорта взвеси, существует и единственno.

**Литература**

1. *Sukhinov A.A., Sukhinov A.I. 3D Model of diffusion-advection-aggregation suspensions in water basins and its parallel realization // Proc. of Parallel CFD 2004 Conference, Las Palmas de Gran Canaria, Spain, ELSEVIER, Amsterdam-Berlin-London-New York-Tokyo, 2005. P. 223–230.*
2. *Озмидов Р.В. Диффузия примеси в океане. Л.: Гидрометеоиздат, 1986. 280 с.*

**ЯВНЫЕ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО  
РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТРАНСПОРТА НАНОСОВ И  
МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ ВЗВЕСИ**

**Сухинов А.И.<sup>1</sup>, Сидорякина В.В.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*ДГТУ, Ростов-на-Дону, Россия; sukhinov@gmail.com*

<sup>2</sup>*ТИ имени А.П. Чехова (филиал) РГЭУ (РИНХ), Таганрог, Россия;  
cvv9@mail.ru*

Авторами исследуются параллельные алгоритмы 3D моделей транспорта и осаждения взвесей и 2D моделей транспорта наносов в прибрежных морских системах на основе регуляризованных явных разностных схем [1, 2]. Численное параллельное моделирование данных задач является средством оперативного прогнозирования распространения загрязнений и изменения рельефа дна, что существенно влияет на качество водной среды и безопасность судоходства. Данные задачи являются вычислительно трудоемкими и требуют супервычислительных производительностей, при прогнозе распространения вредных и токсичных взвесей. Построение дискретной модели базируется на идее введения разностной производной второго порядка по времени с малым множителем регуляризатором (регуляризация методом, предложенным Б.Н. Четверушкиным) [3]. Исследованы устойчивость и сходимость дискретных моделей, получены оценки допустимых шагов по времени. Предложенный авторами программный комплекс, реализующий предлагаемую модель, позволит многократно улучшить точность оперативного прогноза и повысить обоснованность принимаемых инженерных решений.

**Литература**

1. Сидорякина В.В., Сухинов А.И. Исследование корректности и численная реализация линеаризованной двумерной задачи транспорта наносов // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57, № 6. С. 985–1002.
2. Sukhinov A.A., Sukhinov A.I. Reconstruction of 2001 ecological disaster in the Azov sea on the basis of precise hydrophysics models // Proc. of Parallel CFD 2004 Conference, Las Palmas de Gran Canaria, Spain, ELSEVIER, Amsterdam-Berlin-London-New York-Tokyo, 2005. P. 231–238.
3. Четверушкин Б.Н. Пределы детализации и формулировка моделей уравнений сплошных сред // Математическое моделирование. 2012. Т. 24, № 11. С. 33–52.

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ И ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ  
В ОБЛАСТЯХ СЛОЖНОЙ СТРУКТУРЫ**

**Талыбов С.Г.**

*БГУ, Баку, Азербайджан; saxavat@yahoo.com*

В работе исследуются численные методы решения как начально-краевых задач, определенных в областях сложной структуры, так и соответствующих задач оптимального управления.

Предполагается, что область  $\Omega$ , в которой определена начально-краевая задача, задана системой нелинейных неравенств:

$$\Omega = x \in R^n : g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m,$$

и построение в ней регулярной сеточной аппроксимации или ее регулярная триангуляция практически невозможна. Но пользуясь известными методами решения нелинейных неравенств (отыскания точек допустимой области), возможно нахождение точек  $x^i \in \Omega, i = 1, \dots, N_x$ . Пользуясь этим множеством точек  $\Omega$ , предложены схемы конечномерной аппроксимации начально-краевой задачи.

На этом же множестве точек решается и дискретизированная задача оптимального управления с распределенными параметрами, относительно рассматриваемого процесса.

Изложенный подход иллюстрируется решением задачи нагрева двухмерной пластины сложной формы за счёт граничного управления.

## ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ КЛАСТЕРИЗАЦИИ

Тамбиеева Д.А.

СевКавГГТА, Черкесск, Россия; tamjannet@mail.ru

В настоящей работе предлагается один из подходов к решению проблемы кластеризации данных.

В качестве инструментария решения задачи кластеризации данных предлагается использовать математический аппарат теории графов.

Рассмотрим математическую модель исследуемой задачи.

Пусть имеется некоторое множество  $M$  объектов, перенумерованных числами от 1 до  $n$ . На базе множества  $M$  построим граф  $G = (V, E)$ , в котором  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  – множество вершин, каждая вершина  $v_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  взаимнооднозначно соответствует  $i$ -ому объекту множества  $M$ , а  $E = \{e_{ij}\}$ ,  $(i, j = 1, 2, \dots, n)$  – множество ребер, где ребро  $e_{ij} = (v_i, v_j) \in E$  соответствует связи между  $i$ -ым и  $j$ -ым объектами множества  $M$ . Все ребра являются взвешенными, согласно введенного критерия оценки взаимного расположения объектов относительно друг друга. Веса ребер обозначим соответственно через  $w(e_{ij})$ . Допустимое «расстояние» между вершинами (объектами) оцениваем величиной  $R$ . Требуется построить разбиение множество объектов на кластеры заданной размерности (конфигурации).

Для решения указанной задачи рассмотрим алгоритм *Cluster*.

1. На первом шаге алгоритма *Cluster* в качестве входной информации используем матричный эквивалент графа  $G$ , который условно обозначим через  $A = \{a_{ij}\}$ , где  $a_{ij} = w(e_{ij})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  и введем величину максимального расстояния между объектами в одном кластере  $R$ .

2. На следующем шаге строится матрица  $B(0)$  на базе матрицы  $A$  согласно следующего принципа: если  $R - a_{ij} < 0$ , то  $b_{ij}^0 := 0$ , иначе  $b_{ij}^0 := 1$ .

3. Далее строится матрица  $B(p)$  следующим образом: если  $b_{st}^{p-1} = 1$  и  $\sum_{j=1}^n b_{sj}^{p-1} b_{tj}^{p-1} > L - 2$ , то  $b_{st}^p := 1$ , иначе  $b_{st}^p := 0$ ,  $s, t = 1, \dots, n$ .

4. Если  $B(p) = B(p-1)$ , то выходим из цикла (достигли «неподвижной точки»), иначе возвращаемся к шагу 2.

На данном шаге остаются только «перспективные» ребра исходного графа  $G$  и становится очевидным, возможно ли построение допустимого решения задачи кластеризации для заданного значения величины максимального расстояния  $R$  между объектами внутри одного кластера.

## Конечные решения специальной системы эллиптического типа

**Тасмамбетов Ж.Н.<sup>1</sup>, Жахина Р.У.**

*АРГУ им. К. Жубанова, Актобе, Казахстан;*

<sup>1</sup>*tastam@rambler.ru;* <sup>2</sup>*riscul\_75@mail.ru*

Изучается система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

$$\begin{cases} P^{(0)} \cdot Z_{xx} + P^{(1)} \cdot Z_{yy} + P^{(2)} \cdot Z = 0, \\ Q^{(0)} \cdot Z_{yy} + Q^{(1)} \cdot Z_{xx} + Q^{(2)} \cdot Z = 0, \end{cases} \quad (1)$$

с многочленными коэффициентами двух переменных

$$\begin{aligned} P^{(i)}(x, y) &= a_{00}^{(i)} + a_{10}^{(i)} \cdot x + a_{01}^{(i)} \cdot y + \dots + a_{mn}^{(i)} \cdot x^m \cdot y^n, \\ Q^{(i)}(x, y) &= b_{00}^{(i)} + b_{10}^{(i)} \cdot x + b_{01}^{(i)} \cdot y + \dots + b_{mn}^{(i)} \cdot x^m \cdot y^n, \quad (i = 0, 1, 2). \end{aligned} \quad (2)$$

Доказана теорема.

**Теорема 1.** Для того, чтобы система дифференциальных уравнений в частных производных (1) с многочленными коэффициентами двух переменных (2) имела решения в конечной форме

$$\begin{aligned} Z &= x^\alpha y^\beta \cdot (A_{00} + A_{10}x + \dots + A_{qg} \cdot x^q y^g) = \\ &= x^q y^g \cdot \left( B_{00} + \frac{B_{10}}{x} + \frac{B_{01}}{y} + \dots + \frac{B_{qg}}{x^q y^g} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

необходимо и достаточно, чтобы в разности пар  $(\gamma, \delta) - (\alpha, \beta) = (q, g)$  числа  $q$  и  $g$  были целыми числами или нулями.

Условия совместности можно определить путем приведения к виду

$$\begin{aligned} Z_{xx} + P(x, y) \cdot Z &= 0, \\ Z_{yy} + Q(x, y) \cdot Z &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где коэффициенты  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  зависят от  $P^{(i)}(x, y)$  и  $Q^{(i)}(x, y)$  ( $i = 0, 1, 2$ ). Кроме этого, должно выполнится условие интегрируемости

$$P^{(0)} \cdot Q^{(0)} \neq P^{(1)} \cdot Q^{(1)}. \quad (5)$$

**Теорема 2.** Если выполняются условие (5), а также условие совместности, то система (1) имеет в точности четыре линейно-независимых решений  $Z_j(x, y)$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ), а общее решение зависит от четырех произвольных постоянных.

Приведенные теоремы подтверждаются примерами.

### Литература

1. Тасмамбетов Ж.Н. Решение систем эллиптического типа методом Фробениуса-Латышевой // Евразийский мат. журн. 2008. № 3. С. 96–107.

## РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНОЙ СПЕЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Тасмамбетов Ж.Н.<sup>1</sup>, Талипова М.Ж.<sup>2</sup>

АРГУ им. К. Жубанова, Актобе, Казахстан;

<sup>1</sup>tasmam@rambler.ru; <sup>2</sup>mira\_talipova@mail.ru

В теории обыкновенных дифференциальных уравнений хорошо разработана методика построения решений линейных неоднородных уравнений. Здесь основным методом построения решений является метод вариации произвольных постоянных.

В данной работе изучается возможности построения общего решения неоднородной системы наиболее близкой к обыкновенному случаю:

$$\begin{aligned} P^{(0)} \cdot Z_{xx} + P^{(1)} \cdot Z_x + P^{(2)} \cdot Z &= P^{(3)}, \\ Q^{(0)} \cdot Z_{yy} + Q^{(1)} \cdot Z_y + Q^{(2)} \cdot Z &= Q^{(3)}, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $P^{(i)} = P^{(i)}(x, y)$ ,  $Q^{(i)} = Q^{(i)}(x, y)$ , ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) многочлены двух переменных,  $Z = Z(x, y)$  – общая неизвестная, которая следует определить.

Для системы (1) метод вариации произвольных постоянных недостаточно разработана, поскольку недостаточно изучены критерий существования количества решений соответствующей однородной системы.

Условия совместности системы (1) установлены в [1] и для построения решения применяется метод неопределенных коэффициентов обобщенный М.Ж. Талиповой [2] на этот случай.

Как и в обыкновенном случае справедливо утверждение.

**Теорема.** *Общее решение неоднородной системы (1) есть сумма общего решения соответствующей однородной системы  $\bar{Z}(x, y)$  и частного решения  $\bar{Z}_1(x, y)$  неоднородной системы (1):*

$$Z(x, y) = \bar{Z}(x, y) + \bar{Z}_1(x, y).$$

Рассмотрены конкретные примеры.

### Литература

1. Тасмамбетов Ж.Н. Построение нормальных и нормально-регулярных решений специальных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Актобе: ИР Zhanadilova S.T., 2015. 463 с.
2. Талипова М.Ж. Построение нормальных решений неоднородных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Автореферат на соиск. уч. степени к.ф.-м.н., 2007. 20 с.

## О ЗАДАЧЕ ХИМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ В ТРЕХКОМПОНЕНТНЫХ СРЕДАХ

Тахиров А.Ж.

Институт математики, Ташкент, Узбекистан; inter\_uz@yahoo.com

Ряд прикладных многокомпонентных задач, связанных с системами квазилинейных параболических уравнений дают задачи о самовоспламенении, задачи о динамике численностей взаимодействующий популяций и задачи о реакции химически-активных веществ [1-3].

Процессы самоорганизации в различных физических, биологических и химических системах в единой точки зрения изучает создаваемая в последние годы теория диссипативных структур. Универсальность свойств диссипативных структур объясняется тем, что, несмотря на различную природу, они описываются одними и теми же нелинейными уравнениями.

В настоящей работе рассматривается математическая модель процесса химической реакции, протекающей в смеси из трех компонент

$$\begin{cases} u_t - d_1 \Delta u + c_1 \nabla u = -u^m v^n - u^k w^r, \\ u_t - d_2 \Delta v + c_2 \nabla v = -u^m v^n, \\ w_t - d_3 \Delta w + c_3 \nabla w = -u^k w^r, x \in \Omega, t > 0, \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0, x \in \partial \Omega, t > 0,$$

$$u(x, 0) = u_0(x), v(x, 0) = v_0(x), w(x, 0) = w_0(x), x \in \Omega,$$

где  $\Omega$  - ограниченная область в  $R^3$  с гладкой границей  $\partial \Omega$ ,  $\frac{\partial}{\partial \nu}$  - производная по внешней нормали к  $\partial \Omega$ .

Предполагается, что 1)  $d_i, c_i (i = 1, 2, 3)$  – положительные постоянные; 2)  $m, n, k, r \geq 1$  – постоянные; 3)  $u_0, v_0, w_0 \in L^\infty(\Omega)$ ,  $u_0, v_0, w_0 \geq 0$ ,  $u_0 \not\equiv 0$ ,  $v_0 \equiv 0$ ,  $w_0 \not\equiv 0$ .

При определенных ограничениях на параметры устанавливаются априорные оценки, исследуется разрешимость и асимптотические поведения решения.

### Литература

1. Pao C.V. Nonlinear parabolic and elliptic equations. New York: Plenum Press, 1992. 780 p.
2. Cantrell R.S., Cosner C. Spatial ecology via reaction-diffusion equations. England: Wiley, 2003. 411 p.
3. Jiang C. et al. Asymptotic behavior of global solutions for a chemical reaction model // J. Math. Anal. and Appl. 1998. № 220. P. 640–656.

## ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ РИККАТИ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И УЧЕТОМ СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИИ ПАМЯТИ

Твёрдый Д.А.<sup>1</sup>, Паровик Р.И. <sup>2</sup>

<sup>1</sup> ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; [dimsolid95@gmail.com](mailto:dimsolid95@gmail.com)

<sup>2</sup> КамГУ им. Витуса Беринга, Петропавловск-Камчатский, Россия;  
[romanparovik@gmail.com](mailto:romanparovik@gmail.com)

В работе исследована задача Коши для уравнения Риккати с переменными коэффициентами и производной дробного переменного порядка:

$$b(t)\partial_{0t}^{\alpha(t)}u(\tau) + a(t)u^2(t) - c(t) = 0, \quad u(0) = u_0, \quad 0 < \alpha(t) < 1, \quad (1)$$

где  $\partial_{0t}^{\alpha(t)}u(\tau) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha(t))} \int_0^t \frac{\dot{u}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha(t)}} d\tau$  – дробная производная переменного порядка  $\alpha(t)$ ;  $u(t) \in C^2[0, t]$  – функция решения;  $\dot{u}(t) = du/dt$  – производная первого порядка;  $\Gamma(\cdot)$  – гамма-функция;  $t \in [0, T]$  – время;  $T > 0$  – время моделирования;  $u_0$  – заданная константа.

Задача Коши (1) является более общей, чем аналогичные задачи, рассмотренные в работах [1,2] и решается с помощью численных методов.

В данной работе задача Коши (1), с помощью аппроксимации дробной производной, по аналогии с работой [3], была сведена к дискретному аналогу, который был реализован в компьютерной среде Maple. С помощью этой программы были построены различные расчетные кривые в зависимости от функции  $\alpha(t)$ .

### Литература

1. Sweilam N.H., Khader M.M., Mahdy A.M.S. Numerical studies for solving fractional Riccati differential equation // Applications and Applied Mathematics. 2012. Vol. 7, № 2. P. 595–608.
2. Твердый Д.А., Паровик Р.И. Программа численного расчета задачи Коши для уравнения Риккати с производной дробного переменного порядка // Фундаментальные исследования. 2017. № 8-1. С. 98–103.
3. Parovik R.I. Finite-Difference scheme for fractal oscillator with a variable fractional order // Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences. 2015. Vol. 11, № 2. P. 85–92.

---

Работа выполнена в рамках темы НИР КамГУ имени Витуса Беринга «Приложение дробного исчисления в теории колебательных процессов» № ААА-А17-117031050058-9 и при финансовой поддержке гранта президента Российской Федерации № МК-1152.2018.1.

**ДВУХУРОВНЕВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ  
ЗЕМЛЕПОЛЬЗОВАНИЯ**

**Темирова Л.Г.**

*СевКавГГТА, Черкесск, Россия; blg1961@rambler.ru*

Предлагается двухуровневый подход к моделированию задачи землепользования. Основу нижнего уровня составляет прогнозная модель на базе нечетких множеств и клеточных автоматов [1]. Получаемое прогнозное значение имеет вид лингвистического нечеткого множества  $\{(H; \mu(H)), (C; \mu(C)), (B; \mu(B))\}$ . На верхнем уровне прогнозные урожайности есть исходные данные для задачи землепользования, как векторной задачи покрытия графа звездами.

**Литература**

1. *Перепелица В.А., Тебуева Ф.Б., Темирова Л.Г.* Структурирование данных методами нелинейной динамики для двухуровневого моделирования. Ставрополь: Ставропольское книжное издательство, 2006. 282 с.

**ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РАЗЛОЖЕНИЯ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ  
ФУНКЦИЙ В ОБОБЩЕННЫЙ РЯД ТЕЙЛORA И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ**

**Трофимов С.П., Иванов А.В.**

УрФУ, Екатеринбург, Россия; [tsp61@mail.ru](mailto:tsp61@mail.ru)

Работа посвящена разработке численного метода разложения в обобщенный ряд Тейлора бесконечно малых функций (БМФ)  $f(x)$  вида

$$f(x) = \sum_{i=1}^n C_i x^{p_i} + o(x^{p_n}),$$

где  $C_i \in \mathbb{R}^+$ ,  $p_i \in \mathbb{R}^+$  — параметры мономов, подлежащие определению.

Необходимость использования обобщенных рядов Тейлора возникает при анализе разрыва двойственности в задачах выпуклой оптимизации [1], определении качества ограничений многомерных множеств [2], разложении БМФ в ряд Пюизё.

Для нахождения параметров  $\{C_i, p_i\}$   $i$ -го монома применяется алгоритм распознавания коэффициентов логарифмической асимптоты БМФ  $|f(x) - \sum_{j=1}^{i-1} C_j x^{p_j}|$ .

**Утверждение.** Пусть  $f(x)$  – БМФ, допускающая представление в виде обобщенного ряда Тейлора. При этом мономы этого ряда имеют положительные коэффициенты пропорциональности и вещественные заранее неизвестные положительные показатели. Тогда после  $n$  итераций определения первых  $n$  мономов БМФ  $f(x)$  выполняется следующее неравенство

$$\lg |f(x) - \sum_{i=1}^n \tilde{C}_i x^{\tilde{p}_i}| \geq \max\{\hat{C}_i + \tilde{p}_i \lg x\},$$

где  $\tilde{C}_i, \tilde{p}_i$  – численные оценки параметров  $i$ -го монома,  $\hat{C}_i$  – десятичный логарифм коэффициента пропорциональности БМФ  $|f(x) - \sum_{j=1}^{i-1} \tilde{C}_j x^{\tilde{p}_j}|$ .

Приводятся результаты численных экспериментов.

**Литература**

1. Trofimov S., Ivanov A., Fettser Y. An infinitesimal approach for analysis of convex optimization problem with duality gap // CEUR Workshop Proc. 2017. P. 570–577.
2. Трофимов С.П., Иванов А.В. Разрыв двойственности в полубесконечном линейном программировании и анализ качества ограничений геометрических объектов // Вестник ТГУ. Управление, вычислительная техника и информатика. 2017. № 38. С. 37–46.

## Об одной нелокальной задаче со свободной границей для квазилинейного параболического уравнения

Тураев Р.Н.

ИМ АН РУз, Ташкент, Узбекистан; rasul.turaev@mail.ru

Квазилинейные параболические уравнения второго порядка лежат в основе математических моделей самых разнообразных явлений и процессов в физике, механике и многих других областях знаний [1].

В настоящей работе изучается задача со свободной границей типа Флорина для квазилинейного параболического уравнения.

**Задача.** Требуется найти на некотором отрезке  $0 \leq t \leq T$  непрерывно дифференцируемую функцию  $s(t)$ , такую, что  $s(0) = s_0 > 0$ ,  $0 < \dot{s}(t) \leq N$ ,  $s(t)$  удовлетворяет условию Гельдера, а функция  $u(t, x)$  в области  $D = \{(t, x) : 0 < t \leq T, 0 < x < s(t)\}$  удовлетворяет уравнению

$$u_t(t, x) = a(u)u_{xx}(t, x) + b(t, x, u_x), \quad (t, x) \in D$$

и следующим начальным и граничным условиям

$$\begin{aligned} u(0, x) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq s_0, \\ u_x(t, 0) &= f(t, u(t, 0)), \quad 0 \leq t \leq T, \\ \alpha u(t, 0) &= u(t, s(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \\ u_x(t, s(t)) &= \psi(t), \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Исследование проводится по следующей схеме. Сначала задача сводится к задаче типа задачи Стефана и доказывается их эквивалентность. Далее, устанавливаются априорные оценки для свободной границы, решений и их производных в норме Гельдера. На основе установленных оценок исследуется поведение свободной границы в рассматриваемом промежутке времени, доказывается единственность решения первоначальной задачи. В итоге доказывается существование решения полученной и первоначальной задачи при помощи метода неподвижной точки Шаудера [2, 3].

### Литература

1. Тахиров Ж.О. Неклассические нелинейные задачи и задачи со свободной границей. Ташкент: ФАН, 2014. 240 с.
2. Тахиров Ж.О., Тураев Р.Н. Нелокальная задача Стефана для квазилинейного параболического уравнения // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2012. Т. 28, № 3. С. 8–16.
3. Тураев Р.Н. Неклассическая задача Флорина для квазилинейного параболического уравнения // Узбекский математический журнал. 2017. № 3. С. 8–16.

---

Работа выполнена при поддержке фонда фундаментальных исследований, проект № ОТ-Ф-4-85.

**НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ФЛОРИНА ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО  
ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛИНЕЙНЫМ ГРАНИЧНЫМ  
УСЛОВИЕМ**

**Тураев Р.Н.<sup>1</sup>, Тураев К.Н.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> ИМАН РУз, Ташкент, Узбекистан; rasul.turaev@mail.ru

<sup>2</sup> Термезский филиал ТГТУ им. И. Каримова, Термез, Узбекистан;  
k\_.turaev@mail.ru

Требования современной науки и техники приводят к необходимости рассматривать нагруженные параболические уравнения [1]. Задачи со свободной границей для нагруженных параболических уравнений рассмотрены в работах [2, 3]. В настоящей заметке рассматривается нелокальная задача Флорина для нагруженного параболического уравнения с нелинейным граничным условием.

Требуется найти пару функций  $s(t), u(t, x)$ , такую что непрерывно дифференцируемая функция  $s(t)$  определена на отрезке  $0 < t \leq T$ ,  $s(0) = s_0 > 0$ ,  $0 < \dot{s}(t) \leq N$ , а функция  $u(t, x)$  в области  $D = \{(t, x) : 0 < t \leq T, 0 < x < s(t)\}$  удовлетворяет уравнению

$$u_t(t, x) - u_{xx}(t, x) = F(u(t, 0)), \quad (t, x) \in D$$

и следующим начальным и граничным условиям

$$\begin{aligned} u(0, x) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq s_0, \\ u_x(t, 0) &= G(t, u(t, 0)), \quad 0 \leq t \leq T, \\ \alpha u(t, 0) &= u(t, s(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \\ u_x(t, s(t)) &= \psi(t), \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

**Литература**

1. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение. Москва: Наука, 2012. 232 с.
2. Briozzo A.C., Tarzia D.A. A one-phase Stefan problem for a non-classical heat equation with a heat flux condition on the fixed face // App. Math. and Com. 2016. Vol. 182, № 5. P. 809–818.
3. Briozzo A.C., Tarzia D.A. Existence and uniqueness for one-phase Stefan problems of non-classical heat equations with temperature boundary condition at a fixed face // El. Jour. Differ. Eq. 2016. Vol. 206, № 21. P. 1–16.

---

Работа выполнена при поддержке фундаментальных исследований, проект № ОТ-Ф-4 - 85.

**ПОСТРОЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ОДНОГО  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ НЕЙТРАЛЬНОГО  
ТИПА**

**Тураев X., Курбанназаров А.И.**

TerGU, Термез, Узбекистан; mirsaburov@mail.ru

Рассмотрим уравнение

$$y'(x+p) - \lambda y(x+p) = y'(x) - \lambda y(x), \quad (1)$$

где  $x > 0$ ,  $\lambda$  – некоторый параметр.

Решая уравнение (1) получим общее решение вида

$$y(x) = \omega(x) + \frac{C}{e^{\lambda p} - 1} e^{\lambda x},$$

где  $\omega(x)$  – произвольная дифференцируемая, периода  $p$ , функция;  $C$  – произвольная постоянная.

В работе ставится так называемая основная начальная задача (задача А.Д. Мышкиса) для уравнения (1): *найти решение удовлетворяющее уравнению (1) и начальным условиям*

$$y(x) = \varphi(x) \quad \text{при } -p < x \leq 0; \quad y(0) = \varphi(-0).$$

Доказано, что поставленная задача имеет решение вида

$$y(x) = \varphi(x - np) + \frac{\varphi(0) - \varphi(-p)}{1 - e^{-n\lambda p}} \left(1 - e^{-n\lambda p}\right) e^{\lambda x},$$

$$\text{при } (n-1)p < x \leq np.$$

**Литература**

1. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.
2. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972.

**ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С ПОМОЩЬЮ  $\varepsilon$   
ПОЗИЦИОННОЙ СТРАТЕГИИ**

**Тухтасинов М.<sup>1</sup>, Мустапокулов Х.Я.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>НУУЗ, Ташкент, Узбекистан; tumin51@mail.ru

<sup>2</sup>ТГТУ\*, Ташкент, Узбекистан; m\_hamdam@mail.ru

Рассматривается линейная дифференциальная игра преследования, описываемая уравнением

$$\dot{z} = Cz - u + v, \quad z \in \mathbb{R}^n,$$

где  $z$  – фазовый вектор;  $u \in P, v \in Q$  – параметры управления;  $C$  – постоянная матрица порядка  $n \times n$ ;  $P, Q$  – непустые компактные подмножества пространства  $\mathbb{R}^n$ , терминалным является непустое подмножество  $M$  пространства  $\mathbb{R}^n$  [1, 2].

**Определение.** Через  $\Gamma(M)$  обозначим всю совокупность суммируемых многозначных отображений  $M(\cdot) : [0, \tau] \rightarrow K(\mathbb{R}^n)$ , для которых имеет место включение  $\int_0^\tau M(s) ds \subset M$ . Пусть

$$e^{\tau C} z^0 \in \bigcup_{M(\cdot) \in \Gamma(M)} \int_0^\tau \left( \left( M(s) + e^{(\tau-s)C} P \right) \rightharpoonup e^{(\tau-s)C} Q \right) ds, \quad (1)$$

**Условие А.** Для произвольного  $t \geq 0$  имеет место включение

$$\int_a^b e^{-sC} P ds \subset \int_a^b e^{-(t+s)C} P ds.$$

**Теорема.** Пусть для данного начального положения  $z^0$  при некотором конечном времени  $\tau$  выполнены включение (1) и условие А. Тогда для любого положительного числа  $\alpha$  существует  $\varepsilon$  – позиционная стратегия  $U(z^0, t, z)$  преследующего игрока, что при любом управлении убегающего игрока  $v(\cdot)$ , решение  $z(t)$ ,  $0 \leq t \leq \tau$  задачи Коши

$$\dot{z} = Cz - U(z^0, t, z) + v(t), \quad z(0) = z^0,$$

удовлетворяет включению  $z(\tau) \in M_\alpha$ , где через  $M_\alpha$  – обозначена  $\alpha$  окрестность множества  $M$ .

**Литература**

1. Azamov A. On Pontryagin's second method in linear differential games of pursuit // Mathematics of the USSR-Sbornik. 1983. Vol. 46, № 3. P. 429–437.
2. Азамов А., Саматов Б.Т. О модифицированном третьем методе в задаче преследования. В кн.: Неклассические задачи математической физики. Ташкент: Фан, 1985. С. 174–184.

**КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С НАГРУЗКОЙ**

**Тхамоков М.Б., Хакулов Т.Г.**

*КИТЭ КБГУ, Нальчик, Россия; kidmus@mail.ru*

В прямоугольнике  $Q_T = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t < T\}$  рассматривается задача для уравнения [1]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = mc_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha u(x_0, t) + f(x, t), \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x). \quad (3)$$

где  $x_0$  – некоторая произвольная точка интервала  $(0, 1)$ .

В данной работе получена априорная оценка решения первой краевой задачи для уравнения (1). Построена разностная схема и приведены результаты расчетов на тестовом примере.

**Литература**

1. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.Л. Теория волн. М.: Наука, 1979.

## ЭФФЕКТИВНЫЙ АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ $p$ -ЦЕНТРОВ

Узденов А.А.<sup>1</sup>, Кочкиров Р.А.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> СевКавГГТА, Черкесск, Россия; uzdenov.ahmat@yandex.ru

<sup>2</sup> Финансовый университет, Москва, Россия; rasul\_kochkarov@mail.ru

Рассматривается задача о  $p$ -центрах на предфрактальных графах [1].

**Теорема.** Алгоритм  $\alpha$  выделяет  $p$ -центр на предфрактальном графике

$$G_L = (V_L, E_L).$$

**Теорема.** Вычислительная сложность алгоритма  $\alpha$ , выделения  $p$ -центра на предфрактальном графике  $G_L = (V_L, E_L)$ , порожденного затравкой  $H = (W, Q)$ , где  $|W| = n$ ,  $|V_L| = N = n^L$ , равна  $O(N \cdot p(n - p) \frac{(n-1)!}{(n-p)!})$ .

### Литература

1. Кристофицес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. М.: Мир, 1978.

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-07-00231а.

**ЗАДАЧА Коши для уравнения крутильных колебаний  
нелинейно-упругого стержня бесконечной длины**

**Умаров Х.Г.**

*АН ЧР, Грозный, Россия; umarov50@mail.ru*

Для дифференциального уравнения, описывающего крутильные колебания нелинейно-упругого стержня:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \beta \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^3,$$

где  $\alpha, \beta$  – заданные числовые параметры, исследована разрешимость задачи Коши в пространстве непрерывных функций на всей числовой оси сведением к абстрактной задаче Коши в банаховом пространстве.

Найден явный вид решения соответствующего линейного уравнения. Установлен временной отрезок существования классического решения задачи Коши для нелинейного уравнения и получена оценка нормы этого локального решения. Рассмотрены условия существования глобального решения и разрушения решения на конечном отрезке.

## ДВУХСЛОЙНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Умирхонов М.

ИМ АН РУз, Ташкент, Узбекистан; masudxonumirxonov@mail.ru

Известно, что [1] гиперболическая модель переноса тепла получается путем замены классического закона теплопроводности Фурье  $q = -kT_x$  с релаксационным соотношением первого порядка  $\tau q + q = -kT_x$  и комбинируя его с законом сохранения энергии  $c\rho T_t = -q_x$ .

Полученная система имеет два семейства характеристик, которое означает, что тепловой сигнал распространяется с конечной скоростью.

Рассматривается двухфазная задача со свободной границей в связи с поставленной в [2] задачей о движении поршня под действием газа.

Требуется найти функции  $s(t)$ ,  $u_i(x, t)$ ,  $v_i(x, t)$  ( $i = 1, 2$ ), такие, что дважды непрерывно дифференцируемая функция  $s(t)$  определена при  $t \geq 0$ ,  $s(0) = 0$ ,  $\dot{s}(0) = c$ ,  $-\sqrt{a_2 b_2} < \dot{s}(t) < \sqrt{a_1 b_1}$ , функции  $u_i(x, t)$ ,  $v_i(x, t)$  в области  $D_i$ ,  $i = 1, 2$ , где  $D_1 = \{(x, t) : -\infty < x < s(t), t \geq 0\}$ ,  $D_2 = \{(x, t) : s(t) < x < \infty, t \geq 0\}$ , удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} u_{1t} + a_1 v_{1x} = 0, \\ v_{1t} + b_1 u_{1x} + c_1 v_1 = 0, \quad (x, t) \in D_1, \end{cases}$$

$$u_1(x, 0) = \varphi_1(x), v_1(x, 0) = \psi_1(x), -\infty < x \leq 0, a_1 v_1(s(t), t) = \dot{s}(t), t \geq 0,$$

$$\begin{cases} u_{2t} + a_2 v_{2x} = 0, \\ v_{2t} + b_2 u_{2x} + c_2 v_2 = 0, \quad (x, t) \in D_2, \end{cases}$$

$$u_2(x, 0) = \varphi_2(x), v_2(x, 0) = \psi_2(x), 0 \leq x < \infty, a_2 v_2(s(t), t) = \dot{s}(t), t \geq 0,$$

$$\ddot{s}(t) = k[u_1(s(t), t) - u_2(s(t), t)], t \geq 0.$$

Здесь  $a_i, b_i, c_i$  ( $i = 1, 2$ ) положительные постоянные,  $\varphi_i, \psi_i$  ( $i = 1, 2$ ) непрерывно дифференцируемые функции.

При определенных ограничениях на данные задачи установлено неравенство  $-\sqrt{a_2 b_2} < \dot{s}(t) < \sqrt{a_2 b_2}$  и доказана однозначная разрешимость поставленной задачи.

### Литература

1. Friedman A., Hu Bei. The Stefan problem for hyperbolic heat equation // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1989. Vol. 138, № 1. P. 249–279.
2. Hill C. A hyperbolic free boundary problems // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1970. № 31. P. 117–129.

**ЗАДАЧА КЕЛДЫША ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ  
СМЕШАННОГО ТИПА С ТРЕМЯ СИНГУЛЯРНЫМИ  
КОЭФФИЦИЕНТАМИ**

**Уринов А.К.<sup>1</sup>, Каримов К.Т.<sup>2</sup>**

*ФерГУ, Фергана, Узбекистан; <sup>1</sup>urinovak@mail.ru; <sup>2</sup>karimovk80@mail.ru*

В области  $\Omega = \{(x, y, z) : 0 < x < 1, -a < y < b, 0 < z < 1\}$  рассмотрим трехмерное уравнение с тремя сингулярными коэффициентами

$$u_{xx} + (\operatorname{sgn} y) u_{yy} + u_{zz} + \frac{2\alpha}{x} u_x + \frac{2\beta}{|y|} u_y + \frac{2\gamma}{z} u_z = 0, \quad (1)$$

где  $u = u(x, y, z)$  – неизвестная функция,  $a, b \in R_+$ , а  $\alpha, \beta, \gamma \in R$ .

В данной работе исследована следующая задача.

**Задача Е.** Найти функцию  $u \in C(\bar{\Omega} \setminus (xz = 0)) \cap C^2(\Omega \setminus (y = 0))$ , ограниченную при  $x \rightarrow 0, z \rightarrow 0$  и удовлетворяющую в области  $\Omega \setminus (y = 0)$  уравнению (1) и краевым условиям

$$u(1, y, z) = 0, \quad -a \leq y \leq b, \quad 0 \leq z \leq 1;$$

$$u(x, y, 1) = 0, \quad -a \leq y \leq b, \quad 0 \leq x \leq 1;$$

$$u(x, b, z) = f_1(x, z), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1;$$

$$u(x, -a, z) = f_2(x, z), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1,$$

а также условию склеивания вида

$$\lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{2\beta} u_y(x, y, z) = \lim_{y \rightarrow +0} y^{2\beta} u_y(x, y, z), \quad 0 < x < 1, 0 < z < 1,$$

где  $f_1(x, z), f_2(x, z)$  – заданные непрерывные функции.

При  $(1/2) \leq \alpha, \gamma < +\infty, -(1/2) < \beta < (1/2)$  методом спектрального анализа доказана, что задача  $E$  не может иметь более одного решения. Далее, применяя метод Фурье, доказано, что если функции

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left[ x^{-2\alpha} z^{-2\gamma} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} [x^{2\alpha} z^{2\gamma} f_{jxz}(x, z)] \right], \quad j = \overline{1, 2},$$

принадлежат классу  $C([0, 1] \times [0, 1])$  и выполняются условия

$$f_j(1, z) = f_j(x, 1) = 0, \quad j = \overline{1, 2},$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} [x^{2\alpha} z^{2\gamma} f_{jxz}(x, y)] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} [x^{2\alpha} z^{2\gamma} f_{jxz}(x, y)] = 0, \quad j = \overline{1, 2},$$

то существует решение задачи  $E$ .

**ЗАДАЧА С ВИДОИЗМЕНЕННЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ  
ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ  
ВТОРОГО РОДА СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ**

Уринов А.К.<sup>1</sup>, Оқбоев А.Б.<sup>2</sup>

ФерГУ, Фергана, Узбекистан; <sup>1</sup>urinovak@mail.ru; <sup>2</sup>aoqboev@mail.ru

В конечной односвязной области  $D$  плоскости  $xOy$ , ограниченной при  $y \leq 0$  характеристиками  $AC : x - 2\sqrt{-y} = 0$ ,  $BC : x + 2\sqrt{-y} = 1$  и  $AB : y = 0$ , рассмотрим уравнение

$$L_{0,\lambda}(u) \equiv u_{xx} + y u_{yy} - \lambda^2 u = 0, \quad y < 0, \quad (1)$$

где  $\lambda$  – заданное действительное или чисто мнимое число.

В докладе изучена следующая начальная задача.

**Видоизмененная задача Коши.** Найти функцию  $u(x, y) \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ , удовлетворяющую в области  $D$  уравнению (1) и следующим начальным условиям

$$\lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) = \tau(x), \quad x \in [0, 1]; \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial y} [u - A_0^-(\tau, \lambda)] = \nu(x), \quad x \in (0, 1), \quad (2)$$

где  $\tau(x)$  и  $\nu(x)$  – заданные функции, а  $A_0^-(\tau, \lambda)$  – оператор вида

$$\begin{aligned} A_0^-(\tau, \lambda) = & \frac{1}{\pi} \int_0^1 \tau(t) [z(1-z)]^{-1/2} \bar{J}_{-1/2}(\sigma) dz + \\ & + \frac{16y}{\pi} \int_0^1 \Phi(\tau, \lambda) [z(1-z)]^{1/2} \left\{ \ln [\sqrt{-y} z(1-z)] \bar{J}_{1/2}(\sigma) - \right. \\ & \left. - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (\sigma/2)^{2m}}{m! (3/2)_m} \sum_{j=1}^m \frac{1}{1/2+j} \right\} dz, \quad \Phi(\tau, \lambda) = \left( \lambda^2 - \frac{d^2}{dt^2} \right) \tau(t). \end{aligned}$$

Доказано, что справедлива следующая

**Теорема.** Если  $\tau(x) \in C^3[0, 1]$  и  $\nu(x) \in C^1[0, 1]$ , то функция  $u(x, y)$ , определенная формулой

$$u(x, y) = A_0^-(\tau, \lambda) + \frac{8y}{\pi} \int_0^1 \nu(t) [z(1-z)]^{1/2} \bar{J}_{1/2}(\sigma) dz,$$

является единственным решением задачи (1), (2).

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО  
УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ СПЛАЙНОВ**  
**Учайкин В.В.<sup>1</sup>, Кожемякина Е.В.<sup>2</sup>**

*УлГУ, Ульяновск, Россия; <sup>1</sup>vuchaikein@gmail.com; <sup>2</sup>elvk@mail.ru*

Теоретический анализ отклика линейной системы (выходящий сигнал) на вносимое в неё возмущение (входящий сигнал). В стандартной теории ядро интегрального уравнения предполагается инвариантным относительно сдвига, что отрывает путь к эффективному применению интегральных преобразований, в частности, преобразований Фурье или Лапласа. В суперконденсаторах свойство инвариантности нарушается. Авторами разработана программа, решающая задачу определения отклика и обратную задачу численно на основе кусочно-полиномиального (кусочно-сплайнового) представления решения. Поведение решения на соседних интервалах предполагается непрерывно-дифференцируемым, что позволяет избежать нежелательных эффектов (высокочастотных шумов округления), возникающих в результате аппроксимации решений на больших интервалах полиномами высокой степени.

Представленная программа пригодна для решения прямых и обратных задач теории чувствительности в условиях неинвариантности ядра относительно сдвига во времени и немарковости процессов зарядки-разрядки конденсатора. Модельные расчёты подтвердили эффективность этой программы в решении указанных задач.

**Литература**

1. Учайкин В.В., Кожемякина Е.В. Численный метод решения интегрального уравнения чувствительности на основе сплайнов. Свидетельство о регистрации программы ЭВМ и базы данных, № 2016660083, от 06.09.2016.

---

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-01-00556.

**ВАРИАЦИОННОЕ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛОВ С  
ПРИМЕНЕНИЕМ СОПРЯЖЁННЫХ ОПЕРАТОРОВ**

**Учайкин В.В.<sup>1</sup>, Кожемякин И.И., Кожемякина Е.В.**

*УлГУ, Ульяновск, Россия; <sup>1</sup>vuchaikein@gmail.com*

Известно, что двойственное представление задач (через основную и сопряженную в смысле Лагранжа функцию) позволяет сформулировать эффективную версию теории малых возмущений (Л.Н. Усачёв, Г.И. Марчук, В.В. Орлов и др.), однако попытки расширить область применения путём повышения порядка теории возмущений резко усложняют процедуру решения (С.Б. Шихов и др.). В связи с этим в ряде работ были предприняты поиски альтернативных подходов. К их числу относится и наш подход [1], в котором в качестве основной («невозмущённой») задачи предлагается выбирать не одну, а несколько. В пространстве моделей они представляют собой набор точек, для которых известны решения (в двойственном представлении). Искомое же решение ищется в виде стационарного функционала от линейной комбинации опорных решений (типа приведённого в [2]). В настоящем докладе продолжаются исследования особенностей этого метода, начатые ещё в [1] для однопараметрической задачи. Здесь же речь идёт о стационарной диффузии в бесконечной (с поглощением) среде от плоского равномерного источника. В этой задаче два параметра (коэффициент диффузии и диффузационная длина), образующие систему координат пространства моделей. Рассматривается несколько расположений опорных точек, показываются области ограниченной значениями 0,01; 0,03; 0,10 относительной погрешности. Результаты сопоставляются с аналогичными характеристиками 1-го, 2-го и 3-го приближений теории возмущений. Сопоставление свидетельствует о высокой эффективности предлагаемого метода.

**Литература**

1. Учайкин В.В. Метод вариационного интерполирования в ядерно-технических расчётах // Атомная энергия. 1989. 1989. Т. 61, № 1. С. 54–55.
2. Марчук Г.И., Орлов В.В. К теории сопряжённых функций // Сб. Нейтронная физика. М.: Госатомиздат, 1961. С. 30–45.

---

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-01-00556.

**Отсутствие предельных циклов плоской квадратичной системы, имеющей инвариантную кривую в виде гиперболы**

**Ушхо А.Д., Тлячев В.Б.<sup>1</sup>, Ушхо Д.С.<sup>2</sup>**

*АГУ, Майкоп, Россия;* <sup>1</sup>*tlyachev@adygnet.ru,* <sup>2</sup>*damirubych@mail.ru*

Наличие устойчивых предельных циклов в системе дифференциальных уравнений, описывающей реальную систему, является необходимым и достаточным условием для возможности существования автоколебаний в системе. Этим объясняется большой интерес математиков к проблеме существования, отсутствия изолированных периодических решений (предельных циклов) автономных дифференциальных систем на плоскости. В данной заметке рассматривается вопрос отсутствия предельных циклов плоской квадратичной системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sum_{i+j=0}^2 a_{ij}x^i y^j \equiv P_2(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=0}^2 b_{ij}x^i y^j \equiv Q_2(x, y), \end{cases} \quad (1)$$

где  $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}$ ,  $(P_2, Q_2) = 1$ , имеющих инвариантную кривую  $L : x^2 - y^2 - R^2 = 0$ .

При доказательстве использован критерий Дюлака [1]. Функция Дюлака выбрана в виде

$$D(x, y) = \{[b_{10} + (b_{20} + b_{02})x + b_{11}y](x^2 - y^2 - R^2)\}^{-1}.$$

**Литература**

1. Баутин Н.Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1976. 496 с.

**ОДИН КЛАСС ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ  
ДЛЯ ВЫРОЖДЕННЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ  
С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ РИМАНА – ЛИУВИЛЛЯ**

**Федоров В.Е.<sup>1</sup>, Нажимов Р.Р.<sup>2</sup>**

ЧелГУ, Челябинск, Россия; <sup>1</sup>kar@csu.ru; <sup>2</sup>goldenboy454@mail.ru

Результаты о корректности обратных задач для вырожденных эволюционных уравнений первого порядка с регулярной парой операторов [1] распространены на случай уравнений дробного порядка в смысле Римана – Лиувилля.

Пусть  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  – банаховы пространства,  $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ ,  $\ker L \neq \{0\}$ , оператор  $M \in \mathcal{Cl}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$  ( $L, p$ ) – ограничен при  $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ .

Рассмотрим задачу

$$D_t^\alpha Lx(t) = Mx(t) + \varphi(t)u, \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

$$D_t^{\alpha-m+k} Px(0) = x_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (2)$$

$$\int_0^T x(t)d\mu(t) = x_T, \quad (3)$$

где  $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$ ,  $D_t^\beta$  – дробная производная Римана – Лиувилля,  $P = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (\lambda L - M)^{-1} L d\lambda$ , контур  $\gamma$  охватывает весь  $L$ -спектр  $\sigma^L(M)$  оператора  $M$ , вектор  $u \in \mathcal{Y}$  и  $x : [0, T] \rightarrow \mathcal{X}$  – искомые.

Введем в рассмотрение характеристическую функцию обратной задачи

$$\chi(\lambda) := \int_0^T d\mu(t) \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha) \varphi(s) ds, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

**Теорема.** Пусть оператор  $M$  ( $L, p$ ) – ограничен, при  $n = 0, 1, \dots, p$   $(D_t^\alpha)^n \varphi \in C([0, T]; \mathbb{R})$ , функция  $\mu : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  имеет ограниченную вариацией. Тогда задача (1)–(3) однозначно разрешима при любых  $x_k \in \text{im } P$ ,

$k = 0, 1, \dots, m-1$ , в том и только том случае, когда  $\int_0^T \varphi(t)d\mu(t) \neq 0$ ,  
 $\chi(z) \neq 0$  при всех  $z \in \sigma^L(M)$ . При выполнении этих условий задача корректна.

**Литература**

1. Fedorov V.E., Urazova A.V. An inverse problem for linear Sobolev type equations // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2004. Vol. 12, № 4. P. 387–395.

**ОБОБЩЕННАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, КОЭФФИЦИЕНТ КОТОРОГО  
ИМЕЕТ СКАЧОК**

**Фозилова Ф.Ф.**

ФерГУ, Фергана, Узбекистан; fozilovaferuza@mail.ru

Рассмотрим следующую обобщенную спектральную задачу:

**Задача.** Найти те значения параметра  $\lambda$ , при которых существуют нетривиальные функции из класса  $C^1[0, \pi] \cap C^2[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$ , удовлетворяющие уравнению

$$\operatorname{sign}(x - \pi/2)y''(x) = \lambda y(x), \quad x \in (0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi) \quad (1)$$

и условиям вида

$$\sqrt{|\lambda|}y(0) + y'(0) = 0, \quad y(\pi) + \sqrt{|\lambda|} \int_{\pi/2}^{\pi} y(x) dx = 0. \quad (2)$$

Пользуясь общим решением уравнения (1) в интервалах  $(0, \pi/2)$  и  $(\pi/2, \pi)$ , условиями склеивания  $y(\pi/2 - 0) = y(\pi/2 + 0)$ ,  $y'(\pi/2 - 0) = y'(\pi/2 + 0)$  и условием (2), найдены собственные значения задачи  $\lambda_n^{(1)} = -|4n - 2/3|^2$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  и  $\sqrt{\lambda_k^{(2)}} \in (2k, 2k + 1)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , где  $\lambda_k^{(2)}$  – решение уравнения  $2e^{\sqrt{\lambda}} = ctg\sqrt{\lambda} + 1$ , и собственные функции, соответствующие этим собственным значениям:

$$y_n^{(1)}(x) = \begin{cases} (1 + \sqrt{3}) a_n e^{(2/3 - 4n)[x - \pi/2]}, & 0 \leq x \leq \pi/2, \\ a_n [(2 + \sqrt{3}) \cos(4n - 2/3)x + \sin(4n - 2/3)x], & \pi/2 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

$$y_k^{(2)}(x) = \begin{cases} a_k \left[ \cos\left(\sqrt{\lambda_k^{(2)}}x\right) - \sin\left(\sqrt{\lambda_k^{(2)}}x\right) \right], & 0 \leq x \leq \pi/2, \\ a_k \left[ \begin{array}{l} \cos\left(\sqrt{\lambda_k^{(2)}}\pi/2\right) e^{\sqrt{\lambda_k^{(2)}}(x - \pi/2)} - \\ - \sin\left(\sqrt{\lambda_k^{(2)}}\pi/2\right) e^{-\sqrt{\lambda_k^{(2)}}(x - \pi/2)} \end{array} \right], & \pi/2 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

**ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ  
ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

**Хазириши Э.О.**

*АГУ, Абхазия, Сухум; esma10@yandex.ru*

Пусть  $W_p = W_p(\Gamma)$  – множество тех функций  $\varphi(t)$  из  $L_p$ , для которых сингулярный интеграл

$$J(\varphi, t) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau \in L_p, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad t \in \Gamma,$$

$\Gamma$  – единичная окружность с центром в начале координат. Введем норму в  $W_p$ :

$$\|\varphi\|_{W_p} = \frac{1}{2} \left\{ \|\varphi(t) + J(\varphi, t)\|_{L_p} + \|-\varphi(t) + J(\varphi, t)\|_{L_p} \right\}; \quad L_{\infty}(\Gamma) = C(\Gamma).$$

Рассматриваются различные классы сингулярных интегральных уравнений, и прямые методы их решения. То есть решения таких уравнений сводятся к решению систем линейных алгебраических уравнений. Даются оценки сходимости приближенного решения  $\varphi_n^*(t)$  к точному решению  $\varphi^*(t)$  сингулярного уравнения по норме пространства  $W_p(\Gamma)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ .

**Литература**

1. Иванов В.В. Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений. К.: Наука думка, 1968. 288 с.
2. Габдулхаев Б.Г., Хазириши Э.О. О приближенных решениях сингулярных интегральных уравнений // Сообщ. АН Груз. ССР. 1985. № 2. С. 249–252.

## Нули производной функции Харди

Хайруллоев Ш.А.

Институт математики, Душанбе, Таджикистан; shamsullo@rambler.ru

Функция Харди  $Z(t)$  задаётся равенством

$$Z(t) = e^{i\theta(t)} \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right), \quad e^{i\theta(t)} = \pi^{-\frac{it}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{it}{2}\right) \left| \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{it}{2}\right) \right|^{-1},$$

и принимает вещественные значения при вещественных значениях  $t$  и вещественные нули  $Z(t)$  являются нулями  $\zeta(s)$ , лежащими на критической прямой.

А.А. Карацуба [1] вместе с задачей о соседних нулях функции  $Z(t)$  также изучил задачу о соседних точках экстремума или точках перегиба функции  $Z(t)$  или в более общей подстановке – о соседних нулях функции  $Z^{(j)}(t)$ ,  $j \geq 1$ . Он показал, что с увеличением  $j$  длина промежутка, на котором заведомо лежит нуль  $Z^{(j)}(t)$ , уменьшается и доказал теорему: *Пусть  $j$  – натуральное число,  $T \geq T_0(k) > 0$ ,  $H \geq cT^{1/(6j+6)} \ln^{2/(j+1)} T$ ,  $c = c(j) > 0$ . Тогда промежуток  $(T, T + H)$  содержит нуль нечётного порядка функции  $Z^{(j)}(t)$ .*

В работе [2] задача о величине промежутка  $(T, T + H)$  критической прямой, в которой заведомо лежит нуль нечётного порядка функции  $Z^{(j)}(t)$  ( $j \geq 1$ ) сведена к проблеме отыскания экспоненциальных пар для оценки тригонометрических сумм.

Справедлива следующая

**Теорема.** *Пусть  $T \geq T_0 > 0$ ,  $H \geq cT^{\alpha_j} \ln T$ ,*

$$\alpha_j = \frac{35}{220 + 212j}, \quad c = c_0 > 0, \quad j \in N.$$

*Тогда промежуток  $(T, T + H)$  содержит нуль нечётного порядка функции  $Z^{(j)}(t)$ .*

Полученный результат является уточнением теоремы А.А. Карацубы при любом  $j \in N$ .

## Литература

1. Карацуба А.А. О расстоянии между соседними нулями дзета-функции Римана, лежащими на критической прямой // Труды МИАН. 1981. Т. 157. С. 49–63.
2. Хайруллоев Ш.А. Расстояние между соседними нулями функции  $Z^{(j)}(t)$ ,  $j \geq 1$  // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2006. Т. 49, № 9. С. 803–809.

**ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ  
НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА**

**Халиков Д.К.**

*TACI, Ташкент, Узбекистан; xoliqov23@mail.ru*

Рассмотрим нагруженное уравнение в частных производных третьего порядка

$$u_{xxt} + a(x, t)u_{xx} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\alpha}^{\beta} u(x, t)dx, \quad (1)$$

здесь  $a(x, t)$  – заданная функция, а  $\alpha, \beta$  – заданные постоянные, причем  $0 \leq \alpha < \beta \leq l$ .

В области  $D = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$  рассмотрим вопрос о разрешимости нелокальной задачи для уравнения (1) в следующей постановке: *найти в области  $D$  решение уравнения (1) из класса  $C^1(\overline{D}) \cap C^2(D)$ , удовлетворяющее начальному условию*

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (2)$$

и следующим граничным условиям

$$\alpha_1(t)u(0, t) + \alpha_2(t)u(l, t) + \alpha_3(t)u_x(0, t) + \alpha_4(t)u_x(l, t) = 0, \quad (3)$$

$$\beta_1(t)u(0, t) + \beta_2(t)u(l, t) + \beta_3(t)u_x(0, t) + \beta_4(t)u_x(l, t) = 0, \quad (4)$$

здесь  $\varphi(x), \alpha_i(t)$  и  $\beta_i(t)$ , ( $i = \overline{1, 4}$ ) – заданные функции, линейные формы в левых частях (3)–(4) линейно независимы, т. е. по крайней мере одна из разностей  $\alpha_i\beta_j - \alpha_j\beta_i$  ( $i, j = \overline{1, 4}; i \neq j$ ) отлична от нуля.

В работе рассмотрен вопрос о существовании и единственности решения нелокальной задачи для нагруженного уравнения. С помощью метода Римана доказаны теоремы об однозначной разрешимости поставленной задачи (1)–(4).

**РЕШЕНИЕ РАЗНОСТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО ЛИНЕЙНОГО  
НАГРУЖЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ  
ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА И ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ**

**Ханкишиев З.Ф.**

*БГУ, Баку, Азербайджан; hankishiyev.zf@yandex.com*

Исследуется следующая задача для нагруженного дифференциального уравнения гиперболического типа: *найти непрерывную в замкнутой области  $\bar{D} = \{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$  функцию  $u = u(x, t)$ , удовлетворяющую в  $\bar{D}$  уравнению*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu(x, t) + \sum_{k=1}^m d_k u(x, t_k) = f(x, t), \quad (1)$$

*граничным и начальным условиям:*

$$u(0, t) = \mu_1(t), u(0, t) = \mu_2(t), 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \varphi_2(x), 0 \leq x \leq l. \quad (3)$$

Здесь  $a, b, d_k, k = 1, 2, \dots, m$  – действительные числа,  $\bar{t}_k; k = 1, 2, \dots, m$  – точки интервала  $(0, T]$ ;  $f(x, t)$ ,  $\mu_1(t)$ ,  $\mu_2(t)$ ,  $\varphi(x)$  – непрерывные функции своих аргументов.

Задача (1)–(3) решается методом конечных разностей. Строится разностная задача, аппроксимирующая исходную задачу с точностью  $O(h^2 + \tau)$  дается алгоритм решения построенной разностной задачи и при выполнении некоторых условий доказывается устойчивость решения разностной задачи.

**О ТОЧКАХ  $\varphi$ -СИЛЬНОЙ СУММИРУЕМОСТИ ДВОЙНЫХ РЯДОВ  
ФУРЬЕ**

**Хашба Л.А.**

*АГУ, Сухум, Абхазия; aniballe@mail.ru*

Пусть  $L_p(T^2)$ ,  $p \geq 1$ ,  $T = [-\pi; \pi]$  – множество  $2\pi$ -периодических по каждой из переменных, суммируемых в  $p$ -ой степени функций,  $f \in L_1(T^2)$ ,  $S[f]$  ее ряд Фурье,  $S_{m,n}(f, x, y)$  – прямоугольные частные суммы ряда  $S[f]$  порядка  $m$  по  $x$  и  $n$  по  $y$ .

Через  $\varphi \in \Phi_\gamma$  обозначим множество непрерывных возрастающих функций  $\varphi$ , определенных на  $[0; +\infty)$  и удовлетворяющих условиям:

- 1)  $\varphi(0) = 0$ ;  $\varphi(u) > 0$ ,  $u > 0$ ;
- 2)  $\varphi(2u) \leq a\varphi(u)$ ,  $u \in [0, \sigma]$ ,  $0 < \sigma \leq 1$ ;
- 3)  $\ln\varphi(u) = O(u^\gamma)$ ; при  $u \rightarrow \infty$ .

**Теорема 1.** Пусть  $f \in L_p(T^2)$ ,  $p > 1$ ,  $(x, y)$  является  $p$ -точкой Лебега функции  $f$ . Тогда, если  $\varphi \in \Phi_{\frac{1}{2}}$ , то

$$\lim_{(m,n) \rightarrow \infty} \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n \varphi(|S_{j,k}(f; x; y) - f(x, y)|) = 0,$$

выполняется в точке  $(x, y)$ .

**Теорема 2.** Пусть  $f \in L_p(T^2)$ ,  $p > 1$ ,  $(x, y)$  является  $p$ -точкой Лебега функции  $f$ . Тогда для  $\forall B \subset [m, 2m; n, 2n] \cap N^2$ ,  $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ ,  $q > 0$ , имеет место

$$\lim_{(m,n) \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{r} \sum_{(j,k) \in B} |S_{j,k}(f; x; y) - f(x, y)|^q \right\}^{\frac{1}{q}} \left( \ln \frac{me}{r_1} \ln \frac{ne}{r_2} \right)^{-1} = 0,$$

где  $r = r_1 \times r_2$ ,  $r_1$  – количество элементов проекции множества  $B$  на ось  $OX$ ,  $r_2$  – количество элементов проекции множества  $B$  на ось  $OY$ .

**КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ  
ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ОПЕРАТОРОМ ДРОБНОЙ  
ДИФФУЗИИ**

**Хубиев К.У.**

*ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; khubiev\_math@mail.ru*

Рассмотрим уравнение

$$\begin{cases} u_{xx} - D_{0y}^\alpha u = 0, & y > 0, \\ u_x + u_y + cu + \lambda u(x_0, y) = 0, & y < 0, \end{cases} \quad (1)$$

в области  $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$ , где  $\Omega^+ = \{(x, y) : 0 < x < r, y > 0\}$ ,  $\Omega^-$  – область, ограниченная характеристиками уравнения (1)  $AA_2 : x - y = 0$ ,  $BB_2 : x - y = r$  и отрезком  $A_2B_2$  прямой  $y = x_0 - r$  при  $y < 0$ ;  $x_0 \in [0, r]$ ,  $\lambda, c = const$ ,  $0 < \alpha < 1$ ,  $D_{ax}^\alpha \varphi(t)$  – оператор дробного интегро-дифференцирования Римана – Лиувилля порядка  $\alpha$  с началом в точке  $a$  и с концом в точке  $x$  [1, с. 9].

В работе ищется решение задачи с краевыми условиями  $u(0, y) = \varphi_0(y)$ ,  $u(r, y) = \varphi_r(y)$  при  $y > 0$  и разрывными условиями сопряжения на линии  $y = 0$  для уравнения (1), в  $\Omega^-$  дополнительно условия не задаются. Также отметим, что когда  $\lambda = 0$  или нагруженное слагаемое имеет вид  $\lambda u(x, 0)$ , решение можно найти в полуполосе  $D^-$ , ограниченной характеристиками  $AA_2$ ,  $BB_2$  уравнения (1) и отрезком прямой  $y = 0$ .

Краевая задача для нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа с вырождением порядка в области его гиперболичности для уравнения, которое в  $\Omega^+$  имело вид  $u_{xx} - u_y + \lambda_1 u(x_1, y) = 0$ , была исследована в [2]. В работе [3] исследованы задачи со смещением и с разрывными условиями сопряжения для нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа второго порядка с оператором дробной диффузии в параболической области.

**Литература**

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 272 с.
2. Хубиев К.У. Краевая задача для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа с вырождением порядка в области его гиперболичности // Материалы Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и физики», Нальчик, 2017. С. 214.
3. Хубиев К.У. Задачи со смещением для нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа с оператором дробной диффузии // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28, № 1. С. 82–90.

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ СВЕРХЗВУКОВОГО ФЛАТТЕРА ВЯЗКОУПРУГИХ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК**

**Худаяров Б.А.**

*ТИИИМСХ, Ташкент, Узбекистан; bakht-flpo@yandex.ru*

Одной из наиболее обширных областей применения современных методов и средств моделирования является создание объектов новой техники. Постоянное усложнение и улучшение технических конструкций, развитие материаловедения и промышленности материалов является мощным источником и стимулом развития теории и практики математического моделирования. Характерным примером данной ситуации является совершенствование технологических процессов проектирования, производства и эксплуатации конструкций летательных аппаратов, предназначенных для функционирования в условиях больших высот и скоростей. Значительный прогресс в этом направлении обеспечивается созданием и применением новых видов материалов, в том числе композиционных. Сверхвысокая трудоемкость указанных технологических процессов приводит к применению в этих задачах методов математического моделирования как основного средства решения проблемы. Основой исследования процессов деформирования композиционных материалов является наследственная теория вязкоупругости, конкретное применение которой зависит от параметров материалов, формы изделия и диапазона изменения условий внешней среды. При этом существенные трудности получения «хороших» моделей возникают в связи с учетом свойств вязкоупругости и нелинейных эффектов. Данные эффекты наиболее значительно проявляются в условиях сверхзвуковых потоков воздуха или жидкости, т.е. при высоких скоростях, которые приводят к возникновению эффекта флаттера [1, 2].

В работе построены математические модели нелинейных задач о флаттере вязкоупругих элементов летательного аппарата.

### **Литература**

1. *Khudayarov B.A. About one computational method of solving the integral equations on the problem of nonlinear flutter of viscous-elastic system // Proceedings of the «Integral Equations-2009» Conference, 26–29 January, Kiev, 2009. P. 147-149.*
2. *Khudayarov B.A. Numerical study of the dependence of the critical flutter speed and time of a plate on rheological parameters // International Applied Mechanics. 2008. Vol. 44, № 6. P. 676–682.*

## МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ ТРУБОПРОВОДОВ С УЧЕТОМ ОСНОВАНИЯ ГРУНТА

Худаяров Б.А., Тураев Ф.Ж.

ТИИИМСХ, Ташкент, Узбекистан;

<sup>1</sup> bakht-flpo@yandex.ru; <sup>2</sup>t.fozil86@mail.ru

Рассмотрим поведение тонкой круговой вязкоупругой цилиндрической оболочки, внутри которой с постоянной скоростью движется идеальная жидкость. Скорость жидкости равна  $U$  и имеет направление, совпадающее с направлением оси  $Ox$ . Уравнения движения оболочки, полученные в рамках классических теории оболочек [1], с учетом наличия вязкоупругого основания, имеют вид:

$$\begin{aligned} (1 - R^*) \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1+\mu}{2R} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} + L_1(w) \right\} - \rho \frac{1-\mu^2}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \\ (1 - R^*) \left\{ \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2R} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + L_2(w) \right\} - \rho \frac{1-\mu^2}{E} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0, \\ D(1 - R^*) \nabla^4 w + L_3^*(u, v, w) + k_1(1 - *)w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= q. \end{aligned}$$

С помощью метода Бубнова – Галеркина математическая модель задачи сводится к решению системы обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений, где независимой переменной является время. Решение интегро-дифференциальных уравнений определяются численным методом, основанном на исключении особенности в ядре релаксации интегрального оператора [2–3]. Разработан вычислительный алгоритм для решения задач динамики вязкоупругих трубопроводов с протекающей жидкостью. На основе разработанного вычислительного алгоритма создан комплекс прикладных программ. Численно исследовано влияние сингулярности в ядрах наследственности и основания Винклера на колебания конструкций, обладающих вязкоупругими свойствами.

### Литература

- Григолюк Э.И., Мамай В.И. Нелинейное деформирование тонкостенных конструкций. М.: Наука. Физматлит, 1997. 272 с.
- Бадалов Ф.Б. Методы решения интегральных и интегро-дифференциальных уравнений наследственной теории вязкоупругости. Ташкент: Мехнат, 1987. 269 с.
- Худаяров Б.А., Тураев Ф.Ж. Численное моделирование нелинейных колебаний вязкоупругого трубопровода с жидкостью // Вестник Том. гос. ун-та. Математика и механика. 2016. № 5(43). С. 90–98.

## Законы сопротивления при транспортировке нефти и нефтепродуктов по трубопроводу с лупингом

Хуррамова Р.И.

ТФИ\*, Ташкент, Узбекистан; rano.hurramova@mail.ru

Для уменьшения гидравлического сопротивления, а также увеличения надежности функционирования в определенных участках трубопровода строится лупинг – параллельная линия. Расход жидкости  $Q$  распределяется по основному ( $Q_0$ ) и вспомогательному ( $Q_\lambda$ ) трубопроводам. Перепады давления по длине трубопроводов – одинаковые. В силу возможного отличия параметров параллельных каналов (внутреннего диаметра и шероховатости) объемные расходы жидкости по ним разные. Поскольку скорость потока на этом участке меньше чем в однониточном, то возможно происходит изменение режима течения из более развитого в сторону менее развитого режима. Не исключается возможность установления разных режимов обтекания в разных каналах. В целом, используемая для расчета однониточного трубопровода эмпирическая формула сопротивления А.Д. Альтшула  $\lambda = 0,11 \left( \frac{k}{D} + \frac{68}{Re} \right)^{0,25}$  требует существенной поправки. Известно, что формула А.Д. Альтшула гладко объединяет уравнение Стокса  $\lambda = 64/Re$  (при  $Re*k/D < 10$ , т.е. в гладком режиме обтекания шероховатости) с формулой Шифринсона  $\lambda = 0,11(k/D)^{0,25}$  (при  $Re*k/D > 500$  – развитой режим обтекания шероховатости) и заодно охватывает промежуточную область (здесь  $k$  – эквивалентная шероховатость трубы с диаметром  $D$ ;  $Re$  – критериальное число Рейнольдса).

Для расчета лупингованного участка трубопровода исходим из того, что гидравлические уклоны  $i = \left( \frac{P_H - P_K}{\rho g} - (z_K - z_H) \right) / L$  одинаковы для обоих каналов на участке с длиной  $L$ :  $i_0 = i$ . Это условие приводит к зависимости  $\lambda_0 W_0^2 / D_0 = \lambda W^2 / D$ .

Реализация перечисленных выше положений позволяет определить долю расхода  $\omega Q$ , соответствующую основному магистральному трубопроводу  $Q_0 = Q - Q_\lambda = \omega Q$ , где коэффициент пропорциональности  $\omega$  имеет различное значение для гладкого, развитого и переходного режимов обтекания. На основе этого способа построен численный алгоритм и составлена процедура-программа, включенная в программу по гидравлическому расчету однониточного трубопровода, проведен численный эксперимент. В дальнейшем будут проведены теоретические исследования и вычислительные эксперименты по использованию перемычек в лупингованном участке.

**СМЕШАННАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО  
УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ И ЧАСТНОЙ  
ПРОИЗВОДНОЙ РИМАНА – ЛИУВИЛЛЯ**

**Хуштова Ф.Г.**

*ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; khushtova@ya.ru*

В области  $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < r, 0 < y < T\}$  рассмотрим уравнение

$$B_x u(x, y) - D_{0y}^\alpha u(x, y) = 0, \quad (1)$$

где  $B_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{b}{x} \frac{\partial}{\partial x}$  – оператор Бесселя,  $D_{0y}^\alpha$  – оператор дробного дифференцирования в смысле Римана – Лиувилля,  $0 < \alpha \leq 1$  [1, с. 11], [2, с. 14]. Регулярным решением уравнения (1) в области  $\Omega$  назовем функцию  $u = u(x, y)$ , удовлетворяющую уравнению (1) в области  $\Omega$  и такую, что  $y^{1-\alpha} u \in C(\bar{\Omega})$ ,  $u_x, u_{xx}, D_{0y}^\alpha u \in C(\Omega)$ ,  $\bar{\Omega}$  – замыкание области  $\Omega$ .

**Задача 1.** Найти регулярное в области  $\Omega$  решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям  $\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-1} u(x, y) = \varphi(x)$ ,  $0 < x < r$ ;  $u(0, y) = u_x(r, y) = 0$ ,  $0 < y < T$ ;  $\varphi(x)$  – заданная функция.

Далее  $J_\nu(z)$  – цилиндрическая функция Бесселя первого рода порядка  $\nu$  [3, с. 132], [4, с. 95];  $E_{\frac{1}{\alpha}}(z; \mu)$  – функция типа Миттаг-Леффлера [5, с. 117]. Положим  $\beta = (1 - b)/2$ ,  $|b| < 1$ ,

$$\begin{aligned} G(x, \xi, y - \eta) = \\ = \frac{2}{r^2} \frac{x^\beta \xi^\beta}{(y - \eta)^{1-\alpha}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_\beta(\lambda_m x) J_\beta(\lambda_m \xi)}{J_\beta^2(\lambda_m r)} E_{\frac{1}{\alpha}}(-\lambda_m^2 (y - \eta)^\alpha; \alpha), \end{aligned}$$

где  $\lambda_m$  – положительные корни уравнения  $J_{\beta-1}(\lambda_m r) = 0$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , занумерованные в порядке их возрастания.

**Теорема.** Пусть  $\varphi(x) \in C[0, r]$ ,  $\varphi(0) = 0$ . Тогда функция  $u(x, y) = \int_0^r \xi^{1-2\beta} G(x, \xi, y) \varphi(\xi) d\xi$  является решением задачи 1.

**Литература**

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
2. Псеху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.
3. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. М.: Физматлит, 1963. 359 с.
4. Кузнецов Д.С. Специальные функции. М.: Высшая школа, 1965. 248 с.
5. Джербашиян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 672 с.

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АВТОВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В ЯЧЕЙКЕ С НАНОСТРУКТУРИРОВАННОЙ ЖИДКОСТЬЮ**

**Чеканов В.В.<sup>1</sup>, Кандаурова Н.В.<sup>2</sup>, Чеканов В.С.<sup>3</sup>,  
Шевченко М.Ю.<sup>4</sup>**

<sup>1</sup>СКФУ, Ставрополь, Россия; chknv1@yandex.ru

<sup>2,3</sup>МИРЭА, Ставрополь, Россия; <sup>2</sup>candaur18@yandex.ru

<sup>4</sup>ООО «Optosистемы», Москва, Троицк, Россия; xrohosc@gmail.com

Экспериментально наблюдался процесс самоорганизации – автоволны в активной возбудимой среде – приповерхностном слое наноструктурированной жидкости (магнитной жидкости).

Математическая модель процесса была построена с использованием известной модели для возбудимых сред – базовой модели ФитцХью – Нагумо (FHN) в двумерной области, соответствующей реальной геометрии эксперимента. Модель представляет собой систему из двух уравнений, первое из которых описывает процесс «активации» автоволны, а второе – процесс ингибирования.

В качестве оптимального метода для получения решения был выбран метод конечных элементов, который позволяет учитывать непостоянство параметров внутри элементов рассматриваемой системы и существующую нелинейность. В качестве инструментального средства был выбран пакет COMSOL Multiphysics, в котором имеется возможность автоматизированного ввода уравнений и разбиения сетки с возможностью ее оценки и контроля в отношении погрешности решения. Преимущество пакета COMSOL Multiphysics при решении нашей задачи также состоит в возможности экспорта решения в математическую среду MatLab для его обработки.

Задача решалась с помощью библиотеки General form PDE с двумя зависимыми функциями. Базовая модель FHN была изменена для более точного воспроизведения экспериментальных результатов. Решение проводится в двумерной области, разбитой на конечные элементы и моделирующей поверхность ячейки с магнитной жидкостью. Были проведены вычислительные эксперименты с различными параметрами системы, благодаря чему удалось визуализировать действующие центры (пейсмекеры), ревербераторы (спиральные волны), дифракцию на границе с препятствием, распространение волн между двумя препятствиями.

---

Работа выполнена в рамках госзадания: 3.5385.2017/8.9 «Экспериментальное исследование и математическое моделирование межфазных и приповерхностных явлений в тонкой пленке наноструктурированной магнитной жидкости».

**Об одной краевой задаче для эллиптической системы**  
**Чернова О.В.**

НИУ «БелГУ», Белгород, Россия; volga@mail.ru

В области  $D \in \mathbb{C}$ , ограниченной гладким контуром  $\Gamma = \cup_{i=1}^m \Gamma_i$ , где  $\Gamma_i$  – простые контуры и  $\Gamma \in C^{1,\nu}$  рассмотрим эллиптическую систему первого порядка

$$L_A U(z) + a(z)U(z) + b(z)\overline{U(z)} = F(z), \quad L_A = U_y - AU_x, \quad z \in D, \quad (1)$$

где  $A \in \mathbb{C}^{l \times l}$  не имеет вещественных собственных значений. Обозначим  $\sigma = \sigma_1 \cup \overline{\sigma}_2$ , где  $\sigma_i \subseteq \{\lambda, \operatorname{Im} \lambda > 0\}$  – множество всех собственных значений матрицы  $A$  и  $l_1 (l_2)$  – число этих значений (с учетом кратности), лежащих в верхней (нижней) полуплоскости, при этом  $l = l_1 + l_2$ . Тогда существует обратимая матрица  $B \in \mathbb{C}^{l \times l}$  блочного вида  $B = (B_1, \overline{B}_2)$ , с некоторыми  $B_j \in C^{l \times l_j}$ ,  $j = 1, 2$  такая, что  $B^{-1}AB = \operatorname{diag}(J_1, \overline{J}_2)$ , где собственные значения матриц  $J_i \in \mathbb{C}^{l_i \times l_i}$  лежат в верхней полуплоскости.

Для системы (1), предполагая, что  $l \times l$  – матрица-функция  $C(t) \in C^\mu(\Gamma)$ ,  $0 < \mu < \nu < 1$  рассмотрим краевую задачу Римана – Гильберта

$$\operatorname{Re} C(t)U(t)^+ = f(t), \quad (2)$$

где  $+$  означает граничное значение функции  $U$  на  $\Gamma$ .

**Теорема.** (a) Пусть  $D$  конечна и  $F \in C^\mu(\overline{D})$ ,  $f \in C^\mu(\Gamma)$ ,  $a, b \in C^\mu(\overline{D})$ . Условие обратимости матрицы-функции  $\det G(t) = (CB_1, \overline{CB}_2)$  необходимо

и достаточно для фредгольмовости задачи (1)–(2) в классе  $C_A^\mu(\overline{D}) = \{U \in C^1(D) \cap C^\mu(\overline{D}), L_A \in C^\mu(\overline{D})\}$  и ее индекс равен  $\alpha = -2\operatorname{Ind} G + (2-m)l$ , где  $\operatorname{Ind} G$  – индекс Коши матрицы-функции  $G(t)$  на контуре  $\Gamma$ , который ориентирован положительно по отношению к области  $D$ .

(b) Если  $D$  бесконечна и  $F \in C_{\delta-1}^\mu(\overline{D}, \infty)$ ,  $a, b \in C_{\delta_0}^\mu(\overline{D}, \infty)$  где  $\delta_0 < -1 < \delta < 0$ , то условие обратимости матрицы-функции  $G(t)$  необходимо и достаточно для фредгольмовости задачи (1)–(2) в классе  $C_{A,\delta}^\mu(\overline{D}) = \{U \in C^1(D) \cap C_\delta^\mu(\overline{D}, \infty), L_A \in C_{\delta-1}^\mu(\overline{D}, \infty)\}$  и ее индекс дается формулой  $\alpha = -2\operatorname{Ind} G - ml$ .

Весовое пространство Гельдера  $C_\delta^\mu(\overline{D}, \infty)$  из теоремы введено в [1].

**Литература**

- Солдатов А.П. Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи. // Современная математика. Фундаментальные направления. 2016. Т. 63. С. 1–179.

## К ФУНКТОРИАЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ИЕРАРХИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Чернышев Г.В.

ИИПРУ КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; chern\_gen@mail333.com

Функтор есть отображение между объектами, морфизмами одной категории и объектами, морфизмами другой категории, сохраняющее структуру категории [1]. Если исходной и целевой является одна и та же категория, подобные отображения называются эндофункторми.

В докладе рассматриваются вопросы использования функтров при анализе свойств иерархических структур. Одно из представлений иерархических структур задается (малой) категорией путей  $\mathbb{C}_P$  [2].

Для категории  $\mathbb{C}_P$  схемой названа категория  $\mathbb{S}_P$  (с тем же множеством объектов), такая, что каждый морфизм из  $\mathbb{C}_P$  изоморден ровно одному морфизму из  $\mathbb{S}_P$ .

Основные соотношения между категориями  $\mathbb{C}_P$  и  $\mathbb{S}_P$  характеризуются следующей коммутативной диаграммой:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{S}_P & \xrightleftharpoons[\mathbf{F}_{abs}]{\mathbf{F}_{cons}} & \mathbb{C}_P & & \\ \downarrow \mathbf{F}_{pr} & & & & \downarrow \mathbf{F}_{flt} \\ \mathbb{S}'_P & \xrightleftharpoons[\mathbf{F}'_{abs}]{\mathbf{F}'_{cons}} & \mathbb{C}'_P & & \end{array}$$

где  $\mathbb{S}_P$  оказывается гомоморфным представлением категории  $\mathbb{C}_P$  с помощью функтора абстрагирования  $\mathbf{F}_{abs}$ ; функтор  $\mathbf{F}_{cons}$  задает обратное отображение; эндофунктры  $\mathbf{F}_{pr}$  и  $\mathbf{F}_{flt}$  осуществляют отображения проекции и фильтрации, соответственно, к подкатегориям  $\mathbb{S}'_P$  и  $\mathbb{C}'_P$ , которые связаны функторами  $\mathbf{F}'_{cons}$  и  $\mathbf{F}'_{abs}$ .

### Литература

1. Маклейн С. Категории для работающего математика. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 352 с.
2. Чернышев Г.В. Представление иерархических структур последовательностями // Известия КБНЦ РАН. 2015. № 2(64). С. 36–41.

**ФОРМУЛА ПРОИЗВЕДЕНИЯ, ГЛОБАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ И  
ПОЛИАДИЧЕСКИЕ ЧИСЛА**

**Чирский В.Г.**

*МГУ им. М.В. Ломоносова; МПГУ; РАНХиГС, Москва, Россия;*  
*vgchirskii@yandex.ru*

Доклад посвящен роли формулы произведения в исследовании ряда задач, связанных с понятием глобального соотношения [1] с теорией арифметических свойств  $F$ -рядов [2–8] и теорией полиадических чисел.

Отмечены некоторые практические приложения полученных результатов [9–10].

**Литература**

1. Bombieri E. On  $G$ -functions recent progress in analytic number theory // Vol. 2. London: Academic Press, 1981. P. 1–68.
2. Chirskii V.G. Topical problems of the theory of transcendental numbers: developments of approaches to their solutions in the works of Yu.V. Nesterenko // Russian Journal of Mathematical Physics. Vol. 24, № 2. P. 153–171.
3. Chirskii V.G., Bertrand D., Yebbou J. Effective estimates for global relations on Euler-type series // Annales de la Faculté des sciences de Toulouse. 2004. Vol. XIII, № 2. P. 241–260.
4. Чирский В.Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Известия РАН. Серия математическая. Т. 81, вып. 2. С. 215–232.
5. Чирский В.Г. О рядах, алгебраически независимых во всех локальных полях // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 1978. № 3. С. 29–34.
6. Чирский В.Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Доклады академии наук. 2014. Т. 459, № 6. С. 677–679.
7. Чирский В.Г. Об арифметических свойствах обобщенных гипергеометрических рядов с иррациональными параметрами // Известия РАН. Серия математическая. 2014. Т. 786, вып. 6. С. 193–210.
8. Чирский В.Г. Об арифметических свойствах ряда Эйлера // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2015. № 1. С. 59–61.
9. Чирский В.Г., Матвеев В.Ю. О представлении натуральных чисел // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2013. № 6. С. 57–59.
10. Чирский В.Г., Матвеев В.Ю. О некоторых свойствах полиадических разложений // Чебышевский сборник. 2013. Т. 14, вып. 2. С. 164–172.

## О СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЯХ И СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ *d*-ОПЕРАТОРА РАЦИОНАЛЬНЫХ ПОРЯДКОВ

**Чуриков В.А.**

*ТГУ, Томск, Россия; vachurikov@list.ru*

В дробном анализе на основе *d*-оператора для рациональных порядков  $s > 0$ ,  $s = r/p$  ( $r, p \in \mathbb{N}$ ) имеется  $r$  экспонент  $\exp_{r/p}^{\{l\}}(x)$ ,  $l = 1, 2, 3, \dots, r$ .

$$\exp_{r/p}^{\{l\}}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha_{r/p}^{\{l\}} x)^{\frac{nr}{p}-1}}{\Gamma(nr/p)} = \frac{(\alpha_{r/p}^{\{l\}} x)^{\frac{r}{p}-1}}{\Gamma(r/p)} + \frac{(\alpha_{r/p}^{\{l\}} x)^{\frac{2r}{p}-1}}{\Gamma(3r/p)} + \frac{(\alpha_{r/p}^{\{l\}} x)^{\frac{3r}{p}-1}}{\Gamma(5r/p)} + \dots$$

Здесь  $\Gamma(\dots)$  — гамма-функция;  $\alpha_{r/p}^{\{l\}}$  — корни инвариантности, являющиеся корнями уравнения инвариантности  $(\alpha_{r/p}^{\{l\}})^{p/r} = 1$ , которые будут иметь вид:

$$\alpha_{r/p}^{\{l\}} = 1^{p/r\{l\}} = \exp(i2\pi pl/r) = \cos(2\pi pl/r) + i \sin(2\pi pl/r).$$

Множество из  $r$  экспонент порядка  $r/p$  являются собственными функциями дифференцирования и интегрирования *d*-оператора с точностью до умножения на константу:  $d^{\mp r/p}x : \exp_{r/p}^{\{l\}}(x) = \exp_{r/p}^{\{l\}}(x) + C_{\mp r/p}(x)$ , где  $d^{-r/p}x$  и  $d^{r/p}x$  — операторы дифференцирования и интегрирования порядка  $r/p$ ;  $C_{-r/p}(x)$ ,  $C_{r/p}(x)$  полиномы дифференцирования и интегрирования — произвольные функции, приравняем их к нулю  $C_{\mp r/p}(x) = 0$ .

Найдём собственные значения *d*-оператора, подставив в экспоненты порядка  $r/p$  число 1 и найдём производную и первообразную порядка  $r/p$ :  $d^{r/p}x : \exp_{r/p}^{\{l\}}(x) = d^{r/p}x : \exp_{r/p}^{\{l\}}(1 \cdot x) = 1^{\pm r/p\{l\}} \exp_{r/p}^{\{l\}}(x)$ .

Коэффициенты  $1^{-r/p\{l\}}$  и  $1^{r/p\{l\}}$  образуют  $r$  собственных значений экспонент операторов дифференцирования и интегрирования:  
 $1^{\mp r/p\{l\}} = \exp(\mp i2\pi lr/p) = \cos(2\pi lr/p) \mp i \sin(2\pi lr/p)$ ,  $l = 1, 2, 3, \dots, r$ .

**Теорема.** Собственными функциями дробного дифференцирования и *d*-оператора дробного интегрирования вещественного рационального порядка  $r/p$ , с точностью до сложения с константами дифференцирования и интегрирования ( $r, p \in \mathbb{N}, r > 1$ ), является множество  $r$  экспонент порядка  $r/p$ , а собственными значениями для каждой экспоненты является множество  $r$  комплексных чисел для оператора дифференцирования и для оператора интегрирования, модули которых  $|1^{-r/p\{l\}}| = |1^{r/p\{l\}}| = 1$ .

Все собственные значения *d*-оператора дифференцирования (интегрирования) всех собственных функций оператора образуют точечный спектр, где каждое собственное значение появляется  $r$  раз, т.е. спектр вырожден с кратностью  $r$ . Справедливы равенства: для  $l=k$  выполняется  $(\alpha_{r/p}^{\{l\}} x)^{r/p} = (1^{r/p\{k\}})^{p/r}$ , а для  $l=1 - \alpha_{r/p}^{\{1\}} = 1^{\{1\}} = 1$ .

**ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ АППРОКСИМАЦИИ НА КЛАССЕ  
 $\delta$ -НЕПРЕРЫВНЫХ ОДНОМЕРНЫХ ФУНКЦИЙ**

**Шамилова Б.Г.**

*БГУ, Баку, Азербайджан; bahar322@mail.ru*

Решается следующая задача. Заданы значения аппроксимируемой функции в  $N$  точках:  $(x_i, y_i), i = 1, \dots, N$ .

На отрезке  $[a, b]$  определим следующий класс  $\delta$ -непрерывных функций  $C_{n,\delta}(f)$ , где  $f = f(x, P)$ ,  $P \in R^k$  – параметрически заданная функция. Функции из  $C_{n,\delta}(f)$ : а) кусочно-непрерывны; б) их непрерывные части определены функцией  $f = f(x, P)$ , но возможно с разными значениями параметров на разных отрезках; в) число возможных разрывов не более  $n$ ; г) разрыв на границах отрезков не превышает величины  $\delta$ .

Отметим, что  $\delta$ -непрерывными функциями могут определяться, например, функции принадлежности из теории нечетких множеств.

Требуется найти точки  $a_s \in [x_1, x_N], s = 2, \dots, n - 1$ , и определенные на отрезках  $[a_{s-1}, a_s]$  параметры  $P_s$  функций  $f(x, P_s)$ , которые минимизируют функцию невязки:

$$S(P, A) = \sum_{i=1}^N \sum_{x_i \in [a_{s-1}, a_s], s=1}^n [f(x_i, P_s) - y_i]^2 \rightarrow \min_{P, A} .$$

Здесь  $A = (a_2, \dots, a_{N-1})$ ,  $P = (P_1, \dots, P_n)$ ,  $P_s \in R^k$  – являются оптимизируемыми параметрами, при этом должны выполняться условия:

$$a_{s-1} \leq a_s, |f(a_s, P_{s-1}) - f(a_s, P_s)| \leq \delta, s = 1, \dots, n.$$

Полученная в результате решения задачи функция, кусочно определенная на отрезке  $[x_1, x_N]$ , исходя из условий задачи принадлежит классу  $C_{n,\delta}(f)$ .

В докладе будут приведены результаты численных экспериментов.

## ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С СИНГУЛЯРНОЙ ТОЧКОЙ

**Шамсудинов Ф.М.<sup>1</sup>, Абдуллоев Т.И.<sup>2</sup>**

*КТГУ им. Носира Хусрава, Курган-тюбе, Таджикистан;*

<sup>1</sup>*faizullo100@yahoo.com;* <sup>2</sup>*tojiddin1981@mail.ru*

Пусть  $D$  прямоугольник  $D = \{(x, y) : 0 < x < \delta_1, 0 < y < \delta_2\}$ . Далее обозначим  $\Gamma_1 = \{y = 0, 0 < x < \delta_1\}$ ,  $\Gamma_2 = \{x = 0, 0 < y < \delta_2\}$ .

В области  $D$  рассмотрим систему следующего вида

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{a_1(x, y)}{r^\alpha} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b_1(x, y)}{r^\beta} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{c_1(x, y)}{r^{\alpha+\beta}} u = \frac{f_1(x, y)}{r^{\alpha+\beta}}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a_2(x, y)}{x^\gamma} u = \frac{f_2(x, y)}{x^\gamma}, \end{cases} \quad (1)$$

где  $r^2 = x^2 + y^2$ ,  $a_j(x, y)$ ,  $b_1(x, y)$ ,  $c_1(x, y)$ ,  $f_j(x, y)$ ,  $j = \overline{1, 2}$ , – заданные в области  $D$  функции,  $\alpha < 1$ ,  $\beta < 1$ ,  $\gamma = 1$ .

Проблеме исследования уравнений и переопределённых систем с регулярными, сингулярными и сверхсингулярными коэффициентами, посвящены работы Л.Г. Михайлова, Н.Р. Раджабова, Ж.Н. Тасмамбетова, А. Хасанова и других авторов.

В рассматриваемой работе, на основе способа разработанного в [1], для системы уравнений (1), получены представления многообразия решений при помощи произвольных постоянных.

**Теорема.** *Пусть в системе уравнений (1) коэффициенты и правые части связаны между собой определенным образом и удовлетворяют некоторым условиям типа гладкости и совместности. Кроме того  $a_2(0, 0)$  удовлетворяет условию типа Гёльдера. Тогда любое решение системы уравнений (1) из класса  $C_2(D)$  представимо в виде*

$$u(x, y) = \Omega_1(\varphi_1(x), \Psi_1(y), f_1(x, y)),$$

$$\varphi_1(x) = N_1(c_1, f_1(x, 0)), \Psi_1(y) = F(y),$$

где  $\Omega_1(\varphi_1(x), \Psi_1(y), f_1(x, y))$ ,  $N_1(c_1, f_1(x, 0))$  – известные интегральные операторы,  $F(y)$  – известная функция,  $c_1$  – произвольная постоянная.

### Литература

1. Раджабов Н.Р. Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами. Душанбе: Изд. ТГУ, 1992. 236 с.

**МЕТОДИКА ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ  
ТРЕХМЕРНОЙ МОДЕЛИ КОНВЕКТИВНОГО ОБЛАКА**

**Шаповалов В.А.**

*ВГИ, Нальчик, Россия; atajuk@mail.ru*

Система уравнений модели облака, описывающая изменение во времени динамических и микрофизических характеристик облака, состоит из 3 уравнений движения, уравнений баланса тепла и влаги, 137 уравнений, описывающих спектр облачных капель, кристаллов и частиц микро выбросов. Помимо этого, для того чтобы решение удовлетворяло уравнению неразрывности, необходимо на каждом временном шаге решать трехмерное эллиптическое уравнение для возмущения давления. Одним из методов, широко используемых для решения таких задач, является метод расщепления, разработанный Г. И. Марчуком, усовершенствованный вариант этого метода – схема предиктор с дивергентным корректором – успешно применялся при моделировании кучевых облаков Р. Пастушковым. Проведенные исследования, показали, что, несмотря на определенную сложность в реализации этой схемы, она обеспечивает необходимую устойчивость счета, аппроксимацию 2-го порядка точности по пространству и времени и является консервативной.

Использованы методы расщепления по физическим процессам и по компонентного расщепления (локально-одномерные схемы).

Дифференциальный оператор  $A$  и соответствующий ему разностный оператор  $\Lambda$  можно представить в виде суммы операторов, каждый из которых включает производные лишь по одной пространственной переменной и разности лишь вдоль одного направления соответственно. Всего пространственных направлений  $N$ . Такие дифференциальные и разностные операторы называют локально-одномерными. И дифференциальный, и разностный операторы записываются в виде суммы локально-одномерных:

Применение неявных разностных схем к решению систем уравнений в частных производных параболического типа приводит к системам алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей. Такие системы уравнений получаются также в случае решения уравнения Лапласа блочными итерационными методами.

Уравнения модели облака в конечно-разностном виде аппроксимировались центральными и направленными разностями для пространственных переменных, а также направленными разностями по времени. Получаемая при этом алгебраическая система решалась методом прогонки.

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕНОСА  
МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ ПРИМЕСИ С УЧЁТОМ ОРОГРАФИИ  
МЕСТНОСТИ**

**Шаповалов В.А.<sup>1</sup>, Аджиева А.А.<sup>2</sup>, Машуков И.Х.<sup>3</sup>**

<sup>1,3</sup>ВГИ, Нальчик, Россия; vet555\_83@mail.ru

<sup>2</sup>КБГАУ, Нальчик, Россия; aida-adzhieva@mail.ru

В условиях повышения частоты техногенных выбросов и катастрофических стихийных явлений человечество должно совершенствовать методы и средства обеспечения безопасных условий жизнедеятельности. Развиваются модели различной сложности [1, 2] с использованием численного моделирования. Была создана и проходит опытные испытания трёхмерная нестационарная численная модель, перенос многокомпонентных газовых примесей в которой рассчитывается с учётом микрофизических процессов вымывания осадками и туманами [3]. Основные уравнения для скорости измерения концентрации многокомпонентных газовых примесей и аэрозолей записываются в виде (1)–(2).

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial C_i}{\partial x_j} = F_i^{gas} - P_i^{nucl} - P_i^{cond} + P_i^{phot} + \frac{\partial}{\partial x_j} K_{jj} \frac{\partial C_i}{\partial x_j}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + (u_j - \delta_{j3} w_g) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} = F_k^{aer} + P_k^{nucl} + P_k^{cond} + P_k^{phot} + \frac{\partial}{\partial x_j} K_{jj} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}. \quad (2)$$

Учёт метеорологических параметров и орографии позволяет более детально исследовать загрязнение воздуха. Полученные результаты способствуют совершенствованию методов расчёта загрязнения воздуха в локальной зоне.

**Литература**

1. Алоян А.Е. Динамика и кинетика газовых примесей и аэрозолей в атмосфере / Курс лекций. М.: ИВМ РАН, 2002. 201 с.
2. Пьянкова Э.А. Исследование процессов переноса пассивной примеси в атмосфере Прибайкалья на основе сценарного численного моделирования // Интерэкско Гео-Сибирь. 2015. Т. 4, № 1. С. 135–139.
3. Рязанов В.И., Шаповалов А.В., Шаповалов В.А. Моделирование распространения примесей в атмосфере с учетом локальных метеорологических условий // Физика облаков и активные воздействия. Склоновые процессы. Экологические проблемы. Загрязнение окружающей среды. Сборник научных трудов Высокогорного геофизического института, Уфа: ООО Аэтерна, 2017. С. 17–23.

**ПОЛИНОМИАЛЬНО РАЗРЕШИМЫЙ КЛАСС ЗАДАЧ ОБ ОСТОВНЫХ  
ДЕРЕВЬЯХ С ТОПОЛОГИЧЕСКИМ КРИТЕРИЕМ**

**Шапошникова О.И.**

*СевКавГГТА, Черкесск, Россия; novolgashap@mail.ru*

Однокритериальные оптимизационные задачи об остовных деревьях с топологическим критерием полиномиально разрешимы.

**Лемма 1.** Задача об остовном дереве с максимизируемой целевой функцией степени дерева  $W(x) \rightarrow \max$  полиномиально разрешима [2].

**Лемма 2.** Задача об остовном дереве с ЦФ  $\rho(x) \rightarrow \min$  полиномиально разрешима [2].

Трудоемкость нахождения дерева минимального радиуса не превосходит  $O(n^3)$ .

**Литература**

1. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982. 416 с.
2. Шапошникова О.И. Задача о лесах на графах и гиперграфах и ее приложение: Автореферат дис. . . . к.ф.-м.н., Ставрополь-2003.

**ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С  
ОТКЛОНИЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ В МЛАДШИХ ЧЛЕНАХ**

**Шарданова М.А.**

*КБГУ, Нальчик, Россия; shardanova@icloud.com*

Работа посвящена исследованию однозначной разрешимости первой краевой задачи для линейного дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом второго порядка с переменными коэффициентами. Получена априорная оценка краевой задачи, доказано существование решения сведением к интегральному уравнению Фредгольма. Результат сформулирован в виде теоремы.

Рассмотрим краевую задачу

$$(k(x)u'(x))' - g(x)u(x) + mu(l-x) = -f(x), \quad 0 < x < l, \quad (1)$$

$$u(0) = 0, u(l) = 0, \quad (2)$$

где постоянное число  $m$  удовлетворяет условию

$$|m| < \frac{4c_1}{l^2}.$$

**Теорема.** Пусть  $k(x) \in C^1[0, l]$ ,  $f(x) \in C[0, l]$ ,  $g(x) \in C[0, l]$ ,  $k(x) \geq c_1 > 0$ ,  $g(x) \geq 0$  всюду на  $[0, l]$ . Тогда для решения задачи (1), (2) имеет место априорная оценка через правую часть

$$\|u\|_{C[0,l]} \geq \frac{l^2}{4c_1 - l^2|m|} \|f\|_C.$$

При этом решение задачи (1), (2) существует, единственно и принадлежит классу  $C^2[0, l]$ .

**Литература**

1. Васильева А.Б., Тихонов Н.А. Интегральные уравнения. Москва: Физматлит, 2002. 152 с.
2. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. Москва: Наука, 1978. 592 с.
3. Abregov M.H., Kanchukoev V.Z., Shardanova M.A. Numerical methods for solving the first-kind boundary value problem for a linear second-order differential equation with a deviating argument // Journal of Applied Analysis. Poland: De Gruyter, 2017. P. 141–146.

## **ДУАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ МНОГОМЕРНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ**

**Шепетъ И.П.<sup>1</sup>, Литвин Д.Б.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> ТИС, Ставрополь, Россия; ship.1963@mail.ru

<sup>2</sup> СтГАУ, Ставрополь, Россия; litvin-372@yandex.ru

Существуют задачи синтеза стохастического управления по неполной информации, минимизирующего среднее значение функции потерь в условиях, когда точность оценки текущих фазовых координат зависит от вектора управления. При этом можно поставить задачу управлять системой так, чтобы получить вектор оценки, оптимальный на множестве допустимых управлений, т.е. оптимальные управления выбирать из условия достижения наилучшей оценки фазовых координат системы. В этих условиях стохастическое управление дуально, так как выбирает разумный компромисс между стремлениями в каждой реализации уменьшить функцию потерь и увеличить точность оценки.

Примерами задач синтеза оптимального дуального управления могут служить следующие задачи: согласование измерительного и опорного трехгранников инерциальных навигационных систем (начальная выставка); оценка параметров ИНС и идентификация погрешностей чувствительных элементов, зависящих от компонентов вектора управления – пространственного положения чувствительных элементов, при коррекции от датчиков внешней информации (позиционных, скоростных, угловых); идентификация погрешностей чувствительных элементов при наземной калибровке.

При попытке аналитического решения рекуррентных уравнений оптимизации возникают трудности связанные с нахождением условных плотностей вероятностей и выражений для минимальных условных рисков. Преодоление указанных трудностей возможно при представлении управляющих воздействий или траекторий вектора состояния в виде такой последовательности функций, которые обеспечивают последовательно все меньшие значения минимизируемого функционала. Например, метод Релея – Ритца предусматривает разложение траектории вектора состояния или управления в ряд с взвешиваемыми слагаемыми по подходящему набору базисных функций; затем отыскивается значение коэффициентов этого ряда, минимизирующих исходный функционал.

### **Литература**

1. Напольский В.П., Слесаренок С.В., Шепетъ И.П., Захарин А.В., Рубинов В.И. Управляемая инерциальная навигационная мультисистема // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2016. Т. 12, № 4. С. 8–14.

## О НЕКОТОРЫХ РОБАСТНЫХ ПРИНЦИПАХ ОБУЧЕНИЯ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

**Шибзухов З.М.**

*ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; МПГУ, Москва, Россия*

*szport@gmail.com*

Рассматриваются робастные принципы обучения нейронных сетей, которые основаны на различных робастных методах усреднения и суммирования, являющиеся обобщениями методов TS (Trimmed Sum), TM (Trimmed Mean), WS (Winsorized Sum), WM (Winsorized Mean), PTS (Penalized Trimmed Sum), PTM (Penalized Trimmed Mean) и их непрерывно-дифференцируемых обобщений. Рассматриваемые робастные принципы обучения НС основаны на минимизации робастных непрерывно-дифференцируемых оценок сумм или средних от параметризованных функций потерь. Эти принципы можно рассматривать как различные робастные варианты принципа минимизации эмпирического риска.

Предлагаются процедуры обучения нейронных сетей, которые являются аналогами процедуры итеративно перевзвешенной минимизации эмпирического риска [1]. Такие процедуры позволяют на каждом этапе обучения нейронной сети использовать вариант алгоритма обратного распространения с весами примеров.

Приводятся численные эксперименты по обучению нейронных сетей для решения задач регрессии и классификации, которые убедительно показывают устойчивость по отношению большого количества выбросов.

### Литература

1. *Shibzukhov Z.M. On the principle of empirical risk minimization based on averaging aggregation functions // Doklady Mathematics. 2017. Vol. 96, №. 2. P. 494–497.*

---

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-01-00050-а.

## Минимизация $M$ -средних от параметризованных функций

Шибзухов З.М.<sup>1</sup>, Димитриченко Д.П.<sup>2</sup>, Казаков М.А.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; <sup>1</sup>szport@gmail.com; <sup>2</sup>dimdp@rambler.ru

Значительную часть задач машинного обучения можно поставить как задачу минимизации конечных сумм параметризованных функций:  $\mathcal{Q}(\mathbf{w}) = \sum_{k=1}^N v_k \ell_k(\mathbf{w})$ , где  $\ell_1(\mathbf{w}), \dots, \ell_N(\mathbf{w})$  – неотрицательные базисные функции,  $\mathbf{w}$  – вектор неизвестных параметров,  $\mathbf{w} \in \mathbf{W} \subseteq \mathbb{R}^m$ ,  $v_1, \dots, v_N \geq 0$  – неотрицательные числовые веса, например, 1 (арифметическая сумма) или  $1/N$  (среднее арифметическое). Оптимальный набор параметров  $\mathbf{w}^*$  минимизирует целевую функцию  $\mathcal{Q}$ :

$$\mathcal{Q}(\mathbf{w}^*) = \min_{\mathbf{w} \in \mathbf{W}} \mathcal{Q}(\mathbf{w}).$$

Для случая с медианой проблему можно преодолеть, используя  $M$ -средние [1], которые являются дифференцируемыми и, в определенном смысле, приближением медианы:

$$M_\rho\{z_1, \dots, z_N\} = \arg \min_u \sum_{k=1}^N \rho(z_k - u),$$

где  $\rho$  – неотрицательная строго выпуклая функция,  $\rho(0) = 0$ . Если  $\rho$  – дважды дифференцируемая, то  $M_\rho\{z_1, \dots, z_N\}$  имеет все частные производные:

$$\frac{\partial M_\rho}{\partial z_k} = \frac{\rho''(z_k)}{\rho''(z_1) + \dots + \rho''(z_N)}.$$

Показано, что для «приближения» медианы, например, можно использовать следующие функции:

$$\rho_\varepsilon(r) = \sqrt{\varepsilon^2 + r^2} - \varepsilon; \quad \rho_\varepsilon(r) = |r| - \varepsilon \ln(\varepsilon + |r|) - \varepsilon \ln \varepsilon.$$

Такие  $M$ -средние  $M_{\rho_\alpha}$  являются дифференцируемыми и при достаточно малых  $\alpha$  являются робастными, так что они являются устойчивыми по отношению к выбросам (в некоторых случаях вплоть до 50%).

### Литература

1. Huber P.J. Robust Statistics. NY: John Wiley and Sons, 1981. 320 p.

---

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-01-00050-а.

**О РЕШЕНИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА  
МЕТОДОМ ЛУЧЕВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ**

**Шильков А.В.**

*ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия; ale-shilkov@yandex.ru*

Разработан метод решения внутренних краевых задач для линейных эллиптических уравнений второго порядка с помощью перехода к лучевым переменным. Решение ищется в виде суперпозиции вкладов источников, размещенных на лучах, приходящих в данную точку области от ее границ. На коэффициенты, источники и границу области накладываются ограничения, необходимые для существования регулярных решений. Также, на коэффициенты уравнений накладываются некоторые дополнительные, относительно слабые ограничения. Метод отличается от известных методов нахождения явных решений краевых задач, таких как метод функций Грина и метод разделения переменных.

Составлена конечно-аналитическая схема для численного решения краевых задач в области с разрывными коэффициентами и источниками. Область разбивается на ячейки, в пределах которых коэффициенты и источники уравнений имеют необходимые свойства гладкости и непрерывности, а конечные разрывы коэффициентов (если они есть) проходят по границам ячеек. Схема строится с помощью сшивки локальных регулярных решений, выходящих из ячеек на границах ячеек. Для составления схемы оказалось удобным использовать представление локальных решений в лучевых переменных. В сравнении с разностными схемами аналитические схемы имеют ряд недостатков и ряд преимуществ. Наиболее важное преимущество состоит в отсутствии жесткой зависимости точности аппроксимации от размеров и формы ячеек.

---

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №18-01-00857.

## ОГРАНИЧЕННОСТЬ И ОБРАЩЕНИЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ B-ПОТЕНЦИАЛОВ РИССА

**Шишкина Э.Л.**

*ВГУ, Воронеж, Россия; ilina\_dico@mail.ru*

Рассматриваем операторы, реализующие отрицательные дробные степени гиперболического оператора  $\square_\gamma = B_{\gamma_1} - \sum_{i=2}^n B_{\gamma_i}$ ,  $\gamma_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , где

$B_{\gamma_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \frac{\gamma_i}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_k}$  – дифференциальный оператор Бесселя.

Дробные отрицательные степени оператора  $\square_\gamma$  построены в виде обобщенной свертки

$$(I_{P \pm i0, \gamma}^\alpha f)(x) = \frac{e^{\pm \frac{n-1+|\gamma'|}{2}i\pi}}{\gamma_{n,\gamma}(\alpha)} \int_{\mathbb{R}_+^n} (P \pm i0)_\gamma^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}} (\gamma \mathbf{T}^y f)(x) \prod_{i=1}^n y_i^{\gamma_i} dy. \quad (1)$$

В формуле (1)  $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n, x_1 > 0, \dots, x_n > 0\}$ ,  $\gamma_{n,\gamma}(\alpha)$  – нормирующая константа,  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  – мультииндекс, состоящий из положительных чисел,  $|\gamma| = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$ ,  $|\gamma'| = \gamma_2 + \dots + \gamma_n$ ,  $(P \pm i0)_\gamma^\lambda$  – весовые обобщенные функции, порожденные неопределенной квадратичной формой (см. [1]),  $(\gamma \mathbf{T}^y f)(x) = (T_{x_1}^{y_1} \dots T_{x_n}^{y_n} f)(x)$  – многомерный обобщенный сдвиг (см. [2]).

Пусть  $S_{ev}$  – множество шварцевых функций, таких что  $\left. \frac{\partial^{2k+1} f}{\partial x_i^{2k+1}} \right|_{x=0} = 0$  для всех неотрицательных целых  $k$  и всех  $i = 1, \dots, n$ . Для вещественного числа  $p \geq 1$   $L_p^\gamma$  множество функций, для которых конечна норма

$$\|f\|_{p,\gamma} = \left( \int_{\mathbb{R}_+^n} |f(x)|^p x^\gamma dx \right)^{1/p}.$$

**Теорема.** Пусть  $n + |\gamma| - 2 < \alpha < n + |\gamma|$ ,  $1 \leq p < \frac{n+|\gamma|}{\alpha}$ . Для того чтобы следующее неравенство выполнялось

$$\|I_{P \pm i0, \gamma}^\alpha f\|_{q,\gamma} \leq C_{n,\gamma,p} \|f\|_{p,\gamma}, \quad f(x) \in S_{ev} \quad (2)$$

необходимо и достаточно, чтобы  $q = \frac{(n+|\gamma|)p}{n+|\gamma|-\alpha p}$ .

### Литература

1. Шишкина Э.Л. Весовые обобщенные функции, отвечающие квадратичной форме с комплексными коэффициентами // Челябинский физико-математический журнал. 2017. Т. 2, № 1. С. 88–98.
2. Shishkina E.L. On the boundedness of hyperbolic Riesz B-potential // Lithuanian Mathematical Journal. 2016. Т. 56, № 4. С. 540–551.

## **ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ СРЕДНЕГО МЕТОДАМИ НЕПРЕРЫВНОЙ ЛОГИКИ**

**Шматова Е.В.**

*ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; lenavsh@yandex.ru*

Для логического описания моделей с выбросами используется непрерывная логика, методы и функции которой наглядно демонстрируют удобство и адекватность этого аппарата как средство построения логических процедур выявления выбросов в задачах интеллектуальной обработки данных.

Для построения устойчивых к выбросам алгоритмов обучения нейронных сетей большую роль играет принцип минимизации М-средних от функции ошибки [1]. Одним из основных требований для минимизации функции среднего является свойство дифференцируемости. Это свойство обеспечивает непрерывную аппроксимацию функции ошибки. Поэтому логический аналог среднего, например, медиана должна быть дифференцируема:  $med(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$ .

Наличие в НЛ таких свойств как дифференцирование и интегрирование функций [2] позволяет на ее основе строить логический аналог функции среднего от ошибки.

### **Литература**

1. Шибзухов З.М. О принципе минимизации эмпирического риска на основе усредняющих агрегирующих функций // Доклады РАН. 2017. Т. 476, № 5. С. 495–499.
2. Левин В.И. Моделирование комбинаторных задач с помощью непрерывной логики // Вестник ТГУ. 2017. Т. 22, вып. 2. С. 439–448.

---

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-01-00050-а.

## ФРАКТАЛЫ РОЗИ И ИХ ТЕОРЕТИКО-ЧИСЛОВЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Шутов А.В.

МИАН, Москва, Россия; a1981@mail.ru

В работе [1] G. Rauzy построил фрактальный объект, связанный с вещественным корнем кубического уравнения  $\zeta^3 + \zeta^2 + \zeta = 1$ , и получил его многочисленные приложения к задачам теории чисел, комбинаторики слов и символической динамики. Данный объект в последствии получил название фрактала Рози. В.Г. Журавлев [2] построил последовательность разбиений фрактала Рози на более мелкие фракталы (разбиения Рози) и показал, что эти разбиения порождают множества ограниченного остатка для двумерной последовательности дробных доляй ( $\{n\zeta\}$ ,  $\{n\zeta^2\}$ ). Известны многочисленные обобщения фракталов Рози, однако построить для них аналог предложенных В.Г. Журавлевым разбиений ранее не удавалось.

В докладе будет представлена конструкция разбиений Рози для семейства фракталов Рози, предложенных С. Акиямой и связанных с широким классом чисел Пизо. При помощи введенных разбиений получены обобщения результатов В.Г. Журавлева о многомерных множествах ограниченного остатка. Также получен ряд новых приложений, связанных с теоретико-числовыми свойствами натуральных чисел, имеющих заданное окончание жадного разложения по линейным рекуррентным последовательностям.

### Литература

1. Rauzy G. Nombres algébriques et substitutions // Bull. Soc. Math. France. 1982. Т. 110. Р. 110–147.
2. Журавлев В.Г. Разбиения Рози и множества ограниченного остатка // Записки научных семинаров ПОМИ. 2005. Т. 322. С. 83–106.
3. Akiyama S. Pisot number system and its dual tiling // Physics and Theoretical Computer Science. IOS Press. 2007. Р. 133–154.

---

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 14-11-00433.

**АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ВТОРОГО  
РОДА С УСЛОВИЕМ САМАРСКОГО ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО  
УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ  
ХАРАКТЕРИСТИКАМИ**

**Шхагапсоев А.М.**

*ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; sh2ps@yandex.ru*

Априорные оценки локальных краевых задач для обобщенного уравнения с кратными характеристиками были получены в работах [1, 2].

В настоящей работе методом энергетических неравенств получена априорная оценка решения краевой задачи второго рода и нелокальным условием Самарского для уравнения с кратными характеристиками с дробной производной Капuto по времени.

**Задача.** В прямоугольной области  $D = \{(x, y) : 0 < x < r, 0 < y < h\}$  рассмотрим уравнение

$$\partial_{0y}^\alpha u = \lambda_1 u_{xxx} + \lambda_2 u, \quad (1)$$

с граничными и нелокальным условиями

$$u_x(0, y) = 0, \quad u_x(r, y) = 0, \quad \int_0^r u(x, y) dx = 0, \quad 0 \leq y \leq h, \quad (2)$$

и начальным условием

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq r. \quad (3)$$

В данной работе доказана следующая

**Теорема.** Для решения  $u(x, y)$  задачи (1)-(3) справедлива априорная оценка

$$\|u_x\|_0^2 + D_{0y}^{-\alpha} \|u_x\|_0^2 \leq M \|\tau'\|_0^2, \quad \text{если } \lambda_2 < 0, \quad (4)$$

где  $M(\lambda_2, h) > 0$  – известная постоянная.

Из априорной оценки (4) следует единственность и непрерывная зависимость решения от исходных данных.

**Литература**

1. Шхагапсоев А.М. Априорная оценка задачи Каттабрига для обобщенного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2016. Т. 12, № 1.
2. Шхагапсоев А.М. Априорные оценки решения краевых задач для обобщенного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Известия КБНЦ РАН. 2016. Т. 74, № 6. С. 96–101.

**Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками**

**Эгамбердиев Б.Т., Холходжаев Б.Б.**

*ТашИИТ, Ташкент, Узбекистан; rasul.turaev@mail.ru*

В докладе обсуждаются вопросы однозначной разрешимости краевой задачи с неклассическими граничными условиями для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками.

Для уравнения:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sum_{i=0}^2 a_i(x, y) \frac{\partial^i u}{\partial x^i} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = F(x, y). \quad (1)$$

Рассмотрим следующую краевую задачу: найти в области  $D$  решение  $u(x, y)$  уравнения (1) из класса  $C^{2,1}(\bar{D}) \cap C^{3,2}(D)$  удовлетворяющее следующим краевым условиям:

$$\alpha_0(x)u(x, 0) + \alpha_1(x)u(x_0, y) + \alpha_2(x)u(x, 1) = h_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

$$\beta_0(x)u_y(x, 0) + \beta_1(x)u_y(x, 1) = h_1(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (3)$$

$$\gamma_0(x)u(0, y) + \gamma_1(y)u_x(0, y) + \gamma_2(y)u_x(1, y) = \mu_0(y), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (4)$$

$$u_{xx}(0, y) = \mu_1(y), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (5)$$

$$u(1, y) = \mu_2(y), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (6)$$

где  $D = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y \leq 1\}$ ,  $F(x, y), \alpha_i(x), \beta_i(x), h_i(x)$  ( $i = 0, 1$ ),  $\gamma_j(y), \mu_j(y)$ , ( $j = 0, 1, 2$ ) – заданные непрерывные функции своих аргументов, причем  $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0, \beta_0^2 + \beta_1^2 \neq 0, \gamma_0^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 \neq 0$ .

Не ограничивая общности вместо уравнение (1) можно взять уравнение

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sum_{i=0}^2 a_i(x, y) \frac{\partial^i u}{\partial x^i} = F(x, y). \quad (7)$$

Если в уравнении (1)  $b(x, y) \in C^{3,1}(D)$  то преобразование

$$u(x, y) = v(x, y) \exp \left( \frac{1}{2} \int_0^y b(x, t) dt \right)$$

приводит к уравнению (7). При определенных условиях на заданные функции доказана однозначная разрешимость задачи (2)–(6), (7).

**Об одной задаче со свободной границей для  
параболического уравнения типа реакция-диффузия**

**Элмурадов А.Н.**

*ИМ АН РУз, Ташкент, Узбекистан; elmurodov-xtv@mail.uz*

Начиная со второй половины прошлого столетия, были построены и исследованы математические модели биологии и экологии со свободной границей. Для уравнений реакции-диффузии исследованы задачи со свободной границей, моделирующие распространение биологических видов. При этом свободная граница представляет распространение фронта видов. Установлены априорные оценки, доказаны теоремы сравнения и разрешимость поставленных задач, изучены асимптотические свойства ограниченных решений и получены результаты дихотомии (см. [1], [2]).

В настоящей заметке исследуется двухфазная задача со свободной границей для уравнения реакции-диффузии в бесконечной области.

**Задача.** Требуется найти функции  $(s(t), u(x, t), v(t, x))$  удовлетворяющие условиям

$$ut - u_{xx} = u(1 - u), \quad -\infty < x < s(t), \quad t > 0,$$

$$v_t - v_{xx} = v(1 - v), \quad s(t) < x < +\infty, \quad t > 0,$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad -\infty \leq x \leq s(0),$$

$$v(0, x) = v_0(x), \quad s(0) \leq x \leq +\infty,$$

$$u(t, s(t)) = v(t, s(t)) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$\dot{s}(t) = -\mu [u_x(t, s(t)) + \rho v_x(t, s(t))], \quad t \geq 0,$$

где  $x = s(t)$  подвижная граница.

Изучены поведения свободной границы, установлены априорные оценки норм Гельдера, при помощи этих оценок доказаны существование и единственность решения и проведены некоторые их качественные исследования.

**Литература**

1. Du Y., Lin Z. Spreading-vanishing dichotomy in a diffusive logistic model with a free boundary // SIAM J. Math. Anal. 2010. Vol. 42. P. 377–405.
2. Du Y., Lin Z. The diffusive competition model with a free boundary: invasion of a superior or inferior competitor // Discrete Contin. Dynam. Syst. 2014. Vol. 19. P. 3105–3132.

**ВЕКТОРНАЯ ЗАДАЧА ПОКРЫТИЯ ПРЕДФРАКТАЛЬНОГО ГРАФА  
ПЕРЕСЕКАЮЩИМИСЯ ЦЕПЯМИ**

**Эльканова Л.М., Матвеев О.В.**

*СевКавГГТА, Черкесск, Россия; liza\_elkanova@mail.ru*

Задача о покрытиях ориентированного графа цепями представляют большой интерес в содержательной интерпретации, связанной с организацией различных потоков, в том числе транспортных потоков и сетей.

Постановка задачи: найти систему маршрутов транспорта [1] в транспортной сети, позволяющую из любого узла сети попасть в другой узел кратчайшим путем [2] и без пересадок, где множество висячих вершин – это множество узлов, в которых должны начинаться и заканчиваться рационально устроенные маршруты, и в которых, следовательно, наиболее рационально размещать автобусные, троллейбусные, трамвайные станции, железнодорожные депо и т.д.

Для моделирования транспортных потоков в задачах большой размерности будем использовать предфрактальные ориентированные графы. Предфрактальный ориентированный граф определяется рекуррентно, заменяя каждый раз в построенном на предыдущем этапе графе каждую его вершину затравкой [3].

Векторно-целевая функция имеет вид  $F = (f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x))$ .

На множестве допустимых решений определим критерии:

$f_1(x) = |x| \rightarrow \min$ , где  $|x|$  – число всех цепей;

$f_2(x) = \max_{t=1,T} |c_t| \rightarrow \min$ , где  $|c_t|$  – длина цепи  $c_t$ ;

$f_3(x) = \sum_{a_{i,j} \in x} a_{i,j} \rightarrow \min$ ;

$f_4(x) = \sum_{v_i \in x} d(v_i) \rightarrow \min$ , где  $v_i$  – невисячие вершины в покрытии  $x$ .

Для всякого предфрактального ориентированного графа  $\vec{G}_l = (V_l, \vec{E}_l)$ ,  $l = \overline{1, L}$  с затравкой  $\vec{H} = (W, \vec{Q})$  построен алгоритм  $\alpha$ , который строит покрытие  $x$  с оценками по заданным критериям.

**Литература**

1. Юшманов С.В. О минимальной сложности покрытия графов // Сборник статей «Прикладная математика и математическое обеспечение ЭВМ», МГУ, М.: 1981. С. 70–72.
2. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990.
3. Кочкаров А.М. Распознавание фрактальных графов. Алгоритмический подход. Нижний Архыз: РАН САО, 1998.

---

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16 – 07 – 00231а.

**ЗАКОНОМЕРНОСТИ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ  
КЕРАМИКИ В УСЛОВИЯХ ВЫСОКИХ ДАВЛЕНИЙ И ТЕМПЕРАТУР**

**Эмиров С.Н.<sup>1</sup>, Бейбалаев В.Д.<sup>2</sup>, Амирова А.А.<sup>3</sup>,  
Аливердиев А.А.<sup>4</sup>**

<sup>1,2,4</sup>ИПГ ДНЦ РАН, Махачкала, Россия; <sup>1</sup>wemirov@mail.ru, kasprij\_03@mail.ru

<sup>2,4</sup>ДГУ, Махачкала, Россия;

<sup>3</sup>Институт физики ДНЦ РАН, Махачкала, Россия;

Закономерности измерения эффективной теплопроводности  $\lambda(P, T)$  диэлектриков и горных пород в условиях высоких давлений и температур дают достаточно точную информацию о процессах распространения и рассеяния тепловых волн в сложных, блочных и неупорядоченных твёрдых телах. Горная порода песчаник и керамика могут содержать химические соединения, как с кристаллической, так и аморфной структурой, которые имеют разный механизм переноса тепла [1, 2].

Получено уравнение для расчета теплопроводности керамики, в зависимости от температуры и давления, вида:

$$\lambda(T, P) = \lambda_0 \cdot \left(1 + \frac{P}{P_0}\right)^{0.038} \left(\frac{T}{T_0}\right)^{-0.474 \cdot \left(1 + \frac{P}{P_0}\right)^{-0.092}}.$$

**Литература**

1. Emirov S.N., Beybalaev V.D., Gadzhiev G.G., Ramazanova A.E., Amirova A.A., and Aliverdiev A.A. To the description of the temperature and pressure dependences of the thermal conductivity of sandstone and ceramics // Journal of Physics: Conference Series. 2017. Vol. 891.
2. Эмиров С.Н., Бейбалаев В.Д., Рамазанова А.Э., Гаджисиев Г.Г., Амирова А.А., Аливердиев А.А. О температурных и барических закономерностях изменения теплопроводности горных пород // Вестник Новгородского государственного университета им. Ярослава Мудрого. 2017. Т. 103, № 5. С. 52–66.

**О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ  
УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С РАЗЛИЧНЫМИ НАЧАЛАМИ**

**Энеева Л.М.**

*ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; eneeva72@list.ru*

Рассмотрим уравнение

$$D_{0x}^\alpha \partial_{1x}^\alpha u(x) - \lambda u(x) = 0, \quad \alpha \in ]1/2, 1], \quad (1)$$

где  $D_{0x}^\alpha$  и  $\partial_{1x}^\alpha$  – дробные производные Римана – Лиувилля и Капuto с началом в точке  $x = 0$  и в точке  $x = 1$ , соответственно, [1];  $x \in ]0, 1[$ .

Уравнение вида (1) предложено в качестве модельного уравнения движения во фрактальной среде, возникающего с использованием понятия эффективной скорости [2, 3]. Известно [4], что собственные функции задачи Дирихле для уравнения (1) образуют полную ортогональную систему в  $L_2(0, 1)$ , собственные значения вещественны и положительны; в [5] найдена оценка первого собственного значения.

Здесь мы исследуем следующую задачу на собственные значения: *найти решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям*

$$\lim_{x \rightarrow 0} D_{0x}^{\alpha-1} \partial_{1x}^\alpha u(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1} D_{0x}^{\alpha-1} \partial_{1x}^\alpha u(x) = 0. \quad (2)$$

**Теорема.** *Задача (1), (2) не имеет собственных значений, если*

$$0 < |\lambda| < \frac{\alpha \Gamma^2(\alpha)}{2h}, \quad \text{где } h = \sup_{0 < x < 1} \int_x^1 (s-x)^{\alpha-1} s^\alpha ds.$$

**Литература**

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
2. Рехвиашвили С.Ш. К определению физического смысла дробного интегро-дифференцирования // Нелинейный мир. 2007. Т. 5, № 4. С. 194–197.
3. Рехвиашвили С.Ш. Формализм Лагранжа с дробной производной в задачах механики // Письма в ЖТФ. 2004. Т. 30, № 2. С. 33–37.
4. Энеева Л.М. Краевая задача для дифференциального уравнения с производными дробного порядка с различными начальными // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2015. Т. 3, № 2(11). С. 39–44.
5. Энеева Л.М. Оценка первого собственного значения задачи Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения с производными дробного порядка с различными начальными // Известия КБНЦ РАН. 2017. № 1(75). С. 34–40.

**ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНОГО  
ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ТРЕМЯ СИНГУЛЯРНЫМИ  
КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ПАРАМЕТРОМ**

**Эргашев Т.Г.**

*ИМАН, Ташкент, Узбекистан; ergashev.tukhtasin@gmail.com*

Рассмотрим уравнение

$$H_{\alpha}^{p,\lambda}(u) \equiv \sum_{i=1}^p \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum_{j=1}^3 \frac{2\alpha_j}{x_j} \frac{\partial u}{\partial x_j} - \lambda^2 u = 0 \quad (1)$$

в области  $R_p^{3+} = \{x : x_k > 0\}$ , где  $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ;  $\alpha_k$  и  $\lambda$  – постоянные, причем  $0 < 2\alpha_k < 1$ ;  $p > 2$ . Здесь и далее  $k = 1, 2, 3$ . Введем обозначения:  $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0p})$ ,  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ .

В настоящем сообщении найдены 8 линейно независимых фундаментальных решений уравнения (1), одно из которых выглядит так:

$$q_1(x; x_0) = (r^2)^{1-\alpha-\frac{p}{2}} H_{4,3}^0 \left( \alpha - 1 + \frac{p}{2}; \alpha; 2\alpha; \sigma \right),$$

где

$$\begin{aligned} r^2 &= \sum_{i=1}^p (x_i - x_{0i})^2, \quad r_k^2 = (x_k + x_{0k})^2 + \sum_{i=1, i \neq k}^p (x_i - x_{0i})^2, \\ x, x_0 &\in R_p^{3+}, \quad \sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4), \quad \sigma_k = \frac{r^2 - r_k^2}{r^2}, \quad \sigma_4 = -\frac{1}{4}\lambda^2 r^2, \\ H_{4,3}^0(a; b; c; z) &= \sum_{m,n,p,q=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n+p-q} (b_1)_m (b_2)_n (b_3)_p}{(c_1)_m (c_2)_n (c_3)_p m! n! p! q!} z_1^m z_2^n z_3^p z_4^q, \end{aligned} \quad (2)$$

$$b = (b_1, b_2, b_3), c = (c_1, c_2, c_3), z = (z_1, z_2, z_3, z_4), (a)_n = \Gamma(a+n)/\Gamma(a).$$

Определение вырожденной гипергеометрической функции  $H_{4,3}^0$  в виде (2) исходит из книги [1, стр. 36]. Фундаментальные решения уравнения (1) в трехмерном случае при отсутствии и наличии параметра  $\lambda$  исследованы, соответственно, в работах [2] и [3].

**Литература**

1. Srivastava H.M., Karlsson P.W. Multiple Gaussian hypergeometric series. New York, Chichester, Brisbane and Toronto: Halsted Press, 1985. 428 p.
2. Hasanov A., Karimov E.T. Fundamental solutions for a class of three-dimensional elliptic equations with singular coefficients // Applied Math. Letters. 2009. Vol. 22. P. 1828–1832.
3. Urinov A.K., Karimov E.T. On fundamental solutions for 3D singular elliptic equations with a parameter // Applied Math. Letters. 2011. Vol. 24. P. 314–319.

**О ФУНДАМЕНТАЛЬНОМ РЕШЕНИИ ОБЫКНОВЕННОГО  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕННОГО  
ПОРЯДКА**

**Эфендиев Б.И.**

*ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; beslan\_efendiev@mail.ru*

В интервале  $0 < x < l$  рассмотрим уравнение

$$\int_0^1 \mu(\alpha) D_{0x}^\alpha u(x) d\alpha + \lambda u(x) = f(x), \quad (1)$$

где

$$D_{0x}^\alpha u(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^x \frac{u(t)dt}{(x-t)^{\alpha+1}}, & \alpha < 0, \\ u(x), & \alpha = 0, \\ \frac{d^n}{dx^n} D_{0x}^{\alpha-n} u(x), & n-1 < \alpha \leq n, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

– оператор дробного интегро-дифференцирования Римана – Лиувилля порядка  $\alpha$  [1],  $\Gamma(\alpha)$  – гамма-функция Эйлера,  $\mu(\alpha)$ ,  $f(x)$  – заданные функции,  $\lambda$  – const.

В данной работе исследуются вопросы, связанные с построением фундаментального решения уравнения (1).

**Литература**

1. Нахушев А.М. О непрерывных дифференциальных уравнениях и их разностных аналогах // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300, № 4. С. 796-799.

---

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-01-00462 А.

**О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТНОГО ПОРЯДКА**

**Юлдашева А.В.**

НУУз, Ташкент, Узбекистан; yuasv86@mail.ru

В работе рассматривается уравнение

$$\sum_{i=1}^k \frac{\partial^{2i} u}{\partial x^{2i}} - \frac{\partial^{2p} u}{\partial t^{2p}} = f(x, t), k, p \in N, 0 \leq x \leq a, 0 \leq t \leq T$$

с краевыми условиями

$$\frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}}|_{x=0} = \frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}}|_{x=a} = 0, m = 0, 1, \dots, k-1,$$

$$\frac{\partial^{2m} u}{\partial t^{2m}}|_{t=0} = \frac{\partial^{2m} u}{\partial t^{2m}}|_{t=T} = 0, m = 0, 1, \dots, p-1.$$

**Теорема 1.** Пусть  $k-p$  нечетное. Тогда, если функция  $f(x, t) \in C_{x,t}^{k+2,p+1}(0 \leq x \leq a, 0 \leq t \leq T)$  и

$$\frac{\partial^{2m} f}{\partial x^{2m}}|_{x=0} = \frac{\partial^{2m} f}{\partial x^{2m}}|_{x=a} = 0,$$

$m = 0, 1, \dots, \frac{k}{2}$ , если  $k$  – четное и  $m = 0, 1, \dots, \frac{k+1}{2}$ , если  $k$  – нечетное,

$$\frac{\partial^{2m} u}{\partial t^{2m}}|_{t=0} = \frac{\partial^{2m} u}{\partial t^{2m}}|_{t=T} = 0,$$

$m = 0, 1, \dots, \frac{p}{2}$ , если  $p$  – четное и  $m = 0, 1, \dots, \frac{p-1}{2}$ , если  $p$  – нечетное, то задача имеет единственное решение.

**Теорема 2.** Пусть  $k-p$  четное. Тогда, если числа  $(\frac{\pi}{a})^{k+1}$  и  $(\frac{\pi}{T})^p$  являются иррациональными алгебраическими числами степени 2, а функция  $f(x, t) \in C_{x,t}^{k+2,p+1}(0 \leq x \leq a, 0 \leq t \leq T)$  и

$$\frac{\partial^{2m} f}{\partial x^{2m}}|_{x=0} = \frac{\partial^{2m} f}{\partial x^{2m}}|_{x=a} = 0, m = 0, 1, \dots, k+1,$$

$$\frac{\partial^{2m} u}{\partial t^{2m}}|_{t=0} = \frac{\partial^{2m} u}{\partial t^{2m}}|_{t=T} = 0,$$

$m = 0, 1, \dots, \frac{9p-4}{8}$ , если  $p$  – четное и  $m = 0, 1, \dots, \frac{9p+4}{8}$ , если  $p$  – нечетное, то задача имеет единственное решение.

**ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ  
НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ  
ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДИФФУЗИОННОГО  
ТИПА**

**Юлдашев А.В.<sup>1</sup>, Губайдуллин Р.Р.<sup>2</sup>, Лукащук С.Ю.<sup>3</sup>**

*УГАТУ, Уфа, Россия; <sup>1</sup>art@ugatu.su; <sup>2</sup>ratmir@ugatu.su; <sup>3</sup>lsu@ugatu.su*

Численное решение начально-краевых задач для уравнений в частных дробных производных в многомерных областях требует значительных вычислительных ресурсов. При этом использование таких возможностей современных вычислительных систем как многопроцессорность, многоядерность, наличие графических ускорителей требует применения соответствующих параллельных вычислительных алгоритмов. Для уравнений с дробными производными только по времени разработка таких алгоритмов, основанных на принципах пространственной декомпозиции расчетной области, не представляет принципиальных сложностей. Однако применение данного принципа существенно осложняется для уравнений с дробными пространственными производными.

В докладе рассматривается задача численного решения уравнений аномальной диффузии с дробными производными по пространственным переменным. Дискретизация уравнения при использовании полностью неявной схемы приводит к СЛАУ с полностью заполненной матрицей [1], сложность решения которой прямыми методами имеет порядок  $O(n^3)$ , где  $n$  – количество уравнений системы. Обсуждается возможность использования итерационных методов с проектированием на подпространства Крылова [2] для решения таких СЛАУ. Для достижения приемлемой скорости сходимости используются предобусловливатели на основе аппроксимации обратной матрицы. Приводятся результаты исследования поведения итерационных методов, сравнение параллельных реализаций прямого метода (с использованием LU-разложения) и предобусловленных итерационных методов.

**Литература**

1. Головизнин В.М., Киселев В.П., Короткин И.А., Юрков Ю.И. Некоторые особенности вычислительных алгоритмов для уравнения дробной диффузии // Препринт № IBRAE-2002-01. М.: ИБРАЭ РАН, 2002. 57 с.
2. Saad Y. Iterative Methods for Sparse Linear Systems. Philadelphia: Siam, 2003. 552 p.

---

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ, государственное задание № 1.3103.2017/4.6.

## GPU-BASED SYSTEM OF EQUATION SOLVER

**Agakhanova Ya.S.**

*Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, Russia;  
ladushki\_22@mail.ru*

In this paper we studied a GPU-based system of equation solver. We developed system of equation, which is a GPU-based system of equation solver for real-symmetric matrices. We confirmed that our method outperforms state-of-the-art GPU-based as one of Block Krylov subspace methods, the Block Lánczos method has been proposed. The number of iterations of the Block Lánczos method may smaller than that of the Lánczos method. However, if column vectors of  $n \times L$  matrices of the Block Lánczos method are numerically linearly dependent, the method becomes unstable. We improve the convergence behavior of the Block Lánczos method by performing orthonormalization of column vectors. We are shows the relative residual history of the Block Lánczos method and the Block Lánczos method with orthonormalization. Test problem is a linear system derived from The University of Florida Sparse Matrix Collection. The size  $n$  of the matrix is 19,896, and the number  $L$  of the right-hand sides is 32 the relative residual norm of the Block Lánczos method diverged. On the other hand, that of the Block Lánczos method with orthonormalization converged.

### References

1. Roosta-Khorasani F. and Ascher U. Improved bounds on sample size for implicit matrix trace estimators // Foundations of computational mathematics. 2015. Vol. 15, № 5. P. 1187–1212.
2. Saad Y. Analysis of some Krylov subspace approximations to the matrix exponential operator // SIAM Journal on Numerical Analysis. 1992. Vol. 29, № 1. P. 209–228.
3. Saad Y. Iterative Methods for Sparse Linear Systems // SIAM Journal on Numerical Analysis. 2003.
4. Simon H.D. The Lanczos algorithm with partial reorthogonalization // Mathematics of Computation. 1984. Vol. 42, № 165. P. 115–142.

**A HIGH-ORDER DIFFERENCE SCHEMES FOR THE DIFFUSION  
EQUATION OF VARIABLE ORDER**

**Alikhanov A.A.**

*IAMA KBSC RAS, Nalchik, Russia; aaalikhanov@gmail.com*

Solutions of boundary value problems for a diffusion equation of variable order in differential and difference settings are studied [1]. In the paper [2] has been found a special point for the interpolation approximation of the Caputo fractional derivative and derived a numerical differentiation  $L2 - 1_\sigma$  formula to approximate the Caputo fractional derivative at this point with the numerical accuracy of order  $3 - \alpha$  uniformly. In the paper [3] a new difference analog of the Caputo fractional derivative with the order of approximation  $3 - \alpha$ , called  $L1 - 2$  formula, is constructed. However, until now stability and convergence of difference schemes constructed on the basis of the formula  $L1 - 2$  remains a challenge. The present talk are devoted to high-order of approximating difference schemes for the diffusion equation of variable order constructed on the basis of  $L2 - 1_\sigma$ . The obtained results are supported by the numerical calculations carried out for some test problems.

**References**

1. *Alikhanov A.A.* Boundary value problems for the diffusion equation of the variable order in differential and difference settings // Appl. Math. Comput. 2012. Vol. 219. P. 3938–3946.
2. *Alikhanov A.A.* A new difference scheme for the time fractional diffusion equation // J. Comput. Phys. 2015. Vol. 280. P. 424–438.
3. *Gao G.H., Sun Z.Z. and Zhang H.W.* A new fractional numerical differentiation formula to approximate the Caputo fractional derivative and its applications // J. Comput. Phys. 2014. Vol. 259. P. 33–50.

**PROBABILITY DENSITY DISTRIBUTION OF EQUIVALENT PHOTONS  
IN ELECTRON FROM  $e^+e^- \rightarrow \gamma Z$**

**Alikhanov I.A.**

*INR RAS, Moscow, Russia; IAMO KBSC RAS, Nalchik, Russia;  
ials pbu@gmail.com*

A variety of high energy reactions initiated by electrically charged particles can be factorized into two subprocesses. The first one is emission of a photon by an incident particle. The second is, for example, absorption of the photon by another participant of the reaction. This factorization is known as the Weizsäcker-Williams or equivalent photon approximation (EPA) and able to greatly simplify calculations leading to reasonably accurate predictions [1]. The main component of EPA is the probability density function,  $f_{\gamma/e}(x, Q^2)$ , of finding a photon in the electron with a fraction  $x$  of the electron's momentum. In this paper we show that  $f_{\gamma/e}(x, Q^2)$  can be easily derived from the following reaction:



where  $Z$  is the Standard Model massive neutral gauge boson ( $m_Z = 91.2$  GeV). In the presented model already the narrow-width approximation of the  $e^+e^- \rightarrow Z$  subprocess gives the probability density in a very good (within a few percent) agreement with other results independently obtained in the literature.

**References**

1. Chen M.S., Zerwas P.M. Equivalent-Particle Approximations in electron and Photon Processes of Higher Order QED // Phys. Rev. D **12** (1975) 187.

**ON PERIODIC PROBLEM FOR SYSTEM OF HYPERBOLIC EQUATIONS  
WITH PIECEWISE CONSTANT ARGUMENT**

**Assanova A.T.**

*IMMM, Almaty, Kazakhstan; anarasanova@list.ru; assanova@math.kz*

At the domain  $\Omega = [0, T] \times [0, \omega]$  we consider the periodic problem for system of hyperbolic equations with piecewise argument

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t \partial x} &= A(t, x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} + B(t, x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + C(t, x)u + \\ &+ A_1(t, x) \frac{\partial u(\gamma(t), x)}{\partial x} + B_1(t, x) \frac{\partial u(\gamma(t), x)}{\partial t} + C_1(t, x)u(\gamma(t), x) + f(t, x), \quad (1) \end{aligned}$$

$$u(0, x) = u(T, x), \quad x \in [0, \omega], \quad (2)$$

$$u(t, 0) = \psi(t), \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

where  $u(t, x) = \text{col}(u_1(t, x), \dots, u_n(t, x))$  is unknown function, the  $(n \times n)$  matrices  $A(t, x)$ ,  $B(t, x)$ ,  $C(t, x)$ ,  $A_1(t, x)$ ,  $B_1(t, x)$ ,  $C_1(t, x)$  and  $n$  vector function  $f(t, x)$  are continuous on  $\Omega$ ,  $\gamma(t) = \zeta_i$ , if  $t \in [t_i, t_{i+1})$ ,  $t_i \leq \zeta_i \leq t_{i+1}$ ,  $i = \overline{0, m}$ ,  $t_0 = 0$ ,  $t_{m+1} = T$ ,  $[0, T] = \bigcup_{i=0}^m [t_i, t_{i+1})$ , the  $n$  vector function  $\psi(t)$  is continuously differentiable on  $[0, T]$  and satisfies of condition  $\psi(0) = \psi(T)$ .

A function  $u(t, x)$  is a solution of problem (1)–(3) on  $\Omega$  if: (i)  $u(t, x)$  is continuous on  $\Omega$ ; (ii) the partial derivatives  $\frac{\partial u(t, x)}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u(t, x)}{\partial t}$  and  $\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t \partial x}$  exist at each point  $(t, x) \in \Omega$  with the possible exception of the lines  $t_i$ ,  $i = \overline{0, m+1}$ , where the one-sided partial derivatives exist; (iii) System (1) is satisfied for  $u(t, x)$  on each subdomain  $[t_i, t_{i+1}] \times [0, \omega]$ ,  $i = \overline{0, m}$ , and it holds for the right partial derivatives of  $u(t, x)$  at the lines  $t_i$ ,  $i = \overline{0, m}$ ; (iv) condition (2) is valid; (v) condition (3) is satisfied for  $u(t, 0)$  on each interval  $[t_i, t_{i+1}]$ ,  $i = \overline{0, m}$ .

We investigate of a questions of existence and uniqueness of a solution to problem (1)–(3). These systems describe hybrid dynamical systems and have applications in the problems of biology (see in [1–3]).

**References**

1. Wiener J. Generalized solutions of functional differential equations. Singapore: World Scientific, 1993. 409 p.
2. Akhmet M. Principles of discontinuous dynamical systems. New York – Dordrecht- Heidelberg – London: Springer, 2010. 176 p.
3. Akhmet M. Nonlinear hybrid continuous/discrete-time models. Amsterdam– Paris: Atlantis Press, 2011. 216 p.

---

This report is supported by Grant of Ministry education and Science of the Republic of Kazakhstan, project № AP05131220.

**THE FINITE DIFFERENCE METHOD FOR CAPUTO-TYPE PARABOLIC  
EQUATION WITH FRACTIONAL LAPLACIAN**

*Changpin Li*

*Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai, China;  
lcp@shu.edu.cn*

In this talk, we present the finite difference method for fractional parabolic equation with fractional Laplacian, where the time derivative is the Caputo derivative with derivative order in  $(0,1)$  and the spatial derivative in the fractional Laplacian. Stability, convergence, and error estimate are displayed. And the illustrative examples are provided which support the theoretical analysis.

**ON PARABOLIC CONSERVATIVE PROBLEMS IN POPULATION  
DYNAMICS**

**Danilkina O.**

*The University of Dodoma, Dodoma, Tanzania; olga.danilkina@udom.ac.tz*

In this work, we consider partial differential equations of drift-diffusion type in the unit interval, supplemented by either two conservation laws or by a conservation law and a further boundary condition. We treat two different cases: (i) uniform parabolic problems; (ii) degenerated problems at the boundaries. The ultimate goal of this work is to understand how the solution of parabolic conservative problems, which are degenerated at least in one of the boundaries, can be approximated by the solutions of non-degenerated problems.

We focus on several examples including the forward generalized Kimura equation

$$\partial_t p = \frac{k}{2} \partial_x^2 (x(1-x)p) - \partial_x (x(1-x)\psi(x)p),$$

where  $p(x, t)$  is the probability to find  $x$  mutants at time  $t$  in a population consisting of two different genotypes: the wild-type and the mutant. The fitness difference between the mutant and the wild type is given by  $\psi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  and  $k$  is the «intensity of selection».

We will show that this equation, when supplemented by two appropriate conservation laws, approximates the evolution given by certain Markov processes (e.g, the Moran process or the Wright-Fisher process). These conservation laws can be obtained from the discrete processes.

We will obtain expressions for the fixation probability of the mutant and also for the expected time for fixation of any type. These equations are of no practical use and will be simplified using asymptotic expansions, given different expressions depending on the sign of the function  $\psi$  on the interval  $[0, 1]$ .

We also show existence and uniqueness of solution in measure sense of the Forward Generalized Kimura equation. Finally, we will study the same equation for time dependent fitness.

This is a joint work with Max Souza (Brazil) and Fabio A.C.C. Chalub (Portugal).

**NUMERICAL APPROXIMATION OF FRACTIONAL POWERS OF  
ELLIPTIC OPERATORS**

**Duan B., Lazarov R. and Pasciak J.**

<sup>1</sup>*School of Mathematics and Statistics, Central South University, Changsha,*

*China; <sup>2</sup>Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, Bulgaria; <sup>1,2,3</sup>Texas A&M University, Texas, USA;*

We develop and study algorithms for approximately solving the linear algebraic systems  $L_h^\alpha u_h = v_h$ ,  $0 < \alpha < 1$ , for  $u_h, v_h \in H_h$ ,  $H_h$  a finite dimensional Hilbert space. Such problems arise in finite element or finite difference approximations of problems  $L^\alpha u = v$  with fractional powers of second order elliptic operators  $L$ . The algorithms are based on the method of Vabishchevich, that related the algebraic problem to a solution of a time-dependent parabolic type equation on the interval  $[0, 1]$ . We develop and study two algorithms based on diagonal Padé approximation of the corresponding solution operator. The first one uses geometrically graded meshes in order to compensate for the singular behavior of the solution for  $t$  close to 0 for non-smooth data  $v$ . The second algorithm uses uniform in  $t$  meshes, but requires smoothness of the data  $v$  in order to retain optimal convergence rate. For both methods we estimate the error in terms of the number of time steps and the regularity of the data. Finally, we report some numerical experiments of finite element approximation of second order elliptic problems in one and two spatial dimensions.

## ON BALANCING NUMBERS

**Goy T.**

*Precarpathian national university, Ivano-Frankivsk, Ukraine; tarasgoy@gmail.com*

A positive integer  $n$  is called a *balancing number* if the Diophantine equation  $1+2+\cdots+(n-1) = (n+1)+(n+2)+\cdots+(n+r)$  holds for some positive integer  $r$  which is called balancer [1]. For example, 6, 35, 204 and 1189 are balancing numbers with balancers 2, 14, 84 and 292, respectively.

The balancing numbers  $\{B_n\}_{n \geq 0}$  is defined by the recurrence relation  $B_{n+1} = 6B_n - B_{n-1}$ ,  $n \geq 1$ , with initial terms  $B_0 = 0$  and  $B_1 = 1$ .

Using Trudi's formula (see, for example, [2]) for determinants of Toeplitz-Hessenberg matrices entries of which are balancing numbers, we obtain identities with multinomial coefficients for the these numbers.

**Theorem.** *Let  $n \geq 1$ , except when noted otherwise. Then*

$$\begin{aligned} \sum (-1)^T p_n(t) B_0^{t_1} B_1^{t_2} \cdots B_{n-1}^{t_n} &= \frac{\sqrt{7}}{14} \left( (3 - \sqrt{7})^{n-1} - (3 + \sqrt{7})^{n-1} \right), \\ \sum p_n(t) B_0^{t_1} B_1^{t_2} \cdots B_{n-1}^{t_n} &= 6^{n-2}, \quad n \geq 2, \\ \sum (-1)^T p_n(t) B_1^{t_1} B_2^{t_2} \cdots B_n^{t_n} &= \frac{\sqrt{21}}{21} \left( \left( \frac{5 - \sqrt{21}}{2} \right)^n - \left( \frac{5 + \sqrt{21}}{2} \right)^n \right), \\ \sum p_n(t) B_1^{t_1} B_2^{t_2} \cdots B_n^{t_n} &= \frac{\sqrt{45}}{45} \left( \left( \frac{7 + \sqrt{45}}{2} \right)^n - \left( \frac{7 - \sqrt{45}}{2} \right)^n \right), \\ \sum p_n(t) B_1^{t_1} B_3^{t_2} \cdots B_{2n-1}^{t_n} &= 36 \cdot 35^{n-2}, \quad n \geq 2, \\ \sum (-1)^T p_n(t) B_2^{t_1} B_3^{t_2} \cdots B_{n+1}^{t_n} &= 0, \quad n \geq 3, \\ \sum (-1)^T p_n(t) B_2^{t_1} B_4^{t_2} \cdots B_{2n}^{t_n} &= \frac{\sqrt{195}}{65} \left( (14 - \sqrt{195})^n - (14 + \sqrt{195})^n \right), \\ \sum (-1)^T p_n(t) B_3^{t_1} B_5^{t_2} \cdots B_{2n+1}^{t_n} &= 36, \quad n \geq 2, \end{aligned}$$

where the summation is over integers  $t_i \geq 0$  satisfying  $t_1 + 2t_2 + \cdots + nt_n = n$ ,  $T = t_1 + \cdots + t_n$  and  $p_n(t) = \frac{(t_1 + \cdots + t_n)!}{t_1! \cdots t_n!}$  is the multinomial coefficient.

### References

1. Behera A., Panda G.K. On the square roots of triangular numbers // Fibonacci Quart. 1999. Vol. 1, № 2. P. 98–105.
2. Goy T. Some Tribonacci identities using Toeplitz-Hessenberg determinants // Proceedings of 18th International Scientific M. Kravchuk Conference. Vol. 1. Kyiv: NTUU «KPI», 2017. P. 159–161.

**A DIFFERENCE SCHEME FOR ALLERS' FRACTIONAL EQUATION  
WITH GENERALIZED MEMORY KERNEL**

**Karova F.A.**

*IAMA KBSC RAS, Nalchik, Russia; karova.fatimat@mail.ru*

Moisture movement in capillary porous environment is described by the equation of Aller [1]. The a priori estimate for the solution of the diffusion equation in differential and difference settings is obtained in [3]. In the present paper the solution of Dirichlet boundary value problem for the Aller's equation in differential and difference settings are studied.

In rectangle  $\overline{Q}_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$  let us study the boundary value problem

$$\partial_{0t}^{\alpha,\lambda} u = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \partial_{0t}^{\beta,\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - q(x, t)u + f(x, t), \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (3)$$

where  $\partial_{0t}^{\gamma,\delta} u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t \delta(t-s)(t-s)^{-\gamma} u_s(x, s) ds$  is the generalized Caputo fractional derivative of order  $\gamma$ ,  $0 < \gamma < 1$  [2], with weighting function  $\delta(t) \in C^2[0, T]$ , where  $\delta(t) \geq 0$  and  $\delta'(t) \leq 0$  for all  $t \in [0, T]$ , and  $0 < c_1 \leq k(x, t), \eta(x, t) \leq c_2, \eta_t(x, t) \geq 0, q(x, t) \geq 0$  on  $\overline{Q}_T$ .

The difference scheme for the fractional Aller's equation is constructed. The stability and convergence of the difference scheme is proved. The obtained results are supported by the numerical calculations carried out for some test problems.

**References**

1. Chudnovsky A.F. Thermophysics Soil, Moscow: Nauka, 1976. 136 p.
2. Alikhanov A.A. A time-fractional diffusion equation with generalized memory kernel in differential and difference settings with smooth solutions // Comput. Methods Appl. Math. 2017. Vol. 268. P. 12–22.
3. Alikhanov A.A. Numerical methods of solutions of boundary value problems for the multi-term variable-distributed order diffusion equation // Applied Mathematics and Computation. 268(2015). P. 12–22.

**BIORTHOGONALITY CONDITIONS FOR THE SOLUTION OF THE  
BIHARMONIC EQUATION THAT MODELS STOKES FLOW**

***Khoury S.A.***

*AUS, Sharjah, UAE; skhoury@aus.edu*

A matched eigenfunction expansion method is developed for the solution of Stokes flow problems through geometries composed of contiguous simple subregions, arising in fluid dynamic. The theory leads to the development of eigenfunctions, adjoint eigenfunctions, biorthogonality conditions and an algorithm for the computation of the coefficients of the eigenfunction expansion. The flow region is decomposed into two simple subregions; this enables the stream function to be represented by means of an expansion of Papkovich-Fadle eigenfunctions in each of these two subregions. The coefficients in these expansions are determined by imposing weak  $C^3$  continuity of the stream function across subregion interfaces and then taking advantage of the biorthogonality conditions. The method is implemented for solving creeping flow around a bend and through curved channels.

**ON PROPERTIES OF FRACTIONAL POWERS OF SEMIGROUP'S  
GENERATOR OF SHIFT OPERATORS IN THE DIRECTION**

**Kukushkin M.V.**

*Geleznovodsk, Russia;*

Accepting a notation [1] we will consider  $\Omega$  is a bounded, convex domain with sufficient smooth boundary of  $n$  — dimensional Euclidean space  $\mathbb{E}^n$ . Let's denote by  $\vec{e}$  as unit vector having an arbitrary direction. Consider the semigroup  $T_{t,\vec{e}}$ ,  $t \geq 0$  of shift operators in the direction,  $T_{t,\vec{e}} := \{T_{t,\vec{e}} : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega), (T_{t,\vec{e}}f)(Q) = f(Q + \vec{e}t), Q \in \Omega\}$ . Due to the property of continuous in average in the  $L_2$  space, we can conclude that  $T_{t,\vec{e}}$  has a property of the strong continuity. Using the representation (see lemma 13.3 [2, p.260] ) for resolvent of the generator  $A_{\vec{e}}$  we can obtain the property of positivity for the generator in some easier sense then (14.1) [2, p.275], specifically  $\|(I\tau - A_{\vec{e}})^{-1}\| \leq C/(1 + \tau)$ ,  $\tau > 0$ . Remarkable that the last condition is sufficient for a correct definition of fractional powers  $A_{\vec{e}}^\alpha$ ,  $\alpha \in (-1, 1)$ . It can be establish by analogously way of 14.2 [2]. Now if we note that in the considered case so-called Balakrishniyan formula has the power, we can conclude that exists identity between definitions of fractional powers of generator and the conjugate operator [1] to the Kipriyanov operator [3].

In this paper our aim is a generalization of strong accretive theorem [1] for fractional powers of some class semigroup's generators. Consider  $L_2(\Omega, \mu) := \{f : (f, f)_{L_2(\Omega, \mu)} = \int_{\Omega} f \bar{f} \mu d\Omega < \infty\}$ ,  $A$  is the generator of arbitrary strong continuity semigroup  $T_t : L_2(\Omega, \mu) \rightarrow L_2(\Omega, \mu)$ . We have a next main result.

**Theorem.** *Let  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $(A^\alpha)^* \mu \geq 0$ , then*

$$\operatorname{Re}(f, A^\alpha f)_{L_2(\Omega, \mu)} \geq \frac{1}{2} \|f\|_{L_2(\Omega, \mu')}^2, \quad f \in D(A^\alpha), \quad \mu' = (A^\alpha)^* \mu.$$

**References**

1. *Kukushkin M.V.* Spectral properties of fractional differentiation operators // Electronic Journal of Differential Equations. 2018. Vol. 2018, № 29. P. 1–24.
2. *Krasnoselskii M.A., Zabreiko P.P., Pustylnik E.I., Sobolevskii P.E.* Integral operators in spaces of summable functions. Moscow: Science, FIZMATLIT, 1966. 499 p.
3. *Kipriyanov I.A.* On spaces of fractionally differentiable functions // Proceedings of the Academy Of Sciences. USSR. 1960. Vol. 24, № 6. P. 665–882.

## ON THE THREE-DIMENTIONAL DARBOUX SYSTEM

**Kulaev R.Ch.**

*NOSU, Vladikavkaz, Russia; SMI VSC RAS, Vladikavkaz, Russia;*  
*kulaevr@rambler.ru*

The problem of constructing  $n$ -orthogonal curvilinear coordinate systems is one of the most important problems in differential geometry. This problem was studied in the XIX century – the early XX century by well-known mathematicians S. Dupin, J.-F. Binet, K.-F. Gauss, G. Lamé, L. Bianchi, G. Darboux. At present, there are several approaches to a solution of this problem. In the last decades of the XXth century B.A. Dubrovin and S.P. Novikov, V.E. Zakharov, I.M. Krichever proposed new approaches to the construction of orthogonal coordinates, which are based on methods of the theory of integrable systems of hydrodynamic type. In particular, it was established that an arbitrary orthogonal coordinate system corresponds to a family of diagonal Hamiltonian systems of hydrodynamic type.

The present report considers the system of six first-order nonlinear differential equations (*Darboux system*):

$$\partial_{x_j} \Gamma_{ki} = \Gamma_{ki} \Gamma_{ij} + \Gamma_{kj} \Gamma_{ji} - \Gamma_{ki} \Gamma_{kj}, \quad i \neq j \neq k, \quad (1)$$

with respect to the functions  $\Gamma_{ij}$  of three variables  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_+^3$ . We use here simplified notations  $\Gamma_{ij}$  for the Christoffel symbols  $\Gamma_{ki}^j$  for  $j = k$  of the corresponding diagonal metric.

Currently, the issue of the structure of the generic solution of the Darboux equations is open. There is an opinion that the generic solution is determined by the functions of two independent variables, and there is also another opinion that it is determined by the functions of one variable. The report shows that Darboux system (1) has a class of solutions, which is determined by means of the functions of one variable by the coordinate axes. In order to prove this we show that the Darboux system permits separating variables in the Goursat problem for one class of the third-order linear hyperbolic equations of the following form

$$\partial_{x_1} \partial_{x_2} \partial_{x_3} \varphi = A \partial_{x_1} \varphi + B \partial_{x_2} \varphi + C \partial_{x_3} \varphi + D \varphi. \quad (2)$$

It is essential that the separation of variables allows to prove that the solution of the Goursat problem for equation (2) is determined only by the values of the function  $\varphi(x_1, x_2, x_3)$  by the coordinate axes.

**ELECTRODYNAMIC MODEL OF HF-RADIO SIGNAL  
BACKSCATTERING FROM FULLY ARISEN SEA**

**Lobatch V.T.<sup>1</sup>, Potipak M.V.<sup>2</sup>, Bakhchevnikov V.V.<sup>3</sup>**

*SFedU, Taganrog, Russia; <sup>1</sup>vtlobach@sfedu.ru; <sup>2</sup>potipak@sfedu.ru;*

*<sup>3</sup>valentine.bach@gmail.com*

In recent years, more attention is paid to the complex monitoring of marine water areas. It can not be done without the knowledge of spatial-temporal and spectral characteristics of sea waves. Typically, the development of new algorithms for remote monitoring requires a series of field experiments in sea surface remote sensing from the aircraft board. However, such experiments are extremely expensive events during which it is difficult to obtain repetitive conditions of the experiment. In this regard, the replacement of field experiments with simulation modeling is actual scientific problem.

The area of application of this model is to investigate the radio signals scattering from the sea surface with taking into account a number of factors (the spectral characteristics of sea, navigation parameters of carrier, characteristics of the probe signal). The developed imitation model provides simplicity organization of the computational experiment, a small time and cost of these experiments, the possibility of strict control of all the parameters, clarity of the results, as well as their recurrence.

**References**

1. *Garnaker'jan A.A., Lobatch V.T., Zaharevitch V.G., Panatov G.S., Yavkin A.V. Radio oceanographic, navigation and informational support of hydroaviation. TSURE, Taganrog, 1997.*
2. *Zagorodnikov A.A. Radar imagery of sea waves from aircraft. Leningrad: Gidrometeoizdat, 1978.*
3. *Rumyantsev K.E., Zagrai N.P., Fedosov V.P. Application of radar tool for parameters of ecosystem monitoring. TSURE, Taganrog, 1991.*
4. *Borzov A.B., Sokolov A.V., Suchkov V.B. Digital simulation of input signals of systems of a near radar-location from complex radar-tracking scenes // Journal of radio electronics. 2004. № 4.*
5. *Shtager E.A. The scattering of radio waves by bodies of complex shape. Moscow: Radio and Communications, 1986.*
6. *Vaganov M.E., Zinoviev Y.S., Astanin L.Y. Aircraft radar characteristics. Moscow: Radio and Communications, 1985.*
7. *Lobach V.T., Potipak M.V. Modeling of modulated signals back-scattering from quasiperiodic surface // Proc. SPIE. 2003. P. 141–148.*

## NEWTON'S METHOD AS A GLOBAL ROOT FINDER

**Mamayusupov Kh.**

*NRU HSE, Moscow, Russia; kmamayusupov@hse.ru*

Let a polynomial  $p(z)$  of  $\deg(p) \geq 2$  be given. The Dandelin-Lobachevsky-Gräffe root-squaring method (DLG) [3] produces a polynomial  $p_1(z)$  of the same degree  $d$  with the roots that are squares of the roots of the original polynomial  $p$ . A rational function defined by  $N_p(z) = z - \frac{p(z)}{p'(z)}$  is called the Newton's method of  $p(z)$ . Solving the polynomial equation  $p(z) = 0$  is equivalent to finding fixed points of its Newton's method  $N_p(z)$  in the complex plane, where the fixed points are attracting. In [1] it was proved constructively that for every  $d \geq 2$  there exists a universal set  $S_d$  consisting of  $1.11d\log^2 d$  points among which there exist  $d$  points that if one iterates the Newton's method for a polynomial  $p$  starting at these points will lead to the  $d$  roots of  $p(z) = 0$ . In [4] the number of iterates was given, which is exponential on  $d$ , that takes to iterate the Newton's method to come  $\epsilon$  close to the actual roots of  $p(z) = 0$ . There is an algorithm, in polynomial time in  $d$ , that produces the number of actual roots of a polynomial in a given disc [2]. We propose an algorithm that produces  $z^0 = \{z_1^0, \dots, z_d^0\}$  a list if the actual roots of  $p$  is  $z = \{z_1, \dots, z_d\}$  then  $\|z - z^0\| = \max_{1 \leq i \leq d} |z_i - z_i^0| < \epsilon$ . The algorithm: Step 1, apply Newton's method on  $S_d$  many times until the stopping criterion given in [4] is satisfied. This step produces a list of an  $\epsilon > 0$  close roots. If the roots are well separated then the list consist of  $d$  elements that serves as our list  $z^0 = \{z_1^0, \dots, z_d^0\}$ . Step 2. If the list has more than  $d$  elements then we split it into  $\epsilon$  clusters and on every cluster we run DLG method as many times as needed to separate the roots in the cluster from all other roots in other clusters. Step 3, we run the algorithm of [2] for the resulting polynomials of Step 2 on the cluster to produce the number of actual roots within the cluster. It produces our list of  $\epsilon > 0$  close roots.

### References

1. Hubbard, J., Schleicher, D., and Sutherland, S. How to find all roots of complex polynomials by Newton's method // Invent. Math. 2001. Vol. 146.
2. Renegar J. On the worst-case arithmetic complexity of approximating zeros of polynomials // Journal of Complexity. 1987. Vol. 3, № 2. P. 90–113.
3. Robinson G., and Whittaker E. The Calculus of Observations, Blackie & Son, 2nd edition. 1924. 106 p.
4. Schleicher, D. On the number of iterations of Newton's method for complex polynomials // Ergodic Theory Dynam. Sys. 2002. Vol. 22, № 3. P. 935–945.

---

Research was partially supported by the ERC advanced grant «HOLOGRAM».

**WEIL CONJECTURES AND MODULI OF VECTOR BUNDLES**

**Neumann F.**

*Department of Mathematics, University of Leicester, UK; fn8@le.ac.uk*

In 1949 Andre Weil conjectured deep connections between the topology and arithmetic of algebraic varieties over a finite field in characteristic  $p$ . These conjectures led to the development of l-adic etale cohomology as an analog of singular rational cohomology in topology by Alexander Grothendieck and his school, which culminated in the proof of the Weil conjectures by Pierre Deligne in the 70s. In this talk, after giving a brief introduction into moduli problems and the classical Weil conjectures for algebraic varieties, I will outline how an analog of these Weil conjectures for the moduli space of vector bundles on a given algebraic curve can be formulated and proved.

**BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR MIXED TYPE EQUATION WITH  
THE CAPUTO FRACTIONAL DIFFERENTIAL OPERATOR**

*Ochilova N.K.*

*TFI, Tashkent, Uzbekistan; nargiz.ochilova@gmail.com.*

We consider equation:

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - {}_C D_{oy}^\alpha u, & x > 0, y > 0 \\ (-y)^m u_{xx} - x^m u_{yy}, & x > 0, y < 0, \end{cases} \quad (1)$$

where  ${}_C D_{oy}^\alpha u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^y (y-t)^{-\alpha} u_t(x,t) dt$ ,  $0 < \alpha < 1$ ,  $m > 0$ ,  $m = const$ .

Let  $\Omega$  be a domain restricted at  $x > 0$ ,  $y > 0$  by the segments  $AB$ ,  $BB_0$ ,  $B_0A_0$ ,  $A_0A$  of the lines  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 1$ ,  $x = 0$ , and at  $y < 0$  bounded by the straight line  $x = 0$ ,  $(-1 \leq y \leq 0)$  and the characteristic  $BC$  :  $x^q + (-y)^q = 1$  of the equation (1).

Introduce designations:  $\theta(x) = (x/2)^{1/q} - i(x/2)^{1/q}$ ,  $2^{-1/q} < x < 1$ ,  $\Omega_1 = \Omega \cap \{x > 0, y > 0\}$ ,  $\Omega_2 = \Omega \cap \{x > 0, y < 0\}$ ,  $\Omega_{21} = \Omega_2 \cap \{x + y > 0\}$ ,  $\Omega_{22} = \Omega_2 \cap \{x + y < 0\}$ ,  $I = \{(x, y) : 0 < x < 1, y = 0\}$ ,  $2q = m + 2$ ,  $2\beta = m/(m + 2)$ ,  $0 < \beta < \frac{1}{2}$ .

**Problem.** Find the function  $u(x, y)$  from the class

$$\Delta = \{u(x, y) : u(x, y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega^-) u_{xx} \in C(\Omega^+), {}_C D_{oy}^\alpha u \in C(\Omega^+)\}$$

with following properties:  $u(x, y)$  satisfies equation (1) in the domain  $\Omega_1 \cup \Omega_{21} \cup \Omega_{22}$ ;  $u_x(x, y) \in C(\Omega_1 \cup AA_0) \cap C(\Omega_{22} \cup AC)$ ,  $u_y \in C(\Omega_2 \cup I)$ , besides the interval  $I$  we have gluing condition:

$$\lim_{y \rightarrow +0} y^{1-\alpha} u_y(x, +0) = u_y(x, -0), \quad (x, 0) \in AB;$$

$u(x, y)$  satisfies boundary conditions:

$$u(x, y) \Big|_{AA_0} = \tau_0(y), \quad u(x, y) \Big|_{BB_0} = \varphi_0(y), \quad 0 \leq y \leq 1,$$

$$D_{0x}^{1-\alpha} u[\theta(x)] = \tilde{a}(x) u_y(x^{1/2q}, 0) + \tilde{b}(x), \quad 2^{-1/q} < x < 1,$$

$$u_x(0, +y) = u_x(0, -y), \quad 0 < y < 1,$$

where  $\tau_0(y)$ ,  $\varphi_0(y)$ ,  $\tilde{a}(x) = a(x^{1/2q})$ ,  $\tilde{b}(x) = b(x^{1/2q})$  are given functions and  $\tau_0(y)$ ,  $\varphi_0(y) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$ ,  $\tilde{a}(x)$ ,  $\tilde{b}(x) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$ .

The unique solvability of the investigated problem will be proved under certain restrictions on the parameters and class of functions.

**APPROXIMATION OF STABLE MANIFOLDS FOR FRACTIONAL SEMILINEAR EQUATIONS**

**Piskarev S.**

*MSU, Moscow, Russia; piskarev@gmail.com*

The behaviour of solutions of semilinear problems near hyperbolic equilibrium points is a quite well studied subject. We have the different situation if instead of classical differential equations, fractional differential equations are considered. There are just a small number of papers on the problem of existence of stable manifolds for semilinear fractional equations [1–3]. In this talk we establish the existence of stable manifolds for semilinear equations fractional problem

$$D^\alpha u(t) = Au(t) + f(u(t)), \quad u(0) = u^0, \quad t \geq 0,$$

in a Banach space  $E$ , where  $D^\alpha$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ , is the Caputo – Dzhrbashyan derivative, the operator  $A$  generates an analytic and compact  $C_0$ -semigroup  $\exp(\cdot A)$  and the function  $f(\cdot)$  is smooth enough. The original problem in the neighborhood of the hyperbolic equilibrium can be split in two initial value problems in the invariant subspaces corresponding to positive and negative real parts of the spectrum. We show that such a decomposition of the equation keeps the same structure under general approximation schemes. The main assumption of our results are naturally satisfied, in particular, for operators with compact resolvents and can be verified for finite element as well as finite difference methods.

**References**

1. Cong N.D., Doan T.S., Siegmund S., Tuan H.T. On stable manifolds for fractional differential equations in high-dimensional spaces // Nonlinear Dyn. 2016. Vol. 86, № 3. P. 1885–1894.
2. Deshpande A., Daftardar-Gejji V. Local stable manifold theorem for fractional systems // Nonlinear Dyn. 2016. Vol. 83, № 4. P. 2435–2452.
3. Sayevand K., Pichaghchi K. Successive approximation: a survey on stable manifold of fractional differential systems // Fract. Calc. Appl. Anal. 2015. Vol. 18, № 3. P. 621–641.

---

Research was supported by grants of the Russian Foundation for Basic Research 16 – 01 – 00039 \_a and 17 – 51 – 53008.

**FREE BOUNDARY PROBLEM FOR DIFFUSIVE LOTKA-VOLTERRA  
COMPETITION MODEL WITH ADVECTION**

**Rasulov M.S.**

*Institut of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan; rasulovms@bk.ru.*

A variety of semilinear parabolic equations reaction-diffusion type are used to describe some phenomena arising in population ecology. One of them Lotka-Volterra type competition system for two species [1, 2].

In this article investigates the following free boundary problem:

$$\begin{cases} u_t - d_2 u_{xx} - m_1 u_x = u(a_1 - b_1 u - c_1 v), & t > 0, 0 < x < s_1(t), \\ v_t - d_2 v_{xx} - m_2 v_x = v(a_2 - b_2 u - c_2 v), & t > 0, 0 < x < s_2(t), \\ u(0, x) = u_0(x), \quad v(0, x) = v_0(x), & x \in [0, \infty), \\ u_x(t, 0) = v_x(t, 0) = 0, & t > 0, \\ u = 0, & t > 0, x \geq s_1(t), \\ v = 0, & t > 0, x \geq s_2(t), \\ \dot{s}_1(t) = -\mu u_x(t, s_1(t)), & t > 0, \\ \dot{s}_2(t) = -\rho v_x(t, s_2(t)), & t > 0, \end{cases} \quad (1)$$

where  $x = s_1(t)$  and  $x = s_2(t)$  – free boundaries,  $u(t, x)$  and  $v(t, x)$  represent the population densities;  $d_i, a_i, b_i, c_i, m_i, \mu, \rho$  – positive constants,  $i = 1, 2$ .

The problem (1) was studies in [3] for  $m_i = 0$ ,  $i = 1, 2$ .

**Theorem.** *Let  $(u, v, s_1, s_2)$  be a solution of (1). Then*

$$0 < u(t, x) \leq M_1 = \max\{a_1/b_1, \|u_0\|\}, \quad t \geq 0, x \in [0, s_1(t)],$$

$$0 < v(t, x) \leq M_2 = \max\{a_2/c_2, \|v_0\|\}, \quad t \geq 0, x \in [0, s_1(t)],$$

$$0 < \dot{s}_1(t) \leq M_3 \equiv \mu N_1, \quad 0 < \dot{s}_2(t) \leq M_4 \equiv \rho N_2, \quad t \geq 0,$$

where  $N_1 \geq \max\{\frac{M_1}{m_1}, \max_x \frac{\|u_0\|}{s_1(0)-x}\}$ ,  $N_2 \geq \max\{\frac{M_2}{m_2}, \max_x \frac{\|v_0\|}{s_2(0)-x}\}$ .

We establish the existence and uniqueness of a global classical solution and then study the asymptotic behavior of the free boundary problem.

#### References

1. *Cantrell R.S., Cosner C.* Spatial ecology via reaction-diffusion equations. John Wiley and Sons Ltd. Chichester. UK. 2003.
2. *Pao C.V.* Nonlinear parabolic and elliptic equations. Plenum Press. New York. 1992.
3. *Guo J.Sh., Wu Ch.H.* Dynamics for a two-species competition–diffusion model with two free boundaries // Nonlinearity. 2014. Vol. 28, № 1.

**SOLVABILITY AND OPTIMAL CONTROL OF SYSTEM WITH INTEGRAL BOUNDARY CONDITIONS**

**Sharifov Y.A.**

*BSU, Baku, Azerbaijan; sharifov22@rambler.ru*

Consider the following system of differential equations with integral boundary conditions

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1)$$

$$\int_0^T m(t)x(t)dt = C, \quad (2)$$

$$u(t) \in U, \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

here  $x(t)$  is  $n$ -dimensional vector of phase variables,  $u(t)$  is  $r$ -dimensional piecewise-continuous (from the right) vector of control actions with the values from some nonempty convex bounded set  $U$  of  $r$ -dimensional Euclidian space  $\mathbb{R}^r$ ;  $T$  and  $C \in \mathbb{R}^n$  are fixed;  $m(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  is the given matrix function.

On the solutions of the system (1)–(3) it is required to minimize the functional

$$J(u) = \phi[x(0), x(T)] + \int_0^T F(t, x(t), u(t))dt. \quad (4)$$

In present thesis, we investigate the boundary value problem (1)–(3) and an optimal control problem (1)–(4). We prove the theorems about existence and uniqueness of solutions to boundary value problems (1)–(3) by using contraction principle. For optimal control problem (1)–(4), various optimality conditions of first and second order are obtained.

Similar problem is considered in [1].

**References**

1. Ashyralyev A., Sharifov Y.A. Optimal control problems for impulsive systems with integral boundary conditions // Electronic Journal of Differential Equations. 2013. Vol. 2013(2013), № 80. P. 1–11.

**ON PERIODIC SOLUTIONS OF CROSS-DIFFUSION BIOLOGICAL  
MODEL WITH PREY-TAXIS**

**Takhirov J.O.**

*Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan; prof.takhirov@yahoo.com*

There are basically three mechanisms for spatial pattern formation in systems of two reaction–advection–diffusion equations: the Turing patterns, chemotaxis patterns, and patterns created through reaction kinetics, e. g. the Brusselator. Turing patterns typically arise for a fast inhibitor and a slow activator. Chemotaxis patterns are based upon aggregation towards a chemical signal.

In this paper, we consider spatial predator-prey models with cross-diffusion and prey-taxis. The model consists of reaction-diffusion-taxis partial differential equations describing the evolution of the predator and prey populations density [1].

$$\begin{aligned} u_t - d_1 u_{xx} + (u\chi(u)v_x)_x &= -au + bg(v)u \text{ in } D = \{(x, t) : 0 < t \leq T, -l < x < l\}, \\ v_t - d_2 v_{xx} &= \kappa(v) - g(v)u \text{ in } D, \\ u(-l, t) &= u(l, t), u_x(-l, t) = u_x(l, t), 0 \leq t \leq T, \\ v(-l, t) &= v(l, t), v_x(-l, t) = v_x(l, t), 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0) &= u_0(x), v(x, 0) = v_0(x), -l \leq x \leq l, \end{aligned} \tag{A}$$

where  $d_1, d_2, l, a, b$  are positive constants.  $g(v) = b_1v/(1 + b_2v)$  ( $b_1 > 0, b_2 > 0$ ),  $\kappa(v) = rv(1 - (v/K))$  ( $r > 0, K > 0$ ).

We assume that

$$\begin{aligned} \chi(u) &\in C^1([0, +\infty)), \chi(u) \equiv 0 \text{ for } u \geq u_m \text{ and } \chi'(u) \text{ is Lipschitz continuous,} \\ u_0(x) &\geq 0, 0 \leq v_0(x) \leq K, u_0(x), v_0(x) \in C^{2+\alpha}(-l \leq x \leq l), 0 < \alpha < 1. \end{aligned}$$

In [1, 2], the authors proved the existence and uniqueness of weak and classical solutions, respectively, of the problem (A) with homogeneous Neumann boundary conditions.

By applying the contraction mapping principle, the Hölder continuity, the parabolic Schauder estimates and parabolic  $L_p$  estimates, we prove that there exists a unique global classical solution of this problem.

**References**

1. Ainseba B.E. et al. A reaction-diffusion system modeling predator-prey with prey-taxis // Nonlinear Anal. RWA. 2008. № 9. P. 2086–2105.
2. Tao Y. Global existence of classical solutions to a predator-prey model with nonlinear prey-taxis // Nonlinear Anal. RWA. 2010. № 11. P. 2056–2064.

**STRUCTURE OF ESSENTIAL SPECTRA AND DISCRETE SPECTRUM OF ENERGY OPERATOR OF FIVE-ELECTRON SYSTEMS IN THE HUBBARD MODEL. SECOND QUARTET STATE**

**Tashpulatov S.M.**

*INP, Tashkent, Uzbekistan;  
sadullatashpulatov@yandex.ru; toshpul@mail.ru; toshpul@inp.uz*

We consider the energy operator of five-electron systems in the Hubbard model and describe the structure of the essential spectra and discrete spectrum of the system for second quartet state of the system. The Hamiltonian of the chosen model has the form

$$H = A \sum_{m,\gamma} a_{m,\gamma}^+ a_{m,\gamma} + B \sum_{m,\tau,\gamma} a_{m+\tau,\gamma}^+ a_{m,\gamma} + U \sum_m a_{m,\uparrow}^+ a_{m,\uparrow} a_{m,\downarrow}^+ a_{m,\downarrow}. \quad (2)$$

Here  $A$  is the electron energy at a lattice site,  $B$  is the transfer integral between electrons neighboring sites (we assume that  $B > 0$  for convenience), the summation over  $\tau$  means over the nearest neighbors on the lattice,  $U$  is the parameter of the on-site Coulomb interaction of two electrons,  $\gamma$  is the spin index,  $\gamma = \uparrow$  or  $\gamma = \downarrow$ , and  $a_{m,\gamma}^+$  and  $a_{m,\gamma}$  are the respective electron creation and annihilation operators at a site  $m \in Z^\nu$ .

**Theorem 1.** *Let  $\nu = 1$  and  $U < 0$ . Then the essential spectrum of the second quartet state operator  ${}^2\tilde{H}_{3/2}^q$  is the union of seven segments:*

$$\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_{3/2}^q) = [a+c+e, b+d+f] \cup [a+c+z_3, b+d+z_3] \cup [a+e+z_2, b+f+z_2] \cup [a+z_2+z_3, b+z_2+z_3] \cup [c+e+z_1, d+f+z_1] \cup [c+z_1+z_3, d+z_1+z_3] \cup [e+z_1+z_2, f+z_1+z_2].$$

*The discrete spectrum of operator  ${}^2\tilde{H}_{3/2}^q$  consists of a no more one point:*

$$\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_{3/2}^q) = \{z_1 + z_2 + z_3\}. \text{ Here and hereafter, } a = 2A - 4B \cos \frac{\Lambda_1}{2}, b = 2A + 4B \cos \frac{\Lambda_1}{2}, c = 2A - 4B \cos \frac{\Lambda_2}{2}, d = 2A + 4B \cos \frac{\Lambda_2}{2}, e = A - 2B, f = A + 2B, z_1 = 2A - \sqrt{U^2 + 16B^2 \cos^2 \frac{\Lambda_1}{2}}, z_2 = 2A + \sqrt{U^2 + 16B^2 \cos^2 \frac{\Lambda_2}{2}}, z_3 = A - 2\sqrt{U^2 + B^2}.$$

**Theorem 2.** *Let  $\nu = 1$  and  $U > 0$ . Then the essential spectrum of the second quartet state operator  ${}^2\tilde{H}_{3/2}^q$  is the union of seven segments:*

$$\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_{3/2}^q) = [a+c+e, b+d+f] \cup [a+c+\tilde{z}_3, b+d+\tilde{z}_3] \cup [a+e+\tilde{z}_2, b+f+\tilde{z}_2] \cup [a+\tilde{z}_2+\tilde{z}_3, b+\tilde{z}_2+\tilde{z}_3] \cup [c+e+\tilde{z}_1, d+f+\tilde{z}_1] \cup [c+\tilde{z}_1+\tilde{z}_3, d+\tilde{z}_1+\tilde{z}_3] \cup [e+\tilde{z}_1+\tilde{z}_2, f+\tilde{z}_1+\tilde{z}_2]. \text{ The discrete spectrum of operator } {}^2\tilde{H}_{3/2}^q \text{ consists of a no more one}$$

$$\text{point: } \sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_{3/2}^q) = \{\tilde{z}_1 + \tilde{z}_2 + \tilde{z}_3\}. \text{ Here } \tilde{z}_1 = 2A + \sqrt{U^2 + 16B^2 \cos^2 \frac{\Lambda_1}{2}}, \tilde{z}_2 = 2A - \sqrt{U^2 + 16B^2 \cos^2 \frac{\Lambda_2}{2}}, \tilde{z}_3 = A + 2\sqrt{U^2 + B^2}.$$

**AN ALGORITHM FOR EXACT GEOMETRIC SEARCH OF COMPLEX ROOTS OF A CUBIC EQUATION**

**Trofimov S.P.**

*Ural Federal University, Ekaterinburg, Russia; tsp61@mail.ru*

We consider cubic polynomial  $f(x) = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$  and show how to solve a cubic equation  $f(x) = \Delta$  for any  $\Delta \in \mathbb{R}$  and to draw complex and real roots on the same real plane. Let us define two auxiliary functions: conjugate function  $f_S(x) = f(-2x - a_1)$ , and carrier function  $f_N(x) = \pm\sqrt{f'(x)} = \pm\sqrt{3x^2 + 2a_1x + a_2}$ . We prove that conjugate function  $f_S(x)$  passes through extreme points of  $f(x)$ , if they exist. Let gluing set  $S_f$  is graph of conjugate function  $f_S(x)$  except of a closed graph fragment between extreme points of  $f(x)$ . Algorithm.

1. Find an intersection of graph  $y = f(x)$  and line  $y = \Delta$ . There are two possible cases:
  - (a) The intersection consists of 3 points, of which two or three can coincide when the function graph and the line are touched. Then the abscissas  $z_1, z_2, z_3$  of these points are obviously real roots (possibly multiples) of the equation. The algorithm is complete.
  - (b) The intersection consists of one point. The abscissa  $z_1$  of this point is the unique real root of the equation. To find other two complex roots, go to step 2.
2. Find an intersection point of line  $y = \Delta$  and gluing set  $S_f$ . This point is unique. Its abscissa  $a$  is real part of complex roots.
3. Find an intersection of vertical line  $x = a$  and graph of  $f_N$ . This intersection consists of two different points. Their ordinates are equal to  $+b$  and  $-b$ , where  $b \geq 0$  and are imaginary components of complex roots.
4. Thus, we have obtained two real numbers  $a$  and  $b$ , which yield complex conjugate roots of the equation. The algorithm is complete.

This algorythm was obtained with the help of application [1], which plots graphs of complex functions of a complex variable. Exact geometric algorithm is valid for polynomials with order  $n \leq 10$ .

**References**

1. *Trofimov S., Rusinov P., Trofimova O.* Computer model of a four-dimensional graph of a function of a complex variable. Cert. of state reg. of the comp. program // 2017. № 2017615380, May 15.

## FRACTIONAL OPERATORS IN STATISTICAL MECHANICS

***Uchaikin V.V.***

*Uljanovsk State University, Uljanovsk, Russia; vuchaikin@gmail.com*

The review report consists of 4 sections.

1. Introduction. Main problems of small system thermodynamics.
2. Some new versions of small system thermodynamics.
  - 2.1. Hill's thermodynamics of small systems.
  - 2.2. Non-extensive Tsallis' thermodynamics.
  - 2.3. Extended irreversible thermodynamics.
  - 2.4. Stable laws goes on stage.
3. Generalized Levy statistics.
  - 3.1. Normal statistics.
  - 3.2. Lévy stable statistics.
  - 3.3. Fractionally stable statistics.
  - 3.4 Truncated random variables.
4. Fractional kinetics.
  - 4.1. Self-similarity.
  - 4.2. Lévy-stable family as a direct result of self-similarity.
  - 4.3. Fractional equations for Lévy motion.
  - 4.4. Poisson process and memory concept.
  - 4.5. The correspondence principle.

### References

1. *Uchaikin V.V. Fractional Derivatives for Physicists and Engineers.* Springer (Berlin), High Education Press (Beijing). Vol. I-II, 2013.
2. *Uchaikin V.V., Sibatov R.T. Fractional Kinetics in Solids.* World Scientific, 2015.
3. *Uchaikin V.V., Sibatov R.T. Fractional Kinetics in Space.* World Scientific, 2018.

---

The work is supported by Russian Foundation of Basic Researches, grant № 16-01-00556.

**NUMERICAL SOLVING BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR  
FRACTIONAL POWER OF ELLIPTIC OPERATORS**

**Vabishchevich P.N.**

*Nuclear Safety Institute of RAS, Moscow, Russia; vabishchevich@gmail.com*

Non-local applied mathematical models based on the use of fractional derivatives in time and space are actively discussed in the literature. Many models, which are used in applied physics, biology, hydrology and finance, involve both sub-diffusion (fractional in time) and super-diffusion (fractional in space) operators. Super-diffusion problems are treated as evolutionary problems with a fractional power of an elliptic operator.

A boundary value problem for a fractional power of the second-order elliptic operator is considered. It is solved numerically using a time-dependent problem for a pseudo-parabolic equation. For the auxiliary Cauchy problem, the standard two-level schemes with weights are applied. Stability conditions are obtained for the fully discrete schemes under the consideration. The numerical results are presented for a model two-dimensional boundary value problem with a fractional power of an elliptic operator.

An unsteady problem is considered for a space-fractional diffusion equation in a bounded domain. A first-order evolutionary equation containing a fractional power of an elliptic operator of second order is studied for general boundary conditions of Robin type. Finite element approximation in space is employed. To construct approximation in time, regularized two-level schemes are used. The numerical implementation is based on solving the equation with the fractional power of the elliptic operator using an auxiliary Cauchy problem for a pseudo-parabolic equation.

## СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

- АГУ** – Абхазский государственный университет  
**АГУ\*** – Астраханский государственный университет  
**АГУНП** – Азербайджанский государственный университет нефти и про-  
мышленности  
**АН ЧР** – Академия наук Чеченской республики  
**АО «ЦКБ МТ «Рубин»** – Акционерное общество «Центральное кон-  
структорское бюро морской техники «Рубин»  
**АРГУ им. К. Жубанова** – Актюбинский региональный государствен-  
ный университет имени К. Жубанова  
**НИУ «БелГУ»** – Белгородский государственный национальный иссле-  
довательский университет  
**БашГУ** – Башкирский государственный университет  
**Бел ЮИ МВД России им. И.Д. Путилина** – Белгородский юриди-  
ческий институт Министерства внутренних дел Российской Федерации  
имени И.Д. Путилина  
**БГУ** – Бакинский государственный университет  
**ВГИ** – Высокогорный геофизический институт  
**ВГУ** – Воронежский государственный университет  
**Владимирский филиал РАНХиГС** – Владимирский филиал Россий-  
ской академии народного хозяйства и государственной службы при Пре-  
зиденте РФ  
**ВлГУ** – Владимирский государственный университет имени Александра  
Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых  
**Вычислительный центр ФИЦ ИУ РАН** – Вычислительный центр  
Федерального исследовательского центра «Информатика и управление»  
**ДГТУ** – Донской государственный технический университет:  
**ДГУ** – Дагестанский государственный университет  
**ЕГУ им. И.А. Бунина** – Елецкий государственный университет имени  
И.А. Бунина  
**ИВТ СО РАН** – Институт вычислительных технологий Сибирского от-  
деления РАН  
**ИИПРУ КБНЦ РАН** – Институт информатики и проблем региональ-  
ного управления Кабардино-Балкарского научного центра РАН  
**ИКИР ДВО РАН** – Институт космофизических исследований и рас-  
пространения радиоволн Дальневосточного отделения РАН  
**ИМАН** – Институт Математики имени В.И. Романовского АН респуб-  
лики Узбекистан  
**ИМ СО РАН** – Институт математики имени С.Л. Соболева Сибирского  
отделения РАН

- ИМ АН РУз** – Институт математики академии наук республики Узбекистан
- ИМиСС АН РУз** – Институт механики и сейсмостойкости сооружений имени М.Т. Уразбаева АН Республики Узбекистан
- ИММ УрО РАН** – Институт математики и механики имени Н.Н. Крашевского Уральского отделения РАН
- Институт физики ДНЦ РАН** – Институт физики имени Х.И. Амирханова Дагестанского научного центра РАН
- ИПМ имени М.В. Келдиша РАН** – Институт прикладной математики имени М.В. Келдиша
- ИПМА КБНЦ РАН** – Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН
- ИПГ ДНЦ РАН** – Институт проблем геотермии Дагестанского научного центра РАН
- ИСУ** – Институт систем управления НАН Азербайджана
- КазНПУ им. Абая** – Казахский национальный педагогический университет имени Абая
- КамГУ им. Витуса Беринга** – Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга
- КБГАУ** – Кабардино-Балкарский государственный аграрный университет имени В.М. Кокова
- КБГУ** – Кабардино-Балкарский государственный университет имени Х.М. Бербекова
- КГПИ** – Кокандский государственный педагогический институт
- КИТЭ КБГУ** – Колледж информационных технологий и экономики Кабардино-Балкарский государственный университет имени Х.М. Бербекова
- КТГУ им. Носира Хусрава** – Курган-Тюбинский государственный университет имени Носира Хусрава
- КФУ** – Казанский федеральный университет
- МГУ им. М.В. Ломоносова** – Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
- МИАН** – Математический институт имени В.А. Стеклова
- МИРЭА** – Московский технологический университет
- МПГУ** – Московский педагогический государственный университет
- МУДО ЦВР** – МУДО «Центр внешкольной работы г. Зеленокумска Советского района»
- МФТИ** – Московский физико-технический институт (государственный университет)
- НГУ** – Нахичеванский государственный университет

- НамИСИ** – Наманганский инженерно-строительный институт  
**НИУ «БелГУ»** – Белгородский государственный национальный исследовательский университет  
**НУУз** – Национальный университет Узбекистана имени М. Улугбека  
**НТЦ «Техноцентр» ЮФУ** – Научно-технический центр «Техноцентр» Южного федерального университета  
**РУДН** – Российский университет дружбы народов  
**Самарский университет** – Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева  
**СамГТУ** – Самарский государственный технический университет  
**СГУ** – Сумгаитский государственный университет  
**СевКавГГТА** – Северо-Кавказская государственная гуманитарно-технологическая академия  
**СКФУ** – Северо-Кавказский федеральный университет  
**СОГУ** – Северо-Осетинский государственный университет имени К.Л. Хетагурова  
**СтГАУ** – Ставропольский государственный аграрный университет  
**СФ ИСИ** – Стерлитамакский филиал Института стратегических исследований  
**СФ БашГУ** – Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета  
**ТАСИ** – Ташкентский архитектурно-строительный институт  
**ТашИИТ** – Ташкентский институт инженеров железнодорожного транспорта  
**ТерГУ** – Терmezский государственный университет  
**ТГПУ** – Ташкентский государственный педагогический университет  
**ТГУ** – Томский государственный университет  
**ТГУ им. Г.Р. Державина** – Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина  
**ТГТУ** – Тамбовский государственный технический университет  
**ТГТУ\*** – Ташкентский государственный технический университет  
**ТИ им. А.П. Чехова (филиал) РГЭУ (РИНХ)** – Таганрогский институт имени А.П. Чехова (филиал) Ростовского государственного экономического университета  
**ТИИИМСХ** – Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства  
**ТИС** – Технологический институт сервиса (филиал) Донского государственного технического университета  
**ТУИТ им. Мухаммада ал-Хоразми** – Ташкентский университет информационных технологий имени Мухаммада ал-Хоразми

**ТФИ** – Ташкентский финансовый институт

**ТФИ\*** – Ташкентский фармацевтический институт

**УГАТУ** – Уфимский государственный авиационный технический университет

**УлГУ** – Ульяновский государственный университет

**УлГТУ** – Ульяновский государственный технический университет

**УрФУ** – Уральский федеральный университет

**ФерГУ** – Ферганский государственный университет

**Финансовый университет** – Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации

**ФИЦ ИУ РАН** – Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН

**ХГУ** – Худжандский государственный университет имени Бободжона Гафурова

**ЦГИ** – Центр географических исследований КБНЦ РАН

**ЧГПУ** – Чеченский государственный педагогический университет

**ЧГУ** – Чеченский государственный университет

**ЧелГУ** – Челябинский государственный университет

**ЮУрГУ (НИУ)** – Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет)

**ЮФУ** – Южный федеральный университет

**AUS** – American University of Sharjah

**BSU** – Baku State University

**IAMA KBSC RAS** – Institute of Applied Mathematics and Automation of KBSC RAS

**IMMM** – Institute of mathematics and mathematical modelling

**INP** – Institute of Nuclear Physics, Academy of Sciences of Uzbekistan

**MSU** – Lomonosov Moscow State University

**NOSU** – North-Ossetia State University

**NRU HSE** – National Research University Higher School of Economics

**SFedU** – Southern Federal University

**SMI VSC RAS** – Southern Mathematical Institute of the Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences

**TFI** – Tashkent Financial Institute

*Научное издание*

## **МАТЕРИАЛЫ**

### **IV Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики»**

Макет выполнен в Институте прикладной математики  
и автоматизации – филиале Федерального государственного  
бюджетного научного учреждения «Федеральный научный центр  
«Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук»



9 785936 810886

Подписано в печать 04.05.2018

Бумага офсетная. Формат бумаги 84×108 1/32.

Гарнитура Таймс. 17 усл. печ. л. Тираж 200 экз.

---

Отпечатано в полном соответствии с оригиналом

в ООО “Редакция журнала “Эльбрус”

360051, КБР, г. Нальчик, ул. Кабардинская, 19

Тел./факс: (8662) 42-62-09

e-mail: [elbrus@mail.ru](mailto:elbrus@mail.ru)

[www.elbrus.ru](http://www.elbrus.ru)