

Оглавление

Абазоков М.Б. Представление решения нагруженного уравнения параболического типа в ограниченной области	18
Агаханова Я.С. The influence function of the elastic problem on the graph	19
Адамчук А.С., Амироков С.А. О методе двумерных проекций исследования динамики развития взаимодействующих сообществ в многовидовой вольтерровской модели	20
Aguirrezabala J.J.A., Celaya E.A., Matute J.M., Danilkina O.Yu. Solution of the wave equation using methods with numerical dissipation	23
Алероев М.Т. Применение дробного дифференциального уравнения Фоккера-Планка для прогнозирования фондового рынка	24
Алиханов А.А. Краевые задачи для обобщенного уравнения диффузии и разностные методы их численной реализации	25
Amanov D. The Dirichlet problem for the Poisson's equation with higher order derivatives on the boundary	28
Апаков Ю.П. Об одном свойстве фундаментального решения уравнения третьего порядка кратными характеристиками .	29
Апеков А.М. Межфазная энергия граней серебра и золота на границе с диэлектрической средой	32
Артюшин А.Н. Интегральные уравнения Вольтерра и эволюционные уравнения с интегральным условием	33
Асхабов С.Н. Метод монотонных операторов в теории нелинейных сингулярных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений	33
Аттаев А.Х. Краевые задачи с внутренне-краевым смещением для одномерного волнового уравнения	36

Akhmanova D.M., Kosmakova M.T., Syzdykova N.K., Zhanbusinova B.H. On the singular Volterra integral equation for heat conduction problems in the domain with moving boundary	37
Ахымбек М.Е. Восстановление коэффициентов закрепления и нагруженности одного из концов стержня по спектральным данным	40
Ashyralyev A. An operator approach in investigation of partial differential equations involving the fractional derivative	42
Ayaz S.Zh., Sadybekov M.A. On a new stable difference scheme approximating a differential problem for one-dimensional heat equation under Samarskii-Ionkin boundary conditions	44
Багов М.А. Проектирование трубопроводной сети Штейнера .	46
Багов М.А., Кудаев В.Ч. Сетевая задача Штейнера с учетом энергетических затрат	47
Балгимбаева Ш.А., Смирнов Т.И. Оценки поперечников Фурье классов периодических функций с заданной мажорантой смешанного модуля гладкости	50
Балкизов Ж.А., Сокуров А.А. Об одном приближенном методе решения задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева – Бицадзе	53
Басаева Е.К., Каменецкий Е.С., Хосаева З.Х. Математическое моделирование взаимодействия элиты и трудящихся	54
Березгова Р.З. Задача Коши в локальной постановке для нагруженного дифференциального уравнения с оператором Барретта в главной части	57
Берзегова Р.Б. Возмущения атмосферы при обтекании гор и безопасность полетов в горах Адыгеи	58
Бердышев А.С., Кадиркулов Б.Ж. Об одной обратной задаче для дробного уравнения четвертого порядка с вырождением по времени	60
Beshtokov M.KH. A numerical method for solving the first boundary value problem for loaded differential Sobolev type equation	62
Бештокова З.В., Шхануков-Лафишев М.Х. Локально-одномерная схема для параболического уравнения с нелокальным источником.	65

Бичегкуев М.С., Толпарова И.К. Почти периодические решения дифференциальных уравнений в банаховом пространстве	67
Богатырева Ф.Т. О спектре нелокальной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка	70
Брыкалова А.А. Использование технологий инженерии знаний в маркетинге	72
Буздов Б.К. Численное решение одной двумерной краевой задачи типа Стефана с переменным коэффициентом теплопередачи	73
Бухурова М.М. Задача синтеза сети на графе	77
Бучацкая В.В., Бучацкий П.Ю., Теплоухов С.В. Влияние особенностей прикладных задач на выбор методов прогнозирования	79
Винокурский Д.Л., Григорян Л.А., Обласова И.Н., Тимофеева Е.Ф., Кононова Н.В., Воробьев Л.В. Расчет зонной структуры SiC методом присоединенных плоских волн	81
Волик М.В. Исследование влияния длины улицы с домами разной высоты на картину течения воздуха в ней	83
Волчков В.В., Волчков Вит.В. Условия единственности для решений уравнения Дарбу	85
Гадзова Л.Х. Двухточечная краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами	86
Гасиева А.М., Алиханов А.А. Разностная схема повышенного порядка аппроксимации для уравнения теплопроводности дробного порядка с сосредоточенной теплоемкостью	87
Геккиева С.Х. Задача Жевре для уравнения дробной диффузии с прямым и обратным ходом времени	90
Гущина В.А. Задача А.А. Дезина для уравнения смешанного типа Чаплыгина	91
Джамалов С.З. О разрешимости одной нелокальной и интегральной краевой задачи с переменными коэффициентами для уравнения смешанного типа второго рода второго порядка	92
Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И. Об одной задаче теплопроводности в вырождающейся области	94

Дзодзаев И.В., Шапранов Н.В. Особенности управления проектом разработки информационной системы	97
Дилдабек Г. Существование собственного значения задачи со смещением для параболо-гиперболического уравнения	99
Димитриченко Д.П. Построение логической нейронной сети на основе переменнозначных предикатов	101
Дробышева И.В. Эредитарный осциллятор Дуффинга с дробными производными в смысле Римана-Лиувилля	105
Дюжева А.В. Обратная задача с интегральными условиями переопределения для гиперболического уравнения	108
Ержанов Н.Е. Функция Грина задачи теплопроводности с краевым условием Самарского-Ионкина	111
Ерусалимский Я.М. 2-пути на ориентированных графах. 2-достижимость	113
Yessirkegenov N.A. On a problem for wave equation with data on the whole boundary	114
Etienne R.J. Spectrum Encoding Functions for Fractal Strings .	116
Ефимова Е.С., Тихонова И.М. Фредгольмовая разрешимость первой краевой задачи для уравнения смешанного типа второго порядка со спектральным параметром	119
Жилов Р.А. К вопросу о построении когнитивных карт для интеллектуальной обработки данных	121
Журтова М.Б. Об одной математической модели иммунного ответа	123
Зайнуллов А.Р., Сафин Э.М. Задачи по отысканию начальных условий колебаний струны	125
Зайтова Е.З. Возможности объектно-ориентированного моделирования деятельности организации	128
Зайцева Н.В. Начальные задачи для B -гиперболического уравнения с интегральным условием второго рода	130
Ибавов Т.И. Об одном алгоритме сжатия изображений на основе вейвлетов дробного порядка	131
Иманбаев Н.С. О характеристическом определителе спектральной задачи для оператора Штурма-Лиувилля с интегральным возмущением краевого условия антипериодического типа	133
Imanbaev N.S. Spectral problem for the second order ordinary differential operator with boundary load	135

Иргашев Б.Ю. Об условиях единственности решения одной краевой задачи для уравнения четного порядка	137
Iskakova U.A. On a model of oscillations of a thin flat plate with a variety of mounts on opposite sides	138
Исламов Г.Г. Типы решений спектральной задачи для ротора	140
Исраилов С.В, Сагитов А.А. Задача Коши для одной специальной системы дифференциальных уравнений	142
Kal'menov T.Sh., Arepova G.D. On a heat transfer model for the locally inhomogeneous initial data	144
Калов Х.М., Калов Р.Х. Математические расчеты и экспериментальные исследования испарения облачных капель .	145
Карашева Л.Л. Теорема единственности решения для параболического уравнения высокого порядка с дробной производной	148
Каримов Ш.Т. Об одном методе решения задачи Коши для итерированного обобщенного оператора Эйлера-Пуассона-Дарбу	149
Karova F.A. A Difference Scheme for the tempered time fractional Allers' equation	152
Кенетова Р.О. Моделирование внутриэтнических эволюционных процессов	155
Ким В.А. Модельное уравнение эредитарного осциллятора Дуффинга с производной переменного дробного порядка Римана-Лиувилля, характеризующая вязкое трение	156
Киржинов Р.А. Об аналоге задачи А.А. Дезина для уравнения смешанного типа второго порядка	159
Киселева Т.В., Шелест П.Д. Применение современных информационных технологий при изучении биологических процессов	160
Кожанов А.И. Обратные и нелокальные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными	162
Кожевникова Л.М. О решениях эллиптических уравнений с L_1 – данными в неограниченных областях	162
Косимов Х.Н., Абдуолимова М.К. О неединственности решения краевой задачи со смещением для уравнения гиперболического типа	163

Крахоткина Е.В. Использование средств программирования MathCad для реализации алгоритма метода сеток при решении задачи перераспределения давления многокомпонентного рассола в пористой среде	165
Куготова М.Н. Математическое моделирование информационного взаимодействия	167
Кудаева З.В. Единственность решения задачи Дирихле для уравнения смешанного типа с параллельными линиями параметрического вырождения	168
Кулаев Р.Ч. О неосцилляции на уравнения графе	170
Кумыков Т.С. Исследование влияния фрактальности среды на механизмы роста облачных частиц	172
Кюль Е.В. Использование ГИС при картографировании опасных природных процессов	173
Лам Тан Фат, Вирченко Ю.П. Поток энергии электромагнитного поля в стохастической модели радиационно-кондуктивного теплообмена в диэлектрической твердотельной среде	176
Ласурия Р.А., Голава М.Р. Сильная аппроксимация функций в обобщенных гельдеровых пространствах	178
Лосanova Ф.М. Об одной задаче с интегральным условием для уравнения дробной диффузии	180
Лютикова Л.А., Шматова Е.В. Процедура направленного поиска корректных операций над алгоритмами	181
Ляхов Л.Н. Дробное интегралы и производные Киприянова и решение задачи Коши для сингулярного дифференциального уравнения	183
Мавлявиев Р.М., Гарипов И.Б. Гауссово соотношение для смежных функций Горна H_3	184
Магомедов Р.А., Мейланов Р.П., Мейланов Р.Р., Ахмедов Э.Н., Бейбалаев В.Д., Аливердиев А.А. К выводу фрактального уравнения состояния многокомпонентных систем	186
Мажгихова М.Г. Краевая задача для дифференциального уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом	188
Макаова Р.Х. Об однозначной разрешимости первой краевой задачи для уравнения Аллера	191
Макаров Д.В. Об одной эредитарной динамической системе, моделирующей экономические циклы	192

Малиева Ф.Ф. Численное решение краевой задачи для нелинейного уравнения теплопроводности с производными дробного порядка	195
Мамчуев Мурат О. Краевая задача для системы уравнений с частными производными дробного порядка	197
Мамчуев Мухтар О. К вопросу о применении дробного интегродифференцирования в моделировании диффузионно-дрейфового транспорта носителей заряда в слоях с фрактальной структурой	200
Мартемьянова Н.В. О единственности решения обратной задачи по отысканию правой части вырождающегося уравнения смешанного типа	202
Масаева О.Х. О единственности решения задачи Дирихле для нелокального волнового уравнения	204
Matyakubov A.S. On global existence of solutions to cross-diffusion parabolic system not in divergence form	206
Милостивая Ю.С. Использование метода динамического программирования для оптимального распределения инвестиций	209
Мирсабуров М. О единственности решения задачи с аналогами условия Франкля на характеристике и на отрезке вырождения для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом	212
Мухамадиев Э.М., Наимов А.Н. Существование и единственность ограниченных решений для одного класса линейных дифференциальных уравнений в частных производных на плоскости	216
Назаралиев М.А., Бейбалаев В.Д., Аливердиев А.А., Ахмедов Э.Н., Мейланов Р.Р., Магомедов Р.А. Численное решение краевой задачи для системы уравнений нелокальной неизотермической фильтрации	218
Назимов А.Б. О регуляризации сдвигом сингулярного интегрального уравнения Гильберта нейтрального типа	221
Николаев Е.И. Реализация метода SPH на графических процессорах	224
Обласова И.Н., Ширяева Н.В., Тимофеева Е.Ф., Агаханова Я.С., Винокурский Д.Л. Некоторые свойства математической модели сингулярнозакрепленной консоли	227

Огородников Е.Н. Математические модели наследственно упругого тела в интегральной форме и решение задачи о ползучести	228
Олимов А.Г. Обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка с сингулярной или сверх сингулярной точкой	231
Oralsyn G. Inverse coefficient problems for one-dimensional heat transfer with a preservation of medium temperature condition	234
Orazov I. On one mathematical model of the extraction process of polydisperse porous material	236
Орлова Н.С. Исследование влияния коэффициента проскальзываия на результаты моделирования движения обвалов	238
Ошхунов М.М., Рехвиашвили С.Ш., Нарожнов В.В. Исследование соударений осциллятора с упругим полупространством	240
Паровик Р.И. Некоторые свойства фрактального осциллятора Ван-дер-Поля	243
Пачулия Н.Л., Пачулия Н.Н. О конструктивных характеристиках сильных преобразований типа Марцинкевича рядов Фурье на классах $C(T^m)$	247
Пименов В.Г. Связь численных алгоритмов решения уравнений с запаздыванием и дробных уравнений	249
Pimenov V.G., Hendy A.S. Numerical solution for a class of semi-linear delayed diffusion-wave system with time fractional order	252
Piskarev S. Approximation of fractional equations	255
Псху А.В. К теории линейных обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка	255
Пшибихова Р.А. Задача Гурса для обобщенного телеграфного уравнения дробного порядка с переменными коэффициентами	256
Раджабов Н.Р. Корректная постановка граничных задач для одного класса сингулярного интегрального уравнения по цилиндрической области	257
Раджабов Н.Р., Раджабова Л.Н., Зарипов С. К теории одного класса двумерного симметричного интегрального уравнения Вольтерра с сингулярными ядрами	260

Раджабов Н.Р., Раджабова Л.Н., Сайдов С.А. Краевые задачи для одного класса интегральных уравнений вольтерровского типа с двумя граничными сингулярными точками	265
Расулов А.Б. Краевые задачи для системы типа Коши-Римана с особенностями разного порядка в коэффициентах	267
Расулов М.С., Тахиров А.Ж. Задача Стефана для квазилинейного параболического уравнения с коэффициентом Шторма	268
Рехвиашвили С.Ш., Кунижев Х.Л. Математическое моделирование переноса тепла с учетом ангармонизма колебаний атомов среды	270
Rutkauskas S. Exact solutions of Dirichlet type problem to elliptic equation, which type degenerates at the axis of cylinder	271
Рузиев М.Х. О краевой задаче для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом в неограниченной области .	272
Сабитов К.Б. О знакопределенности решения неоднородного уравнения смешанного параболо-гиперболического типа высокого порядка	274
Саиег Т.Х. Математическое моделирование первой краевой задачи с нелокальным линейным источником распределения примеси в руслах рек	277
Сафаров Д.С. Двоякопериодические решения одного нагруженного интегрального уравнения	279
Сафина Р.М. К задаче Дирихле для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом	281
Сербина Л.И. Об одном методе нагружений в решении краевой задачи аномальной фильтрации	283
Сидоров С.Н. Начально-граничные задачи для неоднородного уравнения смешанного параболо-гиперболического типа с вырождающейся параболической частью	284
Солдатов А.П. Интегралы с однородно-разностными ядрами на плоскости	287
Сташ А.Х. О полных и векторных частотах решений линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами	288
Субботин А.В., Вирченко Ю.П. Аналитические обратимые динамические системы	291

Сухинов А.И., Сидорякина В.В. Исследование сходимости решения линеаризованной задачи к решению нелинейной задачи транспорта наносов	294
Сухинов А.И., Сидорякина В.В., Сухинов А.А. Априорная оценка решения двумерной задачи транспорта насосов	297
Тедеев Ал.Ф. Некоторые вопросы решений нелинейного параболического уравнения диффузии	300
Тенгаева А.А., Садыбеков М.А. О новой нелокальной краевой задаче для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа	303
Тимофеева Е.Ф, Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Григорян Л.А., Обласова И.Н., Винокурский Д.Л. Результаты численного моделирования волновых процессов в прибрежной зоне на основе неявных и явных регуляризованных схем	304
Тлячев В.Б., Ушхо А.Д., Ушхо Д.С. Некоторые математические аспекты исследования модели ФитцХью-Нагумо . .	307
Тураев Р.Н. Задача со свободной границей для квазилинейного параболического уравнения с неклассическим граничным условием	310
Турметов Б.Х. О периодических краевых задачах для уравнения Пуассона	313
Умархаджиев С.М. Операторы Харди в гранд-пространствах Лебега	315
Унгарова Л. Г. Решение задачи ползучести и идентификация параметров математических моделей наследственноупругого тела, порядок которых больше единицы	317
Уринов А.К., Маманазаров А.О. Нелокальная задача для параболо-гиперболического уравнения с сингулярным коэффициентом	320
Хазириши Э.О. Квадратурные формулы с обычными и кратными узлами для сингулярных интегралов	322
Хубиев К.У. Об одной математической модели уравнения Аллера	324
Хуштова Ф.Г. Задача Коши для дифференциального уравнения с оператором Бесселя и частной производной дробного порядка	326
Чернова О.В. Задача Римана–Гильберта для эллиптической системы первого порядка с вещественными коэффициентами	327

Чернышев Г.В. К методологии создания активных баз данных иерархического типа	328
Чубатов А.А., Кармазин В.Н. Устойчивый метод идентификации интенсивности источника загрязнения атмосферы на основе расширенных нормальных систем	332
Чуриков В.А. Множественность общих решений уравнения теплопроводности с пространственными производными рациональных дробных порядков в d -анализе	335
Шагрова Г.В., Дроздова В.И., Романенко М.Г., Лойторенко Е.Н. Моделирование колебаний намагничивающихся микрокапель в переменном магнитном поле с учетом их теплофизических характеристик	337
Шамсудинов Ф.М. Об одной вырождающейся переопределенной системе дифференциальных уравнений второго порядка со сверхсингулярной точкой	341
Шогенова Е.М. Нелокальная задача с интегральным условием для стационарного уравнения Бейли	344
Шогенова З.А. Математическое моделирование эндокринных заболеваний щитовидной железы на основе матричных моделей Лесли	345
Шибзухов З.М., Казаков М.А. Алгоритм стохастически усредненного градиента на базе агрегирующей функции	348
Shumafov M.M., Tlyachev V.B. On the Construction of Lyapunov Functions for the Second Order Linear Stochastic Systems and Stability Conditions	351
Шхагапсоев А.М. Априорная оценка решения краевой задачи Каттабрига для обобщенного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками	354
Энеева Л.М. Оценка первого собственного значения краевой задачи для уравнения дробного порядка с различными начальными	356
Эфендиев Б.И. Формула Лагранжа для обыкновенных непрерывных дифференциальных уравнений второго порядка	357
Юлдашева А.В. Краевая задача для одного квазилинейного уравнения четного порядка	358
Якубов Р.А. Об одной модели динамической системы, описываемой дробными дифференциальными уравнениями	360
Якубов А.З., Джамирзаев А.С., Якубов Р.А. Построчная дефрагментация матрицы расписания	361

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И АВТОМАТИЗАЦИИ



Институт прикладной математики и автоматизации основан в 1991 году. Несколько раз за двадцать пять лет истории менялось название института: Научно-исследовательский институт прикладной математики и автоматизации (НИИ ПМА), Научно-исследовательский институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук (НИИ ПМА КБНЦ РАН). В настоящее время полное название института: Федеральное государственное бюджетное научное учреждение "Институт прикладной математики и автоматизации" (ИПМА). Поддержка таких выдающихся ученых, как члена-корреспондента АН СССР, члена-корреспондента РАН, академика Грузинской ССР А.В. Бицадзе, Героя социалистического труда академика АН СССР, академика РАН А.А. Самарского, Героя социалистического труда академика РАН М.Ч. Залиханова, академика РАН, председателя подкомитета по науке Верховного Совета РСФСР А.К. Микитаева сделала возможным тот факт, что 26 августа 1991 года заместителем Председателя Правительства России, председателем Госкомитета РСФСР по делам науки и высшей школы Н.Г. Малышевым было подписано постановление о создании в Кабардино-Балкарской Республике НИИ ПМА и назначении его директором заслуженного деятеля науки РФ, д.ф.-м.н., профессора Нахушева Адама Маремовича. 25 декабря 1991 года состоялась

презентация нового института.

С первых организационных шагов создание НИИ ПМА было поддержано руководством Кабардино-Балкарии. Еще в 1987 году Совет министров КБР ходатайствует перед Министерством высшего образования СССР об открытии НИИ прикладной математики и автоматизации. В 1991 году председатель Верховного Совета КБР В.М. Коков обращается в Госкомитет РСФСР по делам науки и высшей школы с просьбой об открытии Института. Позднее постановлением Президиума Совета КБР молодому Институту передается здание бывшего городского комитета КПСС. В 1993 году НИИ ПМА вошел в систему Российской академии наук и стал одним из институтов Кабардино-Балкарского научного центра РАН.

История создания и развития института неразрывно связана с именем выдающегося ученого, заслуженного деятеля науки РФ, КБР, КЧР, Республики Адыгея, основателя и Президента Адыгской (Черкесской) Международной академии наук, доктора физико-математических наук, профессора Адама Маремовича Нахушева. А.М. Нахушев – дважды лауреат государственной премии Кабардино-Балкарской Республики в области науки и техники; награжден орденом Дружбы, многочисленными медалями и грамотами. В 2007 году мировым Артийским комитетом и мировой ассамблей общественного признания ему присвоено почетное звание "Человек мира-2007", 9 ноября 2010 года указом Президента Российской Федерации от № 1400 за заслуги в области образования и науки и многолетнюю плодотворную работу Адам Маремович Нахушев награжден орденом Почета.

Сегодня Институт прикладной математики и автоматизации – известная и в России, и за рубежом научная школа А.М. Нахушева. Обширна и разнообразна география "школы А.М. Нахушева". Это Россия, Казахстан, Корея, Узбекистан, Пакистан, Турция. Всего научная школа А.М. Нахушева насчитывает более 150 человек. "Вы, стали Меккой для россиян, занимающихся дробными производными" – эти слова одного из ведущих специалистов в области дробного исчисления доктора физико-математических наук профессора В.В. Учайкина как нельзя лучше подчеркивают роль и место в математической науке института, созданного в не такие уж и далекие девяностые годы.

На данный момент в ИПМА действуют 7 научно-исследовательских отделов: Дробного исчисления (ДИ), Нейроинформатики и

машинного обучения (НиМО), Уравнений смешанного типа (УСТ), Систем автоматизированного проектирования смешанных систем и управления (САПР ССиУ), Теоретической и математической физики (ТМФ), Вычислительных методов (ВМ), Математического моделирования геофизических процессов (ММГП); 2 лаборатории: Лаборатория синергетических проблем (ЛСП), Лаборатория автоматизации измерений (ЛабАИ). Также в институте функционирует Научно-образовательный центр, в составе которого Базовая кафедра "Дифференциальные уравнения и математическая физика" (БКДУМФ) и Межвузовская базовая кафедра математического моделирования (МБКММ). В институте есть свое научно-опытное экспериментальное хозяйство (НЭОХ), которое дает возможность собирать экспериментальные данные для создаваемых сотрудниками института математических моделей биологических систем.

Основными направлениями научной деятельности института являются: Нелокальные дифференциальные уравнения и математическая физика фракталов; Математическое моделирование нелокальных экстремальных процессов в системах с фрактальной структурой и памятью; Дробное исчисление и его применение к фундаментальным и прикладным проблемам информатики, естествознания и социально-исторических наук; Развитие гетерогенных полиномиальных нейронных сетей, оптимальных баз знаний и систем обучения в слабоформализованных областях; Математические проблемы САПР смешанных систем; Развитие численно-аналитических и функциональных методов построения уравнений состояния вещества для разработки моделей различных сред и нелокальных физических процессов в экстремальных условиях высоких давлений и температур; Математические проблемы селе-, градо- и лавинообразных процессов в экстремальных условиях. Результаты, полученные сотрудниками института, высоко оценены Российской академией наук, руководством КБР. Дважды творческий коллектив ученых под руководством А.М. Нахушева становился лауреатом государственной премии КБР.

Все разнообразие научных интересов и разноплановость научных исследований, проводимых в институте, можно в полной мере ощутить на международных конференциях и симпозиумах, традиционно проводимых коллективом института. С 1996 года институтом проведено 32 международных и всероссийских мероприятия: 4 Международных конференции "Нелокальные краевые задачи и

родственные проблемы математической биологии, информатики и физики"(B&Nak); 2 Российско-Узбекских, Российско-Болгарский, 3 Российско-Казахских, Российско-Азербайджанский, Российско-Абхазский международные симпозиумы; Российско-Китайская конференция, Международные и Всероссийские конференции молодых ученых; Школы молодых ученых, где известные профессора читают лекции молодым ученым.

В данном сборнике опубликованы тезисы докладов участников Международной научной конференции "Актуальные проблемы прикладной математики и информатики" и XIV Школы молодых ученых (17-22 октября 2016 г., Нальчик, Приэльбрусье). Конференция и Школа проводятся в рамках юбилейных мероприятий, посвященных двадцатипятилетию института, в ней участвуют ученые из 12 стран и более чем из 25 городов России. Конференция проводится при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-20738).

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

© Абазоков М.Б.

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
"Институт прикладной математики и автоматизации" (Россия, Нальчик)
e-mail: Abazokov.Mukhammed@yandex.ru

Рассмотрим в области $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t < 2\pi\}$ следующую граничную задачу:

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha x u(x, t) \Big|_{x=\bar{x}} = f(x, t),$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad u(x, 0) = u(x, 2\pi),$$

где $\bar{x} \in (0, 1)$ - фиксированная точка, $\alpha \in \mathbb{C}$ - заданное число, $f \in L_2(0, 2\pi; W_2^2(0, 1) \cap \overset{\circ}{W}_2^1(0, 1))$ - заданная функция. $W_p^l(\Omega)$ - линейное пространство всех функций, суммируемых на любом замкнутом ограниченном множестве, содержащемся в области Ω , имеющих в области Ω все обобщенные производные порядка l , суммируемые в степени $p \geq 1$.

Опираясь на результаты работы [1, с.16, 289], получено представление решения данной граничной задачи в виде

$$u(x, t) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \int_0^1 J_s(x, \bar{x}, \xi) f_s(\xi) d\xi,$$

где \mathbb{Z} - множество целых чисел. При $\lambda^2 = is$ и $\forall s \in \mathbb{Z}$,

$$J_s(x, \bar{x}, \xi) = e^{\lambda^2 t} \left[\frac{\alpha(sh\lambda x - xsh\lambda)}{\lambda^2 sh\lambda - \alpha(sh\lambda \bar{x} - \bar{x}sh\lambda)} G_s(\bar{x}, \xi) + G_s(x, \xi) \right],$$

$$G_s(x, \xi) = \begin{cases} \frac{sh\lambda\xi sh(1-x)}{\lambda sh\lambda}, & 0 \leq \xi \leq x \leq 1, \\ \frac{sh\lambda x sh(1-\xi)}{\lambda sh\lambda}, & 0 \leq x \leq \xi \leq 1, \end{cases} s \neq 0,$$

$$G_0(x, \xi) = \begin{cases} \xi(1-x), & 0 \leq \xi \leq x \leq 1, \\ x(1-\xi), & 0 \leq x \leq \xi \leq 1, \end{cases}$$

$f_s(x)$ - коэффициенты разложения функции $f(x, t)$ в ряд Фурье.

Литература

1. Джесеналиев М.Т., Рамазанов М.И. Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений. Алматы: ФЫЛЫМ, 2010. 334 с.

УДК 517.91

THE INFLUENCE FUNCTION OF THE ELASTIC PROBLEM ON THE GRAPH

© Агаханова Я.С.

Московский физико-технический институт (Россия, Москва)
e-mail: ladushki_22@mail.ru

Пусть изучаемая реальная система, состояние которой описывается скалярнозначной функцией $u(x)$, находится под действием закона наименьшего действия. Это – типичная основополагающая предпосылка (как правило – неявная и сама по себе разумеющаяся). Пусть потенциальная энергия этой системы, соответствующая виртуальному состоянию $u(x)$, определяется интегралом

$$V(u(x)) = \int_{\Gamma} \frac{pu'^2}{2} dx - \int_{\Gamma} u dF, \quad (1)$$

где Γ - некоторый конечный граф из R^3 .

Функцией влияния $H_{\xi}(x)$ описанной системы мы называем минималь функционала

$$V_{\xi}(u) = \int_{\Gamma} \frac{pu'^2}{2} dx - u(\xi). \quad (2)$$

Этот последний функционал отличается от предыдущего тем, что второе слагаемое не имеет привычного интегрального вида, но может определяться дифференциалом Стильтьеса с единичным атомом меры. Физический смысл второго слагаемого очевиден – оно определяет работу, выполненную единичной силой на дистанции $u(\xi)$. Поэтому физический смысл минимали (2) – реальная форма, принятая системой под воздействием приложенной в точке $x = \xi$ единичной силы.

Здесь, как и всюду далее, мы будем через E обозначать множество физически допустимых функций, которые должны быть:

- определены на Γ ;

- непрерывны на Γ , включая все внутренние узлы;
- иметь почти всюду на ребрах Γ обычную производную – иначе формулы (1) и (2) лишаются смысла.

Мы допускаем, что в граничных узлах (из $\partial\Gamma$) имеются какие-либо дополнительные условия – глухого закрепления, упругих реакций, линейного взаимодействия с какой-либо другой линейной системой – для нее это не важно. Так же, как пока неважно, где наши реальные формы имеют вторую производную.

Функцию влияния $H_\xi(x)$, зависящую пока от ξ как от параметра, мы будем обозначать через $H(x,\xi)$, «поднимая» авторитет ξ , ибо далее выяснится главенствующая в некоторых вопросах роль этого параметра ξ .

Теорема 1. Для того, чтобы определенная на $\Gamma \times \Gamma$ функция $H(x,\xi)$ была функцией влияния нашей задачи, необходимо и достаточно, чтобы для функции $u(x) \equiv H(x,\xi)$ выполнялось на каждой $h(x)$ из E тождество

$$\int p u' h' dx = h(\xi). \quad (3)$$

Доказательство почти очевидно – тождество (3) есть уравнение Лагранжа, которому $H(x,\xi)$ должна удовлетворять по x в силу теоремы 1.

Теорема 1 описывает условия, необходимые и достаточные для определения функции влияния. Именно поэтому при всей внешней простоте она будет играть в дальнейшем фундаментальную роль.

УДК 517.2

О МЕТОДЕ ДВУМЕРНЫХ ПРОЕКЦИЙ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИКИ РАЗВИТИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ СООБЩЕСТВ В МНОГОВИДОВОЙ ВОЛЬТЕРРОВСКОЙ МОДЕЛИ

© Адамчук А.С., Амироков С.А.

Северо-Кавказский федеральный университет (Россия, Ставрополь)
e-mail: appinform@ncfu.ru

Система нелинейных дифференциальных уравнений вольтерровского типа обобщенной модели динамики n взаимодействующих со-

обществ [1,2] (популяций в экологии) имеет вид:

$$\frac{dU_i}{dt} = U_i \left(a_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} U_j \right), \quad (1)$$

где a_i — скорость естественного прироста i -го вида U_i в отсутствие остальных; a_{ij} — влияние j -го вида на i -й. В наши дни уравнения (1) широко применяются для моделирования процессов динамики и изменений структуры взаимодействующих сообществ в различных сферах человеческой деятельности [3,4,5], причем важно исследовать не только вопросы устойчивости таких систем, но и процессы развития каждого сообщества, найти условия их существования. В представленной работе предлагается метод выявления динамики развития каждого сообщества многомерной системы путем рассмотрения попарных взаимодействий и визуализации соответствующих фазовых траекторий на плоскости в окрестности стационарной точки со всеми ненулевыми координатами, которая, как правило, является неустойчивой. Продемонстрируем этот метод на примере пяти взаимодействующих сообществ, тогда модель описывается обобщенной системой (1) пяти нелинейных дифференциальных уравнений, где i, j меняются от 1 до 5. Такая система имеет 32 стационарные точки, в 31-й из них есть нулевые координаты, и только в одной — 32-й — все координаты ненулевые, причем если они положительны — то это случай, когда все 5 сообществ U_i существуют. Пусть координаты этой стационарной точки: $A(l, m, n, k, s)$.

Заметим, что в силу особого вида нелинейных членов дифференциальных уравнений системы (1), в вольтерровской модели легко найти *точные* координаты как интересующей нас точки, так и всех остальных стационарных точек. В рассматриваемом случае для пятивидовой модели координаты стационарной точки должны удовлетворять алгебраической системе уравнений:

$$U_i(a_i + a_{i1}U_1 + a_{i2}U_2 + a_{i3}U_3 + a_{i4}U_4 + a_{i5}U_5) = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5. \quad (2)$$

Если сначала искать стационарную точку со всеми ненулевыми координатами (все $U_i \neq 0$), то на U_i перед скобками в (2) можно сократить и получить линейную алгебраическую систему пяти уравнений, которая имеет единственное решение и решается стандартными методами линейной алгебры, например, методом Жордана-Гаусса. Отметим сразу, что так же легко найти и координаты дру-

гих стационарных точек системы (1), так как условия для некоторых U_i , приведут лишь к понижению порядка алгебраической системы (2).

В представленной работе предлагается исследовать стационарное состояние A системы (1) на устойчивость методом двумерных проекций, который состоит в сведении системы (1) к нескольким попарным двумерным системам Лотки-Вольтерра. Зафиксируем сначала $U_3 = n, U_4 = k, U_5 = s$, придав им значения найденных координат. Обозначим эти числа U_3^*, U_4^*, U_5^* и подставим в систему (1). Получим систему двух уравнений вольтерровского типа:

$$\begin{aligned}\frac{dU_1}{dt} &= a_1^*U_1 + a_{12}U_1U_2 + a_{11}U_1^2 \\ \frac{dU_2}{dt} &= a_2^*U_2 + a_{21}U_1U_2 + a_{22}U_2^2\end{aligned}\quad (3)$$

где введены обозначения:

$$a_1 + a_{13}U_3^* + a_{14}U_4^* + a_{15}U_5^* = a_1^*; a_2 + a_{23}U_3^* + a_{24}U_4^* + a_{25}U_5^* = a_2^*, \quad (4)$$

Двумерная система (3) была исследована на устойчивость в статье [3] с помощью метода Ляпунова. Система (3) имеет 4 стационарные точки, координаты ненулевого стационарного состояния, в котором сообщества U_1 и U_2 существуют, имеют вид (5), которые, как и следовало ожидать, совпадают для этих сообществ с найденными выше из системы (2) методом Жордана-Гаусса:

$$U_1 = \frac{a_2^*a_{12} - a_1^*a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, U_2 = -\frac{a_2^*a_{11} - a_1^*a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \quad (5)$$

В [3] приведены формулы для корней характеристического уравнения для соответствующей линеаризованной системы, по виду которых можно судить об устойчивости стационарной точки для двумерной системы (3) и о поведении фазовых траекторий. Фиксируя другие пары координат стационарной точки модели, получим другие двумерные системы, которые исследуем аналогично.

Разработаны программы на Delphi поиска стационарной точки со всеми ненулевыми координатами поиска и исследования на устойчивость стационарных точек для соответствующих двумерных систем и визуализации фазовых траекторий.

Литература

1. Романов М.Ф., Федоров М.П. Математические модели в экологии. СПб.: «Иван Федоров», 2003. 240 с.
2. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. 301 с.
3. Адамчук А.С., Амироков С.Р., Притула Т.К. Исследование поведения двух фирм с помощью вольтеровской модели взаимодействия сообществ// Вестник Северо-Кавказского федерального университета. 2014. №1. (40) С. 9–13.
4. Чернавский Д.С., Щербаков А.В., Зульпукаров М.М. Модель конкуренции. Москва: Препринт ИПМ № 64, 2006 г.
5. Буданов В.Г. Проблема параметров порядка и глобализация// Глобализация: синергетический подход. М.: РАГС, 2002. С. 47–50.

UDC 517.95

SOLUTION OF THE WAVE EQUATION USING METHODS WITH NUMERICAL DISSIPATION

© Aguirrezzabala J.J.A.¹, Celaya E.A.¹,
Matute J.M.¹, Danilkina O.Yu.²

¹University of the Basque country UPV/EHU (Spain, Bilbao)

²Department of Mathematics, College of Natural and Mathematical Sciences,
University of Dodoma (Tanzania, Dodoma)

e-mail: elisabete.alberdi@ehu.es, e-mail: juanjose.anza@ehu.es

e-mail: judith.munozmatute@gmail.com, e-mail: olga.danilkina@gmail.com

Abstract. The one-dimensional linear wave equation with boundary conditions (BC) and initial conditions (IC) in a string of length L has been considered. Let $u(x, t)$ denote the vertical displacement of the string from the x axis in time t . It is assumed that the string is undergoing small amplitude transverse vibrations so that $u(x, t)$ obeys the wave equation. This equation has been discretized using the finite element method (FEM) using linear and quadratic shape functions, obtaining a stiff system of second order Ordinary Differential Equations (ODEs). The high-modes of the resulting ODE system are consequence of the FEM approximation and they are not representative, so they have to be removed from the solution to avoid inconvenient noise. Solving stiff ODEs requires the use of numerical methods with good stability properties and controlled numerical dissipation in the high-frequency range. The HHT- α and the Collocation methods are second

order precision, unconditionally stable and able to dissipate high-modes for some values of the parameters. They both operate directly in second order ODEs. We have calculated the parameters for which the numerical dissipation of these methods in the high-frequency range is similar. We have solved the wave equation obtaining noise free and accurate solutions.

Литература

1. *Celaya E. Alberdi, Aguirrezzabala J.J. Anza* Solution of the Wave-Type PDE by Numerical Damping Control Multistep Methods, Procedia Comput. Science. 2014. Vol. 29. P. 779-789.
2. *Ern A., Guermond J.L.* Theory and practice of finite elements. Springer Science & Business Media, New York, 2004.
3. *Gladwell I., Thomas R.* Stability properties of the Newmark, Houbolt and Wilson θ methods. Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech. 1980. Vol. 4. P. 143-158.
4. *Hairer E., Wanner G.* Solving ordinary differential equations, II, Stiff and Differential Algebraic Problems, Springer, Berlin, 1991.
5. *Hughes T.J.R.* The finite element method. Linear Static and dynamic finite element analysis, Prentice-Hall International Editions, New Jersey, 1987.
6. *Hulbert G.M., Hughes T.J.R.* Space-time finite element methods for second-order hyperbolic equations. Comput. Methods in Appl. Mech. Eng. 1990. Vol. 84. P. 327-348.

УДК 517.927.2

ПРИМЕНЕНИЕ ДРОБНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА-ПЛАНКА ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ФОНДОВОГО РЫНКА

© Алероев М.Т.

Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"
(Россия, Москва)
e-mail: muhammed.aleroev@gmail.com

В работе [1] дробное дифференциальное уравнение Фоккера - Планка было адаптировано под нужды финансовой математики. В данной работе строится простейшее торговое правило, основанное на решении следующего уравнения Фоккера - Планка

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}[U(x,t)\sigma(x,t)] - \frac{\partial}{\partial x}[\mu(x,t)U(x,t)] = \frac{\partial}{\partial t}[U(x,t)]. \quad (1)$$

Здесь $U(x, t)$ - функция распределения доходности рассматриваемых акций, $\mu(x, t)$ - математическое ожидание случайного смещения доходности рассматриваемых акций, $\sigma(x, t)$ - дисперсия вокруг данного смещения.

Для анализа функции $U(x, t)$ воспользуемся методом Фурье. $U(x, t)$ представим в виде произведения $X(x)$ и $T(t)$ и получим уравнение

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}[\sigma(x)X(x)T(t)] - \frac{\partial}{\partial x}[\mu(x)X(x)T(t)] = \frac{\partial}{\partial t}[X(x)T(t)]. \quad (2)$$

Дальше решение предполагает параметризацию функций мгновенного смещения $\mu(x)$ и диффузии $\sigma(x)$.

На финансовых рынках актуальна следующая спецификация:

$$\mu(x) = mx,$$

$$\sigma(x) = S^2x^2,$$

где m - среднее смещение финансовой координаты (доходности) на скользящем периоде, S - среднеквадратическое отклонение доходности, измеренное на том же скользящем векторе. В данной работе строится приближенно решение $U(x, t)$.

Литература

1. Temirkhan S. Aleroev, Hedi T. Aleroeva, Jianfei Huang, Mikhail V. Tamm, e, Yifa Tang, Yue Zhao. Boundary value problems of fractional Fokker-Planck equations// Advances in Fractional Differential Equations (IV): Time-fractional PDEs" in Computers & Mathematics with Applications, 2016. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.camwa.2016.06.038>

УДК 519.63

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБОЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ И РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ ИХ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ

© Алиханов А.А.

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
"Институт прикладной математики и автоматизации" (Россия, Нальчик)
e-mail: alikhanov-tom@yandex.ru

В работе [1] развит метод энергетических неравенств для краевых задач диффузионно-волнового уравнения. Получены априорные оценки решений первой и третьей краевых задач. Для решения

уравнений диффузии дробного, переменного и распределенного порядков с краевыми условиями первого и третьего родов методом энергетических неравенств как для дифференциальных, так и для разностных задач получены априорные оценки в работах [2-3]. В работе [4] построена разностная схема повышенного порядка аппроксимации для уравнения диффузии дробного по времени порядка.

В данной работе в прямоугольнике $\bar{Q}_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$ рассматриваются краевые задачи для обобщенного уравнения диффузии. Методом энергетических неравенств получены априорные оценки как для дифференциальных, так и для разностных задач.

В рамках данного тезиса ограничимся случаем первой краевой задачи:

$$\partial_{0t}^{\alpha, \lambda} u = \mathcal{L}u + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (3)$$

где

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - q(x, t)u,$$

$$\partial_{0t}^{\alpha, \lambda} u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\lambda(t-\eta)}{(t-\eta)^\alpha} \frac{\partial u}{\partial \eta}(x, \eta) d\eta$$

– обобщенная производная Капуто порядка α , $0 < \alpha < 1$ с весовой функцией $\lambda(t) \in C^2[0, T]$, где $\lambda(t) > 0$, $\lambda'(t) \leq 0$ для всех $t \in [0, T]$; $0 < c_1 \leq k(x, t) \leq c_2$, $q(x, t) \geq 0$ для всех $(x, t) \in \bar{Q}_T$.

В данной работе для решения задачи (1)-(3) получена следующая априорная оценка

$$\begin{aligned} D_{0t}^{\alpha-1, \lambda} \|u(\cdot, t)\|_0^2 + c_1 \int_0^t \|u_x(\cdot, \eta)\|_0^2 d\eta &\leq \\ \leq \frac{1}{2c_1} \int_0^t \|f(\cdot, \eta)\|_0^2 d\eta + \frac{\lambda(0)t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \|u_0\|_0^2, & \end{aligned} \quad (4)$$

где $D_{0t}^{-\beta,\mu} u(x,t) = \int_0^t \mu(t-\eta)(t-\eta)^{\beta-1} u(x,\eta) d\eta / \Gamma(\beta)$ - обобщенный интеграл Римана-Лиувилля порядка $\beta > 0$ с весовой функцией $\mu(t)$.

Из априорной оценки (4) следует единственность и непрерывная зависимость решения от входных данных задачи.

Дифференциальной задаче ставится в соответствие разностная схема

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha,\lambda} y_i = \Lambda y_i^{j+1} + \varphi_i^{j+1}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad j = \overline{0, M-1}, \quad (5)$$

$$y(0,t) = 0, \quad y(1,t) = 0, \quad t \in \bar{\omega}_\tau, \quad y(x,0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad (6)$$

где

$$\Lambda y = (ay_{\bar{x}})_x - dy, \quad i = 1, \dots, N-1,$$

$$\Delta_{0t_{j+1}}^{\alpha,\lambda} v = \sum_{s=0}^j c_{j-s} (v(t_{s+1}) - v(t_s))$$

- разностный аналог обобщенной производной,

$$c_l = \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} (\lambda_{l+1/2} a_l + (\lambda_l - \lambda_{l+1}) b_l), \quad l \geq 0,$$

$$a_l = (l+1)^{1-\alpha} - l^{1-\alpha}, \quad b_l = \frac{(l+1)^{2-\alpha} - l^{2-\alpha}}{2-\alpha} - \frac{(l+1)^{1-\alpha} + l^{1-\alpha}}{2},$$

$$y_{\bar{x},i} = (y_i - y_{i-1})/h, \quad y_{x,i} = (y_{i+1} - y_i)/h, \quad a_i^{j+1} = k(x_{i-1/2}, t_{j+1}), \quad d_i^{j+1} = q(x_i, t_{j+1}), \quad \varphi_i^{j+1} = f(x_i, t_{j+1}).$$

Если решение задачи (1)-(3) является достаточно гладкой функцией, то разностная схема имеет порядок аппроксимации $O(h^2 + \tau^{2-\alpha})$. Для решения разностной схемы (5)-(6) справедлива априорная оценка

$$\|y^{j+1}\|_0^2 \leq \|y^0\|_0^2 + \frac{T^\alpha \Gamma(1-\alpha)}{4\lambda(T)c_1} \max_{0 \leq j \leq M} \|\varphi^j\|_0^2. \quad (7)$$

Из априорной оценки (7) следует устойчивость и сходимость разностной схемы (5)-(6) к решению дифференциальной задачи (1)-(3) со скоростью $O(h^2 + \tau^{2-\alpha})$.

Работа выполнена по гранту Президента Российской Федерации МК-3360.2015.1.

Литература

1. Alikhanov A.A. A priori estimates for solutions of boundary value problems for fractional-order equations// Differ. Equ. 46(5) (2010) 660–666.
2. Alikhanov A.A. Boundary value problems for the diffusion equation of the variable order in differential and difference settings// Appl. Math. Comput. 219 (2012) 3938–3946.
3. Alikhanov A.A. Numerical methods of solutions of boundary value problems for the multi-term variable-distributed order diffusion equation// Appl. Math. Comput. 268 (2015) 12–22.
4. Alikhanov A.A. A new difference scheme for the time fractional diffusion equation// J. Comput. Phys. 280 (2015) 424–438.

UDC 517.95

THE DIRICHLET PROBLEM FOR THE POISSON'S EQUATION WITH HIGHER ORDER DERIVATIVES ON THE BOUNDARY

© Amanov D.

Institute of Mathematics at the National University of Uzbekistan
 (Uzbekistan, Tashkent)
 e-mail: damanov@yandex.ru

Formulation of the problem. In the present work, we consider the equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (1)$$

in the domain $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < p, 0 < y < q\}$.

Problem. Find a function $u(x, y) \in C^2(\overline{\Omega})$, $\frac{\partial^k u}{\partial y^k} \in C(\overline{\Omega})$ satisfying equation (1) in Ω and conditions

$$u(0, y) = 0, 0 < y < q,$$

$$u(p, y) = 0, 0 < y < q,$$

$$\frac{\partial^k u}{\partial y^k}(x, 0) = \varphi(x), 0 < x < p,$$

$$\frac{\partial^k u}{\partial y^k}(x, q) = \psi(x), 0 < x < p,$$

where k is a fixed non negative integer. If $k=0$ then, it is necessary that the functions $\varphi(x)$ and $\psi(x)$ satisfy the conditions $\varphi(0) = \varphi(p) = 0$, $\psi(0) = \psi(q) = 0$.

The uniqueness and existence of the solution of this problem is proved.

УДК 517.951.2

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕ- ГО ПОРЯДКА КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

© Апаков Ю.П.

Наманганский инженерно-педагогический институт (Узбекистан, Наманган)
e-mail: apakov.1956@mail.ru

Уравнение третьего порядка с кратными характеристиками, содержащее вторую производную по времени

$$L(u) \equiv \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g(x, y) \quad (1)$$

впервые было рассмотрено итальянскими математиками H. Block [1] и E. Del Vecchio [2,3]. Их результаты были обобщены для уравнения $2n+1$ -го порядка в работе L. Cattabriga [4]. В работе [5,6] нами построены фундаментальные решения уравнения (1), выраженные через вырожденные гипергеометрические функции, которые имеют вид

$$U(x, y; \xi, \eta) = |y - \eta|^{\frac{1}{3}} f(t), \quad -\infty < t < +\infty,$$

$$V(x, y; \xi, \eta) = |y - \eta|^{\frac{1}{3}} \varphi(t), \quad t < 0,$$

где

$$f(t) = \frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}\pi} t \Psi\left(\frac{1}{6}, \frac{4}{3}; \tau\right), \quad \varphi(t) = \frac{36\Gamma(1/3)}{\sqrt{3}\pi} t \Phi\left(\frac{1}{6}, \frac{4}{3}; \tau\right),$$

$$\tau = \frac{4}{27}t^3, \quad t = (x - \xi)|y - \eta|^{-\frac{2}{3}},$$

$\Psi(a, b; x)$, $\Phi(a, b; x)$ – вырожденные гипергеометрические функции.

В работе [7] доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. При $|t| \rightarrow \infty$ для фундаментального решения выполняются следующие оценки:

$$\left| \frac{\partial^{h+k}}{\partial x^h \partial y^k} U(x, y; \xi, \eta) \right| \leq C_{hk} |y - \eta|^{\frac{1-(-1)^k}{2}} |x - \xi|^{-\frac{1}{2}\{2h+3k-1+\frac{3}{2}[1-(-1)^k]\}}.$$

Теорема 2. Для любой функции $\varphi(x) \in C[a, b]$ при любых $x \neq \xi, y \neq \eta$ выполняется равенство

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \eta \rightarrow y}} \int_a^b U^*(x, y; \xi, \eta) \varphi(\xi) d\xi = \varphi(x_0).$$

Теорема 3. При $\omega(y) \in C[0, l]$ имеют место равенства

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \int_0^l U_{xx}(x, y; \xi, \eta) \omega(\eta) d\eta = \begin{cases} -(2/3)\omega(y), & x > \xi, \\ (4/3)\omega(y), & x < \xi, \\ 0, & x = \xi, \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \int_0^l V_{xx}(x, y; \xi, \eta) \omega(\eta) d\eta = \begin{cases} 2\omega(y), & x < \xi, \\ 0, & x = \xi. \end{cases}$$

Отметим, что уравнение (1) является сопряженным к уравнению

$$u_{xxxx} + u_{yy} = F(x, y),$$

которое является линейной частью (при $\nu = 0$) так называемого ВТ-уравнения (вязкое трансзвуковое уравнение)

$$u_{xxxx} + u_{yy} - \frac{\nu}{y} u_y = u_x u_{xx}.$$

При $\nu = 1$ ВТ-уравнение описывает осесимметричный поток, а при $\nu = 0$ плоско-параллельный поток [9-10].

В области $D = \{(x, y) : 0 < x < p, 0 < y < l\}$ рассмотрим уравнение (1), где $p > 0, l > 0$ постоянные числа.

Регулярным решением уравнения (1), будем называть функцию $u(x, y)$, которая в области D удовлетворяет уравнению (1) и принадлежит классу $C_{x,y}^{3,2}(D) \cap C_{x,y}^{2,1}(\overline{D})$.

Задача А. Найти регулярное в области D решение уравнения (1) удовлетворяющее краевым условиям:

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, l) = 0,$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(p, y) = 0, \quad u_x(p, y) = 0,$$

где

$$g(x, y) \in C_{x,y}^{0,2}(\overline{D}), \quad g(x, 0) = g(x, l) = 0.$$

Теорема 4. Единственное решение задачи A выписывается формулой

$$u(x, y) = \int_0^p \int_0^l G(x, y, \xi, \eta) g(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

где $G(x, y, \xi, \eta)$ – функция Грина построенная в работе [10].

Литература

1. *Block H.* Sur les equations lineaires aux derivees partielles a carateristiques multiples. Note 1, Ark. Mat. Astron. Fys. Bd. 7, №13 (1912). P. 1-34; Note 2, Bd. 7, №21 (1912). P. 1-30; Note 3, Bd. 8, №23 (1913). P. 1-51.
2. *Del Vecchio E* Sulle equazioni $z_{xxx} - z_y + \varphi_1(x, y) = 0$, $z_{xxx} - z_{yy} + \varphi_2(x, y) = 0$. Memorie R. Accad. Sci. Torino. Ser.2, 66 (1915). P. 1-41.
3. *Del Vecchio E.* Sur deux problemes d'integration pour les equations paraboliques $Z_{\xi\xi\xi} - Z_\eta = 0$, $Z_{\xi\xi\xi} - Z_{\eta\eta} = 0$. H. Block. Remarque a la note precedente. Arkiv for Mat. Astr. och Fys. Bd.11 (1916).
4. *Cattabriga L.* Potenziali di linea e di dominio per equazioni non paraboliche in due variabili a caratteristiche multiple. Rendiconti del seminario matematico della univ. di Padova 1961. Vol.31. P. 1-45.
5. *Джсураев Т.Д., Анаков Ю.П.* Построение фундаментальных решений уравнения $U_{xxx} - U_{yy} = 0$ методом подобия// Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики: Материалы III межд. конф. 5-8 декабря 2006 г. Нальчик: НИИ прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН. 2006. С. 107-109.
6. *Джсураев Т.Д, Анаков Ю.П.* Об автомодельном решении одного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками// Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, Самара, 2007. №2(15). С. 18-26.
7. *Джсураев Т.Д., Анаков Ю.П.* К теории уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, содержащего вторую производную по времени// Украинский математический журнал. Киев, 2010, том 62. №1. С. 40-51.
8. *Рыжов О.С.* Асимптотическая картина обтекания тел вращения звуковым потоком вязкого и теплопроводящего газа// Прикладная математика и механика. 1952. 2. Вып. 6. С.1004-1014.
9. *Диесперов В.Н.* О функции Грина линеаризованного вязкого транс-звукового уравнения// Журнал вычислительной математики и математической физики. 1972. Т. 12, №5. С. 1265-1279.

10. Apakov Yu P. On the solution of a boundary-value problem for a third-order equation with multiple characteristics // Ukrainian Mathematical Journal. 2012. P. 1-12.

УДК 530.1

МЕЖФАЗНАЯ ЭНЕРГИЯ ГРАНЕЙ СЕРЕБРА И ЗОЛОТА НА ГРАНИЦЕ С ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СРЕДОЙ

© Апеков А.М.

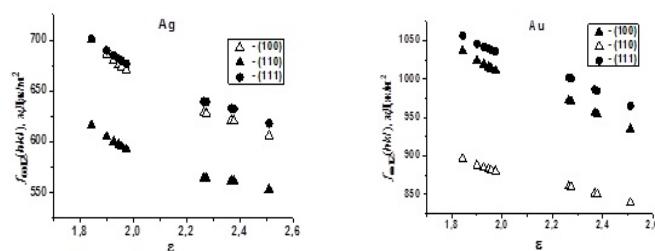
Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
"Институт прикладной математики и автоматизации" (Россия, Нальчик)
e-mail: aslkbsu@yandex.ru

В данной работе получены значения межфазной энергии (МЭ) граней кристаллов серебра и золота с малыми индексами Миллера на границе с диэлектрической средой. Межфазная энергия рассчитана электронно-статистическим методом, полученным в рамках теории Френкеля-Гамбоша-Задумкина. Рассматривается модель системы металл - органическая жидкость в которой ионы металла погружены в электронную жидкость. Ход электронной плотности и потенциала на плоской границе раздела кристаллическая грань – диэлектрическая среда находится из решения уравнения Томаса – Ферми с учетом макроскопической диэлектрической проницаемости среды.

Межфазная энергия рассчитывается по формуле [1-3]

$$f_{\omega 12}(hkl) = f_{\omega 12}^{(i0)}(hkl) + \frac{n(hkl)}{\bar{n}_s} f_{\omega 12}^{(e0)} + \Delta f_{\omega 12}^{(T)}(hkl),$$

где $f_{\omega 12}^{(i0)}(hkl)$ внутренний, $f_{\omega 12}^{(e0)}$ внешний и $\Delta f_{\omega 12}^{(T)}(hkl)$ температурный вклады в МЭ металла на границе с диэлектрической средой, $n(hkl)$ – число частиц приходящихся на 1m^2 грани (hkl) , \bar{n}_s – среднее число частиц на 1m^2 для кубических структур.



С увеличением диэлектрической проницаемости среды значение МЭ уменьшается, также уменьшается величина разности МЭ граней. Для серебра и золота МЭ граней соотносятся как $f_{\omega 12}(111) > f_{\omega 12}(100) > f_{\omega 12}(110)$.

Литература

1. Задумкин С.Н. Физика металлов и металловедение. 1961. Т. 11, № 3. С. 331-346.
2. Шебзухова И.Г., Апеков А.М., Хоконов Х.Б. Известия РАН. Серия физическая. 2015. Т. 79, № 6. С. 826-828.
3. Шебзухова И.Г., Апеков А.М., Хоконов Х.Б. Известия РАН. Серия физическая. 2016. Т. 80, № 6. С. 725-728.

УДК 517.95

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА И ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

© Артюшин А.Н.

ООО "Дата Ист" (Россия, Новосибирск)
e-mail: aartushin@dataeast.com

В докладе рассматриваются уравнения Вольтерра первого рода сверточного типа. Устанавливаются необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости для правых частей из подходящих классов функций конечной гладкости. В качестве приложения полученных результатов рассматриваются эволюционные уравнения с интегральным условием. С помощью найденных условий строятся примеры, когда у задачи нет даже локального решения.

УДК 517.968

МЕТОД МОНОТОННЫХ ОПЕРАТОРОВ В ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© Асхабов С.Н.

Чеченский государственный университет (Россия, Грозный)
e-mail: askhabov@yandex.ru

При исследовании различных классов нелинейных сингулярных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений с ядрами Коши и Гильберта в вещественных и комплексных пространствах Лебега $L_p(\Gamma, \varrho)$ с весом $\varrho(x)$ общего вида (не обязательно степенным) и контуром интегрирования Γ , который может быть как конечным, так и бесконечным, весьма плодотворным оказался метод монотонных (по Браудеру-Минти) операторов. Такие уравнения тесно связаны с нелинейными краевыми задачами теории аналитических функций. Метод монотонных (по Браудеру-Минти) операторов позволил при достаточно легко обозримых ограничениях на нелинейность, без ограничений на абсолютную величину параметра перед нелинейной частью, доказать глобальные теоремы о существовании, единственности, оценках и способах нахождения решений. В этой связи следует отметить, что применявшееся ранее к различным классам нелинейных сингулярных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений другие методы, основанные на принципах Банаха или Шаудера, либо на теореме о неявной функции, приводили (подробнее см. [1]), соответственно, или к жестким ограничениям «малости» на параметр, либо к вырождению нелинейности (в случае пространств Лебега) или к мало обозримым ограничениям на нелинейность (в случае пространств Гельдера). Тем самым, известные классические результаты теории линейных сингулярных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений если и охватывались, то лишь частично.

В данной работе, применяя методы теории монотонных и максимальных монотонных (по Браудеру-Минти) операторов, в весовых пространствах Лебега $L_p(\Gamma, \varrho)$ с весом $\varrho(x)$ общего вида и степенным весом $\varrho(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$, соответственно, изучены по три различных класса нелинейных сингулярных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений с любым (не обязательно «малым») параметром перед нелинейной частью. При этом, в отличие от работ [3] и [4], где рассмотрены другие классы нелинейных сингулярных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, не используются формулы обращения сингулярных интегральных операторов. Полученные результаты при $p = 2$ охватывают, в частности, и случаи линейных сингулярных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. В этой связи отметим, что интерес к сингулярным интегральным и интегро-дифференциальным уравнениям (линейным и нелинейным) вызван также их много-

численными и разнообразными приложениями в гидро и аэродинамике («уравнение крыла самолета», известное как «уравнение Прандтля»), теории упругости и автоматического управления, в области устойчивых процессов с независимыми приращениями и других (подробнее см., например, [4]).

Сформулируем одну из теорем, обобщающих основной результат работы [2] (предполагается, что нелинейность $F(x, u)$ удовлетворяет условиям Каратеодори).

Теорема. Пусть $p \geq 2$, $\varrho(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$, $b(x) \in C^1[-1, 1]$, функция $f(x) \in L_p(\varrho)$ определена в точках ± 1 и $f'(x) \in L_p^*(\varrho)$. Если для почти всех $x \in [-1, 1]$ и всех $u \in (-\infty, \infty)$ выполняются условия:

- 1) $|F(x, u)| \leq g(x) + d_1 \cdot (\varrho^{-1}(x) |u|)^{1/(p-1)}$, $g(x) \in L_p^+(\varrho)$, $g(\pm 1) = 0$, $d_1 > 0$;
- 2) $F(x, u)$ строго возрастает по u почти при каждом фиксированном $x \in [-1, 1]$;
- 3) $F(x, u) \cdot u \geq d_2 \cdot (\varrho^{-1}(x) |u|)^{1/(p-1)} |u| - D(x)$, $D(x) \in L_1^+(-1, 1)$, $d_2 > 0$,

то при любых значениях параметра $\lambda \geq 0$ уравнение

$$u(x) + \lambda \cdot F \left(x, -\frac{b(x)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{[b(s) \cdot u(s)]' ds}{s - x} \right) = f(x)$$

имеет единственное решение $u(x) \in L_p(\varrho)$ с $u'(x) \in L_p^*(\varrho)$ и удовлетворяющее условию $u(\pm 1) = f(\pm 1)$.

Простейшим примером функции $F(x, u)$, удовлетворяющей всем требованиям теоремы, может служить $F(x, u) = (\varrho^{-1}(x) \cdot u)^{1/(p-1)}$, где $p \geq 2$ – любое четное число. Этот пример показывает, что при $p = 2$ теорема охватывает, в частности, и случай линейного сингулярного интегро-дифференциального уравнения. Важно заметить, что из условия 1) вытекает равенство $F(\pm 1, u) = 0$, которое согласуется с требованием $u(\pm 1) = f(\pm 1)$ теоремы для рассматриваемого уравнения.

Литература

1. Асхабов С.Н. Нелинейные сингулярные интегральные уравнения в пространствах Лебега. Грозный: Чеченский государственный университет, 2013. 136 с.
2. Асхабов С.Н. Сингулярное интегро-дифференциальное уравнение с монотонной нелинейностью в весовом пространстве Лебега// Доклады Адыг-

ской (Черкесской) Международной академии наук. 2015. Т. 17, № 3. С. 9-12.

3. Магомедов Г.М. Метод монотонности в теории нелинейных сингулярных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений// Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13, № 6. С. 1106-1112.
4. Wolfersdorf L. V. Monotonicity methods for nonlinear singular integral and integro-differential equations// ZAMM. 1983. V. 63, № 6. P. 249-259.

УДК 517.95

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С ВНУТРЕННЕ-КРАЕВЫМ СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

© Аттаев А.Х.

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
"Институт прикладной математики и автоматизации" (Россия, Нальчик)
e-mail: attaev.anatoly@yandex.ru

В данном сообщении будут исследованы краевые задачи, являющиеся непосредственным обобщением задачи Гурса для уравнения

$$u_{xx} - u_{yy} = 0. \quad (1)$$

В области $\Omega = \{(x, y), 0 < x - y < 1, 0 < x + y < 1\}$ будут рассмотрены следующие задачи.

Задача 1. Найти регулярное в области Ω решение $u(x, y) \in C(\bar{\Omega})$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \tau(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ \alpha(x)u\left(\frac{x}{2}, \frac{x}{2}\right) + \beta(x)u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - x\right) &= \gamma(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Задача 2. Найти регулярное в области Ω решение $u(x, y) \in C(\bar{\Omega})$ уравнения (1), удовлетворяющее условию (2) и условию

$$u_y(x, 0) = \nu(x), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

**ON THE SINGULAR VOLTERRA INTEGRAL
EQUATION FOR HEAT CONDUCTION PROBLEMS IN
THE DOMAIN WITH MOVING BOUNDARY**

© Akhmanova D.M., Kosmakova M.T., Syzdykova N.K.,
Zhanbusinova B.H.

Buketov Karaganda state university (Kazakhstan, Karagandy)
e-mail: Svetik_mir69@mail.ru

In the domain with a moving boundary, degenerating to a point at the initial moment $G = \{(x; t) : t > 0, 0 < x < t\}$ we consider the problem

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1)$$

$$u(x, t)|_{x=0} = 0, \quad u(x, t)|_{x=t} = 0. \quad (2)$$

For completeness of investigation, we also consider the boundary value problem which adjoint to the problem (1) – (2):

$$-\frac{\partial u^*}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2}, \quad (3)$$

$$u^*(x, t)|_{t=\infty} = 0, \quad u^*(x, t)|_{x=0} = 0, \quad u^*(x, t)|_{x=t} = 0. \quad (4)$$

Solution of the problem (1) – (2) is sought in the form of a sum of thermal potentials of the double layer with the unknown densities $\nu(t), \varphi(t)$.

As a result, problem (1) – (2) is reduced to a homogeneous integral equation

$$\varphi(t) - \int_0^t K(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau = 0, \quad (5)$$

where

$$K(t, \tau) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{t+\tau}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{(t+\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right) + \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{t-\tau}{4a^2}\right) \right\}.$$

Similarly, solving problem (3) – (6) is reduced to solving the integral equation:

$$\varphi^*(t) - \int_t^\infty K^*(t, \tau) \varphi^*(\tau) d\tau = 0, \quad t > 0, \quad (6)$$

where $K^*(t, \tau) = K(\tau, t)$.

Singularity of the kernels is that

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t K(t, \tau) d\tau = 1, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_t^\infty K^*(t, \tau) d\tau = 1, \quad t > 0$$

and is expressed in the fact that the corresponding non-homogeneous equations can not be solved method of successive approximations.

Theorem 1. *The function*

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{t}{4a^2}\right) + \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{t}}{2a}\right) + \frac{\sqrt{\pi}}{2a}$$

is the solution of homogeneous integral equation (6) in the weight class of functions $\sqrt{t} \exp\left(-\frac{t}{4a^2}\right) \varphi(t) \in L_\infty(0, \infty)$.

To study adjoint equation (7) we look for a solution of the equation:

$$\psi(t) - \int_t^\infty k^*(t, \tau) \psi(\tau) d\tau = 0, \quad t > 0, \quad (7)$$

where

$$k^*(t, \tau) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{2\tau}{(\tau-t)^{\frac{3}{2}}} \exp\left\{-\frac{\tau t}{a^2(\tau-t)}\right\} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{\tau-t}} \left(1 - \exp\left\{-\frac{\tau t}{a^2(\tau-t)}\right\} \right) \right\}.$$

The integral equation (10) is reduced to an equation with difference kernel using replacements $t = \frac{1}{t_1}$, $\tau = \frac{1}{\tau_1}$ and denotion $y(t_1) = \frac{1}{t_1^{\frac{3}{2}}} \psi\left(\frac{1}{t_1}\right)$.

Further applying the Laplace transform, we obtain

$$y(t_1) = -C \left[\frac{\partial}{\partial \nu} \tilde{\theta}_0 \left(\frac{\nu}{2}; a^2 t_1 \right) \right]_{\nu=0}, \quad (8)$$

where

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_0(\nu; t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \exp \left(-\frac{1}{x} \left(\nu + n + \frac{1}{2} \right)^2 \right) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=-1}^{-\infty} n \cdot \exp \left(-\frac{1}{x} \left(\nu + n + \frac{1}{2} \right)^2 \right) \right\} \end{aligned}$$

is the modified theta function and

$$\begin{aligned} - \left[\frac{\partial}{\partial \nu} \tilde{\theta}_0 \left(\frac{\nu}{2}; x \right) \right]_{\nu=0} &= \frac{1}{2\sqrt{\pi x^{\frac{3}{2}}}} \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) \exp \left(-\frac{(2n+1)^2}{4x} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=-1}^{-\infty} (2n+1) \exp \left(-\frac{(2n+1)^2}{4x} \right) \right\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi x^{\frac{3}{2}}}} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \exp \left(-\frac{(2n+1)^2}{4x} \right). \end{aligned}$$

By virtue of the inverse replacements and denotation equality (8) takes the form:

$$\psi(t) = \frac{C}{a\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \exp \left(-\frac{(2n+1)^2}{4a^2} t \right). \quad (9)$$

Theorem 2. *The function*

$$\varphi^*(t) = \psi(t) \exp \left\{ \frac{t}{4a^2} \right\} = \frac{C}{a\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \exp \left(-\frac{n^2+n}{a^2} t \right)$$

is the solution of homogeneous integral equation (7).

Thus, homogeneous equation (7), and with it the corresponding homogeneous boundary value problem (3) – (6) have the nonzero solution.

References

1. Akhmanova D.M., Jenaliyev M.T., Kosmakova M.T. and Ramazanov M.I. On a singular integral equation of Volterra and its adjoint one// Bulletin of University of Karaganda. Ser. Mathematics. 2013. № 3(71). P. 3–10.

2. *Amangaliyeva M.M., Jenaliyev M.T., Kosmakova M.T. and Ramazanov M.I.* On Dirichlet boundary value problem for the heat equation in the infinite angular domain (in Russian)// Reports of the Adyghe (Circassian) International Academy of Sciences. Nalchik. 2013 V. 15, № 2. P. 9–24.
3. *Jenaliyev M.T., Ramazanov M.I.* The loaded equations — as perturbations of the differential equations (in Russian). Almaty: Gylym, 2010. 334 p.

УДК 517.927

ВОССТАНОВЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЗАКРЕПЛЕНИЯ И НАГРУЖЕННОСТИ ОДНОГО ИЗ КОНЦОВ СТЕРЖНЯ ПО СПЕКТРАЛЬНЫМ ДАННЫМ

© Ахымбек М.Е.

Институт математики и математического моделирования
(Казахстан, Алматы)

Казахский национальный университет им. аль-Фараби
(Казахстан, Алматы)
e-mail: akhymbek@math.kz

Рассмотрим уравнения продольных колебаний однородного стержня

$$-\frac{\partial}{\partial x}(EF \frac{\partial u}{\partial x}) + \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

с краевыми условиями в общем виде:

$$u = 0, \text{ при } x = 0; a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + a_2 u + \tilde{a}_3 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \text{ при } x = 1, \quad (2)$$

где a_1, a_2, \tilde{a}_3 действительные числа.

В работах А.М. Ахтямова [1 - 3] было предложено идентифицировать краевые условия, в которых все коэффициенты краевых условий являются неизвестными. В отличие от предыдущих работ, краевые условия идентифицируется не по всему бесконечному набору частот, а лишь по конечному числу собственных частот (в [3] – по пяти первым).

В нашей работе, в отличие от работ Ахтямова А.М., в качестве таких дополнительных условий выбраны первые собственные частоты (собственные значения) новых задач, соответствующих задаче о продольных колебаниях стержня и изгибных колебаниях балки с нагрузками весов M_i в точках $x_i, i = 1, 2$. Соответствующие спектральные задачи примут вид

$$\begin{cases} -y'' = \lambda^2 y, & 0 < x < 1, \\ U_1(y) = y(0) = 0, \\ U_2(y) = a_1 y'(1) + (a_2 - a_3 \lambda^2) y(1) = 0, \\ y(x_i + 0) = y(x_i - 0), & 0 < x_i < 1, i = 1, 2, \\ y'(x_i + 0) = y'(x_i - 0) + M_i y(x_i - 0), & 0 < x_i < 1, i = 1, 2. \end{cases}$$

Поставим к этой спектральной задаче обратную задачу: по собственным частотам продольных колебаний стержня найти неизвестные краевые условия $U_2(y) = 0$. В работе обосновывается, что всегда можно восстановить неизвестные коэффициенты краевого условия по первым собственным значениям двух дополнительных задач.

При доказательстве основных результатов работы были использованы идеи из нашей работы [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Республики Казахстан, грант 0825/ГФ4.

Литература

1. *Akhtyamov A.M., Muftakhov A.V., Akhtyamova A.A.* On the determination of loading and fixing for one end of a rod according to its natural frequencies of oscillation// *Vestnik Udmurtskogo universiteta.* 2013. P. 114-129.
2. *Akhatov I.Sh., Akhtyamov A.M.* Determination of the form of attachment of a rod using the natural frequencies of its flexural oscillations// *Journal of Applied Mathematics and Mechanics.* 2001. V. 65, № 2. P. 283-290.
3. *Akhtyamov A.M., Muftakhov A.V., Yamilova A. V.* Identification of the type and parameters of fastening from the natural frequencies of the fastened rod // *Acoustical Physics.* 2008. V. 54, № 2. P. 146-152.
4. *Akhymbek M.E., Yessirkegenov N.A., and Sadybekov M.A.* Renovation of the fixing and loading factors of the beam by the spectral data of free flexural vibrations// *AIP Conf. Proc.* 2015. V. 1676. P. 020058. <http://dx.doi.org/10.1063/1.4930484>.

AN OPERATOR APPROACH IN INVESTIGATION OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS INVOLVING THE FRACTIONAL DERIVATIVE

© Ashyralyev A.

Department of Mathematics (Turkey, Mersin)

Near East University (TRNC, Nicosia)

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling (Kazakhstan, Almaty)

e-mail: aallabereng@gmail.com, aashyr@yahoo.com

The role played by positivity property of differential and difference operators in Hilbert and Banach spaces in the study of various properties of boundary value problems for partial differential equations, of stability of difference schemes for partial differential equations, and of summation Fourier series is well-known (see, [1-16]).

The most general method for solving fractional partial differential equations with dependent coefficients is operator method. Operator approach permit us investigate fractional partial differential and difference equations. Actually, the well-posedness of the initial value problem for the Basset parabolic equation and the fractional parabolic equation was established. The stable difference schemes first and second order of accuracy for the approximate solution of these problems were studied. In practice, the coercive stability estimates for the solution of problems for $2m$ -th order multidimensional fractional parabolic equations and one dimensional fractional parabolic equations with nonlocal boundary conditions in space variable were obtained. The well-posedness of difference schemes in difference analogues of spaces of smooth functions was established and the coercive stability estimates for the solution of difference schemes for the fractional parabolic equation with nonlocal boundary conditions in space variable and the $2m$ -th order multidimensional fractional parabolic equation were obtained. Stability estimates and almost coercive stability estimates with $\ln \frac{1}{\tau+h}$ for the solution of these difference schemes were obtained. A procedure of modified Gauss elimination method was used for solving difference schemes in the case of one-dimensional fractional parabolic partial differential equations. The theoretical results were supported by numerical examples.

The stability of the initial value problem for the hyperbolic equation and the fractional Schrodinger equation was established. The stable difference schemes first and second order of accuracy for the approximate

solution of these problems were studied. In practice, the stability estimates for the solution of problems for $2m$ -th order multidimensional fractional hyperbolic and Schrodinger equations and one dimensional fractional hyperbolic and Schrodinger equations with nonlocal boundary conditions in space variable were obtained. A procedure of modified Gauss elimination method was used for solving difference schemes in the case of one-dimensional fractional hyperbolic and Schrodinger differential equations. The theoretical results were supported by numerical examples.

This is a discuss on results for fractional calculus and its applications. Its scope ranges from connection of fractional derivatives with fractional powers of positive differential and difference operators in a Banach space to well-posedness of various classical and nonclassical differential and difference problems for partial differential equations involving the fractional derivative. Finally, some problems and future plans are formulated.

References

1. *Ashyralyev A., Sobolevskii P.E.* Well-Posedness of Parabolic Difference Equations. Basel, Boston, Berlin: Birkhauser Verlag, 1994.
2. *Sobolevskii P.E.* A new method of summation of Fourier series converging in C-norm // Semigroup Forum. 2005. V. 71. №1. P. 289–300.
3. *Ashyralyev A., Sobolevskii P.E.* New Difference Schemes for Partial Differential Equations. Basel, Boston, Berlin: Birkhauser Verlag, 2004.
4. *Ashyralyev A.* A note on fractional derivatives and fractional powers of operators// Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2009. V. 357. №1. P. 232–236.
5. *Ashyralyev A.* Well-posedness of the Basset problem in spaces of smooth functions// Applied Mathematics Letters. 2011. V. 24. №7. P. 1176–1180.
6. *Ashyralyev A., Dal F., Pinar Z.* A note on the fractional hyperbolic differential and difference equations// Applied Mathematics and Computation. 2011. V. 217. Is. 9. P. 4654–4664.
7. *Ashyralyev A., Hicdurmaz B.* A note on the fractional Schrödinger differential and difference equations// Kybernetes. 2011. V. 40, Is. 3-10. P. 1–15.
8. *Ashyralyev A., Amanov D.* Initial-boundary value problem for fractional partial differential equations of higher order// Abstract and Applied Analysis. 2012. V. 2012. Article ID 973102, 16 p.
9. *Ashyralyev A., Sharifov Y.A.* Existence and uniqueness of solutions of the system of nonlinear fractional differential equations with nonlocal and integral boundary conditions// Abstract and Applied Analysis. 2012. V. 2012. Article ID 594802, 14 p.

10. *Ashyralyev A., Hicdurmaz B.* On the numerical solution of fractional Schrödinger differential equations with the Dirichlet conditions// International Journal of Computer Mathematics. 2012. V. 89. Is. 13-14. SI. P. 1927–1936.
11. *Ashyralyev A.* Well-posedness of parabolic differential and difference equations with the fractional differential operator// Malaysian J. Math. Sci. 2012. V. 6(SS). P. 31–48.
12. *Ashyralyev A., Çakir Z.* On the numerical solution of fractional parabolic partial differential equations with the Dirichlet conditionv// Discrete Dynamics in Nature and Society. 2012. V. 2012. Article ID 696179, 15 p.
13. *Ashyralyev A.* Well-posedness of fractional parabolic equations// Boundary Value Problems. 2013. Article Number 31. doi:10.1186/1687-2770-2013-31. P. 1–18.
14. *Ashyralyev A., Çakir Z.* FDM for fractional parabolic equations with the Neumann condition //Advances in Difference Equations. 2013. Article Number 120. doi:10.1186/1687-1847.
15. *Ashyralyev A., Çakir Z.* r-modified Crank-Nicholson difference scheme for fractional parabolic PDE// Boundary Value Problems. 2014. Article Number 76. doi:10.1186/1687-2770-2014-76.
16. *Ashyralyev A., Emirov N., Çakir Z.* Well-posedness of fractional parabolic differential and difference equations with Dirichlet-Neumann conditions// Electronic Journal of Differential Equations. 2014. V. 2014. №97. P. 1–17.

UDC 519.633.6

ON A NEW STABLE DIFFERENCE SCHEME APPROXIMATING A DIFFERENTIAL PROBLEM FOR ONE-DIMENSIONAL HEAT EQUATION UNDER SAMARSKII-IONKIN BOUNDARY CONDITIONS

© Ayaz S.Zh.¹, Sadybekov M.A. ²

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling (Kazakhstan, Almaty)
Al-Farabi Kazakh National University (Kazakhstan, Almaty)

¹e-mail: ayaz@math.kz

²e-mail: sadybekov@math.kz

We consider the well-posedness of finite-difference schemes approximating the differential problem (the Samarskii-Ionkin problem). Consider one-dimensional heat equation

$$u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = f(x, t), \quad (1)$$

in the domain $\Omega = \{(x, t), 0 < x < 1, 0 < t < T\}$ with the initial condition

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2)$$

and nonlocal boundary conditions of the form

$$u_x(0, t) - u_x(1, t) + \alpha u(1, t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (3)$$

$$u(0, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (4)$$

Where α is a real number.

The boundary conditions (3) - (4) (in the case $\alpha = 0$) are well-known and are called Samarskii-Ionkin conditions.

A peculiarity of such finite-difference schemes is their non-selfadjointness, which makes it impossible to use the existing study methods of stability of selfadjoint finite-difference problems and requires the development of new methods. The second peculiarity is the absence of basis property in the spectral problems arising in the method of separating variables and it makes the direct usage of Galerkin method impossible and also requires the development of new methods.

We have shown that these problem (1) - (4) with regular but not strongly regular boundary conditions can be equivalently reduced to a sequential solution of two problems with two-point boundary conditions of the Sturm type [1, 2].

Throughout this note we mainly use techniques from our work [3].

Research supported by the grant 0824/GF4 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

References

1. *Orazov I., and Sadybekov M. A.* One nonlocal problem of determination of the temperature and density of heat sources // Russian Mathematics. 2012. V. 56, № 2. P. 60-64.
2. *Orazov I., and Sadybekov M. A.* On a class of problems of determining the temperature and density of heat sources given initial and final temperature // Siberian Mathematical Journal. 2012. V. 53, № 1. P. 146-151.
3. *Orazov I., and Ayaz S. Zh.* Construction of mathematical models of extraction processes with nonlocal conditions by a spatial variable // AIP Conf. Proc. 2016. V. 1759. P. 020079. <http://dx.doi.org/10.1063/1.4959693>.

УДК 519.6

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ТРУБОПРОВОДНОЙ СЕТИ ШТЕЙНЕРА

© Багов М.А.

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
"Институт прикладной математики и автоматизации" (Россия, Нальчик)
e-mail: marat.niipma@mail.ru

Рассмотрим оптимальное проектирование трубопроводной сети Штейнера [см. здесь Багов М.А., Кудаев В.Ч. *Сетевая задача Штейнера с учетом энергетических затрат*] при ее конструировании на заданном наборе труб. Пусть d_1, d_2, \dots, d_p и C_1, C_2, \dots, C_p – соответственно диаметры и цены труб. Рассмотрим любое удовлетворяющее ограничениям (2)–(5) распределение потоков по графу сети $\Gamma(B, D)$ и любую ij -ю ветвь на которой поток $v_{ij} > 0$. Определим значение удельных петерь потенциала при движении потока v_{ij} по ветви по формулам гидравлики (Дарси-Вайсбаха):

$$h_{ij}^k = \lambda \frac{v_{ij}^2}{d_k^{5,25}}, \quad k = 1, 2, \dots, p.$$

С учетом того, что в самом общем случае любая ветвь сети может быть сконструирована с участием труб всех диаметров, т.е. является их линейной комбинацией, получим:

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^p \alpha_{ij}^k C_k, \quad h_{ij} = \sum_{k=1}^p \alpha_{ij}^k h_{ij}^k, \quad \sum_{k=1}^p \alpha_{ij}^k = 1,$$

$$\alpha_{ij}^k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, p, \quad (i, j) \in D.$$

Тогда на любом распределении потоков имеем задачу:

$$C = \sum_{ij \in D'} \sum_{k=1}^p \alpha_{ij}^k (C_k + v_{ij} h_{ij}^k) \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \longrightarrow \min.$$

$$\sum_{k=1}^p \alpha_{ij}^k = 1, \quad \alpha_{ij}^k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, p, \quad i, j \in D'.$$

где D' – дуги графа по которым поток отличен от нуля.

Поскольку на любом фиксированном распределении потоков по графу сети искомые значения α_{ij}^k , $k = 1, 2, \dots, p$ не зависят от значений корня и значений переменных по иным ветвям, то их значения определяются из решения задачи линейного программирования для каждой ветви ij :

$$\sum_{k=1}^p \alpha_{ij}^k (C_k + v_{ij} h_{ij}^k) \longrightarrow \min, \quad \sum_{k=1}^p \alpha_{ij}^k = 1, \quad \alpha_{ij}^k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, p.$$

В силу базисности оптимального решения только одна из переменных $\alpha_{ij}^1, \dots, \alpha_{ij}^p$, где $(i, j) \in D'$, отлична от нуля, и значит, равна 1.

Эта та из переменных на которой целевая функция принимает наименьшее значение, т.е. $f_{ij}(v_{ij}) = \min_{1 \leq k \leq p} \{C_k + v_{ij} h_{ij}^k\}$. Имея набор, труб на котором проводится конструирование сети, можно построим функцию $f(v) = \min\{C_1 + \frac{v}{D_1^{5,25}}, C_2 + \frac{v}{D_2^{5,25}}, \dots, C_p + \frac{v}{D_p^{5,25}}\}$, $0 \leq v \leq v_{max}$, т.е. $f_{ij}(v_{ij}) = f(v_{ij})$.

Главное в этом представлении – пределы величин потоков v в которых каждая из заданного набора труб является оптимальной для конструирования коммуникаций.

УДК 519.6

СЕТЕВАЯ ЗАДАЧА ШТЕЙНЕРА С УЧЕТОМ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ЗАТРАТ

© Багов М.А., Кудаев В.Ч.

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
"Институт прикладной математики и автоматизации"(Россия, Нальчик)
e-mail: marat.bagov@mail.ru

Интерес к задаче Штейнера связан не только с самой математической проблемой, а и с большой актуальностью задачи для пространственной экономики и, в первую очередь, с проектированием оптимальных сетей по переносу вещества и энергии. В этом случае следует минимизировать не длину, а общую стоимость коммуникаций, связывающих пункты потребления сетевого продукта с его источниками. Эту задачу будем называть *сетевой задачей Штейнера* (СЗШ).

СЗШ состоит в следующем. На плоскости x, y задан полный ориентированный геометрический граф $\Gamma(B, D)$, n вершин которого (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$ фиксированы и $(n - 2)$ вершин (x_i, y_i) ,

$i = n + 1, \dots, 2n - 2$ не фиксированы. Требуется определить координаты не фиксированных вершин и так приписать каждой дуге (i, j) графа поток v_{ij} , что:

$$\left\{ \begin{array}{l} C = \sum_{ij \in D} f_{ij}(v_{ij}) \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \longrightarrow \min, \\ \sum_{ij \in \Gamma_j^+} v_{ij} - \sum_{jk \in \Gamma_j^-} v_{jk} = q_j, \forall j \in B, \\ \sum_{j \in \Gamma_1} v_{1j} = \sum_{i \in B_\Phi} g_i, \\ v_{ij} \geq 0, \forall (i, j) \in D, \\ x_i = a_i, y_i = b_i, \forall i \in B_\Phi, \end{array} \right. \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \end{array}$$

где $B = B_\Phi \cup B_{\text{ш}}$, B_Φ —множество фиксированных вершин, $B_{\text{ш}}$ —множество точек Штейнера, $|B_\Phi| = n, |B_{\text{ш}}| = m \leq n - 2$, $f_{ij}(v_{ij})$ —вогнутая непрерывно возрастающая функция, $f_{ij}(0) = 0$. Целевая функция (1) отражает общую стоимость коммуникаций сети, уравнение (2) есть уравнение неразрывности потока в сети, уравнение (3) — соотношение между источником и стоками.

Поскольку точки Штейнера лежат на выпуклой оболочке фиксированных на плоскости n точек, а (2) - (4) — транспортный многоугольник, множество допустимых решений задачи ограничено и замкнуто. Поскольку возможных остовных деревьев графа $\Gamma(B, D)$, построенных на n фиксированных точках и $(n - 2)$ точках Штейнера, конечное число, и на каждом из них целевая функция непрерывна, то задача (1)-(5) имеет оптимальное решение, но, возможно, не единственное.

Для решения СЗШ непригодны методы декомпозиции разработанные для классической задачи Штейнера [1], т.к. в ней углы между смежными дугами точки Штейнера зависят от потоков по ним. Существующие методы решения СЗШ являются эвристическими. В [2,3] разработан метод решения задачи, позволяющий характеризовать степень оптимальности получаемого решения числом (рангом экстремума). Суть метода состоит в том, что в процессе p -оптимизации синтезируется такая сеть, которая оптимальна на любой своей связной подсети p -й размерности. Под оптимальностью подсети понимается то, что замена ее любой иной по структуре локальной-оптимальной сетью Штейнера, при соблюдении граничных условий с остальной сетью, не уменьшит стоимости подсети.

Рассмотрим теперь более общую задачу. Затраты на перенос вещества и энергии по сети зависят не только от величин потоков, но

и от потерь потенциалов потоков при их продвижении по ветвям сети. В таком случае целевой функционал имеет вид:

$$C = \sum_{ij \in D} \varphi_{ij}(v_{ij}, h_{ij}) \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}, \quad (6)$$

где h_{ij} – удельная потеря потенциала потока по ij -й ветви.

Как известно [4], затраты на коммуникацию могут быть рассчитаны по формуле $C_{ij} = (kv_{ij}^\alpha h_{ij}^\beta + v_{ij} h_{ij})l_{ij}$, где $0 < \alpha < 1$, $\beta < 0$. Первое слагаемое характеризует стоимость коммуникации, второе – энергетические затраты на транспорт сетевого продукта по коммуникации. В таком случае получим

$$C = \sum_{ij \in D} (kv_{ij}^\alpha h_{ij}^\beta + v_{ij} h_{ij}) \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \rightarrow \min.$$

Поскольку целевая функция выпукла и непрерывна по h_{ij} , то на оптимальном решении

$$\frac{\partial C}{\partial h_{ij}} = (k\beta v_{ij}^\alpha h_{ij}^{\beta-1} + v_{ij} h_{ij}) \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} = 0,$$

т.е. $h_{ij} = (-k\beta)^{\frac{1}{1-\beta}} v_{ij}^{\frac{1-\alpha}{\beta-1}}$. Тогда получим

$$C = \sum_{ij \in D} (-k\beta)^{\frac{1}{1-\beta}} \left(\frac{\beta-1}{\beta} \right) v_{ij}^{\frac{\beta-\alpha}{\beta-1}} \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}.$$

Поскольку $(-k\beta)^{\frac{1}{1-\beta}} \left(\frac{\beta-1}{\beta} \right) = \text{const}$, то целевая функция (6) примет вид:

$$\sum_{ij \in D} v_{ij}^{\frac{\beta-\alpha}{\beta-1}} \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \rightarrow \min.$$

Итак, получена формула перехода от $\varphi_{ij}(v_{ij}, h_{ij})$ к $f_{ij}(v_{ij})$:

$$f_{ij}(v_{ij}) = v_{ij}^{\frac{\beta-\alpha}{\beta-1}}.$$

Литература

- Гордеев Э.Н., Тарасюк О.Г. Задача Штейнера. Обзор // Дискретная математика. 1993. №5. вып. 2. С. 3-28.

2. Багов М.А., Кудаев В.Ч. Локальное решение сетевой задачи Штейнера // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2014. Т. 16, № 4. С. 9-14.
3. Багов М.А., Кудаев В.Ч. Преобразование терминальной сети в сеть Штейнера // Известия КБНЦ РАН. 2015. № 6 (68)-2. С. 31-37.
4. Меренков А.П., Сеннова Е.В., Сумароков С.В., Сидлер В.Г., Новитский Н.Н., Стенников В.А., Чупин В.Р. Математическое моделирование и оптимизация систем тепло-, водо-, нефте-, и газоснабжения. Новосибирск: Наука, СО РАН. 1992. 406 с.

УДК 517.5

ОЦЕНКИ ПОПЕРЕЧНИКОВ ФУРЬЕ КЛАССОВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С ЗАДАННОЙ МАЖОРАНТОЙ СМЕШАННОГО МОДУЛЯ ГЛАДКОСТИ

© Балгимбаева Ш.А.¹, Смирнов Т.И.²

Институт математики и математического моделирования КН МОН РК

(Казахстан, Алматы)

¹e-mail: balgimbayeva@math.kz

²e-mail: sc_s@mail.ru

Пусть $L_p := L_p(\mathbb{T}^d)$ ($1 \leq p \leq \infty$) — пространство 1—периодических по каждой переменной функций f , суммируемых в степени p (при $p = \infty$ существенно ограниченных) на \mathbb{T}^d , с обычной нормой $\|f\|_{L_p}$, $\mathbb{T}^d := (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^d$ — d -мерный тор; $\mathbb{T} \equiv \mathbb{T}^1$; \mathbb{N} , \mathbb{Z} и \mathbb{R} — множества натуральных, целых и вещественных чисел соответственно; $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$).

Поперечником Фурье порядка M класса функций F в пространстве L_q называется величина

$$\varphi_M(F, L_q) = \inf_{\{h_i\}_{i=1}^M} \sup_{f \in F} \left\| f - \sum_{i=1}^M \langle f, h_i \rangle h_i | L_q \right\|,$$

где нижняя грань берется по всем ортонормированным системам $\{h_i\}_{i=1}^M \subset L_\infty$ [1]. ℓ_θ ($1 \leq \theta \leq \infty$) — пространство числовых последовательностей $\{a_s\}_{s \in \mathbb{N}_0^d}$ с конечной нормой $\|\{a_s\} | \ell_\theta\|$; $\ell_\theta(L_p) \equiv \ell_\theta(L_p(\mathbb{T}^d))$ ($L_p(\ell_\theta) \equiv L_p(\mathbb{T}^d; \ell_\theta)$) — пространство функциональных

последовательностей $\{f_s(x)\}_{s \in \mathbb{N}_0^d}, x \in \mathbb{T}^d$, с конечной нормой (с обычной модификацией при $\theta = \infty$)

$$\|\{f_s\} | \ell_\theta(L_p)\| = \|\{\|f_s\| L_p\}\| \ell_\theta\|;$$

$$(\|\{f_s\} | L_p(\ell_\theta)\| = \|\|\{f_s\} | \ell_\theta\| | L_p\|).$$

Для $f(x)$, заданной на \mathbb{T}^d $\Delta_{\tau,j}^l f(x) = \Delta_{\tau,j}^{l-1}(\Delta_{\tau,j}^1 f(x))$ — её разность порядка $l \in \mathbb{N}_0$ в точке $x \in \mathbb{T}^d$ с шагом $\tau \in \mathbb{R}$ по переменной x_j . Если теперь $l = (l_1, \dots, l_d) \in \mathbb{N}_0^d$ и $h = (h_1, \dots, h_d) \in \mathbb{R}^d$, то

$$\Delta_h^l f(x) = \Delta_{h_1,1}^{l_1} \Delta_{h_2,2}^{l_2} \dots \Delta_{h_d,d}^{l_d} f(x)$$

— смешанная разность функции f порядка l в точке x с шагом h ;

$$\Omega_l(f, t)_p = \sup_{|h_j| \leq t_j, j \in e_d} \|\Delta_h^l f(\cdot) | L_p\|$$

— смешанный модуль гладкости порядка l функции $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$; $t = (t_1, \dots, t_d)$.

Пусть функция $\Omega : [0, \infty)^d \rightarrow [0, +\infty)$ ($d \in \mathbb{N}$) — модуль гладкости порядка l , удовлетворяющий условиям Бари—Стечкина (**S**) и (**S** $_l$) ([2]).

$V_n(t)$ ядро Валле—Пуссена порядка $2n - 1$:

$$V_n(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos kt + 2 \sum_{k=n+1}^{2n-1} \left(1 - \frac{k-n}{n}\right) \cos kt.$$

$$A_s(x) = \prod_{j \in e_d} (V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j-1}}(x_j)), \quad s = (s_1, \dots, s_d) \in \mathbb{N}_0^d;$$

для $f \in L_p$ через $A_s(f, x)$ обозначим (периодическую) свертку

$$A_s(f, x) = f * A_s(x).$$

Определение. I. Пусть $1 \leq p, \theta \leq \infty$, $\Omega \in \mathbf{S}_l^\alpha \cap \mathbf{S}_l$. Тогда пространство Никольского-Бесова $SB_{p\theta}^{\Omega, l} = SB_{p\theta}^{\Omega, l}(\mathbb{T}^d)$ состоит из всех функций $f \in L_p$, для которых конечна норма

$$\|f | SB_{p\theta}^{\Omega, l}\| = \|\{\Omega^{-1}(2^{-s})A_s(f, \cdot)\} | \ell_\theta(L_p)\|, \quad 1 \leq \theta < \infty,$$

$$\|f | SB_{p\infty}^{\Omega, l}\| = \sup_s \Omega^{-1}(2^{-s}) \|A_s(f, \cdot) | L_p\|, \quad \theta = \infty.$$

II. Пусть $1 \leq \theta \leq \infty$, $1 \leq p < \infty$, $\Omega \in \mathbf{S}_l^\alpha \cap \mathbf{S}_l$. Тогда пространство Лизоркина-Трибеля $SF_{p\theta}^{\Omega, l} = SF_{p\theta}^{\Omega, l}(\mathbb{T}^d)$ состоит из всех функций $f \in L_p$, для которых конечна следующая норма

$$\|f | SF_{1\theta}^{\Omega, l}\| = \|\{\Omega^{-1}(2^{-s})A_s(f, \cdot)\} | L_p(\ell_\theta)\|.$$

Будем обозначать единичные шары пространств $SB_{p\theta}^{\Omega, l}$ и $SF_{p\theta}^{\Omega, l}$ через $\text{SB}_{p\theta}^{\Omega, l} = \text{SB}_{p\theta}^{\Omega, l}(\mathbb{T}^d)$ и $\text{SF}_{p\theta}^{\Omega, l} = \text{SF}_{p\theta}^{\Omega, l}(\mathbb{T}^d)$ и называть классами Никольского-Бесова и Лизоркина-Трибеля соответственно.

Пусть $\Omega(t) = \omega(t_1 \times \cdots \times t_d)$; \log — это логарифм по основанию 2, $a_+ = \max\{a, 0\}$ для $a \in \mathbb{R}$.

Справедлива следующая

Теорема. *Пусть $1 \leq p, q, \theta \leq \infty$; $\omega \in \mathcal{S}_l \cap \mathcal{S}_l^\alpha$, причем $\alpha > (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})_+$.*

I. Если $1 \leq q \leq p \leq \infty$, $(p, q) \neq (\infty, \infty)$, то тогда

$$\varphi_M(\text{SB}_{p\theta}^{\Omega, l}, L_q) \asymp \omega(M^{-1} \log^{d-1} M)(\log M)^{(d-1)(\frac{1}{p_*} - \frac{1}{\theta})_+},$$

если, кроме того, $p < \infty$, тогда

$$\varphi_M(\text{SF}_{p\theta}^{\Omega, l}, L_q) \asymp \omega(M^{-1} \log^{d-1} M)(\log M)^{(d-1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})_+},$$

$$\varphi_M(\text{SF}_{1\theta}^{\Omega, l}, L_1) \asymp \omega(M^{-1} \log^{d-1} M)(\log M)^{(d-1)(1 - \frac{1}{\theta})};$$

II. Если $1 \leq p < q < \infty$, то

$$\begin{aligned} \varphi_M(\text{SB}_{p\theta}^{\Omega, l}, L_q) &\asymp \omega(M^{-1} \log^{d-1} M)(M^{-1} \log^{d-1} M)^{(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \times \\ &\quad \times (\log M)^{(d-1)(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta})_+}, \end{aligned}$$

$$\varphi_M(\text{SF}_{p\theta}^{\Omega, l}, L_q) \asymp \omega(M^{-1} \log^{d-1} M)(M^{-1} \log^{d-1} M)^{(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})};$$

III. Если $1 \leq p \leq q = \infty$, то

$$\varphi_M(\text{SB}_{p\theta}^{\Omega, l}, L_\infty) \asymp \omega(M^{-1} \log^{d-1} M)(M^{-1} \log^{d-1} M)^{\frac{1}{p}} (\log M)^{(d-1)(1 - \frac{1}{\theta})},$$

если, кроме того, $p < \infty$, то

$$\varphi_M(\text{SF}_{p\theta}^{\Omega, l}, L_\infty) \asymp \omega(M^{-1} \log^{d-1} M)(M^{-1} \log^{d-1} M)^{\frac{1}{p}} (\log M)^{(d-1)(1 - \frac{1}{p})}.$$

Работа выполнена при поддержке грантов 5130/ГФ4, 5129/ГФ4 МОиН Республики Казахстан.

Литература

1. Темляков В.Н. Поперечники некоторых классов функций нескольких переменных// Докл. АН СССР. 1982. Т. 267, № 3. С. 314–317.
2. Бари Н.К., Степкин С.Б. Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций// Труды Московского математического общества. 1956. Т. 5. С. 483–522.

УДК 519.63

ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА – БИЦАДЗЕ

© Балкизов Ж.А.¹, Сокуров А.А.²

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
"Институт прикладной математики и автоматизации" (Россия, Нальчик)

¹e-mail: Giraslan@yandex.ru

²e-mail: asokuroff@gmail.com

На евклидовой плоскости независимых переменных x и t рассматривается уравнение Лаврентьева – Бицадзе

$$u_{xx} + sgn t u_{tt} = -f(x, t), \quad (1)$$

где $f(x, t)$ – заданная функция; $u = u(x, t)$ – искомая функция.

Через Ω обозначим область, ограниченную при $t < 0$ характеристиками $AC : x + t = 0$ и $BC : x - t = l$ уравнения (1), выходящими из точек $A = (0, 0)$ и $B = (l, 0)$, пересекающимися в точке $C = (l/2, -l/2)$, а также прямоугольником с вершинами в точках $A, B, A_0 = (0, T), B_0 = (l, T)$ при $t > 0; l > 0, T > 0$. Часть области Ω при $t > 0$ обозначим через Ω^+ , а при $t < 0$ через Ω^- .

Уравнение (1) является уравнением смешанного типа: оно эллиптическо в области Ω^+ и гиперболично в Ω^- .

Регулярным в области Ω решением уравнения (1) назовем всякую функцию $u = u(x, t)$ из класса $C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\bar{\Omega}^+) \cap C^2(\Omega^-)$, при подстановке которой уравнение (1) обращается в тождество.

В работе исследуется задача Трикоми для уравнения (1) в следующей постановке

Задача Т. Найти регулярное в области Ω решение $u = u(x, t)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u(l, t) = u_1(t), \quad u(0, t) = u_3(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

$$u(x, T) = u_2(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (3)$$

$$u(x, -x) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l/2, \quad (4)$$

где $u_1(t)$, $u_2(x)$, $u_3(t)$, $\psi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции и выполнены условия согласования: $u_3(0) = \psi(0)$, $u_3(T) = u_2(0)$, $u_2(l) = u_1(T)$.

В работах [1]–[4] были предложены различные методы, позволяющие определить приближенное решение **задачи Т** для однородного уравнения Лаврентьева – Бицадзе с точностью $O(h + \tau)$, где h и τ – это шаг сетки по x и по t , соответственно. В данной работе в области Ω построена разностная схема для неоднородного уравнения (1) с порядком аппроксимации $O(h^2 + \tau^2)$. Также в работе получены априорные оценки как для решения **задачи Т**, так и для соответствующей разностной задачи. Из найденных априорных оценок следует единственность регулярного решения **задачи Т**, а также существование и единственность решения разностной задачи.

Литература

1. Ладыженская О. А. Об одном способе приближенного решения задачи Лаврентьева – Бицадзе // УМН. 1954. Т. 9, выпуск 4(62). С. 187-189.
2. Халилов З. И. Решение задачи для уравнения смешанного типа методом сеток // ДАН Азерб. ССР. 1953. Т. 9, №4. С. 189-194.
3. Карманов В. Г. Об одной граничной задаче для уравнения смешанного типа // ДАН СССР. 1954. Т. 95, №3. С. 439-442.
4. Филиппов А. Ф. О разностном методе решения задачи Трикоми // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1957. Т. 21, выпуск 1. С. 73-88.

УДК 51-77 : 316.4

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛИТЫ И ТРУДЯЩИХСЯ

© Басаева Е.К.¹, Каменецкий Е.С.¹, Хосаева З.Х.²

¹Филиал Федерального государственного бюджетного учреждения науки
Федерального научного центра "Владикавказский научный центр
Российской академии наук" (Россия, Владикавказ)
e-mail: helen@smath.ru

²Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Федеральный
научный центр "Владикавказский научный центр
Российской академии наук" (Россия, Владикавказ)
e-mail: esk@smath.ru

В работе [1] предложена модель напряженности общества, состоящего из двух социальных групп — элиты и трудящихся. Анализ этой модели показал, что соответствующая система дифференциальных уравнений может иметь одну или две стационарные точки или не иметь ни одной. При изменении управляющего параметра системы возможно слияние двух стационарных точек в одну с последующим ее исчезновением. При этом возникает катастрофа складки, т. е. по сути дела происходит дестабилизация системы. Система уравнений, использованная в работе [1], является частным случаем более общей системы, построенной на основе модели принятия коллективных решений [2], описывающей напряженность любых взаимодействующих социальных групп, в частности, взаимодействующих этносов.

Будем рассматривать общество, разделенное на две социальные группы (элита и трудящиеся), т. е. $i = 1, 2$. Считаем, что на каждую социальную группу влияют изменение ее экономического состояния и взаимодействие с другой группой. Тогда общее изменение напряженности принимаем равным сумме экономической и межгрупповой составляющих:

$$\frac{dP_i}{dt} = \gamma_i(U_i - P_i) + \sum_{j \neq i} c_{ij} \frac{P_j}{1 - P_j} [(P_j - P_i) + \eta_i P_i (1 - P_j)], \quad (1)$$

где $P_i \in [0; 1]$ ($P = 0$ соответствует полному отсутствию напряженности, а $P = 1$ — максимально возможной напряженности); $U_i \in [0, 1]$ — управляющий параметр (малые значения соответствуют улучшению благосостояния, а большие — ухудшению); γ_i — интенсивность восприятия воздействия; $\eta_i \in [0, 1]$ — внутренняя тенденция к ослаблению или усилению воздействия; c_{ij} — интенсивность воздействия j -ой группы на i -ую.

В связи со слишком большим числом параметров системы (1), исследовать поведение стационарных точек при любых комбинациях их значений, даже с учетом ограниченного диапазона их изменения, трудно.

Результаты расчетов наиболее наглядно описываются зависимостями стационарных значений напряженности трудящихся (менее влиятельной социальной группы) P_2 и напряженности элиты (более влиятельной социальной группы) P_1 от величины, характеризующей изменение экономического состояния трудящихся U_2 . При фиксированном экономическом положении элиты $U_1 = 0.1$, и зна-

чениях параметров $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.3$, $\eta_1 = 0.1$, $\eta_2 = 0.2$, $c_{12} = 0.4$, $c_{21} = 0.8$ существует всего одна стационарная точка во всем диапазоне изменения $U_2 \in [0; 1]$. Это означает, что никакое ухудшение благосостояния трудящихся не может привести к резкому росту их напряженности, что маловероятно.

Рост экономического неравенства между социальными группами, скорее всего, приводит к дополнительному росту напряженности трудящихся. Можно попытаться учесть влияние изменения экономического неравенства, считая его информационным воздействием, изменяющим коэффициент η_2 . Рост неравенства (разности между U_2 и U_1) вызывает рост η_2 , что приводит к появлению катастрофы складки. Сначала появляется вторая неустойчивая стационарная точка, а затем в интересующей нас области ($P_2 \in [0; 1]$) стационарные точки пропадают, т. е. система теряет устойчивость.

Параметр η_2 может изменяться не только в зависимости от роста экономического неравенства, но и под влиянием целенаправленного информационного воздействия. При этом даже при фиксированных значениях $U_2 = 0.7$ и $U_1 = 0.2$ рост η_2 приводит к появлению катастрофы. В частности, рост η_2 может являться следствием раскола элиты, либо наличием групп добившихся определенного экономического положения и боящихся потерять его во время кризиса (третье сословие в период буржуазных революций), либо воздействием внешних сил.

Вопрос о количественной связи между η_2 и ростом межгруппового неравенства требует дополнительного изучения.

Если значения η_1 и η_2 достаточно велики (например, $\eta_1 = 0.3$, $\eta_2 = 0.6$), то катастрофа возникает при сравнительно небольших значениях U_2 (т. е. при достаточно медленном ухудшении экономического положения трудящихся).

Важно подчеркнуть, что исчезновение стационарных точек не приводит к мгновенному росту напряженности до предельного значения. Этот рост при постоянных параметрах c_{ij} , η_i происходит в течение длительного времени (порядка нескольких лет).

Оценка значений коэффициентов предложенной модели является сложной задачей, требующей анализа достаточно большого числа исторических событий. Тем не менее, полученные результаты позволяют предложить возможные механизмы возникновения неустойчивости социальных систем.

Литература

1. Басаева Е.К., Каменецкий Е.С., Хосаева З.Х. О влиянии нелинейных эффектов на стабильность общества // Математические заметки СВФУ. 2015 Т. 22, № 3(87). С. 78–84.
2. Bosse E., Hoogendoorn M., Klein M.C.A., Treur J., Vander Wal C.N., van Wissen A. Modelling collective decision making in groups and crowds: Integrating social contagion and interacting emotions, beliefs and intentions // Auton. Agent Multi-Agent Syst. 2013. V. 27, P. 52–74.

УДК 517.95

ЗАДАЧА КОШИ В ЛОКАЛЬНОЙ ПОСТАНОВКЕ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ БАРРЕТТА В ГЛАВНОЙ ЧАСТИ

© Березгова Р.З.

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
"Институт прикладной математики и автоматизации" (Россия, Нальчик)
e-mail: kagharova_r@mail.ru

Рассмотрим следующее нагруженное уравнение

$$D_{0t}^\alpha u(x, \eta) - \lambda u(x, t) = \sum_{j=1}^k a^j(x, t) u(x, t_j) + \\ + \sum_{j=1}^l b^j(x, t) u(x_j, t) + \sum_{j=1}^m c^j(x, t) u(x_j, t_j) + v(x, t), \quad (1)$$

где D_{0t}^α – оператор дробного дифференцирования порядка $\alpha \in \in]n-1, n]$; $n = 1, 2, \dots$ [1, с.28], $\lambda = \text{const}$, $a^j(x, t)$, $b^j(x, t)$, $c^j(x, t)$, $v(x, t)$ – заданные непрерывные в области $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < r, 0 < t < T\}$ функции независимых переменных x и t , (x_j, t_j) – заданные точки из $\bar{\Omega}$ с ординатами $t_j > 0$.

Регулярным решением уравнения (1) в области Ω назовем функцию $u=u(x,t)$, которая обладает следующими свойствами:

- 1) $t^{n-\alpha}u(x, t) \in C^{n-1}(\bar{\Omega})$, $D_{0t}^\alpha u \in C(\Omega)$;
- 2) $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (1) во всех точках $(x, t) \in \Omega$.

В работе исследуется следующая

Задача. Найти регулярное в области Ω решение $u(x, t)$ уравнения (1), удовлетворяющее следующим условиям:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial^{i-1}}{\partial t^{i-1}} t^{n-\alpha} u(x, t) = \tau_i(x), \quad i = \overline{1, n}, \quad (2)$$

где $\tau_i(x) \in C[0, r]$.

Задача Коши и Дирихле в видоизмененной постановке (2) при $n = 2$ была исследована В.А. Нахушевой [2]. В [3] для уравнения (1) при $b(x, y) = 0$ была исследована смешанная краевая задача.

В данной работе решение задачи сведено к решению нагруженного функционального уравнения и выписано условие его однозначной разрешимости.

Литература

1. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. 301 с.
2. Нахушева В.А. Задачи Коши и Дирихле в видоизмененной постановке для одного класса нагруженных дифференциальных уравнений дробного порядка// Докл. Адыг. (Черкес.) Междунар. Акад. Наук. Нальчик, 2009. Т. 11, № 1. С. 6–9.
3. Кажарова Р.З. Об одной краевой задаче для нагруженного дифференциального уравнения дробного порядка// Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2010. Т. 12, №1. С. 25–30.

УДК 504.35

ВОЗМУЩЕНИЯ АТМОСФЕРЫ ПРИ ОБТЕКАНИИ ГОР И БЕЗОПАСНОСТЬ ПОЛЕТОВ В ГОРАХ АДЫГЕИ

© Берзегова Р.Б.

Майкопский государственный технологический университет (Россия, Майкоп)
e-mail: rozaberzegova@yandex.ru

Среди метеорологических явлений, оказывающих существенное влияние на полеты воздушных судов, одним из наиболее опасных является атмосферная турбулентность, вызывающая интенсивную болтанку самолетов.

Основной причиной турбулентности воздушных течений являются возникающие в атмосфере контрасты в полях ветра и температуры. Эти контрасты порождают следующие процессы: трение

воздушного потока о поверхность земли; деформация воздушных течений орографическими препятствиями; неравномерный нагрев различных участков подстилающей поверхности; процессы облакообразования, при которых выделяется тепло конденсации и изменяется характер полей температуры и ветра; взаимодействие воздушных масс, различных по своим свойствам, на границе которых очень резко выражены горизонтальные градиенты температуры и ветра; наличие в атмосфере инверсионных слоев, в которых могут возникать внутренние гравитационные волны, теряющие при определенных условиях устойчивость. Все перечисленные выше процессы могут действовать одновременно в одном или разных направлениях и тем самым увеличивать или уменьшать степень турбулентности атмосферы.

При классификации турбулентности обычно во внимание принимаются причины ее возникновения. Поэтому всегда говорят об орографической (механической) турбулентности, термической (конвективной) турбулентности и динамической турбулентности.

Орографическая турбулентность зависит от скорости ветра у поверхности земли, неровностями рельефа, а также взаимного расположения направления ветра и направления хребта. Воздушный поток при обтекании горных препятствий деформируется. Степень и характер этой деформации зависят от характера натекающего потока – его скорости, направления и температурной стратификации, а также от формы и размеров горного хребта. Но надежные методы их прогноза до сих пор не разработаны. С этой целью необходимо использование моделей высокого разрешения, учитывающих рельеф местности и синоптическую ситуацию в регионе.

Настоящая работа посвящена проблеме обтекания воздушными потоками неровностей рельефа и определению степени опасности полетов авиации над горами (на примере горы Фишт).

Модели синоптических процессов весьма приблизительно описывают реальные процессы в горах. Поэтому для определения безопасных условий полетов необходимо исследовать возмущения атмосферы более мелкого масштаба. В данной работе проблема определения степени опасности полетов будет рассматриваться в тесной связи с возмущениями мезомасштаба, возникающими при обтекании гор (орографическими возмущениями).

Цель работы заключается в исследовании возмущений над горами в районе горы Фишт, а также разработке новых методов опре-

деления степени опасности полетов авиации в горах.

Исходя из поставленной цели, формируются следующие **задачи**: изучение влияния орографических возмущений на усиление ветра; оценка степени опасности полетов на основе анализа вертикальной и горизонтальной компоненты скорости.

Исследование поставленной проблемы было проведено на основе использования стационарной двумерной нелинейной модели обтекания, достаточно подробно разъясненной в [1, 2]. Учитывается неограниченность атмосферы и отсутствие возмущений в натекающем потоке. Рельеф гор, используемый в модели, находится с географической карты посредством выделения двумерных особенностей реального горного района. Рассчитываются и анализируются поля траекторий и составляющих скорости в тропосфере за горой на уровне 300 м. Представленная модель может быть использована для определения степени опасности полетов в районе любых горных массивов.

Работа выполнена при поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований 16-35-50120-мол-нр.

Литература

1. *Кожевников В.Н.* Возмущения атмосферы при обтекании гор. М.: Научный мир, 1999. 160 с.
2. *Беданоков М.К., Берзегова Р.Б.* Орографические возмущения атмосферы и проблема безопасности полетов над горой Фишт Республики Адыгея// Современные проблемы геофизики и геоэкологии (Физические основы, методы и технологии мониторинга окружающей среды): Материалы Международной школы молодых ученых. Майкоп: Изд-во "ИП Кучеренко В.О." 2016. С. 28-42.

УДК 517.95

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДРОБНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ВЫРОЖДЕНИЕМ ПО ВРЕМЕНИ

© Бердышев А.С.¹, Кадиркулов Б.Ж.²

¹Казахский национальный педагогический университет имени Абая
(Казахстан, Алматы)
e-mail: berdyshev@mail.ru

²Ташкентский государственный институт востоковедения
(Узбекистан, Ташкент)
e-mail: kadirkulovbj@gmail.com

Пусть $\alpha > 0$ - некоторое действительное число. Для функции $\phi(t)$ заданной на $(0, \ell)$, $\ell < \infty$ оператор интегро-дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля с началом в точке 0, определяется следующим образом [1, 2]

$$D_{0t}^\alpha \phi(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^t \frac{\phi(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1}}, & \alpha < 0, \\ \phi(t), & \alpha = 0, \\ \frac{d^n}{dt^n} D_{0t}^{\alpha-n} \phi(t), & n-1 < \alpha \leq n, \quad n \in N. \end{cases}$$

Следующий оператор

$${}_C D_{0t}^\alpha \phi(t) = D_{0t}^{\alpha-n} \phi^{(n)}(t), \quad n-1 < \alpha \leq n, \quad n \in N$$

называется оператором дробного дифференцирования в смысле Капуто [1]. В случае $\alpha = 1$ производная Капуто совпадает с обычной производной.

Пусть $\Omega = \{(x, t) : 0 < x, t < 1\}$, $\alpha \in (0, 1]$, $\beta \geq 0$. В области Ω рассмотрим уравнение

$${}_C D_{0t}^\alpha u + t^\beta \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = f(x). \quad (1)$$

Задача. Требуется найти пару функций $\{u(x, t), f(x)\}$, обладающих следующими свойствами:

- 1) $u(x, t) \in C_{x,t}^{4,0}(\bar{\Omega})$, ${}_C D_{0t}^\alpha u \in C(\bar{\Omega})$, $f(x) \in C[0, 1]$;
- 2) удовлетворяет уравнению (1) в области Ω ;
- 3) удовлетворяет условиям

$$u(0, t) = u_{xx}(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$u_x(1, t) = u_x(0, t), \quad u_{xxx}(1, t) = u_{xxx}(0, t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u(x, 1) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – заданные функции.

Данная задача является обобщением одной нелокальной задачи, исследованной в [3] (случай $\beta = 0$). Для доказательства теоремы существования и единственности решения задачи использованы методы теории интегральных уравнений и спектрального анализа.

Литература

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
2. Псеху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.
3. Berdyshev A.S., Cabada A., Kadirkulov B.J. The Samarskii-Ionkin type problem for the fourth order parabolic equation with fractional differential operator. Computers and Mathematics with Applications. 2011. V. 62, № 10. P. 3884–3893.

UDC 519.635

A NUMERICAL METHOD FOR SOLVING THE FIRST BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR LOADED DIFFERENTIAL SOBOLEV TYPE EQUATION

© Beshtokov M.KH.

Kabardino-Balkaria State University (Russia, Nalchik)
e-mail: beshtokov_murat@rambler.ru

1. Statement of the problem and a priori estimate in the differential form.

In the closed cylinder $\overline{Q}_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ we consider the first boundary value problem for a loaded equation of Sobolev type

$$u_t = (k(x, t)u_x)_x + (\eta(x, t)u_x)_{xt} + r(x, t)u_x(x_0, t) - q(x, t)u + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (3)$$

where $0 < c_0 \leq \eta$, $k \leq c_1$, $|\eta_t, \eta_{xt}, \eta_x, k_x, r, q| \leq c_2$,

c_0, c_1, c_2 – positive numbers. (4)

It is assumed that problem (1) – (3) has a unique solution with all the derivatives required throughout the paper. We also assume that the coefficients of equation (1) and boundary conditions (2), (3) satisfy the necessary smoothness conditions required in the course of the presentation to provide the desired order of approximation of a difference scheme. Note that the construction of difference schemes

requires a higher smoothness of the coefficients of the equation solution [1]:

$$u \in C^{4,3}(\overline{Q}_T), \eta \in C^{3,3}(Q_T), k \in C^{3,2}(Q_T), r, q, f \in C^{2,2}(Q_T),$$

$$Q_T = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t \leq T\}, \quad u_0(x) \in C^2[0, l].$$

Theorem 1. *Let conditions (4), be satisfied, then for the solution of differential problem (1) – (3) the a priori estimate holds*

$$\|u_x\|_0^2 + \|u_{xx}\|_0^2 + \|u_{xx}\|_{2,Q_t}^2 \leq M \left(\int_0^t \|f\|_0^2 d\tau + \|u'_0(x)\|_0^2 + \|u''_0(x)\|_0^2 \right),$$

wherein M – depends only on the input data of problem (1) – (3),

$$\|u_x\|_{2,Q_t}^2 = \int_0^t \|u_x\|_0^2 d\tau.$$

The obtained a priori estimate implies uniqueness of the solution of the initial problem (1) – (3), as well as continuous dependence of the solution of the problem on the input data on each time layer in the norm $\|u\|_1^2 = \|u_x\|_0^2 + \|u_{xx}\|_0^2 + \|u_{xx}\|_{2,Q_t}^2$.

2. Stability and convergence of the difference scheme.

In order to solve problem (1) – (3) we apply the finite difference method. To this end, in the closed cylinder \overline{Q}_T we introduce a uniform grid [1]:

$$\overline{\omega}_{h\tau} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau = \{(x_i, t_j), x \in \overline{\omega}_h, t \in \overline{\omega}_\tau\},$$

$$\overline{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, Nh = l\},$$

$$\overline{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, m, m\tau = T\}.$$

On the grid $\overline{\omega}_{h\tau}$ to the differential problem (1) – (3) we assign a difference scheme with the approximation order $O(h^2 + \tau^{m_\sigma})$:

$$\begin{aligned} y_{t,i} &= (ay_{\bar{x}}^{(\sigma)})_{x,i} + (\gamma y_{\bar{x}})_{xt,i} + \\ &+ r_i \left(y_{x,i_0}^{(\sigma)} \frac{x_{i_0+1} - x_0}{h} + y_{x,i_0+1}^{(\sigma)} \frac{x_0 - x_{i_0}}{h} \right) - d_i y_i^{(\sigma)} + \varphi_i, \end{aligned} \quad (5)$$

$$y_0^{(\sigma)} = y_N^{(\sigma)} = 0, \quad (6)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\omega}_h, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned}
y^{(\sigma)} &= \sigma \hat{y} + (1 - \sigma)y, \quad y = y_i^j = y(x_i, t_j), \quad x_{i_0} \leq x_0 \leq x_{i_0+1}, \\
a_i &= k(x_{i-0.5}, \bar{t}_j), \quad \gamma_i = \eta(x_{i-0.5}, t_j), \quad d_i = q(x_i, \bar{t}_j), \quad \varphi_i = f(x_i, \bar{t}_j), \\
x_{i-0.5} &= x_i - 0.5h, \quad h, \quad \bar{t} = t_{j+0.5} = t_j + 0.5\tau, \\
\tau - \text{steps of the grid, } m_\sigma &= \begin{cases} 2, & \text{if } \sigma = 0.5, \\ 1, & \text{if } \sigma \neq 0.5. \end{cases}
\end{aligned}$$

The following is valid

Theorem 2. *Let conditions (4) be satisfied, then there exist such τ_0, τ_1 , that if $\tau \leq \min\{\tau_0, \tau_1\}$, then with $\sigma = 0.5$ for the solution of difference problem (5) – (7) the a priori estimate*

$$\begin{aligned}
&\|y_x^{j+1}\|_0^2 + \|y_{\bar{x}x}^{j+1}\|_0^2 + \sum_{j'=0}^j \|Y_{\bar{x}x}^{j'}\|_0^2 \tau \leq \\
&\leq M \left(\sum_{j'=0}^j \|\varphi\|_0^2 \tau + \|y_x^0\|_0^2 + \|y_{\bar{x}x}^0\|_0^2 \right). \tag{8}
\end{aligned}$$

is valid, where M – a positive constant, not depending on h and τ .

The obtained a priori estimate implies uniqueness as well as stability of the solution of difference problem (1) - (3) with respect to the initial data and the right-hand side and the convergence of the solution of the difference problem (5) – (7) to the solution of the differential problem (1) - (3), so that if $\tau \leq \min\{\tau_0, \tau_1\}$, then for $\sigma = 0.5$ the following estimate is valid

$$\|z^{j+1}\|_1^2 \leq M(h^2 + \tau^2),$$

where

$$\|z^{j+1}\|_1^2 = \|z_x^{j+1}\|_0^2 + \|z_{\bar{x}x}^{j+1}\|_0^2 + \sum_{j'=0}^j \|z_{\bar{x}x}^{j'+1} + z_{\bar{x}x}^{j'}\|_0^2 \tau, \quad z^{j+1} = y^{j+1} - u^{j+1}.$$

References

1. Samarskii A.A. The theory of difference schemes. M: Nauka, 1983. 616 p.
2. Ladyzhenskaya O.A. Boundary-value problems of mathematical physics. M: Nauka, 1973. 408 p.

**ЛОКАЛЬНО-ОДНОМЕРНАЯ СХЕМА ДЛЯ
ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С
НЕЛОКАЛЬНЫМ ИСТОЧНИКОМ.**

© Бештокова З.В., Шхануков-Лафишев М.Х.

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
"Институт прикладной математики и автоматизации" (Россия, Нальчик)
e-mail:zarabaeva@yandex.ru

Рассматривается локально-одномерная схема для уравнения параболического типа в p -мерном параллелепипеде. Получена априорная оценка для решения локально-одномерной схемы, и доказана её сходимость.

В цилиндре $Q_T = G \times [0 < t \leq T]$, основанием которого является прямоугольный параллелепипед $G = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_p) : 0 < x_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, p\}$ с границей Γ , рассматривается задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t), \quad (x, t) \in Q_t, \quad (1)$$

$$\begin{cases} k_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \beta_{-\alpha} u - \mu_{-\alpha}(x, t), & x_\alpha = 0, \\ -k_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \beta_{+\alpha} u - \mu_{+\alpha}(x, t), & x_\alpha = l_\alpha, \end{cases} \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (3)$$

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^p = L_\alpha u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) - \int_0^{l_\alpha} u dx_\alpha,$$

$$0 < c_0 \leq k_\alpha(x, t) \leq c_1, \quad |\beta_{\pm\alpha}| \leq c_2, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p,$$

c_0, c_1, c_2 – положительные постоянные.

Уравнение (1) перепишем в виде

$$\Re u = \frac{\partial u}{\partial t} - Lu - f = 0,$$

или

$$\sum_{\alpha=1}^p \Re_\alpha u = 0, \quad \Re_\alpha u = \frac{1}{p} \frac{\partial u}{\partial t} - L_\alpha u - f_\alpha, \quad \sum_{\alpha=1}^p f_\alpha = f.$$

На каждом полуинтервале Δ_α , $\alpha = 1, 2, \dots, p$, будем последовательно решать задачи

$$\Re_\alpha \vartheta_\alpha = \frac{1}{p} \frac{\partial \vartheta_{(\alpha)}}{\partial t} - L_\alpha \vartheta_{(\alpha)} - f_\alpha = 0, \quad x \in G, \quad t \in \Delta_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad (4)$$

$$k_\alpha \frac{\partial \vartheta_{(\alpha)}}{\partial t} = \beta_{-\alpha} \vartheta_{(\alpha)} - \mu_{-\alpha}(x, t), \quad x_\alpha = 0, \quad (5)$$

$$-k_\alpha \frac{\partial \vartheta_{(\alpha)}}{\partial t} = \beta_{+\alpha} \vartheta_{(\alpha)} - \mu_{+\alpha}(x, t), \quad x_\alpha = l_\alpha,$$

полагая при этом [2, с. 522]

$$\vartheta_{(1)}(x, 0) = u_0(x), \quad \vartheta_{(1)}(x, t_j) = \vartheta_{(p)}(x, t_j), \quad j = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

$$\vartheta_{(\alpha)}(x, t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}) = \vartheta_{(\alpha-1)}(x, t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}), \quad \alpha = 1, 2, \dots, p.$$

Аппроксимируем каждое уравнение (4) номера α на полуинтервале Δ_α двухслойной неявной схемой и применяя известный приём повышения точности аппроксимации до второго порядка по h краевых условий третьего рода [1, с. 180], приходим от (4)-(6) к цепочке одномерных схем

$$y_t^{(\alpha)} = \bar{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)} + \Phi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad x \in \bar{\omega}_\alpha, \quad (7)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad (8)$$

$$y_{\bar{t}}^{(\alpha)} = \frac{y^{j+\frac{\alpha}{p}} - y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau},$$

$$\bar{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)} = \begin{cases} \Lambda_\alpha^- y^{(\alpha)} = \frac{a_\alpha^{(1\alpha)} y_{x_\alpha, 0}^{(\alpha)} - \beta_{-\alpha} y_0^{(\alpha)}}{0.5h_\alpha} - \frac{1}{0.5h_\alpha} \sum_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} y_{i_\alpha}^{(\alpha)} \bar{h}_\alpha, & x \in \gamma_{-\alpha}, \\ \Lambda_\alpha y^{(\alpha)} = (a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)})_{x_\alpha} - \sum_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} y_{i_\alpha}^{(\alpha)} \bar{h}_\alpha, & x \in \omega_{h_\alpha}, \\ \Lambda_\alpha^+ y^{(\alpha)} = -\frac{a_\alpha^{(N\alpha)} y_{\bar{x}_\alpha, N_\alpha}^{(\alpha)} + \beta_{+\alpha} y_{N_\alpha}^{(\alpha)}}{0.5h_\alpha} - \frac{1}{0.5h_\alpha} \sum_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} y_{i_\alpha}^{(\alpha)} \bar{h}_\alpha, & x \in \gamma_{+\alpha}, \end{cases}$$

$$\bar{\Phi}_\alpha = \begin{cases} \bar{\mu}_{-\alpha}, & x_\alpha \in \gamma_{-\alpha}, \\ \varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}, & x_\alpha \in \omega_{h_\alpha}, \\ \bar{\mu}_{+\alpha}, & x_\alpha \in \gamma_{+\alpha}, \end{cases}$$

$$\bar{\mu}_{-\alpha} = \frac{\mu_{-\alpha}}{0.5h_\alpha} + f_{\alpha, 0}, \quad \bar{\mu}_{+\alpha} = \frac{\mu_{+\alpha}}{0.5h_\alpha} + f_{\alpha, N_\alpha}, \quad y^\alpha = y^{j+\frac{\alpha}{p}}.$$

На основании леммы 4 [2, с. 171] для решения задачи (7)-(8) получена априорная оценка

$$\begin{aligned} \|y^{j+1}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \|y_{\bar{x}_\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 &\leq M(t) \left[\|y^0\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \right. \\ &+ \left. \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \left(\|\varphi^{j'+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} (\mu_{-\alpha}^2(t'_j) + \mu_{+\alpha}^2(t'_j)) H/\bar{h}_\alpha \right) \right]. \quad (9) \end{aligned}$$

Теорема. *Локально одномерная схема (7)-(8) устойчива по начальным данным и правой части, так что для решения (7)-(8) справедлива оценка (9), откуда следует сходимость схемы со скоростью $O(|h|^2 + \tau)$ в норме*

$$\|y^{j+1} - u^{j+1}\|_1 \leq M(|h|^2 + \tau),$$

$$\|y^{j+1}\|_1 = (\|y^{j+1}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \|y_{\bar{x}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Литература

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. М: Наука, 1983.
2. Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. М: Наука, 1973. 415 с.

УДК 517.984+517.983.28

ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© Бичегкуев М.С.¹, Толпарова И.К.²

Северо-Осетинский государственный университет
имени Коста Левановича Хетагурова (Россия, Владикавказ)

¹e-mail: bichegkuev@yandex.ru

²e-mail: era193@mail.ru

Пусть X — комплексное банахово пространство и $LB(X)$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в X .

Пусть $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ — генератор сильно непрерывной ограниченной группы операторов $T : \mathbb{R} \rightarrow LB(X)$ и $B : \mathbb{R}_+ \rightarrow LB(X)$ — сильно непрерывная ограниченная операторная функция. Рассматривается задача Коши для дифференциального уравнения

$$-\frac{dx}{dt} + Ax + B(t)x = 0, \quad x(s) = x_0. \quad (1)$$

Приведем определения используемых классов функций, следуя [1] и [2].

Число $\omega \in \mathbb{R}$ называется ε -периодом на бесконечности функции $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$, если существует число $a = a(\varepsilon) \geq 0$ такое, что

$$\sup_{|t| \geq a} \|x(t + \omega) - x(t)\| < \varepsilon.$$

Множество ε -периодов на бесконечности таких функций обозначим символом $\Omega_\infty(\varepsilon, x)$.

Равномерно непрерывная функция $x \in C_b(\mathbb{J}, X)$, $\mathbb{J} \in \mathbb{R}$ или $\mathbb{J} = [0, \infty)$, называется *почти периодической на бесконечности*, если для любого $\varepsilon > 0$ множество ее ε -периодов относительно плотно на \mathbb{J} , т. е. существует число $l > 0$ такое, что любой отрезок длины l содержит хотя бы одно число из $\Omega_\infty(\varepsilon, x)$.

Множество почти периодических на бесконечности функций образует замкнутое подпространство из $C_b(\mathbb{J}, X)$, которое далее обозначается символом $AP_\infty(\mathbb{J}, X)$.

Равномерно непрерывная функция $x \in C_b(\mathbb{J}, X)$ называется *медленно меняющейся на бесконечности*, если $\lim_{|t| \rightarrow \infty} \|x(t + \omega) - x(t)\| = 0$ для любого $\omega \in \mathbb{J}$.

Множество медленно меняющихся на бесконечности функций образует замкнутое подпространство (обозначаемое далее символом $C_{sl,\infty}(\mathbb{J}, X)$). Ясно, что множество ε -периодов на бесконечности любой функции $x \in C_{sl,\infty}(\mathbb{J}, X)$ совпадает с \mathbb{J} . Поэтому имеет место включение $C_{sl,\infty}(\mathbb{J}, X) \subset AP_\infty(\mathbb{J}, X)$.

Теорема 1. ([1], [3]) *Функция $x \in AP_\infty(\mathbb{J}, X)$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся функции $x_1, \dots, x_n \in C_{sl,\infty}(\mathbb{J}, X)$, числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, $a = a(\varepsilon) > 0$ такие, что*

$$\sup_{|t| \geq a} \left\| x(t) - \sum_{k=1}^n x_k(t) e^{i\lambda_k t} \right\| < \varepsilon.$$

Основным результатом является следующая

Теорема 2. Пусть $T : \mathbb{R} \rightarrow LB(X)$ — сильно непрерывная почти периодическая группа операторов и операторная функция $B : \mathbb{R} \rightarrow LB(X)$ — сильно непрерывная ограниченная операторная функция, для которой $\|B(t)\| \leq f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, где $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ некоторая суммируемая функция. Тогда каждое решение дифференциального уравнения (1) является почти периодической на бесконечности функцией.

Рассматривая более конкретные приложения, отметим, что условия теоремы 2 выполнены, если X — гильбертово пространство и A — антисамосопряженный оператор со счетным спектром (например, имеющий компактную резольвенту). В этом случае группа $T : \mathbb{R} \rightarrow LB(X)$ является группой изометрией и почти периодической [4].

Рассмотрим смешанную задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= i \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - b(t, x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t < \infty; \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) &= \alpha u(t, 0), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t, 1) = \beta u(t, 1), \quad u(0, x) = f(x), \end{aligned}$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f \in L_2[0, 1]$, $p \in W_2^1[0, 1]$. Функция $b : \mathbb{R}_+ \times [0, 1]$ — равномерно непрерывная ограниченная со свойством:

$$\int_0^\infty \max_{0 \leq x \leq 1} |b(t, x)| dt < \infty.$$

Данное уравнение записывается в виде (1), где операторная функция $B : \mathbb{R}_+ \rightarrow LB(L_2[0, 1])$ удовлетворяет условию теоремы 2. Оператор $Ay = \frac{\partial}{\partial x} (p(x) \frac{\partial y}{\partial x})$ с областью определения

$$D(A) = \{y \in W_2^1[0, 1] | y'(0) = \alpha y(0), y'(1) = \beta y(1)\} \subset L_2[0, 1]$$

является антисамосопряженным и имеющим компактную резольвенту. Следовательно, в силу теоремы 2 все решения $\tilde{u} : \mathbb{R}_+ \rightarrow L_2[0, 1]$, $\tilde{u}(t)x = u(t, x)$, $t \geq 0$, $0 \leq x \leq 1$, ограничены и являются почти периодическими на бесконечности функциями.

Литература

1. Баскаков А.Г. Исследование линейных дифференциальных уравнений методом спектральной теории разностных операторов и линейных отношений// Успехи матем. наук, 1967. 68:1. С. 77–128.

2. Баскаков А.Г. Гармонический и спектральный анализ операторов с ограниченными степенями и ограниченных полугрупп операторов в банаховом пространстве// Матем. заметки. 2015. 97:2, С. 174–190.
3. Бичегкуев М.С. О спектре разностных и дифференциальных операторов в весовых пространствах// Функциональный анализ и его приложения. 2010. 44:1, С. 80–83.
4. Баскаков А.Г. Спектральные критерии почти периодических решений функциональных уравнений // Матем. заметки, 1978. 24:2. С. 195–206.

УДК 517.95

О СПЕКТРЕ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

© Богатырева Ф.Т.

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
"Институт прикладной математики и автоматизации"(Россия, Нальчик)
e-mail: fatima_bogatyreva@bk.ru

Рассмотрим уравнение

$$D_{0x}^{\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n\}} u(x) - \lambda u(x) = f(x), \quad x \in]0, 1[, \quad (1)$$

где $D_{0x}^{\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n\}}$ – оператор дробного дифференцирования Джрабашяна–Нерсесяна порядка $\alpha = \sum_{k=0}^n \gamma_k - 1 > 0$, $\lambda = const$.

Оператор дробного дифференцирования Джрабашяна–Нерсесяна порядка α , ассоциированный с последовательностью $\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n\}$, $\gamma_k \in]0, 1]$, $k = \overline{0, n}$, определяется соотношением [1]

$$D_{0x}^{\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n\}} u(x) = D_{0x}^{\gamma_n-1} D_{0x}^{\gamma_{n-1}} \dots D_{0x}^{\gamma_1} D_{0x}^{\gamma_0} u(x), \quad (2)$$

где D_{0x}^γ – оператор дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана–Лиувилля [2].

Оператор (2) введен в работе [1], где доказана теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения (1). В работе [3] для уравнения (1) была рассмотрена нелокальная краевая задача с интегральным смещением.

В данной работе исследуется краевая задача с локальным смещением, связывающим значения искомого решения на концах рассматриваемого интервала со значениями во внутренних точках. Доказано существование конечного числа собственных значений исследуемой задачи.

Регулярным решением уравнения (1) называется функция $u = u(x)$ из класса $D_{0x}^{\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_k\}} u(x) \in C^1]0, 1[\cap C[0, 1]$ ($k = \overline{0, n-1}$), $D_{0x}^{\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n\}} u(x) \in C(0, 1)$, удовлетворяющая уравнению (1) в интервале $(0, 1)$.

Задача. Найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$\lim_{x \rightarrow 0} D_{0x}^{\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_k\}} u(x) = u_k, \quad 1 \leq k \leq n-1, \quad (3)$$

$$u(1) - \sum_{i=1}^m a_i u(x_i) = b, \quad x_i \in [0, 1[, \quad (4)$$

где u_k, a_i, b – заданные действительные числа.

В работе [4] доказана теорема существования и единственности решения задачи (3), (4) для уравнения (1).

Определение. Собственным значением задачи (1), (3), (4) будем называть $\lambda \in \mathbb{C}$, при котором однородная задача

$$D_{0x}^{\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n\}} u(x) - \lambda u(x) = 0, \quad x \in]0, 1[,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} D_{0x}^{\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_k\}} u(x) = 0, \quad 1 \leq k \leq n-1,$$

$$u(1) - \sum_{i=1}^m a_i u(x_i) = 0, \quad x_i \in [0, 1[,$$

имеет нетривиальное решение.

Теорема. Задача (1), (3), (4) может иметь лишь конечное число вещественных собственных значений.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-01-00462-а.

Литература

1. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. Москва: Физматлит, 2003. 272 с.
2. Джербашян М. М., Нерсесян А. Б. Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка// Изв. Акад. Наук Арм. ССР. 1968. Т. 3, № 1. С. 3–28.

3. Богатырева Ф. Т. Нелокальная краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с оператором Джрбашяна-Нерсесяна // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2014. Т. 16. № 2. С. 28-33.
4. Богатырева Ф. Т. Краевая задача со смещением для обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дробного дифференцирования Джрбашяна-Нерсесяна // Дифференциальные уравнения, 2014. Т. 50, № 2. С. 160-166.

УДК 519.6

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИЙ ИНЖЕНЕРИИ ЗНАНИЙ В МАРКЕТИНГЕ

© Брыкалова А.А.

Северо-Кавказский федеральный университет (Россия, Ставрополь)
e-mail: appinform@ncfu.ru

Задачи формирования знаний в экономических приложениях особенно актуальны. Практически все экономические приложения имеют системы учета, обеспечивающие долгосрочное хранение информации в виде различного рода данных. В настоящее время актуальны вопросы не столько хранения больших объемов данных, а их анализа. В этих данных заключены декларативные и процедурные знания, которые могут быть использованы при принятии решений. Извлечение знаний из баз данных на основе различных методов анализа данных является современным и эффективным методом формирования знаний.

Для проведения автоматического анализа данных используется метод Data Mining. Процесс поиска полезных знаний в имеющихся данных состоит из следующих этапов: подготовка исходного набора данных, предобработка данных, трансформация и нормализация данных, применение методов формирования знаний, интерпретация результатов и применение полученных знаний в бизнес-приложениях.

Традиционно к задачам формирования знаний относятся: задачи прогнозирования, классификации и кластеризации, и т.п.

Data Mining находит очень широкое применение в сфере маркетинга. В маркетинговых исследованиях кластерный анализ применяется достаточно широко - как в теоретических исследованиях,

так и при решении практических задач, например, задачи решающие проблемы группировки различных объектов. Так, одно из наиболее важных направлений при применении кластерного анализа в маркетинговых исследованиях является анализ поведения потребителя, конкретно: группировка потребителей в однородные классы для получения максимально полного представления о поведении клиента из каждой группы и о факторах, влияющих на его поведение.

Современные программные средства, например, программный пакет Deductor компании BaseGroup, позволяют реализовать все этапы создания аналитической системы: от создания хранилища данных до автоматического подбора моделей и реализации полученных результатов. Таким образом, использование новых технологий извлечения знаний повышает эффективность маркетинговых исследований.

Литература

1. Котова Т.Н., Хачатурян Р.Е., Шалыгина Л.В. Математическая интерпретация экономических методов прогнозирования// Актуальные вопросы экономических наук. 2013. № 34. С. 9–13.
2. Брыкалова А.А., Минкина Т.В. Решение производственных оптимизационных задач с применением математического моделирования// В сборнике: Культура и общество: история и современность материалы IV Всероссийской научно-практической конференции. 2015. С. 200–203.
3. Брыкалова А.А., Литвинов Е.А. Развитие методологии и инструментария результативного бюджетирования на основе мирового опыта // В сборнике: Информационные системы и технологии как фактор развития экономики региона II Международная научно-практическая конференция. 2013. С. 52–54.

УДК 519.711.3

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ДВУМЕРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА СТЕФАНА С ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ТЕПЛООБМЕНА

© Буздов Б.К.

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт информатики и проблем регионального управления
Кабардино-Балкарского научного центра РАН (Россия, Нальчик)
e-mail: beslan2801@yandex.ru

При моделировании процесса замораживания живой биологической ткани криоинструментом цилиндрической формы возникает следующая двумерная начально-краевая задача типа Стефана:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda(u) \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\lambda(u) \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) - c(u) \rho(u) \frac{\partial u}{\partial t} = -w(u) + \\
& + P \frac{\partial u}{\partial t} \delta(u - u_1) + P_0 \frac{\partial u}{\partial t} \delta(u - u_2), \quad 0 < \varphi < \pi, \quad r_0 < r < R, \quad t > 0, \quad (1) \\
& u(r, \varphi, 0) = \bar{u} = const, \quad r_0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \\
& \lambda(u) \frac{\partial u}{\partial r} - \alpha u = -\alpha u_A, \quad r = r_0, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad t > 0, \\
& u(r, \varphi, t) = \bar{u}, \quad r = R, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad t > 0, \\
& \lambda(u) \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \gamma u = -\gamma u_c, \quad r_0 \leq r \leq R, \quad \varphi = 0, \quad t > 0, \\
& -\lambda(u) \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \gamma u = -\gamma u_c, \quad r_0 \leq r \leq R, \quad \varphi = \pi, \quad t > 0, \\
& \left. \begin{array}{l} u(r, \varphi_1(r, t), t) = u_1, \\ u(r, \varphi_2(r, t), t) = u_2, \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

Здесь r – полярный радиус, φ – полярный угол, r_0 – радиус криоинструмента, $u_A = u_A(t)$ – температура его охлаждающей поверхности; $\lambda(u), c(u), \rho(u)$ – коэффициенты теплопроводности, теплоемкости и плотности биоткани соответственно; u_c – температура окружающей среды; α – коэффициент теплообмена криоинструмента с биотканью; γ – теплообмена с окружающей средой; \bar{u} – температура биоткани, до которой еще не дошел холод; u_1 – температура замораживания биоткани, u_2 – температура криопоражения; $w(u)$ – источники тепла, $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

Область, в которой ищется распределение температуры, как следует из постановки задачи, имеет форму полукольца (ось OZ считаем параллельной оси инструмента). Определению подлежат функции $u(r, \varphi, t), \varphi_1(r, t), \varphi_2(r, t)$. Здесь R – некоторая константа, характеризующаяся тем, что при $r > R$ температура биоткани постоянна и равна \bar{u} .

Предполагается, что коэффициенты $c(u), \rho(u), \lambda(u)$ могут иметь разрывы первого рода типа скачка при $u = u_1$ и $u = u_2$, а также, что

$$c(u) \geq c_{min} > 0, \rho(u) \geq \rho_{min} > 0, \lambda(u) \geq \lambda_{min} > 0.$$

Метод решения. После ввода функции теплосодержания $H(u) = \int_0^u c(\xi) \rho(\xi) d\xi + P \eta(u - u_1) + P_0 \eta(u - u_2)$, ($\eta(x)$ - функция Хевисайда), имеющей при $u = u_1$ и $u = u_2$ скачки соответственно P и P_0 , уравнение

(1) перепишется в виде

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda(u) \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\lambda(u) \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) - \frac{\partial H}{\partial t} = -w(u). \quad (2)$$

Далее проводится сглаживание разрывных функций $H(u), \lambda(u)$ по u [1].

Следует отметить, что условия на изотермических поверхностях уже содержатся в уравнении (2). Предполагается, что решение существует и является достаточно гладким. Для "сглаженной" задачи применяется локально-одномерный метод.

Для этого введем в рассматриваемой нами области пространственно-временную сетку. Для простоты будем рассматривать равномерные сетки по каждому из направлений. Обозначим:

$$\overline{W}_r = \{r_i = ih_r, i = 0, 1, \dots, N-1, N\}, \quad r_N = R, \quad r_0 = r_0;$$

$$\overline{W}_\varphi = \{\varphi_j = jh_\varphi, j = 0, 1, \dots, M-1, M\}, \quad \varphi_0 = 0, \quad \varphi_M = \pi;$$

$$\overline{W}_t = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots\}, \quad t_0 = 0.$$

Тогда на множестве $\overline{W} = \overline{W}_r \cdot \overline{W}_\varphi \cdot \overline{W}_t$ вместо функции непрерывных аргументов $u(r, \varphi, t)$ будем рассматривать функцию дискретных аргументов ν_{ij}^n , значения которой вычисляются в узлах сетки \overline{W} . Обозначим $\overline{W}_{r\varphi} = \overline{W}_r \cdot \overline{W}_\varphi$. Для сеточной функции ν_{ij}^n получаем следующую локально-одномерную схему:

$$\frac{1}{2} B \left(\nu_{ij}^{n+1/2} \right) \cdot \frac{\nu_{ij}^{n+1/2} - \nu_{ij}^n}{\tau} = \Lambda_1 \nu_{ij}^{n+1/2} + \frac{1}{2} w \left(\nu_{ij}^{n+1/2} \right), \quad (r_i, \varphi_j) \in W_{r\varphi},$$

$$\nu_{Nj}^{n+1/2} = \bar{u}, \quad 0 < j < M,$$

$$\nu_{0j}^{n+1/2} = \frac{\lambda \left(\nu_{0j}^{n+1/2} \right)}{\alpha h_r + \lambda \left(\nu_{0j}^{n+1/2} \right)} \nu_{ij}^{n+1/2} + \frac{h_r \alpha u_A}{\alpha h_r + \lambda \left(\nu_{0j}^{n+1/2} \right)}, \quad 0 < j < M,$$

$$\begin{aligned} \Lambda_1 \nu_{ij}^{n+1/2} = & \frac{1}{r_i} \frac{1}{h_r} \left(r_{i+1/2} \lambda \left(\nu_{i+1/2,j}^{n+1/2} \right) \frac{\nu_{i+1,j}^{n+1/2} - \nu_{ij}^{n+1/2}}{h_r} - \right. \\ & \left. - r_{i-1/2} \lambda \left(\nu_{i-1/2,j}^{n+1/2} \right) \frac{\nu_{i,j}^{n+1/2} - \nu_{i-1,j}^{n+1/2}}{h_r} \right), \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} B \left(\nu_{ij}^{n+1} \right) \frac{\nu_{ij}^{n+1} - \nu_{ij}^{n+1/2}}{\tau} = \Lambda_2 \nu_{ij}^{n+1} + \frac{1}{2} w \left(\nu_{ij}^{n+1} \right), \quad (r_i, \varphi_j) \in W_{r\varphi},$$

$$\nu_{i0}^{n+1} = \frac{\lambda \left(\nu_{i0}^{n+1} \right)}{r_i \gamma h_\varphi + \lambda \left(\nu_{i0}^{n+1} \right)} \cdot \nu_{i1}^{n+1} + \frac{h_\varphi \gamma u_c r_i}{r_i \gamma h_\varphi + \lambda \left(\nu_{i0}^{n+1} \right)}, \quad 0 < i < N,$$

$$\begin{aligned}\nu_{im}^{n+1} &= -\frac{\lambda(\nu_{iM}^{n+1})}{\lambda(\nu_{iM}^{n+1}) - r_i \gamma h_\varphi} \nu_{i,M-1}^{n+1} + \frac{h_\varphi \gamma u_c r_i}{\lambda(\nu_{iM}^{n+1}) - r_i \gamma h_\varphi}, \quad 0 < i < N, \\ \Lambda_2 \nu_{ij}^{n+1} &= \frac{1}{r_i^2} \cdot \frac{1}{h_\varphi} \cdot \left(\lambda(\nu_{i,j+1/2}^{n+1}) \cdot \frac{\nu_{i,j+1}^{n+1} - \nu_{i,j}^{n+1}}{h_\varphi} - \lambda(\nu_{i,j-1/2}^{n+1}) \cdot \frac{\nu_{i,j}^{n+1} - \nu_{i,j-1}^{n+1}}{h_\varphi} \right), \\ \nu_{i,j}^0 &= \bar{u}, \quad t = 0, \quad 0 \leq i \leq N, \quad 0 \leq j \leq M.\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}\nu_{i+1/2,j} &= 0,5(\nu_{i,j} + \nu_{i+1,j}), \quad \nu_{i,j+1/2} = 0,5(\nu_{i,j} + \nu_{i,j+1}), \\ r_{i+1/2} &= 0,5(r_i + r_{i+1}), \quad r_i - 1/2 = 0,5(r_i - r_{i-1}), \quad B(u) = H'(u) > 0.\end{aligned}$$

Для нахождения значений сеточной функции ν на $(n+1)$ -м временном слое по известному значению на n -м временном слое необходимо последовательно решать две серии одномерных задач, соответственно по координатам r и φ . Каждая такая задача представляет собой нелинейную алгебраическую систему с трехдиагональной матрицей, и для ее решения можно использовать метод прогонки совместно с каким-либо итерационным методом. При этом при определении ν^{n+1} коэффициенты c, ρ, λ можно брать на предыдущей итерации [2]. Обнаруженная в процессе счета связь между шагами говорит об условной устойчивости схемы.

В реальных ситуациях коэффициент теплообмена α является функцией угла φ , монотонно возрастающей в интервале $0 < \varphi < \pi/2$ и монотонно убывающей в интервале $\pi/2 < \varphi < \pi$. Причем для функции $\alpha(\varphi)$ выполняются условия:

$$\alpha(\varphi) = \alpha(\pi - \varphi), \quad 0 < \varphi < \pi/2, \quad \alpha(0) = \alpha(\pi) = \alpha_0.$$

В этом случае соответствующее краевое условие примет вид

$$\lambda(u) \frac{\partial u}{\partial r} - \alpha(\varphi)u = -\alpha(\varphi)u_A, \quad r = r_0, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad t > 0,$$

где функциональная зависимость $\alpha(\varphi)$ должна определяться экспериментально.

Результаты счета для $\alpha = const$ приведены в [3]. При $\alpha = \alpha(\varphi)$ размеры интересующих нас зон замораживания и криопоражения зависят от выбранной зависимости $\alpha(\varphi)$, но всегда получаются несколько меньше, чем в случае $\alpha = const$.

Литература

1. Будак Б.М., Соловьева Е.Н., Успенский А.Б. Разностный метод со стглашиванием коэффициентов для решения задачи Стефана // ЖВМ и МФ. 1965. Т. 5, № 5. С. 828–840.

2. Самарский А.А., Мусеенко Б.Д. Экономическая схема сквозного счета для многомерной задачи Стефана// ЖВМ и МФ. 1965. Т. 5, № 5. С. 816–827.
3. Буздов Б.К. Моделирование криодеструкции биологической ткани// Математическое моделирование. 2011. Т. 23, № 3. С. 27–37.

УДК 519.6

ЗАДАЧА СИНТЕЗА СЕТИ НА ГРАФЕ

© Бухурова М.М.

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
"Институт прикладной математики и автоматизации" (Россия, Нальчик)
e-mail: marea.bukhurova@mail.ru

Основная задача синтеза сети состоит в следующем [1]:

$$z = \alpha \sum_{i,j \in D} c_{ij}(v_{ij}, u_{ij})l_{ij} + \beta P(Q_1, U_1) + \gamma Q_1 U_1 \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$\sum_{i \in \Gamma_j^+} v_{ij} - \sum_{k \in \Gamma_j^-} v_{jk} = g_j, \forall j \neq 1 \in B, \quad \sum_{j \in \Gamma_i^-} v_{1j} = \sum_{i \in B} g_i = Q_1, \quad (2)$$

$$U_j = u_{ij} l_{ij} + U_i \quad \forall i, j \in D, \quad (3)$$

$$U_j \geq U_j^H, \quad \forall j \in B, \quad (4)$$

$$v_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \in D, \quad (5)$$

где $\Gamma(B, D)$ – заданный конечный, связный, вообще говоря, двузвенный орграф, моделирующий возможные соединения узлов (вершин) сети друг с другом; B и D – множества его вершин и дуг; v_{ij} , u_{ij} , c_{ij} , l_{ij} – соответственно искомые значения кинетической (например, ток) и потенциальной (например, напряжение) переменных по ij -ой дуге (ветви) сети, ее удельная (на единицу длины) стоимость и заданная длина; Q_1 , U_1 , $P(Q_1, U_1)$ – заданный поток в сеть, искомые потенциал источника и его стоимость; α , β , γ – заданные постоянные коэффициенты; g_j , U_j^H , U_j – заданный расход потока, нормативный (заданный) потенциал и потенциал в j -ом узле (вершине) сети соответственно.

Первый член целевой функции (1) отражает стоимость ветвей сети, второй – стоимость источника сети, третий – энергетические затраты на транспорт вещества и (или) энергии от источника к

потребителям (узлам, вершинам). Ограничения (2), (3) учитывают законы теории сетей, (2) и (4) – требования по обеспечению потребителей сети потоками и нормативными значениями потенциалов.

Для основной задачи синтеза сети (1) – (5) имеет место следующий

Принцип оптимальности. а) Найдется остов T графа $\Gamma(B, D)$ и соответствующее ему базисное решение задачи (по потоковым переменным) $\{v_{ij}^*, u_{ij}^*\}_{i,j \in D}$, что

$$\alpha \sum_{i,j \in D} c_{ij}(v_{ij}^*, u_{ij}^*) l_{ij} + \beta P(Q_1, U_1^*) + \gamma Q_1 U_1^* \leq \alpha \sum_{i,j \in D} c_{ij}(v_{ij}, u_{ij}) l_{ij} + \beta P(Q_1, U_1) + \gamma Q_1 U_1,$$

где $v_{ij}^* = 0$, если $i, j \notin T$, $\{v_{ij}, u_{ij}\}_{i,j \in D}$, U_1 – любое допустимое решение задачи.

б) Пусть T' – любая связная часть графа T , $\{\bar{v}_{ij}, \bar{u}_{ij}\}_{i,j \in D}$, $\bar{U}_1 = U_1^*$ – любое такое допустимое решение, что $\bar{v}_{ij} = v_{ij}^*$, $\bar{u}_{ij} = u_{ij}^*$, $\forall i, j \in \Gamma(T')$, где $\Gamma(T')$ – граф, порожденный на графике $\Gamma(B, D)$ графиком T' . Тогда

$$\sum_{i,j \in D} c_{ij}(v_{ij}^*, u_{ij}^*) l_{ij} \leq \sum_{i,j \in D} c_{ij}(\bar{v}_{ij}, \bar{u}_{ij}).$$

Условие а) сводит процесс оптимизации сети к перебору решений, соответствующих остовным деревьям графа $\Gamma(B, D)$. Однако даже направленный перебор таких решений неосуществим в силу их большого количества, растущего факториально от числа вершин и дуг графа $\Gamma(B, D)$, сводящие процесс оптимизации сети к оптимизации ее малых частей. До тех пор, пока рассматриваются части графа $\Gamma(B, D)$ и на них проверяется принцип оптимальности, его условия – необходимы. По мере разрастания рассматриваемых частей его условия все более приближаются к достаточным.

На каждой связной части графа $\Gamma(B, D)$ определенной размерности решаются задачи с фиксированными потоками вида

$$z_u = \alpha \sum_{i \in T^0} c^i(u^i) l^i + \beta P(Q_1, U_1) + \gamma Q_1 U_1 \rightarrow \min, \quad (6)$$

$$U_1 \geq U_i^H + \sum_{j \in T_i^0} u^j l^j, \quad \forall i \in T^0, \quad (7)$$

$$u^j \in [u^{j-}, u^{j+}], \quad \forall j \in T^0, \quad (8)$$

где T^0 – некоторый остовный подграф графа $\Gamma(B, D)$.

В силу того что $c^i(u^i)$ есть строго выпуклая, положительная, монотонно убывающая функция, $P(Q_1, U_1)$ – строго выпуклая, положительная, возрастающая по U_1 функция, Q_1 – заданный поток в сеть, то имеем задачу минимизации строго выпуклой функции при линейных ограничениях.

Данная задача при конструировании сети из заданных элементов (например, набора труб) сводится к задаче линейного программирования с числом переменных $n \times m$, где n – число ветвей сети, m – число типов труб в наборе.

Размерность задачи снижается сведением ее к задаче минимизации аддитивной, выпуклой, кусочно-линейной функции с линейными ограничениями, размерность которой равна n . Задача далее решается методом динамического программирования. Достигаемое при этом снижение времени решения задачи является существенным фактором, т.к. в процессе решения задачи синтеза (1)–(5) приходится решать множество задач вида (6)–(8).

Литература

1. Кудаев В.Ч., Нахушева М.М. 2-оптимальное решение задачи синтеза сетей методом динамической декомпозиции // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 1999. Т. 4, № 1. С. 15-20.

УДК 004.94:519.6

ВЛИЯНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ НА ВЫБОР МЕТОДОВ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ

© Бучацкая В.В., Бучацкий П.Ю., Теплоухов С.В.

Адыгейский государственный университет (Россия, Майкоп)

e-mail: buch_vic@mail.ru, mentory@mail.ru

В настоящее время главным методом познания будущего является прогноз. Большое число прикладных задач требует построения модели, с помощью которой можно предсказать поведение объекта или системы. Причем существенное влияние на выбор способа построения этой прогнозной модели оказывают особенности входной информации о задаче. Кроме этого разработано множество методов прогнозирования, поэтому выбор наиболее эффективного метода является актуальной задачей. Исследуем связь между характеристиками исходной информации и применяемыми методами прогнозирования. В ходе анализа источников литературы установлено,

что существует множество классификаций методов прогнозирования. Выберем одну из них, как наиболее полную [1]. Данные методы имеют разные особенности применения, которые заключаются в следующем:

1. Количество исходных данных;
2. Длительность прогноза;
3. Наличие шумов и пропусков в данных;
4. Присутствие или отсутствие неформализованной информации.

Таблица 1

Взаимосвязь методов прогнозирования, характеристик исходных данных и вида объекта

Методы прогнозирования	Характеристики информации	Вид объекта
Экспертные методы	Любые	Любой
Регрессионные	Среднесрочный прогноз, без шумов и пропусков, большой размер выборки и отсутствие неформализованных данных	Детерминированный, периодический, многофакторный
Обобщенные линейные модели	Среднесрочный и краткосрочный прогноз, без шумов и пропусков, большой размер выборки и отсутствие неформализованных данных	Детерминированный или стохастический, периодический, многофакторный
МГУА	Все типы прогноза, без шумов, возможны пропуски и малый размер выборки, отсутствие неформализованных данных	Любой
Нейронные сети	Любые, но требуют большого количества исходных данных	Любой
Авторегрессионные	Краткосрочный прогноз, без шумов и пропусков, большой размер выборки и отсутствие неформализованных данных	Детерминированный или стохастический, периодический, многофакторный

Перечисленные характеристики представляют собой особенности исходной информации, которую требуется учитывать в процес-

се выбора метода прогнозирования. Кроме них оказывает влияние вид объекта, который бывает детерминированным, стохастическим, периодическим и апериодическим, однофакторным или многофакторным. Анализ данных характеристик позволяет определить зависимость между методом прогнозирования, особенностями исходных данных и видом объекта. Связь представлена в таблице 1.

Так можно выделить ряд методов, которые являются универсальными: экспертные, нейронные сети, МГУА. Данные методы применимы для большого числа задач с различными требованиями. Нейронные сети и МГУА также являются достаточно универсальными, однако у них имеется и определенные недостатки. Нейронные сети достаточно трудно настроить, непрозрачное получение результатов, требование достаточного количества данных. МГУА имеет смысл применять, если мы не имеем сведений о форме модели, иначе применимы другие методы. Экспертные методы применимы только, если имеются эксперты или база знаний, что не всегда возможно. Остальные методы имеет смысл применять, если исходные данные и требования к результатам удовлетворяют определенным параметрам. Но применение этих методов может дать результат не хуже, чем при использовании универсальных. Проведенный анализ позволит найти наиболее эффективный в конкретных условиях метод прогнозирования для получения прогноза оптимальной точности.

Литература

1. Симанков В.С., Бучацкая В.В. Обзор методов прогнозирования. АГУ, 2012.
2. Елисеева И.И. Эконометрика: учебник. М.: Финансы и статистика, 2007.
3. Hyndman Rob J. Forecasting overview. 2009.

УДК 519.6

РАСЧЕТ ЗОННОЙ СТРУКТУРЫ SIC МЕТОДОМ ПРИСОЕДИНЕННЫХ ПЛОСКИХ ВОЛН

**© Винокурский Д.Л., Григорян Л.А., Обласова И.Н.,
Тимофеева Е.Ф., Кононова Н.В., Воробьева Л.В.**

Северо-Кавказский федеральный университет (Россия, Ставрополь)
e-mail: dlvinokursky@gmail.com

Одним из новых материалов применяемых в современной микро- и наноэлектронике – является карбид кремния. Данное вещество наиболее перспективно в новых исследованиях в области атомно-молекулярных процессов. Поэтому представляется актуальным расчет зонной структуры данного вещества.

При проведении расчетов было принято, что постоянная решетки равна $1,88 \text{ \AA}$, структура – цинковой обманки (α -SiC). Ширина запрещенной энергетической зоны взята из эксперимента и равна – 3,33 эВ. Метод расчета зонной структуры карбида кремния – метод присоединенных плоских волн (метод ППВ).

Существенным моментом метода присоединенных плоских волн является разбиение кристалла на области двух разных типов. Предполагается, что в каждой из этих двух областей волновая функция и потенциал имеют свою характерную функциональную форму. То есть мы предполагаем, что функцию потенциальной энергии $v(r)$ можно аппроксимировать потенциалом “ячеичного” типа. “Ячеичный” потенциал имеет следующую структуру. Окружив каждый узел решетки сферой радиусом R_n , мы считаем потенциал $v(r)$ сферически симметричной функцией $V(|\vec{r} - \vec{r}_n|)$ внутри этой сферы. В пространстве же между сферами потенциал принимается равным постоянной V_c (она единственная для всего кристалла).

Отдельные присоединенные плоские волны $\varphi(r; k, E)$ качественно различны во внешней и внутренней областях. Вне ППВ-сфер, т.е. там, где потенциал равен нулю, присоединенная плоская волна $\varphi(r; k, E)$ представляется единственной плоской волной с волновым вектором k_i :

$$\varphi(r; k, E) = \exp(i \vec{k}_i \cdot \vec{r}). \quad (1)$$

Внутри же отдельной сферы, где потенциал, по предположению сферически симметричен, волну $\varphi(r; k, E)$ естественно разложить по сферическим гармоникам. Внутри сферы с центром в точке \vec{r}_n это разложение имеет вид

$$\varphi(r; k, E) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm}(k_l) u_l(|r - r_n|; E) \cdot P_l^{[m]}(\cos \theta) \exp(im\phi). \quad (2)$$

Коэффициенты $A_{lm}(k)$ выбирают так, чтобы функции (1) и (2) были непрерывными на сфере радиусом R_n .

Функции $u_l(|r - r_n|; E)$, фигурирующие в (2), являются решениями радиального уравнения Шредингера

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du_l}{dr} \right) + \left(\frac{l(l+1)}{r^2} + V_n \right) u_l = Eu_l. \quad (3)$$

Результаты расчета зонной структуры приведена на рисунке 1.

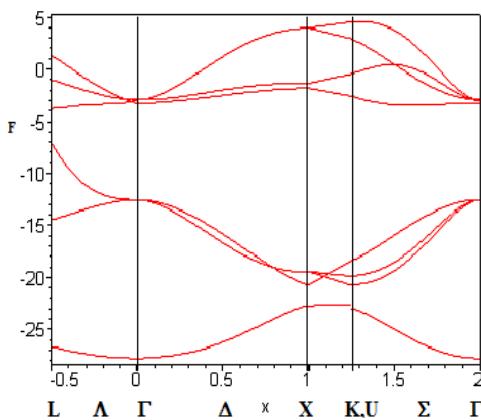


Рис. 1. Зонная структура SiC по оси отложен приведенный волновой вектор. По оси ординат энергия в эВ.

Программа для расчета зонной структуры была написана на языке CUDA Fortran, некоторые участки кода ускорены с помощью Open ACC Fortran.

УДК 519

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ДЛИНЫ УЛИЦЫ С ДОМАМИ РАЗНОЙ ВЫСОТЫ НА КАРТИНУ ТЕЧЕНИЯ ВОЗДУХА В НЕЙ

© Волик М.В.

Южный математический институт - филиал Федерального государственного бюджетного учреждения науки Федеральный научный центр "Владикавказский научный центр Российской академии наук";
Финансовый университет при Правительстве РФ (Россия, Владикавказ)
e-mail: volikmv@mail.ru

Математическое моделирование аэродинамики улицы с домами разной высоты по ее сторонам проводилось в двумерном приближении с помощью свободно распространяемого пакета OpenFoam и

удаленного доступа к консоли на управляющем узле вычислительного кластера JSCC RAS Cluster Console, <https://unihub.ru/resources/js3console> Web-лаборатории Unihub (www.unihub.ru) по программе "Университетский кластер"(www.unicluster.ru). Высота домов на подветренной стороне и ширина улицы принималась равной 20м, высота домов на наветренной стороне - 10м. Рассмотрены три варианта длины улицы - 20м, 60м, 120м. Исследовалась равномерная сетка с шагом 1м. Вычислительный эксперимент проводился для интервала времени от 0 до 100с. (с шагом 0.001с.) с использованием стандартного решателя pimpleFoam, $k - \varepsilon$ модели турбулентности и пристеночных функций в соответствующих граничных условиях [1].

Результаты расчетов показали, что в случае, когда длина улицы составляет 20м, по всей длине улицы образуется двухвихревая структура, в которой вихри располагаются друг над другом. В нижнем вихре воздух перемещается против часовой стрелки, а в верхнем - по часовой стрелке. Верхний вихрь располагается над уровнем крыши низкого дома и затекает на нее.

Однако, результаты расчетов, когда расстояние по третьей координате составляет 60м или 120м показали, что аналогичная двухвихревая структура образуется только в центре улицы. Ближе к краям улицы образуется один вихрь.

Кроме того, результаты расчетов показали, что при длине улицы в 60м и 120м картина течения качественно и количественно совпадает. Поэтому целесообразно проводить расчеты для меньшей расчетной сетки. Если необходимо исследовать картину течения воздуха в центре улицы, то может быть использована сетка с длиной улицы 20м, так как в этом случае картина течения воздуха также совпадает с вариантами длины улицы 60м и 120м в рассматриваемом сечении.

Таким образом, даже слабые течения воздуха вдоль улиц приводят к существенному изменению вихревой структуры, проветриваемости улиц и распространения загрязняющих веществ.

Литература

1. *Волик М.В.* Численное моделирование распространения загрязняющих веществ, выбрасываемых низко расположенными источниками, внутри улиц // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2016. № 1(69). С. 20-27.

УСЛОВИЯ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ДАРБУ

© Волчков В.В.¹, Волчков Вит.В.²

Донецкий национальный университет(Украина, Донецк)

¹e-mail: valeriyvolchkov@gmail.com

²e-mail: volna936@gmail.com

Пусть \mathbb{R}^n – вещественное евклидово пространство размерности $n \geq 2$, $|x|$ – евклидова норма вектора $x \in \mathbb{R}^n$. Пусть также

$$H^{n+1} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \mathbb{R}^n, t \in [0, +\infty)\},$$

$$G_r = \{(x, t) \in H^{n+1} : |x| = r, t > 0\}.$$

Для $R > 0$ и $p \in [1, 2n/(n-1)]$ положим $\eta_p(R) = R^{n-p(n-1)/2}$, если $1 \leq p < \frac{2n}{n-1}$, и $\eta_p(R) = \ln R$, если $p = \frac{2n}{n-1}$. Рассмотрим уравнение Дарбу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{n-1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} = \Delta_x u, \quad u = u(x, t), \quad (x, t) \in H^{n+1}, \quad (1)$$

где Δ_x – оператор Лапласа по переменным x_1, \dots, x_n .

Теорема. *Пусть $r > 0$ фиксировано. Пусть также $u \in C^2(H^{n+1})$ – решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям:*

(i) $u(x, \rho) = 0$ в G_r .

(ii) *При некотором $p \in [1, 2n/(n-1)]$*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\eta_p(R)} \int_{|x| \leq R} |u(x, 0)|^p dx = 0.$$

Тогда $u = 0$ в H^{n+1} .

Авторами получены и другие теоремы единственности для решений уравнения (1), в которых ослабляется условие (ii) из теоремы. Отметим также, что утверждение теоремы станет неверным, если вместо условия (ii) предположить, что

$$\int_{|x| \leq R} |u(x, 0)|^p dx = O(\eta_p(R)) \text{ при } R \rightarrow +\infty$$

при любом $p \in [1, 2n/(n-1)]$.

Относительно других результатов подобного типа см. [1], [2] и имеющуюся там библиографию.

Литература

1. Volchkov V. V. Integral Geometry and Convolution Equations. Dordrecht: Kluwer, 2003. 454 p.
2. Volchkov V. V., Volchkov Vit. V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces. Basel: Birkhäuser, 2013. 592 p.

УДК 517.91

ДВУХТОЧЕЧНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

© Гадзова Л.Х.

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
"Институт прикладной математики и автоматизации" (Россия, Нальчик)
e-mail: macaneeva@mail.ru

Рассмотрим уравнение

$$\sum_{j=1}^m \beta_j \partial_{0x}^{\alpha_j} u(x) + \lambda u(x) = f(x), \quad 0 < x < 1 \quad (1)$$

где $\alpha_j \in]1, 2[$, $\lambda, \beta_j \in \mathbb{R}$, $\beta_1 > 0$, $\alpha_1 > \dots > \alpha_m$, $\partial_{0x}^\gamma u(x)$ – производная Капуто [1, с. 11]:

$$\partial_{0x}^\gamma u(x) = D_{0x}^{\gamma-n} u^{(n)}(x), \quad n - 1 < \gamma \leq n,$$

где D_{0x}^γ – оператор дробного интегро-дифференцирования порядка γ в смысле Римана-Лиувилля [1, с. 11] по переменной x .

Ранее в работах [2]-[6] исследовались линейные обыкновенные дифференциальные уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами. Для уравнения (1) решены задачи Дирихле и Неймана для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами [7].

В данной работе решена двухточечная краевая задача с условиями третьего рода, доказана теорема существования и единственности решения, получено явное представление решения и построена функция Грина. Доказана конечность числа вещественных собственных значений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-01-00462-А.

Литература

1. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М: Физматлит, 2003. 272 с.
2. *Ozturk I.* On the theory of fractional differential equation// Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 1998. Т. 3, № 2. С. 35-39.
3. *Pсху А.В.* Начальная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка// Мат. сборник. 2011. Т. 200, № 4. С. 111–122.
4. *Псху А.В.* К теории задачи Коши для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка// Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2009. Т. 11, № 1. С. 61-65.
5. *Гадзова Л.Х.* Обобщенная задача Дирихле для линейного дифференциального уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами// Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50, № 1. С. 121–125.
6. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and applications of fractional differential equations// North-Holland Math. Stud., Elsevier, Amsterdam. 2006. Т. 204.
7. *Гадзова Л.Х.* Задачи Дирихле и Неймана для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами// Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51, № 12. С. 1580–1586.

УДК 519.63

РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С СОСРЕДОТОЧЕННОЙ ТЕПЛОЕМКОСТЬЮ

© Гасиева А.М.¹, Алиханов А.А.²

¹Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова
(Россия, Нальчик)

e-mail: super.gasieva@yandex.ru

²Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
"Институт прикладной математики и автоматизации" (Россия, Нальчик)

e-mail: alikhanov-tom@yandex.ru

Разностная схема повышенного порядка аппроксимации первой краевой задачи для уравнения диффузии дробного порядка построена в работе [1]. Априорные оценки решений краевых задач для

уравнения диффузии дробного, переменного и распределенного порядков в дифференциальной и разностной трактовках получены в работах [2–4].

В данной работе построена разностная схема повышенного порядка аппроксимации для уравнения теплопроводности дробного порядка с сосредоточенной теплоемкостью. Доказана устойчивость и сходимость предложенной разностной схемы.

В прямоугольнике $\bar{Q}_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ рассмотрим краевую задачу для уравнения теплопроводности дробного порядка с нестандартными краевыми условиями, когда на обеих границах помещены сосредоточенные емкости

$$\partial_{0t}^\alpha u = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) - q(x, t)u + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$\begin{cases} k(0, t)u_x(0, t) = \varkappa_1 \partial_{0t}^\alpha u(0, t) + \beta_1(t)u(0, t) - \mu_1(t), \\ -k(l, t)u_x(l, t) = \varkappa_2 \partial_{0t}^\alpha u(l, t) + \beta_2(t)u(l, t) - \mu_2(t), \end{cases} \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (3)$$

где $\partial_{0t}^\alpha u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u_s(x, s)}{(t-s)^\alpha} ds$ – дробная производная Капуто порядка α , $0 < \alpha < 1$, $k(x, t)$, $q(x, t)$, $f(x, t)$, $\mu_i(t)$ – заданные достаточно гладкие функции, $\varkappa_i \geq 0$, $\beta_i(t) \geq \beta_0 > 0$, $i = 1, 2$.

В прямоугольнике \bar{Q}_T введем сетку $\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$ где $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N; h = l/N\}$, $\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, \dots, j_0; \tau = T/j_0\}$.

Дифференциальной задаче (1)–(3) поставим в соответствие разностную схему

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y = \Lambda y^{(\sigma)} + \Phi_i^{j+1}, \quad i = 0, \dots, N, \quad j = 0, 1, \dots, j_0 - 1, \quad (4)$$

$$y_i^0 = u_0(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (5)$$

где $\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_i = \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^j c_{j-s}^{(\alpha, \sigma)} y_{t,i}^s$ – разностный аналог дробной производной Капуто повышенного порядка аппроксимации [1],

$$\Lambda y = \begin{cases} \frac{2}{2\varkappa_1+h}(a_1 y_{\bar{x},1} - \bar{\beta}_1(t_{j+\sigma})y_0), & i = 0, \\ (ay_{\bar{x}})_x - dy, & i = 1, \dots, N-1, \\ -\frac{2}{2\varkappa_2+h}(a_N y_{\bar{x},N} - \bar{\beta}_2(t_{j+\sigma})y_N^{(\sigma)}), & i = N, \end{cases}$$

$$\Phi_i^{j+1} = \begin{cases} \frac{2}{2\kappa_1+h} \bar{\mu}_1(t_{j+\sigma}), & i = 0, \\ \varphi_i^{j+1}, & i = 1, \dots, N-1, \\ \frac{2}{2\kappa_2+h} \bar{\mu}_2(t_{j+\sigma}), & i = N, \end{cases}$$

$$a_i^{j+1} = k(x_{i-\frac{1}{2}}, t_{j+\sigma}), \quad \varphi_i^{j+1} = f(x_i, t_{j+\sigma}), \quad d_i^{j+1} = q(x_i, t_{j+\sigma}), \quad \bar{\mu}_1(t_{j+\sigma}) = \\ = \mu_1(t_{j+\sigma}) + \frac{h}{2} f(0, t_{j+\sigma}), \quad \bar{\mu}_2(t_{j+\sigma}) = \mu_2(t_{j+\sigma}) + \frac{h}{2} f(1, t_{j+\sigma}).$$

Если решение задачи (1)-(3) является достаточно гладкой функцией, то разностная схема (4)-(5) имеет порядок аппроксимации $O(h^2 + \tau^2)$.

Теорема. *Разностная схема (4)-(5) безусловно устойчива и для ее решения справедлива априорная оценка*

$$|[y^{j+1}]|_1^2 \leq M \left(|[y^0]|_1^2 + \max_{0 \leq j \leq j_0-1} (|[\varphi^{j+1}]|_0^2 + (\mu_1^{j+\sigma})^2 + (\mu_2^{j+\sigma})^2) \right), \quad (6)$$

где $[y, v] = 0.5y_0v_0h + 0.5y_Nv_Nh + \sum_{i=1}^{N-1} y_iv_ih$, $|[y]|_0^2 = [y, y]$, $|[y]|_1^2 = |[y]|_0^2 + \kappa_1 y_0^2 + \kappa_2 y_N^2$, $M > 0$ - известная постоянная не зависящая от h и τ .

Из априорной оценки (6) следует сходимость решения разностной схемы (4)-(5) к решению соответствующей дифференциальной задачи (1)-(3) со скоростью равной порядку погрешности аппроксимации.

Работа выполнена по гранту Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых МК-3360.2015.1.

Литература

1. Alikhanov A.A. A new difference scheme for the time fractional diffusion equation// J. Comput. Phys. 280 (2015) 424–438.
2. Alikhanov A.A. A priori estimates for solutions of boundary value problems for fractional-order equations// Differ. Equ. 46(5) (2010) 660–666.
3. Alikhanov A.A. Boundary value problems for the diffusion equation of the variable order in differential and difference settings// Appl. Math. Comput. 219 (2012) 3938–3946.
4. Alikhanov A.A. Numerical methods of solutions of boundary value problems for the multi-term variable-distributed order diffusion equation// Appl. Math. Comput. 268 (2015) 12–22.

УДК 517.95

ЗАДАЧА ЖЕВРЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДРОБНОЙ ДИФФУЗИИ С ПРЯМЫМ И ОБРАТНЫМ ХОДОМ ВРЕМЕНИ

© Геккиева С.Х.

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
"Институт прикладной математики и автоматизации" (Россия, Нальчик)
e-mail: gekkiewa_s@mail.ru

Пусть $\Omega = \Omega^- \cup \Omega^+ \cup A_0 B_0$, где $\Omega^- = \{(x, y) : a < x < 0, 0 < y < h\}$,
 $\Omega^+ = \{(x, y) : 0 < x < b, 0 < y < h\}$, $A_0 B_0 = \{(0, y) : 0 < y < h\}$.

Рассмотрим уравнение

$$u_{xx} = \begin{cases} D_{0y}^\alpha u, & x > 0, \\ D_{hy}^\alpha u, & x < 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $D_{ts}^\alpha u$ – оператор дробного (в смысле Римана-Лиувилля) дифференцирования порядка α , $0 < \alpha < 1$ [1].

Задача G. Найти функцию

$$u(x, y) = \begin{cases} u^+(x, y), & (x, y) \in \Omega^+, \\ u^-(x, y), & (x, y) \in \Omega^-, \end{cases}$$

со свойствами: 1) функция $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1) в областях Ω^+ , Ω^- , граничным условиям

$$u^+(b, y) = \psi_1(y), \quad 0 \leq y \leq h;$$

$$u^-(a, y) = \psi_2(y), \quad 0 \leq y \leq h;$$

нелокальным условиям

$$\varphi_1(x) = \alpha(x) \varphi_2(x), \quad 0 < x < b,$$

$$\varphi_2(x) = \beta(x) \varphi_1(x), \quad a < x < 0;$$

также

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-1} u^+(x, y) = \varphi_1(x), \quad a \leq x \leq b,$$

$$\lim_{y \rightarrow h} D_{hy}^{\alpha-1} u^-(x, y) = \varphi_2(x), \quad a \leq x \leq 0,$$

2) на границе раздела $A_0 B_0$ областей Ω^+ , Ω^- выполняется условие сопряжения

$$u^+(0, y) = u^-(0, y), \quad 0 < y < h.$$

Здесь $\varphi_1(x) \in C[0, b]$; $\psi_1(y) \in C[0, h]$; $\varphi_2(x) \in C[a, 0]$; $\psi_2(y) \in C[0, h]$; $\alpha(x) \in C[0, b]$, $0 < \alpha(x) < 1$, $x \in [0, b]$; $\beta(x) \in C[a, 0]$, $0 < \beta(x) < 1$, $x \in [a, 0]$

Используя свойства функции Грина для уравнения дробной диффузии [2], задача редуцируется к сингулярному интегральному уравнению нормального типа [3].

Литература

1. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа. 1995. 301 с.
2. Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука. 2005. 199 с.
3. Керефов А.А. Об одной задаче Жевре для параболического уравнения со знакопеременным разрывом первого рода у коэффициента при производной по времени // Дифференциальные уравнения. 1974. Т. 10, № 1. С. 69–77.

УДК 517.95

ЗАДАЧА А.А. ДЕЗИНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ЧАПЛЫГИНА

© Гущина В.А.

Самарский государственный социально-педагогический университет
(Россия, Самара)
e-mail: violetta.novikova.1991@mail.ru

Рассмотрим вырождающееся уравнение смешанного типа

$$Lu \equiv (sgny)|y|^m u_{xx} + u_{yy} - b^2(sgny)|y|^m u = F(x, y) \quad (1)$$

в прямоугольной области $D = \{(x, y) | 0 < x < l, -\alpha < y < \beta\}$, где $m > 0$, $b \geq 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $l > 0$ – заданные действительные постоянные, и поставим следующую задачу с нелокальным условием

Задача Дезина. Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x, y) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_- \cup D_+); \quad (2)$$

$$Lu = F(x, y), (x, y) \in D_- \cup D_+; \quad (3)$$

$$u(0, y) - u(l, y) = 0, \quad u_x(0, y) - u_x(l, y) = 0, \quad -\alpha \leq y \leq \beta; \quad (4)$$

$$u(x, \beta) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (5)$$

$$u_y(x, -\alpha) - \lambda u(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l; \quad (6)$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$, λ – заданный действительный параметр.

В работе Нахушевой З.А. [1] задача (2) – (6) изучена когда $\alpha = l$, $m = 0$, $b = 0$, $F(x, y) = f(x, y) \cdot H(y)$, где $H(y)$ – функция Хевисайда, при $\lambda \geq 0$. Показано, что при $\lambda < 0$ однородная задача ($f(x, y) \equiv 0$) имеет нетривиальные решения.

Данная работа является продолжением работ [2] и [3], где была изучена задача (2) – (6) при $F(x, y) \equiv 0$, $m = 0$, $b = 0$ и $F(x, y) \neq 0$, $m = 0$, $b = 0$.

В работе для поставленной задачи (2) – (6) доказана теорема существования и единственности решения задачи при всех $m > 0$, $b \geq 0$ и некоторых условиях относительно параметров α , β , l и λ .

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №16-31-00421.

Литература

1. Нахушевой З.А. Об одной нелокальной задаче А.А. Дезина для уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, № 8. С. 1199–2003.
2. Сабитов К.Б., Новикова В.А. Нелокальная задача А.А. Дезина для уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Изв. вузов. 2016. Т. 6. С. 61–72.
3. Сабитов К.Б., Гущина (Новикова) В.А. Задача Дезина для неоднородного уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Изв. вузов (принята в печать).

УДК 517.946

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ И ИНТЕГРАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА ВТОРОГО ПОРЯДКА

© Джамалов С.З.

Институт математики при Национальном университете Узбекистана
(Узбекистан, Ташкент)
e-mail: siroj63@mail.ru

В докладе излагаются некоторые результаты об однозначной разрешимости одной нелокальной и интегральной краевой задачи

с переменными коэффициентами для уравнения смешанного типа второго рода, второго порядка в плоскости.

В области $Q = (0, 1) \times (0, T)$ рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$Lu = K(x, t)u_{tt} - u_{xx} + \alpha(x, t)u_t + c(x, t)u = f(x, t) \quad (1)$$

Предположим, что коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие функции. Уравнение (1) относится к уравнениям смешанного типа второго рода, так как на знак функции $K(x, t)$ по переменной t внутри области Q не налагается никаких ограничений [1].

Краевая задача. Найти обобщенное решение уравнения (1) удовлетворяющее краевым условиям:

$$u(x, 0) = \gamma(x)u(x, T) + \int_0^T A(x, t)u(x, t) dt, \quad (2)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0. \quad (3)$$

Отметим, что в работе [2] в случае когда $\gamma - const \neq 0$, $A(x, t) = 0$ и при определенных условиях на коэффициенты уравнения и правую часть уравнения (1) была доказана корректность решения задачи (2),(3) из пространства Соболева $W_2^l(Q)$ при $2 \leq l$ -целое число. Систематические исследования краевых задач для параболических уравнений с нелокальными граничными условиями интегрального вида начались, по-видимому, с работ [3, 4], как близкие по постановке изучаемых задач, отметим также работы [5, 6]. В данной работе, в случае, когда $\gamma(x)$ и $A(x, t) \neq 0$ при выполнении некоторых условий на коэффициенты уравнения (1) и задачи (2),(3) доказывается методами " ε -регуляризации", Галеркина и продолжением по параметру однозначная разрешимость задачи (1)-(3) из пространства Соболева $W_2^3(Q)$.

Теорема. Пусть выполнены вышеуказанные условия для коэффициентов уравнения (1) и кроме того, всюду в области \bar{Q} выполнены следующие условия: $2\alpha - |K_t| + \lambda |K| \geq \delta_1 > 0$, $\lambda = \frac{2}{T} \ln \beta$, $|\beta| > 1$, где $\alpha(x, 0) = \alpha(x, T)$, $c(x, 0) = c(x, T)$, $\lambda c - c_t \geq \delta_2 > 0$, $\gamma(x) \in C^3(\bar{\Omega})$, такое, что $\|\gamma(x)\|_{C^3[0,1]} \leq 1$, $A(x, t) \in C^3(\bar{Q})$, такое, что $\|A(x, t)\|_{C^3(\bar{Q})} \leq M < +\infty$, $D_t^p A|_{t=0} = D_t^p A|_{t=T} = 0$, $p = 0, 1$.

Тогда для любой функции $f \in W_2^2(Q)$ такой, что $\beta D_t^p f|_{t=0} = D_t^p f|_{t=T}$, $p = 0, 1$ существует единственное решение задачи (1)-(3) из пространства Соболева $W_2^3(Q)$.

Литература

1. *Врагов В.Н.* Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики// Новосибирск. НГУ. 1983. С. 84.
2. *Джамалов С.З* Об одной нелокальной краевой задачи для уравнения смешанного типа второго рода второго порядка// Уз. МЖ., 2014. №1. С. 5–15.
3. *Cannon J.R.* The solution of the Heat Equation Subject to the Specification of Energy// Quart. Appl. Math. 1963. V. 21. P. 155–160.
4. *Камынин Л.И.* Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями// Журнал. вычисл. матем. и мат. физики. 1964. Т. 4, №6. С. 1006–1024.
5. *Коjsанов А.И.* О разрешимости краевых задач с нелокальными и интегральными условиями для параболических уравнений// Нелинейные граничные задачи. 2010. №20. С. 54–76.
6. *Ионкин Н.И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием// Диф. уравнения. 1977. Т. 13, №2. С. 294–304.

УДК 517.9

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ ОБЛАСТИ

© Дженалиев М.Т.¹, Рамазанов М.И.²

¹Институт математики и математического моделирования
(Казахстан, Алматы)

e-mail: muvasharkhan@gmail.com

²Институт прикладной математики (Казахстан, Караганды)
e-mail: ramamur@mail.ru

1. Постановка задачи. Рассматривается однородная граничная задача

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0, \quad \{x, t\} \in G = \{x, t : 0 < x < t, t > 0\}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}|_{x=t} + \frac{d\tilde{u}(t)}{dt} = 0, \quad (2)$$

где $\tilde{u}(t) = u(t, t)$.

Отметим, что задача (1)–(2) является однородным случаем задачи, изученной в работе [1], причем, для простоты коэффициенты из указанной работы приняты равными: $k = b = 1$. Эти изменения не противоречат постановке задачи из [1]. Как отмечено в работе [1], случай неоднородной граничной задачи "... оказывается полезным при изучении некоторых задач со свободными границами". Например, для однофазной задачи "... Стефана при следующих предположениях: жидкая фаза с положительной температурой температурой $u(x, t)$ занимает отрезок $0 < x < s(t)$, при $x = 0$ задается положительный поток тепла, а свободная граница $x = s(t)$ начинается у твердой стенки $x = 0$, т.е. выполняется условие $s(0) = 0$ ". В работе [1] установлена теорема об однозначной разрешимости рассматриваемой там граничной задачи в весовых гельдеровских пространствах.

В настоящей работе наряду с тривиальным решением мы устанавливаем в классе существенно ограниченных функций с заданным весом существование нетривиального решения с точностью до постоянного множителя и постоянного слагаемого. Введем этот класс следующим образом:

$$(x + t^{1/2})^{-1} u(x, t) \in L_\infty(G), \text{ т.е. } u(x, t) \in L_\infty(G; (x + t^{1/2})^{-1}). \quad (3)$$

2. Преобразование задачи (1)–(2) и сведение ее к интегральному уравнению. Преобразуем задачу (1)–(2). Для этого введем функцию $v(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$. Далее, формально дифференцируя по переменной x уравнение (1), получаем:

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < t, \quad t > 0; \quad (4)$$

$$v(x, t)|_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} + \frac{2}{a^2} v(x, t) \right) |_{x=t} = 0. \quad (5)$$

Решение задачи (4)–(5) будем искать в виде суммы потенциалов двойного и простого слоя

$$v(x, t) = \frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)} \right\} \nu(\tau) d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{(x-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)} \right\} \varphi(\tau) d\tau, \quad (6)$$

где функции $\nu(t)$ и $\varphi(t)$ являются неизвестными и подлежат определению.

Удовлетворяя решение (6) граничным условиям (5), в результате получим следующее интегральное уравнение относительно неизвестной функции $\varphi(t)$:

$$\begin{aligned} & \varphi(t) + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{2t}{(t-\tau)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)} - \frac{t-\tau}{4a^2} \right\} \varphi(\tau) d\tau - \\ & - \frac{5}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)} - \frac{t-\tau}{4a^2} \right\} \varphi(\tau) d\tau + \\ & + \frac{3}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{t-\tau}{4a^2} \right\} \varphi(\tau) d\tau = 0, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (7)$$

3. Решение интегрального уравнения (7). Решение интегрального уравнения (7) мы будем искать в классе

$$\sqrt{t} \exp \left\{ t/(4a^2) \right\} \varphi(t) \in L_\infty(\mathbb{R}_+). \quad (8)$$

Отметим, что подобные (7) интегральные уравнения Вольтерра второго рода нами были исследованы в работах [2, 3].

Искомое решение интегрального уравнения (7) определяется по формуле:

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[\varphi_k^{(1)}(t) - \varphi_k^{(2)}(t) \right], \quad 0 < t < \infty, \quad (9)$$

где

$$\varphi_k^{(1)}(t) = \varphi_{1,k}^{(1)}(t) \exp \left\{ -\frac{t}{4a^2} \right\}, \quad \varphi_k^{(2)}(t) = \varphi_{1,k}^{(2)}(t) \exp \left\{ -\frac{t}{4a^2} \right\}. \quad (10)$$

Решение (9)–(10) действительно принадлежит классу (8).

4. Решение граничной задачи (1)–(2) и основные результаты. На основе решения $v(x, t)$ граничной задачи (4)–(5) и (9)–(10) находится решение исходной граничной задачи (1)–(2):

$$u(x, t) = C_1 \int_0^x v(\xi, t) d\xi = C_1 \tilde{u}(x, t). \quad (11)$$

Теорема 1. Границная задача (1)–(2) наряду с тривиальным решением имеет и нетривиальное решение вида (11) $u(x, t) = C_1 \tilde{u}(x, t)$, где $\tilde{u}(x, t) \in L_\infty(G; (x + \sqrt{t})^{-1})$, и $C_1 = \text{const}$.

Теорема 2. В классе функций $L_\infty(G; [x^{1+\alpha} + t^{(1+\alpha)/2}]^{-1})$ граничная задача (1)–(2) имеет только тривиальное решение $u(x, t) \equiv 0$.

Работа выполнена при поддержке гранта Министерства образования и науки Республики Казахстан, проект № 0823/ГФ4.

Литература

1. Солонников В.А., Фазано А. Об одномерной параболической задаче, возникающей при изучении некоторых задач со свободными границами// Записки научных семинаров ПОМИ. 2000. Т. 269. С. 322-339.
2. Jenaliyev M.T., Amangaliyeva M.M., Kosmakova M.T., Ramazanov M.I. On a Volterra equation of the second kind with 'incompressible' kernel// Advances in Difference Equations. 2015. V. 2015: 71. P. 1-14.
3. Амангалиева М.М., Джесеналиев М.Т., Космакова М.Т., Рамазанов М.И. Об одной однородной задаче для уравнения теплопроводности в бесконечной угловой области// Сиб. матем. журн. 2015. Т. 56, № 6. С. 1234-1248.

УДК 004.9

ОСОБЕННОСТИ УПРАВЛЕНИЯ ПРОЕКТОМ РАЗРАБОТКИ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

© Дзодзаев И.В., Шапранов Н.В.

Финансовый университет при Правительстве РФ (Россия, Владикавказ)
e-mail: volikmv@mail.ru

В настоящее время использование информационных технологий (ИТ) становится необходимым условием повышения гибкости и эффективности системы корпоративного управления.

Внедрение информационных систем (ИС) в бизнес можно разделить на несколько этапов. На этапе осуществления внедрения ИС

необходимо выбрать определенный подход. Существует два основных решения задачи внедрения ИС: поэтапная разработка корпоративных ИС собственными силами или внедрение готовой ИС корпоративного уровня. Если готовая ИС абсолютно не соответствует требованиям организации, то следует отказаться от нее и создавать новую, используя накопленный опыт. [1]

Одним из важных этапов разработки ИС является создание концепции информационной системы. Разработка концепции является рекомендуемой фазой создания информационной системы, стоящей между принятием решения о рассмотрении/проработке идеи и оценкой экономической эффективности внедрения.

Разработка концепции включает несколько основных этапов.

Во-первых, необходимо сформировать рабочую группу и определить ответственного за подготовку документа.

Во-вторых, необходимо провести краткое обследование текущей ситуации, а именно существующих бизнес-процессов и используемых ИТ-систем.

В-третьих, следует проанализировать опыт внедрения аналогичных систем в отрасли, стране и мире.

В-четвертых, организуется разработка концептуальной архитектуры перспективной системы в комплексе, а именно бизнес-процессы, приложения, данные, технологии.

Следующим этапом на основе исследования опыта других организаций и экспертного мнения участников рабочей группы проводится анализ ожидаемых эффектов внедрения. В первую очередь определяются качественные эффекты.

В заключение составляется экспертное мнение рабочей группы о целесообразности внедрения разработанной ИС, основанное на сопоставлении возможного эффекта и рисков внедрения.

Целью этапа разработки ИС является создание системы и ее первичная проверка соответствия утвержденным требованиям. Кроме того, данный этап включает в себя создание интерфейсов системы, интеграций, а также технических средств для миграции данных [1].

К моменту начала этапа разработки ИС должны быть сформированы и утверждены техническое задание, функциональные и технические требования.

На этапе разработки ИС большое внимание уделяется управлению проектом, а в частности управлению изменениями. Проис-

ходит постоянное выявление и исправление дефектов, оформление и согласование запросов на изменение, обновление плана-графика работ. Также на данном этапе происходит конфигурирование системы, в том числе ролей безопасности и прав пользователей. На этапе разработки происходит написание кода системы или ее доработок, кода интерфейсов и механизмов интеграции, а также создание технических средств для миграции данных.

При создании сложного программного обеспечения (ПО) для корпоративных информационных систем требуется четко и грамотно организовать весь процесс разработки (заказа) ПО – от написания технического задания до внедрения на предприятии и дальнейшего развития этого ПО.

Литература

1. Ахсарова М.И., Волик М.В. Сравнительный анализ подходов к проектированию информационных систем// Педагогический опыт: решения и находки: сборник научно-методических статей. Выпуск 19. Часть 1. Воронеж: Воронежский государственный педагогический университет, 2014. С. 320–323.

УДК 517.956.6

СУЩЕСТВОВАНИЕ СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ЗАДАЧИ СО СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

© Дилдабек Г.

Институт математики и математического моделирования
(Казахстан, Алматы)

Казахский национальный университет им. аль-Фараби (Казахстан, Алматы)
e-mail: dildabek@math.kz

В отличие от теории разрешимости, спектральные вопросы задач для уравнений смешанного типа являются мало изученными. Здесь необходимо отметить исследования Т.Ш. Кальменова, Е.И. Моисеева, С.М. Пономарева, которые внесли существенный вклад в становление этого направления. В этих работах исследуются существование и расположение собственных значений у задач для уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа, построение и полнота системы собственных функций задачи.

Пусть $\Omega \in R^2$ – конечная область, ограниченная при $y > 0$ отрезками AA_0, A_0B_0, B_0B , $A = (0, 0), A_0 = (0, 1), B_0 = (1, 1), B = (1, 0)$,

а при $y < 0$ – характеристиками $AC : x + y = 0$ и $BC : x - y = 1$ уравнения смешанного параболо-гиперболического типа

$$Lu = \begin{cases} u_x - u_{yy}, & y > 0 \\ u_{xx} - u_{yy}, & y < 0 \end{cases} = f(x, y). \quad (1)$$

Пусть $\Omega_1 = \Omega \cap \{y > 0\}$, $\Omega_2 = \Omega \cap \{y < 0\}$. Рассмотрим нелокальную краевую задачу со смещением, являющуюся обобщением аналога задачи Трикоми для параболо - гиперболического уравнения (1).

Задача S. Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{AA_0 \cup A_0B_0} = 0, \quad \alpha u(\theta_0(t)) = \beta u(\theta_1(t)), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

где $\theta_0(t) = \left(\frac{t}{2}, -\frac{t}{2}\right)$, $\theta_1(t) = \left(\frac{t+1}{2}, \frac{t-1}{2}\right)$.

При $\beta = 0$ задача S совпадает с задачей Трикоми, а при $\alpha = 0$ – с задачей Трикоми с данными на противоположной характеристике. Сильная разрешимость частных случаев задачи при $\alpha = 0$ и при $\beta = 0$ исследована в [1]. Показано, что при $\beta = 0$ задача является вольтерровой, а при $\alpha = 0$ – у задачи существует собственное значение.

Теорема 1. Решение задачи S единствено, если и только если $\alpha + \beta \neq 0$. При выполнении этого условия, для любой функции $f \in L_2(\Omega)$ существует единственное сильное решение $u(x, y)$ задачи S. Это решение принадлежит классу $H^1(\Omega) \cap H_{x,y}^{1,2}(\Omega_1) \cap \cap C(\overline{\Omega})$, и удовлетворяет неравенству

$$\|u\|_1 \leq c \|f\|_0.$$

Из Теоремы 1 следует, что оператор L задачи S обратим, и обратный оператор L^{-1} является оператором Гильберта – Шмидта. Тогда спектр задачи может состоять только из собственных значений оператора L^{-1} . Естественно возникает вопрос о существовании собственных значений оператора L^{-1} , следовательно, и задачи S.

Теорема 2. Пусть L – оператор задачи S и $(\alpha - \beta)\beta \neq 0$. Тогда существует собственное значение задачи S, то есть существует $\lambda \in \mathbb{C}$ такое, что уравнение $Lu = \lambda u$ имеет нетривиальное решение.

При доказательстве основных результатов работы были использованы идеи из нашей работы [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Республики Казахстан, грант 0825/ГФ4.

Литература

1. Садыбеков М.А., Тойжанова Г.Д. Спектральные свойства одного класса краевых задач для параболо-гиперболического уравнения// Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28, № 1. С. 183-186.
2. Tengayeva A. and Dildabek G. Existence of eigenvalues of problem with shift for an equation of parabolic-hyperbolic type// AIP Conf. Proc. 2016. V. 1759. Р. 020146. <http://dx.doi.org/10.1063/1.4959760>.

УДК 519.716.325

ПОСТРОЕНИЕ ЛОГИЧЕСКОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТИ НА ОСНОВЕ ПЕРЕМЕННОЗНАЧНЫХ ПРЕДИКАТОВ

© Димитриченко Д.П.

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
"Институт прикладной математики и автоматизации" (Россия, Нальчик)
e-mail: dimdp@rambler.ru

Эффективным методом моделирования свойств объектов в слабо формализуемых областях знаний является метод описания объектов при помощи переменнозначных логических предикатов [1].

Такая интерпретация значений логических предикатов позволяет рассматривать значение логической функции, как описание совокупности автоматных состояний системы «анализируемое множество объектов». Например, цвета: «синий», «зеленый» и «красный» в рамках такого подхода будут выражать лишь состояние, в котором находится объект по характеристике «цвет». При этом не утверждается, что «красный» самый лучший цвет, а «синий» или «зеленый» самые худшие.

При такой интерпретации логическую функцию можно считать автоматом, который позволяет найти наиболее подходящие (близкие к запрошенной совокупности состояний) объекты [2].

При этом, мы располагаем конечным числом m анализируемыми объектами, каждый из которых характеризуется набором из n наиболее существенных (актуальных) для целей анализа признаков.

Приведем общую постановку задачи [2]:

Пусть $W = \{w_1, \dots, w_m\}$ - заданное множество объектов, образующих обучающую выборку (ОВ). Описание объекта, принадлежащих ОВ W , представляет собой n -компонентный вектор, где n

x_1	x_2	...	x_n	W
$x_1(w_1)$	$x_2(w_1)$...	$x_n(w_1)$	w_1
$x_1(w_2)$	$x_2(w_2)$...	$x_n(w_2)$	w_2
...
$x_1(w_m)$	$x_2(w_m)$...	$x_n(w_m)$	w_m

- число признаков, используемых для характеристики анализируемого объекта, причем j -я координата этого вектора равна значению j -го признака, $j = 1, \dots, n$. Число таких векторов равно m в соответствии с количеством анализируемых объектов, входящих в ОВ. В описании объекта допустимо отсутствие информации о значении того или иного признака. При формировании эффективной системы интеллектуального описания объектов следует избегать двух крайностей: избыточности и недостаточности набора признаков. В первом случае важные результаты окажутся скрытыми в массе второстепенных или малозначительных признаков. Во втором – критерий для однозначного распознавания конкретных объектов останется не выявленным. Предложенный в [2] логический алгоритм построения переменнозначных функций, устраниющий избыточность в описании данных и выделяющий наиболее важные причинно-следственные связи в описании объектов, позволяет решить эту задачу.

Соответствие множества объектов и характеризующих их признаков представима следующей таблицей:

$$X_j = \{x_1(w_j), x_2(w_j), \dots, x_n(w_j)\}$$

- вектор качественных признаков, каждый элемент которого фиксированный признак характеризуемого объекта.

$$W = \bigcup_{j=1}^m w_j$$

- множество характеризуемых объектов. Каждый соответствующий признак $x_j(w_i)$, в общем случае кодируется предикатом значности k_j , т.е. (перемнозначным предикатом), $j = 1, \dots, n$.

$$f(x) = \wedge_{j=1}^m (\wedge_{i=1}^n x_i(w_j) \rightarrow w_j) = \wedge_{j=1}^m (\vee_{i=1}^n \overline{x_i(w_j)}) \vee w_j$$

Указанный вид функции следует из известного логического тождества: $a \rightarrow b = \bar{a} \vee b$, где a – конъюнкция характеристик (признаков), определяющих объект; b – предикат, равный единице, когда w_j становится равным соответствующему определяемому объекту. Такие предикаты будем называть объектными предикатами.

Рассматриваемые объекты вместе с соответствующими им свойствами, закодированными при помощи переменнозначных предикатов, записываются в виде следующей системы производных правил:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Конъюнкция признаков 1} \rightarrow \text{Объект 1} \\ \text{Конъюнкция признаков 2} \rightarrow \text{Объект 2} \\ \dots \\ \text{Конъюнкция признаков } m \rightarrow \text{Объект } m \end{array} \right.$$

Эти m производных правил при помощи $m-1$ операции конъюнкции связываются в одно логическое высказывание. Последовательное раскрытие m скобок по правилам преобразования импликативных высказываний с учетом предложенной в [2] операции обобщенного отрицания приводит к построению переменнозначной логической функции $F(X, W)$, где X – n -компонентный вектор логических переменных, кодирующий всю совокупность признаков объектов: $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, а $W = \{w_1, \dots, w_m\}$ – множество характеризуемых объектов мощности m . Значность каждой из n логических переменных x_j равна k_j , $j = 1, \dots, n$.

В результате этого преобразования функция $F(X, W)$, примет вид дизъюнкции подклассов объектов, каждый из которых представляет собой конъюнкцию признаков и объектов по которым эти подклассы образуются.

При нахождении значения логической функции $F(X, W)$ от фиксированного набора переменных X^* формируется дизъюнкция тех подклассов объектов W^* из множества W , значения переменных при которых соответствуют значениям логических переменных в векторе входных данных X^* : $W^* = F(X^*, W)$.

В работе [3] был предложен схемотехнический подход для построения логической нейронной сети. При этом формируется множество соответствий между совокупностями входных сигналов и требуемыми выходными импульсами.

Это множество несложно формализовать аналогично ОВ для построения переменнозначной логической функции $F(X, W)$. В ро-

ли вектора X выступает совокупность входных сигналов логической нейронной сети, а в качестве множества W выступает совокупность выходных импульсов.

Для построения логической нейронной сети вводятся два типа нейронов: конъюнктор и дизъюнктор. Веса входных сигналов этих нейронов выбираются таким образом, чтобы при четких значениях переменных (входных сигналов) эти нейроны принимали бы значения соответствующие значениям логических операций конъюнкции и дизъюнкции.

В работе [4] была доказана следующее утверждение:

Утверждение. *Всякая переменнозначная логическая функция $F(X, W)$ представима в виде логической нейронной сети, совокупность логических связей в которой взаимно однозначно определяется структурой производственных дизъюнктов.*

Так же в работе [4] результаты по построению логической нейронной сети на основе переменнозначных предикатов были распространены на случай нечеткой логики. В случае переменнозначных логических функций добавление новых объектов вместе с их свойствами производится путем логического умножения (конъюнкции) логической функции $F(X, W)$ на новое производственное правило $(y \rightarrow v) : F(X, W)(y \rightarrow v)$, где y – свойства добавляемого объекта, v – добавляемый объект.

В случае с логической нейронной сетью, построенной на основе переменнозначных предикатов сформулирована специальная процедура ее обучения, основанная на свойствах логических операций конъюнкции и дизъюнкции.

Литература

1. Лютикова Л.А., Тимофеев А.В., Сгурев В.В., Йоцов В.И. Развитие и применение многозначных логик и сетевых потоков в интеллектуальных системах//Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. С. 114–126.
2. Лютикова Л.А. Моделирование и минимизация баз знаний в терминах многозначной логики предикатов. Нальчик. Препринт, 2006. 33 с.
3. Барский А.Б. Логические нейронные сети. ИНТУИТ; БИНОМ, 2007. 352 с.
4. Димитриченко Д.П. Применение переменнозначных логических функций и нейронных сетей в системах принятия решений// Известия КБНЦ РАН. 2015. Т. 2, № 6(68). С. 73-38.

УДК 517.925.42

ЭРЕДИТАРНЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР ДУФФИНГА С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В СМЫСЛЕ РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ

© Дробышева И.В.

Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга

(Россия, Петропавловск-Камчатский)

e-mail: irisha_dr@mail.ru

Исследование эредитарных колебательных систем является одним из актуальных направлений исследований, что подтверждено различными приложениями [1-3]. Эредитарные колебательные системы рассматриваются в рамках теории эредитарной динамики [1].

Эредитарность процесса – это свойство процесса сохранять «память» о его состояниях в предыдущие моменты времени. Как правило, такие процессы происходят во фрактальных средах, обладающих масштабной инвариантностью и нелокальностью по времени и пространству.

Более подробно вопросы исследования эредитарных колебательных систем изложены в книге И. Петраса [4].

В настоящей работе мы исследуем пример эредитарной колебательной системы – эредитарный осциллятор Дуффинга с трением. Далее построим численную явную конечно-разностную схему для счета приближенного решения соответствующей задачи Коши, а также на основе численного решения построим и исследуем фазовые траектории.

Отметим, что в работе [5] была предложена модель осциллятора Дуффинга с фрактальным трением. Фрактальное трение обладает свойствами вязкого трения за счет степенного ядра в интегральном операторе («тяжелые хвосты»).

Постановка задачи и методика решения. Найти решение $x(t)$, где $t \in [0, T]$ следующей задачи Коши в локальной постановке [6]:

$$D_{0t}^p x(\tau) + \alpha D_{0t}^q x(\tau) - x(t) + x^3(t) = \sigma \cos(\omega t), \quad (1)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{2-p} x(t) = x_0, \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d}{dt} (t^{2-p} x(t)) = y_0,$$

где $D_{0t}^q x(\tau) = \frac{1}{\Gamma(1-q)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\dot{x}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^q}$ и $D_{0t}^p x(\tau) = \frac{1}{\Gamma(2-p)} \frac{d^2}{dt^2} \int_0^t \frac{\ddot{x}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{p-1}}$ – производные Римана-Лиувилля дробных порядков $1 < p < 2$, $0 < q < 1$,

α – коэффициент вязкого трения, σ и ω – амплитуда и частота внешней периодической силы, x_0 и y_0 – заданные константы, начальные условия.

Задача (1), в силу нелинейности, не имеет точного решения, поэтому будем искать приближенное решение с помощью теории конечно-разностных схем [7-9]. Разобьем отрезок $[0, T]$ на N равных частей с шагом h . Решение дифференциальной задачи $x(t)$ перейдет в приближенное сеточное решение $x(t_k)$, $t_k = kh$, $k = 1, \dots, N$. Производную дробного порядка в уравнении (1) аппроксимируем разностным аналогом – производной Грюнвальда-Летникова [10]:

$$D_{0t}^p x(\tau) \approx \frac{1}{h^p} \sum_{j=0}^{k-1} m_j^{(p)} x_{k-j} = \frac{x_k}{h^p} + \sum_{j=1}^{k-1} m_j^{(p)} x_{k-j}, \quad (2)$$

$$D_{0t}^q x(\tau) \approx \frac{1}{h^q} \sum_{j=0}^{k-1} c_j^{(q)} x_{k-j} = \frac{x_k}{h^q} + \sum_{j=1}^{k-1} c_j^{(q)} x_{k-j},$$

$$c_0^{(q)} = m_0^{(p)} = 1, c_j^{(q)} = \left(1 - \frac{1+q}{j}\right) c_{j-1}^{(q)}, m_j^{(p)} = \left(1 - \frac{1+p}{j}\right) m_{j-1}^{(p)},$$

а целочисленные производные: $\dot{x}(t) = y(t) \approx \frac{x_k - x_{k-1}}{h}$.

Подставляя (3) в уравнение (1), приходим к следующему приближенному решению задачи Коши:

$$\begin{cases} x_k = \frac{1}{B} (x_{k-1} - x_{k-1}^3) - C \sum_{j=1}^{k-1} m_j^{(p)} x_{k-j} - K \sum_{j=1}^{k-1} c_j^{(q)} x_{k-j} + f_{k-1}, \\ y_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{h}. \end{cases} \quad (3)$$

где $B = h^{-p} + \alpha h^{-q}$, $C = \frac{h^{-p}}{B}$, $K = \frac{h^{-q}}{B}$, $A = \frac{\sigma}{B}$, $f_{k-1} = A \cos(\omega(k-1)h)$.

Можно отметить, исходя из работы [10], что аппроксимация (3) дифференциальной задачи (1) имеет первый порядок. Мы не будем проводить исследования явной схемы (3) на устойчивость и сходимость. Явные схемы, как правило условно устойчивы, т.е. существует ограничение на шаг h . Оценить шаг h можно с помощью метода двойного счета [7].

Далее в работе по аналогии с методикой работы [11] были построены осцилограммы и фазовые траектории. Были получены осцилограммы и фазовые траектории характерные эредитарной автоколебательной системе Ван-дер-Поля [12].

Литература

1. Учайкин В.В. Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с.
2. Gao X., Yu J. Chaos in the fractional order periodically forced complex Duffing's oscillators// Chaos, Solitons & Fractals. 2005. Vol. 24. №4. P. 1097–1104.
3. Rossikhin Y.A., Shitikova M.V. Application of fractional calculus for dynamic problems of solid mechanics: novel trends and recent results// Applied Mechanics Reviews. 2010. Vol. 63. №1.
4. Petras I. Fractional-Order Nonlinear Systems: Modeling, Analysis and Simulation. New York: Springer, 2010.
5. Syta A., Litak G., Lenci S., Scheffler M. Chaotic vibrations of the Duffing system with fractional damping// Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2014. Vol. 24, №. 1.
6. Нахушев А.М.Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
7. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977. 456 с.
8. Паровик Р.И.О численном решении уравнения фрактального осциллятора с производной дробного переменного порядка от времени// Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2014. № 1(8). С. 60–65.
9. Паровик Р.И. Численный анализ некоторых осцилляционных уравнений с производной дробного порядка// Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2014. № 2(9). С. 30–35.
10. Петухов А.А., Ревизников Д.Л. Алгоритмы численных решений дробно-дифференциальных уравнений// Вестник МАИ. 2009. Т. 16. № 6. С. 228–243.
11. Паровик Р.И. Математическое моделирование нелокальной колебательной системы Дуффинга с фрактальным трением// Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2015. № 1 (10). С. 18–24.
12. Паровик Р.И. Математическая модель фрактального осциллятора Ван дер Поля// Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2015. Т. 17. №. 2. С. 57-62.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

© Дюжева А.В.

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева (Россия, Самара)
e-mail: aduzheva@rambler.ru

В области $Q_T = (0, l) \times (0, T)$, где $l, T < \infty$, для уравнения

$$u_{tt} - (a(x)u_x)_x + c(x, t)u = h(x)f(x, t) \quad (1)$$

поставим следующую задачу:

найти пару функций $(u(x, t), h(x))$, удовлетворяющих уравнению (1), начальным данным:

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad (2)$$

граничным условиям

$$u_x(0, t) = \alpha_1(t)u(0, t) + \beta_1(t)u(l, t), \quad (3)$$

$$u_x(l, t) = \alpha_2(t)u(0, t) + \beta_2(t)u(l, t)$$

и условию переопределения:

$$\int_0^T K(t)u(x, t)dt = E(x). \quad (4)$$

Функции $a(x)$, $E(x)$, $c(x, t)$, $f(x, t)$, $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$, $K(t)$ заданы в областях $[0, l]$, \overline{Q}_T и $[0, T]$ соответственно, кроме того будем считать, что $0 < a_0 \leq a(x)$ всюду в $[0, l]$.

Обратные задачи с интегральным условием переопределения для параболических уравнений изучались во многих работах. Отметим статьи [1], [2] и список литературы в них. Работ, посвященных исследованию разрешимости обратной задачи для гиперболического уравнения, существенно меньше.

Отметим, как наиболее близкие к тематике данной статьи работы [3], [4], [6].

Введем понятие решения задачи (1)-(4).

Пусть выполняются следующие условия:

- (i) $c \in C(\overline{Q}_T)$, $f \in C(\overline{Q}_T)$, $a(x) \in C[0, l]$, $E(x) \in C^2[0, l]$;
- (ii) $K \in C^2[0, T]$, $\int_0^T K(t)f(x, t)dt \neq 0$ для любого $x \in [0, l]$, $K(T) = K'(T) = 0$.

Тогда функцию $h(x)$ подлежащую определению, можно выразить через $u(x, t)$ и известные функции, входящие в уравнение (1) и условие (4). А именно справедливо следующее соотношение:

$$h(x) = G(x) \left[\int_0^T H(x, t)u(x, t)dt - (a(x)E'(x))' \right], \quad (5)$$

где обозначено

$$G(x) = (\int_0^T K(x)f(x, t)dt)^{-1}, H(x, t) = K''(x) + c(x, t)K(x).$$

Обозначим $\hat{W}_2^1(Q_T) = \{v(x, t) : v(x, t) \in W_2^1(Q_T), v(x, T) = 0\}$. Пусть $v(x, t) \in \hat{W}_2^1(Q_T)$. Используя известную процедуру [11], выведем равенство

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^l (-u_t v_t + a(x)u_x v_x + a_x u_x v + cuv) dx dt + \\ & + \int_0^T a(0)v(0, t)[\alpha_1(t)u(0, t) + \beta_1(t)u(l, t)] dt - \\ & - \int_0^T a(l)v(l, t)[\alpha_2(t)u(0, t) + \beta_2(t)u(l, t)] dt = \int_0^T \int_0^l h f v dx dt. \end{aligned} \quad (6)$$

Определение. Обобщенным решением задачи (1) - (4) будем называть пару функций $(u(x, t), h(x))$ таких, что $u(x, 0) = 0$, выполняется тождество (6) для всех функций $v(x, t) \in \hat{W}_2^1(Q_T)$, и справедливо (5), понимаемое как равенство в $L_2(0, l)$.

Заметим, что при выполнении условий теоремы найдутся числа $c_0 > 0$, $A_i > 0$, $B_i > 0$, $\gamma > 0$ такие, что

$$\max_{\overline{Q}_T} |c(x, t)| \leq c_0, \quad \max_{\overline{Q}_T} |f(x, t)| \leq \gamma,$$

$$\max_{[0, T], i=1, 2} |\beta'_i(t)| \leq B, \quad \max_{[0, T], i=1, 2} |\alpha'_i(t)| \leq A.$$

Основной результат работы состоит в доказательстве существования единственного обобщенного решения поставленной задачи.

Теорема. Пусть выполняются следующие условия

$$c(x, t) \in C(\bar{Q}_T), f(x, t) \in C(\bar{Q}_T), a \in C(\bar{Q}_T), E \in C^2[0, l],$$

$$a(x) \geq a_0 > 0, \alpha_i(t), \beta_i(t) \in C^1[0, T], i = 1, 2,$$

$$a(0)\beta_1(t) + a(l)\alpha_2(t) = 0, K(t) \in C^2[0, T], K(T) = K'(T) = 0,$$

$$\alpha_1(t)\beta_2(t) + \alpha_2(t)\beta_1(t) \geq 0, \alpha'_1(t)\beta'_2(t) + \alpha'_2(t)\beta'_1(t) \geq 0,$$

$$G^2(x) \geq G_0 > 0, T\gamma B \frac{e^{c_1 T} - 1}{cG_0} < 1.$$

Тогда существует единственное обобщенное решение задачи (1)-(4).

Доказательство проведено по следующей схеме: сначала построена последовательность приближенных решений, затем показано, что последовательность сходится в $W_2^1(Q_T)$. И на заключительном этапе показано, что ее предел и есть искомое решение.

Литература

1. Cannon J.R., Yanping Lin An Inverse of Finding a Parameter in a Semi-Linear Heat Equation// Journal of mathematical analysis and applicatijns. 145, 1990. С. 470–484.
2. Камынин В.Л. Об обратной задаче определения младшего коэффициента в параболическом уравнении при условии интегрального наблюдения// Мат. заметки. 2013. Т. 94. Вып. 2.
3. Павлов С.С. Нелинейные обратные задачи для многомерных гиперболических уравнений с интегральным переопределением// Мат. заметки ЯГУ. 2011. Т. 18. Вып. 2.
4. Павлов С.С. Обратная задача восстановления внешнего воздействия в многомерном волновом уравнении с интегральным переопределением// Мат. заметки ЯГУ. 2011. Т. 18. Вып. 1.
5. Сафиуллова Р.Р. Обратная задача с неизвестным составным внешним воздействием при составном переопределении// Мат. заметки ЯГУ. 2006. Т. 13. Вып. 2.
6. Савенкова А.Е. Обратная задача с интегральным условием переопределения для гиперболического уравнения// Вестник СамГУ. Естественно научная серия. 2014. №3(114). С. 83–92.
7. Денисов А.М. Обратная задача для гиперболического уравнения с нелокальным краевым условием, содержащим запаздывающий аргумент// Труды Института математики и механики УрОРАН. 2012. Т. 18. №1.

8. Сафиуллова Р.Р. Линейная обратная задача для гиперболического уравнения с неизвестной правой частью специального вида // Математические заметки ЯГУ. 2008. Т. 15, №2. С. 48–69.
9. Гординг Л. Задача Коши для гиперболических уравнений. М: Изд-во иностранной литературы, 1961, 120 с.
10. Пулькина Л.С., Дюжева А.В. Нелокальная задача с переменными по времени краевыми условиями Стеклова для гиперболического уравнения // Вестник СамГУ. 2010. №4(78). С. 56-64.
11. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 407 с.

УДК 517.956.4

ФУНКЦИЯ ГРИНА ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ САМАРСКОГО-ИОНКИНА

© Ержанов Н.Е.

Институт математики и математического моделирования
(Казахстан, Алматы)

Региональный социально-инновационный университет
(Казахстан, Шымкент)
e-mail: erzhanov@math.kz

Возможность представления решения задачи в интегральном виде, основанном на функции Грина начально-краевой задачи имеет существенные преимущества для практики. Интегральное представление решения позволяет дать физическую интерпретацию: со-пряженная функция Грина в точке с координатой y_0 в момент времени s_0 , при наблюдении температуры в точке (x_0, t_0) , есть температура в точке x_0 в момент времени t_0 , если в точку y_0 в момент времени s_0 помещен импульсный тепловой источник единичной мощности.

В области $\Omega = \{0 < x < 1, 0 < t < T\}$ рассмотрим уравнение теплопроводности

$$u_t - u_{xx} = f(x, t). \quad (1)$$

К классическим задачам теории теплопроводности относят первую и вторую начально-краевые задачи. Это задачи нахождения решения уравнения (1), удовлетворяющего начальному условию

$$u|_{t=0} = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

и краевым условиям

$$u|_{x=0} = \varphi_0(t), \quad u|_{x=1} = \varphi_1(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

или

$$u_x|_{x=0} = \psi_0(t), \quad u_x|_{x=1} = \psi_1(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

соответственно.

Эти задачи хорошо исследованы, их решение (в классическом и обобщенном смыслах) существует, единственно и может быть построено методом разделения переменных. Также решение может быть представлено с помощью функции Грина. Для упрощения записи считаем, что $\varphi_j(t) = \psi_j(t) = 0$, $j = 0, 1$. Тогда решение задач представляется в виде

$$u(x, t) = \int_0^t dt \int_0^1 G(x, y, t-s) f(y, s) dy.$$

В докладе рассматривается нелокальная краевая задача для неоднородного одномерного уравнения теплопроводности. Ставится классическое начальное условие по переменной t . По пространственной переменной x ставится нелокальное краевое условие Самарского-Ионкина.

Задача S – I. Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию (2) и неклассическим краевым условиям – нелокальным условиям Самарского-Ионкина:

$$u(0, t) = \varphi_0(t), \quad u_x(0, t) - u_x(1, t) = \varphi_1(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Хорошо известно, что решение этой задачи может быть построено в виде сходящегося биортогонального ряда по собственным и присоединенным функциям спектральной задачи Самарского-Ионкина для оператора кратного дифференцирования. Поэтому функция Грина задачи может быть также выписана в виде бесконечного ряда по тригонометрическим функциям. Для классических первой и второй начально-краевых задач существует также и второе представление функции Грина – через функцию Якоби. В настоящей работе найдено представление функции Грина нелокальной начально-краевой задачи в виде ряда по экспонентам.

При доказательстве основных результатов работы были использованы идеи из нашей работы [1].

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Республики Казахстан, грант 0825/ГФ4.

Литература

1. Erzhanov N. E. Green's function of a heat problem with a periodic boundary condition // AIP Conf. Proc. 2016. V. 1759. P. 020112. <http://dx.doi.org/10.1063/1.4959726>.

УДК 519.1

2-ПУТИ НА ОРИЕНТИРОВАННЫХ ГРАФАХ.

2-ДОСТИЖИМОСТЬ

© Ерусалимский Я.М.

Южный федеральный университет (Россия, Ростов-на-Дону)
e-mail: ymerusalimskiy@sedu.ru

Множество дуг U ориентированного графа $G(X, U, f)$ представлено в виде $U = U_0 \cup U_1$, $U_0 \neq \emptyset$, $U_1 \neq \emptyset$, $U_0 \cap U_1 = \emptyset$, каждому пути длины n поставим в соответствие 0–1 запись длины n по следующему правилу: на i -м месте в записи стоит 0, если i -я дуга пути принадлежит множеству U_0 , а если дуга принадлежит множеству U_1 , то на том месте в записи стоит 1.

Определение 1. Начальным 1-фрагментом длины k пути будем называть его начальный отрезок, состоящий из k следующих подряд дуг из множества U_1 , такой, что кодировка пути имеет вид $(11\dots10)$. (здесь за многоточием «спрятаны» единицы, «пробельная» зона заполнена произвольным набором нулей и единиц).

Определение 2. Внутренним 1-фрагментом длины k пути будем называть такой отрезок пути, состоящий из k следующих подряд дуг из множества U_1 , такой, что его кодировка имеет вид $(011\dots10)$.

Определение 3. Заключительным 1-фрагментом длины k пути будем называть его конечный отрезок, состоящий из k следующих подряд дуг из множества U_1 , такой, что его кодировка имеет вид $(011\dots1)$.

Определение 4. Путь на графике будем называть 2-путем, если длины его начального 1-фрагмента и всех внутренних 1-фрагментов кратны 2.

Определение 5. 2-достижимостью на графике будем называть достижимость одной вершины из другой по 2-путям.

В случае такого ограничения на достижимость классические алгоритмы для решения задач о кратчайших путях, случайных блужданиях и потоках в сети становятся неприменимыми. Следуя методике автора (см. [1]), необходимо построить соответствующую развертку графа, после чего задача с ограничениями на достижимость на исходном графе интерпретируется как соответствующая ей задача на развертке без ограничений на достижимость ([1–3]).

Опишем построение развертки в случае 2-достижимости. Каждой вершине исходного графа соответствуют на развертке две вершины x и x' , каждой дуге из множества U_0 соответствует она сама на развертке, а каждой дуге из множества U_1 , ведущей из x в y , соответствует две дуги развертки, одна из которых ведет из x в y' , а другая — из x' в y .

Теорема. *Вершина y на графике $G(X, U_0 \cup U_1, f)$ 2-достижима из вершины x тогда и только тогда, когда на развертке достижима из вершины x хотя бы одна из вершин множества $\{y; y'\}$.*

Аналогично 2-достижимости определяются 3-достижимость, 4-достижимость и т. д. Конструкция развертки в этих случаях тоже понятна. Возрастает количество двойников вершин и количество дуг, получаемых из дуг множества U_1 .

Литература

1. Ерусалимский Я.М., Скороходов В.А., Кузьминова М.В., Петросян А.Г. Графы с нестандартной достижимостью: задачи, приложения// Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2009. 195 с.
2. Ерусалимский Я.М., Скороходов В.А. Общий подход к нестандартной достижимости на ориентированных графах// Известия вузов. Сев.-Кав. регион. Ест. науки, спец. выпуск «Псевдодифференциальные уравнения и некоторые проблемы математической физики», 2005. С. 64–67.
3. Ерусалимский Я.М. Графы с затуханием на дугах и усилением в вершинах и маршрутизация в информационных сетях// Инженерный вестник Дона, 2015. №1. ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2015/2782

UDC 517.927

ON A PROBLEM FOR WAVE EQUATION WITH DATA ON THE WHOLE BOUNDARY

© Yessirkegenov N.A.

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling (Kazakhstan, Almaty)

Imperial College London (UK, London)

e-mail: Yessirkegenov@math.kz

Let $\Omega \subset R^2$ be a rectangular domain, bounded by following lines: $AB : 0 \leq x \leq \ell, t = 0$, $BC : x = \ell, 0 \leq t \leq T$, $CD : 0 \leq x \leq \ell, t = T$ and $AD : x = 0, 0 \leq t \leq T$.

We consider a nonhomogeneous wave equation in Ω

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x, t). \quad (1)$$

It is well known that the Dirichlet problem for the wave equation (1) in a rectangular domain is ill-posed. Specifically, in case of our domain Ω it is easy to see that the homogeneous equation () with Dirichlet conditions

$$u|_{AB \cup BC \cup AD} = 0, \quad (2)$$

$$u|_{CD} = 0, \quad (3)$$

has countable number of nontrivial solutions of the form

$$u_{mn}(x, t) = \sin \frac{m\pi x}{\ell} \sin \frac{n\pi t}{T}, \quad m, n = 1, 2, \dots$$

when the conditions $n\ell = mT$ hold.

The Dirichlet problem for a wave equation is one of the most difficult models of mathematical physics. When T/ℓ is an algebraic number of the degree $n \geq 2$, K.B. Sabitov the existence and uniqueness condition of the solution of the Dirichlet problem are obtained.

In this paper, we prove the well-posedness of the problem for a one-dimensional wave equation in a rectangular domain in case when boundary conditions are given on the whole boundary of domain. Let $E = (T, T)$, $F = (\ell - T, T)$ be points on a boundary CD .

Problem S. Find a solution of equation (1), satisfying the boundary condition (2) and conditions on the boundary CD :

$$u_t|_{DE} = 0, \quad (4)$$

$$\alpha u_x + \beta u_t|_{EF} = 0, \quad (5)$$

$$u|_{CF} = 0, \quad (6)$$

where α and β are real numbers.

As usual, we say the function $u \in L_2(\Omega)$ is a *strong solution* of Problem S, if there exists the sequence of functions $u_n \in W_2^2(\Omega)$, satisfying boundary conditions (4) - (6) such that u_n and Lu_n converge in $L_2(\Omega)$ to u and f respectively. Now we formulate the obtained result as a theorem.

Theorem. Let $\ell/T = n \in N$ ($n \geq 2$). A solution of the Problem S is unique, iff condition

$$\alpha(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) \neq 0 \quad (7)$$

holds. If the condition (7) holds, then for all functions $f \in L_2(\Omega)$ Problem S has a unique strong solution. This solution belongs to the class $u \in W_2^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ and satisfies the estimate:

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L_2(\Omega)}.$$

Throughout this note we mainly use techniques from our works [1, 2].

Research supported by the grant 0824/GF4 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

References

1. Esirkegenov N.A., and Sadybekov M.A. Spectral properties of boundary-value problem with a shift for wave equation// Russian Mathematics. 2016. V. 60, № 3. P. 41-46.
2. Yessirkegenov N. On a problem for wave equation with data on the whole boundary// AIP Conf. Proc. 2016. V. 1759. P. 020149. <http://dx.doi.org/10.1063/1.4959763>.

UDC 517.9

SPECTRUM ENCODING FUNCTIONS FOR FRACTAL STRINGS

© Etienne R.J.

Lycée Bel-Val (Belvaux, Luxemburg)
University of Siegen (Siegen, Germany)
e-mail: roland.etienne@education.lu

In earlier works on the subject [1], the author developed a unifying framework for the study of classical fractal strings [2] and their measure theoretic counterparts (see for example [3]) through the introduction of a matrix representation of the Dirichlet Laplacian for the two different types of fractal strings.

The characteristic polynomials of these matrices allow the computation of the eigenvalues λ at arbitrary iteration levels n of the prefractals, and it is shown how to obtain generalised trigonometric functions encoding the spectra of the considered fractal strings.

Theorem 1. For standard fractal strings the spectrum encoding function is given by the limit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{\infty} c_i(n) \lambda^i,$$

where the $c_i(n)$ are given by the recursion:

$$c_i(n) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^i (-1)^k \frac{2^{2k} B_{2k} \sum_{j=0}^n \eta_j l_j^{2k}}{i(2k)!} c_{i-k}(n),$$

with $c_0(n) = 1$, B_{2k} being the Bernoulli numbers and η_j denoting the multiplicities of the lengths l_j of the considered fractal string.

Example 1. A degenerate case.

Consider the degenerate case where $\eta_0 = 1$ and $l_0 = 1$, while for all $j > 0$ we have $\eta_j = 0$ and $l_j = 0$, i.e. the standard homogeneous string seen as a fractal string. As trivial as it may appear, it allows us nevertheless to deduce the following interesting corollary:

Corollary 1.

$$-\frac{1}{i} \sum_{k=1}^i \frac{(-1)^k \zeta(2k)}{\pi^{2k} (2i - 2k + 1)!} = \frac{1}{2i} \sum_{k=1}^i \frac{2^{2k} B(2k)}{(2k)! (2i - 2k + 1)!} = \frac{1}{(2i + 1)!}.$$

Example 2. The standard triadic Cantor string.

Consider the well known standard Cantor string, defined in the following:

Definition 1. The standard Cantor string \mathcal{CS}_T is the sequence of lengths given by:

$$\mathcal{CS}_T := \{l_j\}_{j=0}^{\infty} = \{3^{-j}\}_{j=0}^{\infty},$$

where each of the l_j 's appears with multiplicity $\eta_j = 2^j$.

In this case, the coefficients $c_i(n)$ are given by the following corollary:

Corollary 2.

$$c_i(n) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^i (-1)^k \frac{2^{2k} B_{2k} \frac{3^{2k}}{3^{2k}-2}}{i(2k)!} c_{i-k},$$

again with $c_0 = 1$, and B_{2k} denoting the Bernoulli numbers.

The first few coefficients for the standard Cantor string in the limit $n \rightarrow \infty$ are thus:

$$c_0 = 1, c_1 = -\frac{3}{14}, c_2 = \frac{2673}{154840}, c_3 = -\frac{1218267}{1575961520}, c_4 = \frac{739117920357}{32664071886588800}, \\ c_5 = -\frac{28118674598324067}{59404435942772193306880}, \dots$$

For measure theoretic fractal strings, Arzt recursively defined in [4] a generalised trigonometric function encoding their spectra. For a subset of these strings where the mass matrix is simply a multiple of the identity matrix, we obtain another recurrence relation providing a more efficient way to approximate the eigenvalues λ of the Dirichlet Laplacian.

Theorem 2. *The spectrum encoding function at approximation level n for this subclass of measure theoretic fractal strings is:*

$$p_n(\lambda) = A_n p_{n-1}(\lambda) + B_n \sum_{i=0}^{n-2} \prod_{k=i+2}^{n-1} D_k C_{i+1} p_i(\lambda) + (\lambda - 2) B_n \prod_{i=1}^{n-1} D_i,$$

with:

$$\begin{aligned} A_i &= \kappa^{-4} \lambda^4 + (-6 - 2r_i^{-1}) \kappa^{-3} \lambda^3 + (11 + 10r_i^{-1}) \kappa^{-2} \lambda^2 + \\ &\quad + (-7 - 13r_i^{-1}) \kappa^{-1} \lambda + (1 + 4r_i^{-1}), \\ B_i &= -\kappa^{-3} \lambda^3 + (5 + r_i^{-1}) \kappa^{-2} \lambda^2 + (-6 - 4r_i^{-1}) \kappa^{-1} \lambda + (1 + 3r_i^{-1}), \\ C_i &= \kappa^{-3} \lambda^3 + (-4 - 2r_i^{-1}) \kappa^{-2} \lambda^2 + (4 + 6r_i^{-1}) \kappa^{-1} \lambda + (-1 - 3r_i^{-1}), \\ D_i &= -\kappa^{-2} \lambda^2 + (3 + r_i^{-1}) \kappa^{-1} \lambda + (-1 - 2r_i^{-1}), \end{aligned}$$

where $p_0(\lambda) = \kappa^{-2} \lambda^2 - 4\kappa^{-1} \lambda + 3$ and the r_i describe the underlying fractal structure.

Example 3. *A degenerate case.*

Consider the degenerate case where all the $r_i = 1$ and $\kappa = (4n+3)^2$. In this case, the polynomials $p_n(\lambda)$ are simply the scaled and shifted Chebyshev polynomials of the second kind $U_{2+4n}\left(\frac{\lambda}{2(4n+3)^2} - 1\right)$ and in the limit $n \rightarrow \infty$, we reobtain the sine-cardinal function [5,6], which is the spectrum encoding function of the standard string with a uniform mass distribution.

Example 4. *The measure theoretic triadic Cantor string.*

For the measure theoretic triadic Cantor string $\kappa = 2 \cdot 6^{j+1}$ for $n = 2^j - 1$, $j = 0, 1, 2, \dots$ and the r_i are given by:

$$r_i = 3^{-\sum_{k=2}^{\infty} \left\lfloor \frac{2^k \left\lfloor \frac{i+1}{2^{k-2}} \right\rfloor}{(4i+4)} \right\rfloor},$$

with $\lfloor \cdot \rfloor$ denoting the floor function. In the limit $n \rightarrow \infty$, we recover the generalised trigonometric function obtained by Arzt in [4] through a completely different method, the first few coefficients being:

$$c_0 = 1, c_1 = -\frac{1}{8}, c_2 = \frac{21}{4240}, c_3 = -\frac{33253}{383465600}, c_4 = \frac{76118969}{91537621184000}, \\ c_5 = -\frac{20165083798890939}{4103397246999022891520000}, \dots$$

References

1. *Etienne R.J.* On the Asymptotic Distribution of the Dirichlet Eigenvalues of Fractal Chains. PhD thesis University of Siegen, 2014.
2. *Lapidus M. L., van Frankenhuyzen M.* Fractal Geometry and Number Theory: Complex Dimensions of Fractal Strings and Zeros of Zeta Functions. Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser, 2000.
3. *Freiberg U.R.* Analytical properties of measure geometric Krein-Feller-operators on the real line// Math. Nachr. 2003. Vol. 260. P. 34–47.
4. *Arzt P.* Eigenvalues of Measure Theoretic Laplacians on Cantor-like Sets. PhD thesis University of Siegen, 2014.
5. *Koekoek R., Swarttouw R.F.* The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue. arXiv preprint math/9602214, 1996.
6. *Gauß C.F.* Disquisitiones generales circa seriem infinitam $1 + \frac{\alpha\beta}{1\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}xx + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot2\cdot3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3 + \text{etc}$ // Commentationes Societas Regiae Scientiarum Gottingensis Recentiores 1813. P. 3–46.

УДК 517.956

ФРЕДГОЛЬМОВАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО ПОРЯДКА СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ

© Ефимова Е.С.¹, Тихонова И.М.²

Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова

(Россия, Якутск)

¹e-mail: oslame@mail.ru

²e-mail: irinamikh3007@mail.ru

Фредгольмовская разрешимость краевых задач для уравнений смешанного типа со спектральным параметром изучалась во многих работах [1-4]. В основном интересные результаты были получены для модельных уравнений смешанного типа со спектральным параметром на плоскости [1,3]. Наиболее полную библиографию по данной теме можно найти в работах [1,3,5].

В данной работе исследуется первая краевая задача для уравнения смешанного типа второго порядка со спектральным параметром в многомерном случае.

Пусть Ω -ограниченная область в R^n с границей $S \in C^1$, $\Omega_t = \Omega \times \{t\}$ для $0 \leq t \leq T$, $S_T = S \times (0, T)$, $Q = \Omega \times (0, T)$.

В цилиндрической области Q рассмотрим уравнение смешанного типа

$$Lu - \lambda u = f(x, t), \quad (1)$$

где

$$Lu \equiv k(x, t)u_{tt} - \Delta u + a(x, t)u_t + c(x)u,$$

$$\lambda \in C, u = Reu + iImu.$$

Будем предполагать, что коэффициенты дифференциального оператора L - вещественные достаточно гладкие функции в \overline{Q} . Введем множества

$$P_0^\pm = \{(x, 0) : k(x, 0) \gtrless 0, x \in \Omega\}, \quad P_T^\pm = \{(x, T) : k(x, T) \gtrless 0, x \in \Omega\}.$$

Краевая задача. Найти решение уравнения (1) в области Q такое, что

$$u|_{S_T} = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{\overline{P}_0^+} = 0, \quad u|_{\overline{P}_T^-} = 0. \quad (2)$$

При условии $k(x, 0) < 0, k(x, T) < 0; k(x, 0) \geq 0, k(x, T) < 0$ установлены априорные оценки, которые позволяют доказать однозначную разрешимость краевой задачи (1)-(2) в энергетическом классе. Получены достаточные условия фредгольмовой разрешимости для исследуемой краевой задачи в энергетическом классе.

Отметим, что случаи $k(x, 0) < 0, k(x, T) > 0$ и $k(x, 0) \geq 0, k(x, T) > 0$ рассмотрены в [5].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-31-00430, конкурс "Мой первый грант".

Литература

1. Мусеев Е.И. Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. Москва: Изд-во Московского университета, 1988. 150 с.
2. Егоров И.Е., Федоров В.Е. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО РАН, 1995. 131 с.
3. Салахутдинов М.С., Уринов А.Н. К спектральной теории уравнений смешанного типа. Ташкент: ФАН, 2010. 356 с.

4. Егоров И.Е., Захарова Т.И. О фредгольмовости краевой задачи для уравнения смешанного типа// Математические заметки ЯГУ. 2013. Т. 20, № 1. С. 20–26.
5. Егоров И.Е. О краевой задаче для уравнения смешанного типа со спектральным параметром// Математические заметки СВФУ. 2014. Т. 21, №1. С. 11–17.

УДК 519.7

К ВОПРОСУ О ПОСТРОЕНИИ КОГНИТИВНЫХ КАРТ ДЛЯ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ

© Жилов Р.А.

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
"Институт прикладной математики и автоматизации" (Россия, Нальчик)
e-mail: kavkaze@inbox.ru

Компьютерные модели когнитивных карт широко используются для помощи при принятии решений в условиях неточной и недостаточной информации. Требуется оптимизировать когнитивную карту путем оптимизации ее входных данных и системы подстройки весов. Для этого будут использованы методы кластерного анализа для оптимизации данных, и методы обучения искусственных нейронных сетей для подстройки весов влияния концептов друг на друга.

В отличии от евклидово расстояния, которое часто используется при кластеризации, расстояние city-block уменьшает влияние отдельных больших разностей(выбросов), так как они не возводятся в квадрат.

$$P_{cb}(x_i, x_j) = \sum |x_{il} - x_{jl}|,$$

где: x_i, x_j - координаты i -го и j -го объектов в k -мерном пространстве; x_{il}, x_{jl} - величина $-t$ ой компоненты у i -го (j -го) объекта ($l = 1, 2, \dots, k; i, j = 1, 2, \dots, n$).

Вычисляя расстояния между точками по выше приведенной формуле строится матрица расстояний

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & \dots & P_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ P_{n1} & \dots & P_{nn} \end{pmatrix},$$

где P_{ij} – расстояние между i -ым и j -ым объектом[1].

Процесс объединения кластеров происходит последовательно: на основании матрицы расстояний объединяются наиболее близкие объекты одним из методов иерархического кластерного анализа. В общем виде алгоритм иерархического кластерного анализа можно представить в виде последовательности процедур:

- 1) Значения исходных переменных нормируются.
- 2) Рассчитывается матрица расстояний или матрица мер близости.
- 3) Находится пара самых близких кластеров. По выбранному алгоритму эти два кластера объединяются. Новому кластеру присваивается меньший из номеров объединяемых кластеров.
- 4) Пункты 2, 3 и 4 повторяются до тех пор, пока все объекты не будут объединены в один кластер или до достижения заданного "порога" близости.

В результате мы получаем кластеры, элементы которых схожи по определенным признакам и на основании этих кластеров строится когнитивная карта. Когнитивная карта представляет собой ортограф $G = (K, w)$, где K - множество вершин графа (концепты), w -множество ребер (связей)[2].

Оптимизация когнитивной карты заключается в том, что она строится не на -входных данных, а на k , где $k < n$. Кластеризация данных для построения когнитивной карты при большом количестве входных данных является оптимальной, так как уменьшается количество концептов и количество связей между этими концептами, тем самым сокращается количество операций, выполняемых на каждом шаге обработки когнитивной карты. При этом когнитивная карта становится более наглядной и понятной эксперту. Последнее обстоятельство облегчает построение когнитивных карт, работающих в реальном режиме времени.

Нейронные сети, как и когнитивные карты, всё чаще применяются и в реальных бизнес - приложениях. В некоторых областях, таких как обнаружение фальсификаций и оценка риска, они стали бесспорными лидерами среди используемых методов. Их использование в системах прогнозирования и системах маркетинговых исследований постоянно растёт.

Поскольку экономические, финансовые и социальные системы очень сложны и являются результатом действий и противодействий различных людей, то является очень сложным (если не невозмож-

ным) создать полную математическую модель с учётом всех возможных действий и противодействий. Практически невозможно детально аппроксимировать модель, основанную на таких традиционных параметрах, как максимизация полезности или максимизация прибыли.

Такие же методы оптимизации подходят и для нечетких когнитивных карт, в которых концепты могут принимать значения из диапазона действительных чисел [0,1]. Термин «нечеткие» обозначает только то, что причинные связи (связи взаимовлияния) могут принимать не только значение, равное 0 или 1, а лежат в диапазоне действительных чисел, отражающих «силу» влияния одного концепта на другой [3].

Литература

1. Авдеева З.К. Когнитивное моделирование для решения задач управления слабоструктурированными системами (ситуациями)/ З.К.Авдеева, С.В. Коврига, Д.И. Макаренко// Управление большими системами. Вып. 16. М.: ИПУ РАН, 2007. С. 26–39.
2. Kosko B. Fuzzy Cognitive Maps// International Journal of Man-Machine Studies. 1986. Vol. 1. P. 65-75.
3. Жилов Р.А. Применение нечетких когнитивных карт в системах принятия решений// Материалы Всероссийской научной конференции молодых ученых «Современные вопросы математической физики, математической биологии и информатики». Нальчик, 2014. С. 54-55.

УДК 519.6

ОБ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ИММУННОГО ОТВЕТА

© Журтова М.Б.

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
"Институт прикладной математики и автоматизации" (Россия, Нальчик)
e-mail:zhurtova.93@mail.ru

Основными действующими факторами инфекционного заболевания являются следующие величины:

- 1) $V(t)$ - концентрация патогенных размножающихся антигенов.
- 2) $F(t)$ - концентрация антител.
- 3) $C(t)$ - концентрация плазмоцитов, популяционных носителей и продуцентов антител.
- 4) $m(t)$ - относительная характеристика пораженного органа.

Приходим к следующей нелинейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений [1, с. 116]:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = (\beta - \gamma F)V, \quad (1)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \xi(m)\alpha V(t - \tau)F(t - \tau) - \mu_c(C - C^*), \quad (2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \rho C - (\mu_f + \eta\gamma V)F, \quad (3)$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \sigma V - \mu_m m. \quad (4)$$

Уравнение (1) описывает изменение числа антигенов в организме, β - коэффициент размножения антигенов; γ - коэффициент вероятности нейтрализации антигена антителами при встрече с ним. Уравнение (2) характеризует рост плазматических клеток α - коэффициент вероятности встречи антиген-антитело, $\xi(m)$ - непрерывная и невозрастающая на сегменте $0 \leq m \leq 1$ функция, учитывающая нарушение нормальной работы системы иммунитета вследствие ухудшения общего состояния организма, вызванного значительным поражением органа; $\xi(0) = 1$, $\xi(1) = 0$; τ - время, в течение которого осуществляется формирование каскада плазмоклеток; μ_c - коэффициент обратный величине времени жизни плазмоклеток; C^* - постоянный уровень плазмоклеток в здоровом организме. Уравнение (3) системы характеризует число антител, в котором ρ - скорость производства антител одной плазмоклеткой; μ_f - коэффициент обратно-пропорциональный времени распада антител; η - количество антител, требующихся на нейтрализацию одного антигена. Уравнение (4) это относительная характеристика поражения органа мишени, μ_m - обратная величина периода восстановления органа в e раз; σ - некоторая постоянная, своя для каждого заболевания.

Присоединим к полученной системе уравнений (1) - (4) начальные данные при $t = t_0$:

$$V(t_0) = V_0, \quad C(t_0) = C_0, \quad F(t_0) = F_0, \quad m(t_0) = m_0. \quad (5)$$

Систему уравнений (1) - (4) с начальными данными (5), следуя [2, с. 37], назовем математической моделью заболевания .

В работе исследованы 3 случая системы (1) - (4), моделирующих летальный исход, хроническую и острую формы болезни. На основе полученных результатов сделан вывод: с целью предотвращения перехода острой формы в более тяжелую следует стремиться к снижению патогенности антигенов.

Литература

1. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. Москва: Высшая школа, 1995. 301 с.
2. *Марчук Г. И.* Математические модели в иммунологии. Москва : Наука, 1985. 240 с.

УДК 517.95

ЗАДАЧИ ПО ОТЫСКАНИЮ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ

© Зайнуллов А.Р.¹, Сафин Э.М.²

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета
(Россия, Стерлитамак)

¹e-mail: arturzayn@mail.ru

²e-mail: eldar4u@rambler.ru

1. Постановка задач

Рассмотрим уравнение колебания струны

$$Lu \equiv u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \quad (1)$$

в области $Q = \{0 < x < l, 0 < t < T\}$, где a , l и T — заданные положительные постоянные и следующую первую начально-граничную задачу.

Задача 1. Найти функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x, t) \in C^2(Q) \cap C^1(Q \cup \{t = 0\}) \cap C(\overline{Q}); \quad (2)$$

$$Lu(x, t) \equiv 0, \quad (x, t) \in Q; \quad (3)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (5)$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (6)$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — заданные достаточно гладкие функции, причем $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\psi(0) = \psi(l) = 0$.

На основе прямой задачи (2)–(6) рассмотрим следующие обратные задачи по отысканию начальных условий $\varphi(x)$ или $\psi(x)$.

Задача 2. Найти функции $u(x, t)$ и $\psi(x)$, удовлетворяющие условиям (2) – (6), и, кроме того, дополнительному условию

$$u(x, d) = h(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad d \in (0, T], \quad (7)$$

где $h(x)$, $\varphi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции.

Задача 3. Найти функции $u(x, t)$ и $\varphi(x)$, удовлетворяющие условиям (2) – (7), где $h(x)$, $\psi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции.

Отметим, что обратные задачи 2 и 3 изучены в работе [1, с. 140–143] методом интегральных уравнений. Относительно неизвестных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в каждой из этих задач получены интегральные уравнения Фредгольма первого рода, однозначная разрешимость которых рассматривается в пространстве $L_2[0, l]$. В случае задачи 2 утверждается, что решение интегрального уравнения относительно искомой функции $\psi(x)$ в $L_2[0, l]$ не будет единственным при любом $d > 0$. А в случае задачи 3 при значениях $d = \frac{2pl}{(2k-1)a}$, где p и k – натуральные числа, доказывается, что соответствующее интегральное уравнение относительно функции $\varphi(x)$ имеет единственное решение в пространстве $L_2[0, l]$.

В данной работе показано, что однозначная разрешимость задач 2 и 3 существенным образом зависит от отношения данных задач $\frac{ad}{l} = \tilde{d}$, где $\frac{d}{l}$ – отношение сторон прямоугольника $Q_d = \{(x, t) | 0 < x < l, 0 < t < d\}$, и предлагается другой подход исследования этих задач, основанный на построении решения задачи Дирихле и задачи со смешанными граничными условиями для уравнения (1) в области Q_d . Следуя [2, с. 112], [3] установлены критерии единственности решений задач 2 и 3 и доказаны теоремы существования решения обратной задачи 2, когда \tilde{d} является алгебраическим числом или иррациональным числом с ограниченным множеством элементов, и обратной задачи 3, когда \tilde{d} является рациональным числом или алгебраическим числом, или иррациональным числом с ограниченным множеством элементов. Когда \tilde{d} является иррациональным числом с неограниченным множеством элементов показано, что решение задач 2 и 3 в виде суммы ряда не существует.

Теорема 1. Если существует решение задачи 2, то оно единствено только тогда, когда при всех $k \in \mathbb{N}$

$$\delta(k) = \sin \pi k \tilde{d} \neq 0.$$

Теорема 2. Если существует решение задачи 3, то оно единствено только тогда, когда при всех $k \in \mathbb{N}$

$$\Delta(k) = \cos \pi k \tilde{d} \neq 0.$$

Для примера приведем одну из теорем существования решения задачи 2.

Теорема 3. Если выполнено одно из условий:

1) число \tilde{d} имеет ограниченное множество элементов и $h(x)$, $\varphi(x) \in C^5[0, l]$, $h^{(i)}(0) = h^{(i)}(l) = \varphi^{(i)}(0) = \varphi^{(i)}(l) = 0$, $i = 0, 2, 4$;

2) \tilde{d} — алгебраическое число степени $n > 2$ и $h(x)$, $\varphi(x) \in C^6[0, l]$, $h^{(i)}(0) = h^{(i)}(l) = \varphi^{(i)}(0) = \varphi^{(i)}(l) = 0$, $i = 0, 2, 4$,

то существует единственное решение задачи 2 и оно определяется рядами

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) X_k(x), \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u'_k(0) X_k(x),$$

где

$$u_k(t) = \varphi_k \left(\cos a\mu_k t - \frac{\cos a\mu_k d}{\sin a\mu_k d} \sin a\mu_k t \right) + \frac{h_k}{\sin a\mu_k d} \sin a\mu_k t,$$

$$\varphi_k = \int_0^l \varphi(x) X_k(x) dx, \quad h_k = \int_0^l h(x) X_k(x) dx,$$

$$X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \mu_k x, \quad \mu_k = \frac{\pi k}{l}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда РФФИ-Поволжье, № 14-01-97003.

Литература

1. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. М.: Изд–во МГУ, 1994. 208 с.
2. Сабитов К.Б. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2013. 352 с.
3. Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнений с частными производными высоких порядков// Математические заметки. 2015. Т. 97. Вып. 2. С. 262–276.

ВОЗМОЖНОСТИ ОБЪЕКТНО-ОРИЕНТИРОВАННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ОРГАНИЗАЦИИ

© Зайтова Е.З.

Финансовый университет при Правительстве РФ (Россия, Владикавказ)
e-mail: zaytova.elizaveta@yandex.ru

В начале 1990-х годов объектно-ориентированный подход стал проникать в сферу "традиционного" непрерывного и непрерывно-дискретного моделирования. Появился новый термин "объектно-ориентированное моделирование" (ООМ). Объектно-ориентированное моделирование – это моделирование ориентированное, прежде всего, на создание больших и сложных систем, их коллективную разработку и дальнейшее активное сопровождение при использовании [1].

ООМ позволяет смоделировать деятельность организации. Грамотное моделирование деятельности организации способствует повышению адаптивности и конкурентоспособности организации, в условиях постоянно меняющихся рыночных условий [1, 2].

Средством документирования результатов ОOM систем является унифицированный язык моделирования UML (Unified Modeling Language) – язык графического описания для объектного моделирования, который применяется в разных сферах, связанных с разработкой программного обеспечения в бизнес-моделировании.

Применение UML особо эффективно в таких областях как информационные системы масштаба предприятия, банковские и финансовые услуги, телекоммуникации, авиация и космонавтика, медицинская электроника и наука.

Одним из возможных вариантов представления предметной области являются диаграммы. Диаграммы в UML графически представляют собой комплект универсальных элементов в виде графа, состоящего из вершин и ребер. Вершинами ребер обозначают сущности, а ребрами - отношения между ними. Визуально представленная информация в виде моделей, диаграмм и пояснений к ним, разработанных с помощью UML, обеспечивает связь между потребителями и разработчиками, внутри коллектива разработчиков, сводя к минимуму риск неправильного понимания [1].

В основе процесса проектирования информационной системы (ИС) лежит моделирование предметной области. Предметная область состоит из определенных моделей. Одними из них являются статические модели. Если входные и выходные воздействия постоянны во времени, то модель называется статической. Такая модель предназначена для описания установившегося режима. Статическая модель отражает строение и параметры объекта, поэтому ее называют структурной.

В работе представлены результаты ОМ фрагмента деятельности коммерческого банка с вкладами физических лиц. Разработана диаграмма вариантов использования (прецедентов), которая является статической моделью предметной области.

Действующими лицами на диаграмме прецедентов являются объекты Сотрудник банка и Клиент. Сотрудник банка управляет следующими вариантами использования: Открыть вклад, Закрыть вклад, Напечатать отчет по открытых вкладам, Напечатать отчет по закрытым вкладам, Отклонить открытие вклада, Отклонить закрытие вклада. Клиент в свою очередь управляет лишь одним вариантом использования – Предоставить сведения.

Между прецедентами и актерами используется связь - коммуникация (communication). Кто является инициатором коммуникации, позволяет понять направление стрелки.

В работе разработана еще одна статическая модель предметной области в виде диаграммы классов, которая показывает классы и их отношения, а также представляет логический аспект проекта. Диаграмма классов определяет типы объектов системы и статические связи различного рода, которые существуют между ними. Диаграмма классов является ключевым элементом в ОМ.

На диаграмме предусмотрены следующие классы: Клиенты, Вклады. Показаны связи между классами Клиенты и Вклады. Видно, что банк может открыть уникальный вклад (+1) для нескольких клиентов (+1..*).

Разработанный фрагмент модели показывает некоторые возможности автоматизации деятельности отдела коммерческого банка с вкладами физических лиц. По завершению ОМ рассматриваемой деятельности может быть получена информационная система, которая позволит сохранить информацию по открытым и закрытым вкладам, составлять отчеты.

Однако, для полного представления работы информационной

системы необходимо составить ряд динамических моделей и соответствующих диаграмм [1].

Если не провести моделирование предметной области, то велика вероятность допущения большого количества ошибок в решении стратегических вопросов. Ошибки в вопросах такого рода приводят организацию к экономическим потерям и высоким затратам на дальнейшее перепроектирование системы.

Литература

1. Ахсарова М.И., Волик М.В. Сравнительный анализ подходов к проектированию информационных систем// Педагогический опыт: решения и находки: сборник научно-методических статей. Выпуск 19. Часть 1. Воронеж: Воронежский государственный педагогический университет, 2014. С. 320–323.
2. Леоненков Самоучитель по UML// <http://khpi-iip.mipk.kharkiv.edu/library/case/> (дата обращения 05.05.2016).

УДК 517.95

НАЧАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ B–ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ВТОРОГО РОДА

© Зайцева Н.В.

Казанский (Приволжский) федеральный университет (Россия, Казань)
e-mail: n.v.zaiceva@yandex.ru

Пусть $D = \{(x, t) | 0 < x < l, 0 < t < T\}$ – прямоугольная область координатной плоскости Oxt , где $l, T > 0$ – заданные действительные числа, $\Gamma_l = \{(x, t) | x = l, 0 \leq t \leq T\}$ – часть границы области.

Рассмотрим в области D гиперболическое уравнение с оператором Бесселя

$$\square_B u(x, t) \equiv u_{tt} - x^{-k} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^k \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0, \quad (1)$$

где $k > -1$, $k \neq 0$ – заданное действительное число.

Для уравнения (1) в области D исследованы следующие задачи.

Задача 1. Пусть $k \geq 1$. Найти функцию $u(x, t)$, которая удовлетворяет условиям:

$$u(x, t) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D \cup \Gamma_l) \cap C^2(D), \quad (2)$$

$$\square_B u(x, t) \equiv 0, \quad (x, t) \in D, \quad (3)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (4)$$

$$u_x(l, t) + \int_0^l u(x, t) x^k dx = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (5)$$

Задача 2. Пусть $-1 < k < 1$, $k \neq 0$. Найти функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую условиям (2)–(5) и условию

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^k u_x(x, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (6)$$

Здесь $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – заданные, достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям

$$\varphi'(l) + \int_0^l \varphi(x) x^k dx = 0, \quad \psi'(l) + \int_0^l \psi(x) x^k dx = 0.$$

Методом интегральных тождеств доказана единственность решения поставленных задач. Решения построены в явном виде, в виде рядов Фурье-Бесселя. Для обоснования существования решения задач получены достаточные условия относительно начальных условий, гарантирующие сходимость построенных рядов в классе регулярных решений.

УДК 004.627:004.932.2

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ СЖАТИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ НА ОСНОВЕ ВЕЙВЛЕТОВ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

© Ибавов Т.И.

Дагестанский государственный университет (Россия, Махачкала)
e-mail: ibavov94@mail.ru

На современном этапе развития науки для обработки цифровых изображений также применяют операторы дробного интегрирования и дифференцирования. Применение операторов дробного дифференцирования повышает качество изображения, их можно использовать для подавления шума в изображениях и усиления текстуры. В работах [1, 2] дается определение вейвлетов дробного порядка. В работе [3] операторы дробного дифференцирования

используются для разработки алгоритмов подавления шума в изображениях. Вейвлет сжатие - общее название класса методов кодирования изображений, использующих двумерное вейвлет-разложение кодируемого изображения. Обычно подразумевается сжатие с потерей качества.

Из определения базисной комплекснозначной функции и из равенства

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} [(1 - (-1)^s)(\pi i)^{(s-1)}] \frac{x^{(s-1)}}{s!} \quad (1)$$

вейвлеты дробного порядка ν ($0 < \nu \leq 1$) определяются как [1, 2]

$$\begin{aligned} \varphi_{\nu}(z) &= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\pi^{\nu s-1}}{\Gamma(\nu s + 1)} [1 - (-1)^{\nu s}] z^{\nu l+1} = 1 + \sum_l l = 1^{\infty} \lambda_{00}^{(l)} \frac{z^{\nu l+1}}{\Gamma(\nu l + 1)}, \\ \psi_{\nu}(z) &= -\frac{2}{\pi} + \sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2}{(2k+1)\pi} \gamma_{0k}^{(l)00} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

где λ и γ коэффициенты связности

$$\begin{aligned} \lambda_{kh}^{(l)} &= \frac{i^l \pi^l}{2(l+1)} [1 + (-1)^l] (1 - |sign(k-h)|) + (-1)^{k-h} |sign(k-h)| \times \\ &\times \frac{i^l}{2\pi} \sum_{s=1}^l \frac{l! \pi^s}{s! [i(k-h)]^{l-s+1}} [(-1)^s - 1], \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{kh}^{(l)nm} &= sign(h-k) \delta^{nm} \left[\sum_{s=1}^{l+1} (-1)^{(1+sign(h-k))(2l-s+1)/2} \times \right. \\ &\times \frac{l! i^{l-s}}{\pi^{l-s} (l-s+1)! [h-k]^s} (-1)^{-s-2(h+k)} 2^{nl-s-1} [2^{l+1} ((-1)^{4h+s} + (-1)^{4k+1})] - \\ &\left. - 2^s [(-1)^{3k+h+l} + (-1)^{3k+h+s}] \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

В работе построены два фильтра: высокочастотный и низкочастотный. В качестве коэффициентов для высокочастотного и низкочастотного фильтров использованы коэффициенты связности. Исходное изображение раскладывается на две составляющие - высокочастотные детали (состоящие в основном из резких перепадов яркости), и слаженную уменьшенную версию оригинала. Это достигается применением пары фильтров, причём каждая из полученных

составляющих вдвое меньше исходного изображения. При этом используются фильтры с конечным импульсным откликом, в которых пиксели, попавшие в небольшое "окно", умножаются на заданный набор коэффициентов, полученные значения суммируются, и окно сдвигается для расчёта следующего значения на выходе.

Для того, чтобы было удобно считать обратную матрицу потребуем также ортогональности преобразования. Тогда поиск обратной матрицы сведётся к транспонированию.

Алгоритм сжатия изображений на основе вейвлетов дробного порядка:

1. Загрузить изображение из файла.
2. Ввести значение дробной размерности.
3. Разложить изображение на высокочастотные детали (получить байтовый массив RGB-значений).
4. Получить слаженную уменьшенную версию оригинала (Перекодировать RGB в YCrCb с квантованием итоговых цветовых компонентов).
5. Применить вейвлет.

Литература

1. *Cattani C.* Shannon Wavelets for the Solution of Integrodi erential Equations, Mathematical Problems in Engineering, vol. 2010, Article ID 408418, 22 p., (2010), 1-24, doi:10.1155/2010/408418.
2. *Cattani C.* Fractional calculus and Shannon Wavelet, Mathematical Problems in Engineering, vol.2012, Article ID 502812, 26 p., (2012).
3. *Бейбалаев В.Д., Ибиров Т.И.* Об одном алгоритме подавления шума в изображениях на основе обобщенных дробных дифференциальных операторов Римана-Лиувилля. Вестник Дагестанского государственного университета. 2015. Т. 30. Вып. 6. С. 93-98.

УДК 517.927.5

О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОМ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ КРАЕВОГО УСЛОВИЯ АНТИПЕРИОДИЧЕСКОГО ТИПА

(© Иманбаев Н.С.)

Институт математики и математического моделирования КН МОН РК,
Южно-Казахстанский государственный педагогический институт

(Казахстан, Шымкент)

e-mail: imanbaevnur@mail.ru

В пространстве $L_2(0, 1)$ рассмотрим оператор L_0 , порожденный обыкновенным дифференциальным выражением

$$L_0(u) \equiv -u''(x) + q(x)u(x), \quad q(x) \in C[0, 1], \quad 0 < x < 1 \quad (1)$$

и краевыми условиями общего вида

$$U_j(u) = a_{j1}u'(0) + a_{j2}u'(1) + a_{j3}u(0) + a_{j4}u(1) = 0, \quad j = 1, 2. \quad (2)$$

В случае, когда краевые условия (2) являются усиленно регулярными, из результатов В.П. Михайлова [1] и Г.М. Кесельмана [2] следует базисность Рисса в системе собственных и присоединенных функций (СиПФ) задачи. В случае, когда краевые условия не усиленно регулярные, вопрос о базисности систем СиПФ остается еще открытым.

Случай образующий тип I, в частности антипериодического типа с интегральным возмущением будет предметом наших исследований в настоящей работе. В настоящей работе рассматривается спектральная задача при $q(x) \equiv 0$, с интегральным возмущением одного из краевых условий (2) типа I:

$$L_1(u) \equiv -u''(x) = \lambda u(x), \quad 0 < x < 1, \quad (3)$$

$$U_1(u) \equiv u(0) + u(1) = 0, \quad (4)$$

$$U_2(u) \equiv u'(0) + u'(1) = \int_0^1 \overline{p(x)}u(x) dx, \quad p(x) \in L_1(0, 1). \quad (5)$$

Из работы [3] следует, что система СиПФ задачи (3) - (5) полна и минимальна в $L_2(0, 1)$. При этом система СиПФ при любых $p(x)$ образует базис Рисса со скобками. Нашей задачей является построение характеристического определителя задачи (3) - (5).

Функцию $p(x)$ представим в виде ряда Фурье по тригонометрической системе:

$$p(x) = \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(2(k-1)\pi)x + b_k \sin(2(k-1)\pi)x]. \quad (6)$$

Теорема. *Характеристический определитель антипериодической спектральной задачи с возмущенными краевыми условиями (3)-(5) представим в виде*

$$\Delta_1(\lambda) = 2 \left(1 + \cos \sqrt{\lambda} \right) - 2 \sin \sqrt{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{(2k-1)\pi}{\lambda - ((2k-1)\pi)^2},$$

где $\Delta_0(\lambda)$ – характеристический определитель невозмущенной спектральной антипериодической задачи, b_k – коэффициенты разложения (6) функции в тригонометрический ряд Фурье.

Работа выполнена при финансовой поддержке финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК (грант № 0825/ГФ4).

Литература

1. *Михайлова В.П.* О базисах Рисса в $L^2(0,1)$ // ДАН СССР. 1962. Т. 144. № 5. С. 981–984.
2. *Кесельман Г.М.* О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов// Известия вузов. Математика. 1964. № 2. С. 82–93.
3. *Шкаликов А.А.* О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями// Вестник МГУ. Математика и механика. 1982. № 6. С. 12–21.

UDC 517.927

SPECTRAL PROBLEM FOR THE SECOND ORDER ORDINARY DIFFERENTIAL OPERATOR WITH BOUNDARY LOAD

© Imanbaev N.S.

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling (Kazakhstan, Almaty)
Sout Kazakhstan State Pedagogical Institute (Kazakhstan, Shymkent)
e-mail: imanbaev@math.kz

In the space $L_2(0, 1)$ we consider an operator L_0 , generated by the ordinary differential expression and boundary value conditions:

$$l(y) = -y''(x) + q(x)y(x), \quad 0 < x < 1, \quad (1)$$

$$U_j(y) \equiv \sum_{k=0}^1 [\alpha_{jk}y^{(k)}(0) + \beta_{jk}y^{(k)}(1)] = 0, \quad j = 1, 2. \quad (2)$$

Suppose, that coefficient of the equation $q(x) \in C[0, 1]$ and the forms $U_j(y)$ are linear independent. As in Naymark we complete the system of the forms U_1, U_2 by some forms U_3, U_4 to linear independent system of 4 forms U_1, \dots, U_4 . Then there exist linear homogenous forms V_4, \dots, V_1 of the form: $V_j(v) \equiv \sum_{k=0}^1 [\alpha_{jk}^*v^{(k)}(0) + \beta_{jk}^*v^{(k)}(1)]$, $j = \overline{1, 4}$, that the

Lagrange formula holds: $\int_0^1 l(y) \overline{v(x)} dx - \int_0^1 y(x) \overline{l^*(v)} dx = \sum_{j=1}^4 U_j(y) \overline{V_{5-j}(v)}$.

Here $l^*(v) = -v''(x) + \overline{q(x)}v(x)$ is a dual differential expression.

Let L_1 be an operator in $L_2(0, 1)$, given by the expression (1) and "perturbed" boundary value conditions:

$$\begin{aligned} U_j(u) &= 0, \quad j = \overline{1, 2}, \quad j \neq m, \\ U_m(u) &= \int_0^1 \overline{p_m(x)} u(x) dx, \quad p_m(x) \in L_2(0, 1). \end{aligned} \tag{3}$$

Furthermore, we will assume, that unperturbed operator L_0 has a system of E&AF, forming Riesz basis in $L_2(0, 1)$. Then E&AF of the adjoint operator L_0^* also form Riesz basis. Let λ_k^0 be eigenvalues of the operator L_0 of $m_k^0 + 1$ multiplicity, which correspond to the eigenfunctions $y_{k0}^0(x)$ and chain of associated functions $y_{kj}^0(x)$, $j = \overline{1, m_k^0}$. Then biorthogonal system consists of eigenfunctions $v_{km_k^0}^0(x)$ and associated functions $v_{kj}^0(x)$, $j = \overline{0, m_k^0 - 1}$ of the operator L_0^* , corresponding to the eigenvalues $\bar{\lambda}_k^0$.

The main result of the paper is:

Theorem. *Let the problem (1) - (2) have eigenvalues λ_k^0 and E&AF, forming Riesz basis. Then the characteristic determinant of the problem (1), (3) with perturbed boundary value conditions can be presented as form*

$$\Delta_1(\lambda) = \Delta_0(\lambda) \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{j=0}^{m_k^0} \overline{a_{kj}} \left(\sum_{r=0}^{m_k^0-j} \frac{(\lambda_k^0)^{\frac{n-1}{n}r}}{[\lambda - \lambda_k^0]^{r+1}} \overline{V_{4-i+1}(v_{kj+r}^0)} \right) \right] \right),$$

where $\Delta_0(\lambda)$ is the characteristic determinant of the problem (1) - (2); V_{4-m+1} are linear homogenous forms, arising in the construction of boundary value conditions dual to the unperturbed problem; $\{v_{kj}^0\}$ are E&AF of the dual unperturbed problem; a_{kj} are Fourier coefficients of biorthogonal expansion by this system of the function $p_m(x)$:

$$p_m(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{j=0}^{m_k^0} a_{kj} v_{kj}^0(x) \right], \quad a_{kj} = (p_m(x), v_{kj}^0(x))_{L_2(0,1)}.$$

Throughout this note we mainly use techniques from our works [1–3].

Research supported by the grant 0825/GF4 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

References

1. *Sadybekov M.A., and Imanbaev N.S.* On the basis property of root functions of a periodic problem with an integral perturbation of the boundary condition// Differential Equations. 2012. V. 48, № 6. P. 896-900.
2. *Imanbaev N.S., and Sadybekov M.A.* Stability of basis property of a periodic problem with nonlocal perturbation of boundary conditions// AIP Conf. Proc. 2016. V. 1759. P. 020080. <http://dx.doi.org/10.1063/1.4959694>.
3. *Imanbaev N.S.* On the basis property of root functions of a periodic problem with an integral perturbation of the boundary condition// Electronic Journal of Differential Equations. 2016. V. 2016, № 87. P. 1-8.

УДК 517.95

ОБ УСЛОВИЯХ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТНОГО ПОРЯДКА

© Иргашев Б.Ю.

Наманганский инженерно-педагогический институт (Узбекистан, Наманган)
e-mail: bahromirgasev@gmail.com

Рассмотрим уравнение в частных производных

$$Lu = D_t^{2n}u(x, t) - D_x^{2n}u(x, t) = 0. \quad (1)$$

в прямоугольной области $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$, где l, T - заданные положительные числа,

Задача А. Найти в области Ω функцию $u(x, t)$ удовлетворяющую условиям

$$u \in C^{2n-1}(\overline{\Omega}) \cap C^{2n}(\Omega), Lu(x, t) \equiv 0, \quad (x, t) \in \Omega,$$

$$D_x^k u(0, t) = D_x^k u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad D_t^k u(x, 0) = \varphi_k(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$D_t^k u(x, T) = \psi_k(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

где $k = 0, \dots, n - 1$, $\varphi_k(x), \psi_k(x)$ - заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие однородным краевым условиям в точках $x = 0, x = l$.

Уравнение (1), где краевые условия задаются для производных четных порядков (задача Дирихле), исследовалась в работе [1], в которой показано, что иррациональность отношения T/l является

необходимым и достаточным условием единственности решения задачи Дирихле для уравнения (1), при любом $n \in N$. Особенность задачи Дирихле состоит в том, что при ее решении методом Фурье собственные функции состоят из синусов, а собственные значения явно вычисляются. Относительно задачи А, этого уже сказать нельзя. Сделав некоторые преобразования, в дальнейшем будем исследовать задачу А для уравнения

$$Lu = a^{2n} D_t^{2n} u(x, t) - D_x^{2n} u(x, t) = 0, \quad (2)$$

где $a = T/l$, в квадрате $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t < 1\}$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Если существует решение задачи А, то оно единственно только тогда, когда не выполняется условие*

$$a = \frac{\lambda_m}{\lambda_k}, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

где λ_i^{2n} - собственные значения следующей спектральной задачи:

$$\begin{cases} X^{(2n)}(x) = (-1)^n \lambda^{2n} X(x), \lambda > 0, \\ X^{(k)}(0) = X^{(k)}(1) = 0, \quad k = \overline{0, n-1}. \end{cases}$$

Заметим, что выше указанный результат справедлив и для более общих краевых условий (лишь бы краевые условия были идентичны относительно переменных x и t). К примеру, для задачи Дирихле, рассмотренной в работе [1], имеем $a = \frac{\lambda_m}{\lambda_k} = \frac{\pi m}{\pi k} = \frac{m}{k}$, то есть для единственности решения задачи Дирихле необходимо и достаточно, чтобы число a (отношение длин сторон прямоугольника) не было рациональным, что и было показано в вышеупомянутой работе.

Литература

1. Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнений с частными производными высоких порядков // Математические заметки. 2015. Т. 97, №2. С. 262–276.

UDC 517.958

ON A MODEL OF OSCILLATIONS OF A THIN FLAT PLATE WITH A VARIETY OF MOUNTS ON OPPOSITE SIDES

© Iskakova U.A.

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling (Kazakhstan, Almaty)
e-mail: iskakova@math.kz

The theory of vibrations of thin flat plates is well elaborated to the present moment. Mathematical problems related to formulation and justification of well-posedness of statement of problems for stationary and non-stationary models are investigated detailed enough. Questions of optimal controlling of these vibrations have been studied.

In the present paper we consider the modeling mathematical problem, which arises when one of the sides of the flat plate is free. The mathematical modeling leads to the problem for the homogeneous biharmonic equation with different boundary conditions on opposite boundaries. This problem appears to be ill-posed. The most known example of an ill-posed boundary value problem is the Cauchy problem for the Laplace equation.

Problem. *Find in $D = \{(x, y) : 0 < x < \pi, 0 < y < l\}$ a solution to the biharmonic equation*

$$\Delta^2 u \equiv u_{xxxx}(x, y) + 2u_{xxyy}(x, y) + u_{yyyy}(x, y) = 0, \quad (x, y) \in D, \quad (1)$$

satisfying boundary conditions in the first spatial variable x :

$$u|_{x=0} = 0, \quad \Delta u|_{x=0} = 0; \quad u|_{x=\pi} = 0, \quad \Delta u|_{x=\pi} = 0; \quad 0 \leq y \leq l; \quad (2)$$

and boundary conditions in the second spatial variable y :

$$u|_{y=0} = \varphi_1(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = \varphi_2(x), \quad 0 \leq x \leq \pi; \quad (3)$$

$$\Delta u|_{y=l} = \psi_1(x), \quad \frac{\partial \Delta u}{\partial y}|_{y=l} = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq \pi. \quad (4)$$

Definition. *The function $u \in C^4(D) \cap C^3(\bar{D})$ satisfying equation (1) and boundary conditions (2) - (4) we will call a classic solution to the problem (1)-(4).*

Consider problem (1) - (4) in sense of a generalized solution. The most suitable notion for demonstrating conditions of stability is the notion of a strong solution.

Definition. *The function $u(x, y) \in L_2(D)$ we will call a strong solution to problem (1) - (4), if there exists the sequence of the smooth functions $u_n \in C^4(\bar{D})$, such that $u_n \rightarrow u$ takes place in $L_2(D)$ for $n \rightarrow \infty$ and*

$$u_n(x, 0) \rightarrow \varphi_1, \quad (u_n)_y(x, 0) \rightarrow \varphi_2, \quad (\Delta u_n)(x, l) \rightarrow \psi_1$$

$$\text{and } ((\Delta u_n)_y)(x, l) \rightarrow \psi_2 \text{ in } L_2(0, \pi).$$

The main result of the paper is:

Theorem. Let $\varphi_i \in L_2(0, \pi)$, $\psi_i \in L_2(0, \pi)$, $i = 1, 2$. A strong solution to problem (1) - (4) exists iff the numerical series converge

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} e^{2kl} |k\varphi_{1k} + \varphi_{2k}|^2 < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^7} e^{4kl} |k\psi_{1k} - \psi_{2k}|^2 < \infty.$$

Here φ_{ik} and ψ_{ik} are Fourier coefficients of the expansion according to the orthonormal basis $\left\{ \sqrt{2/\pi} \sin(kx) \right\}_{k=1}^{\infty}$ of the functions $\varphi_i(x)$ and $\psi_i(x)$ respectively.

Throughout this note we mainly use techniques from our works [1–4].

Research supported by the grant 0820/GF4 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

References

1. Kal'menov T.Sh., Iskakova U.A. A criterion for the strong solvability of the mixed Cauchy problem for the Laplace equation// Doklady Mathematics. 2007. V. 75, № 3. P. 370-373.
2. Kal'menov T.Sh., Iskakova U.A. A method for solving the Cauchy problem for the Laplace equation// Doklady Mathematics. 2008. V. 78, № 3. P. 874-876.
3. Kal'menov T.Sh., Iskakova U.A. Criterion for the strong solvability of the mixed Cauchy problem for the Laplace equation// Differential Equations. 2009. V. 45, № 10. P. 1460-1466.
4. Iskakova U.A. On an ill-posed model of oscillations of a flat plate with a variety of mounts on opposite sides// AIP Conf. Proc. 2016. V. 1759. P. 020107. <http://dx.doi.org/10.1063/1.4959721>.

УДК 517.956

ТИПЫ РЕШЕНИЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ РОТОРА

© Исламов Г.Г.

Удмуртский государственный университет (Россия, Ижевск)
e-mail: ggislamv@gmail.com

Для решения спектральной задачи для ротора $\mu \vec{F} = \text{rot } \vec{F}$ с ненулевым значением спектрального параметра μ линии и поверхности тока идентичны вихревым линиям и поверхностям, которые обладают определёнными свойствами структурной устойчивости, открытыми ещё Гельмгольцем [1] (см. также [2-4]). Спектральная задача для ротора в криволинейной системе координат (α, β, γ) с подвижным репером

$$(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial \gamma} \right), \quad \vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

распадается на две хорошо изученные в литературе задачи: восстановление векторного поля (G_1, G_2, G_3) по его ротору

$$\frac{\partial G_3}{\partial \beta} - \frac{\partial G_2}{\partial \gamma} = \mu V \cdot F_1, \quad \frac{\partial G_1}{\partial \gamma} - \frac{\partial G_3}{\partial \alpha} = \mu V \cdot F_2, \quad \frac{\partial G_2}{\partial \alpha} - \frac{\partial G_1}{\partial \beta} = \mu V \cdot F_3,$$

и умножение матрицы на вектор: $(G_1, G_2, G_3) = (F_1, F_2, F_3)T(\alpha, \beta, \gamma)$. Здесь $T(\alpha, \beta, \gamma)$ есть симметричная матрица Грамма локального репера $(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3)$, $V = [\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3]$ — его ориентированный объём. При этом для решения спектральной задачи имеет место два разложения: по векторам подвижного репера $\vec{F} = F_1 \vec{r}_1 + F_2 \vec{r}_2 + F_3 \vec{r}_3$ и векторам биортогонального к нему базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) \times \times T(\alpha, \beta, \gamma)^{-1}$ в следующем виде $\vec{F} = G_1 \vec{e}_1 + G_2 \vec{e}_2 + G_3 \vec{e}_3$. Легко понять, что у набора (G_1, G_2, G_3) не может быть двух нулевых координат одновременно. Однако, может быть ровно одна нулевая координата. В ортогональной системе этим же свойством обладает и набор (F_1, F_2, F_3) . В работе показано, что в неортогональной системе криволинейных координат последнее утверждение неверно. Построены соответствующие примеры.

Литература

1. Гельмгольц Г. Основы вихревой теории. М.: Ижевск. Институт компьютерных исследований, 2002.
2. Пуанкаре А. Теория вихрей. М.: Ижевск. НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2000.
3. Козлов В.В. Общая теория вихрей: М.: Ижевск. Институт компьютерных исследований, 2013.
4. Вилля Г. Теория вихрей. Л. М.: ОНТИ, 1936.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ОДНОЙ СПЕЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© Исраилов С.В, Сагитов А.А.

Чеченский государственный университет (Россия, Грозный)

Чеченский государственный педагогический университет (Россия, Грозный)

e-mail: segitov@mail.ru

Рассмотрим систему вида:

$$\begin{cases} f_i(y, y_1, y_2, \dots, y_n, u, u', u'', \dots, u^{(n-1)}) = 0, i = \overline{1, n}, \\ u^{(m)} = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n, u, u', u'', \dots, u^{(m-1)}). \end{cases} \quad (1)$$

Функции $f_i, i = \overline{1, n}$, f определены и непрерывны в области $D = \{x[a, b], |y_i| \leq d_i, i = \overline{1, n}, |U^k| \leq d_k^*, k = \overline{1, n-1}\}$, где d_i, d_k^* данные числа. Решением системы (1) считается любая последовательность функций $y_i(x), i = \overline{1, n}$, $U(x)$, удовлетворяющих при $x \in [a, b]$ системе (1), для этого функции $y_i(x) i = \overline{1, n}$, должны быть непрерывно дифференцируемы, а $u(x)$ функция должна иметь непрерывные производные до m -го порядка включительно по $x \in [a, b]$. Дифференциальное уравнение по u имеет порядок m и для него должны быть заданы краевые условия.

Здесь рассмотрим случай, когда заданы условия в форме задачи Коши

$$U^{(k)}(x_0) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (2)$$

Наша цель доказать теоремы существования и единственности решения задачи (1),(2). Для этого в начале предположим, что в области D функции $f_i, i = \overline{1, n}$, имеют непрерывные частные производные по всем своим аргументам и следующий определитель n -го порядка отличен от нуля

$$\Delta(x, y_1, y_2, \dots, y_n, u, u', \dots, u^{(n-1)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} \frac{\partial f_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{bmatrix} \neq 0. \quad (3)$$

В начале допустим, что задача (1), (2) имеет решение $y_1(x)$, $y_2(x)$, \dots , $y_n(x)$, $U(x)$ и равенства из (1) являются тождествами.

Тогда их можно продифференцировать по x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial y_1} y'_1(x) + \frac{\partial f_i}{\partial y_2} y'_2(x) + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial y_n} y'_n(x) &= -\frac{f_i}{\partial x} - \frac{\partial f_i}{\partial u} u'(x) - \frac{\partial f_i}{\partial u'} u''(x) - \\ &\quad - \dots - \frac{\partial f_i}{\partial u^{(n-1)}} u^n(x) = f_i^*(x), y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), \\ u(x), u'(x), \dots, u^{(n-1)}(x), i &= \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (4)$$

С учетом (3) из (4) можно найти

$$y'_k(x) = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta_{ik}(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), U(x), U'(x), \dots, U^{(m-1)}(x) f_i^*(x),}{\Delta(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))}, \quad (5)$$

$$\frac{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), u(x), \dots, u^{(m-1)}}{u(x), u'(x), \dots, u^{(m-1)}(x)},$$

где Δ_{ik} алгебраические дополнения элемента k -го столбца определителя Δ .

Далее, из второго тождества системы (1) с учетом условий (2) имеем

$$\begin{aligned} U^{(j)}(x) &= \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{m-j-1}}{(m-j-1)!} \times \\ &\times f(t, y_1(t), \dots, y_n(t), u(t), u'(t), \dots, u^{(n-1)}(t)) dt, j = 0, 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (6)$$

Если задать еще условия

$$y_k(x_0) = 0, k = \overline{1, n}, \quad (7)$$

то из (5) получим интегральное тождество

$$y_k(x) = \int_{x_0}^x F_k(t, y_1(t), \dots, y_n(t), u(t), u'(t), \dots, u^{(n-1)}(t)) dt, k = \overline{1, n}, \quad (8),$$

где $F_k, k = \overline{1, n}$, краевые части тождеств (5).

Таким образом, имеем систему тождеств (6), (8). Если теперь на них смотреть как на систему интегро-дифференциальных уравнений, то из них методом функционального анализа можно получить теоремы существования решения исходной краевой задачи.

ON A HEAT TRANSFER MODEL FOR THE LOCALLY INHOMOGENEOUS INITIAL DATA

© Kal'menov T.Sh.¹, Arepova G.D.²

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling (Kazakhstan, Almaty),
Al-Farabi Kazakh National University (Kazakhstan, Almaty)

¹e-mail: kalmenov@math.kz

²e-mail: arepova@math.kz

We consider a model case of the problem of heat diffusion in a homogeneous body with a special initial state. The peculiarity of this initial state is its local inhomogeneity. That is, there is a closed domain Ω inside a body, the initial state is constant out of the domain. Mathematical modeling leads to the problem for a homogeneous multi-dimensional diffusion equation.

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a bounded domain with sufficiently smooth boundary $\partial\Omega$. Through D we denote a cylindrical domain $D = \Omega \times (0, T)$. In D we consider a surface heat potential

$$u = \int_{\Omega} \varepsilon_n(x - \xi, t) u_0(\xi) d\xi, \quad (1)$$

where

$$\varepsilon_n(x, t) = \theta(t)(2a\sqrt{\pi t})^{-n} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}$$

is a fundamental solution of the heat equation

$$\diamondsuit u \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \Delta_x \right) u = 0. \quad (2)$$

We construct the boundary conditions on the boundary of the domain Ω , which can be characterized as "transparent" boundary conditions. We separately consider a special case – a model of redistribution of heat in a uniform linear rod, the side surface of which is insulated in the absence of (internal and external) sources of heat and of locally inhomogeneous initial state.

Throughout this note we mainly use techniques from our works [1–4].

Research supported by the grant 4075/GF4 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

References

1. Kal'menov T. Sh., and Suragan D. Boundary conditions for the volume potential for the polyharmonic equation // Differential Equations. 2012. V. 48, № 4. P. 604-608.
2. Kal'menov T. Sh., and Otelbaev M. Boundary Criterion for Integral Operators// Doklady Mathematics. 2016. V. 93, № 1. P. 58-61.
3. Kal'menov T. Sh., and Arepova G.D. On a boundary condition of the surface heat potential // AIP Conf. Proc. 2015. V. 1676. P. 020054. <http://dx.doi.org/10.1063/1.4930480>.
4. Kal'menov T. Sh., and Arepova G.D. On a heat transfer model for a locally inhomogeneous initial data // AIP Conf. Proc. 2016. V. 1759. P. 020026. <http://dx.doi.org/10.1063/1.4959640>.

УДК 551.576

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ РАСЧЕТЫ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ИСПАРЕНИЯ ОБЛАЧНЫХ КАПЕЛЬ

© Калов Х.М., Калов Р.Х.

Федеральное государственное бюджетное учреждение
"Высокогорный геофизический институт" Росгидромета
(Россия, Нальчик)
e-mail: vgikbr@rambler.ru

Введение. Для рассеяния тёплых туманов используется тепловой метод [1], основанный на искусственном повышении температуры и давления в тумане. Для испытания этого метода нами проведены натурные эксперименты, в которых использованы высококалорийные вещества (тепловые заряды) в двух режимах их сжигания: в режиме детонации с образованием воздушных волн сжатия, распространяющихся в облачной среде со скоростями $450 \div 600 \text{ м}\cdot\text{с}^{-1}$ и в режиме горения ($T = 2000 - 3000^\circ\text{C}$), при котором происходит мощное тепловое излучение ($10^4 \text{ ккал}\cdot\text{кг}^{-1}$).

В волне сжатия температура T и давление P повышаются по сравнению с их значениями в невозмущенном воздухе. Эти изменения способствуют испарению облачных капель в ударной волне и в поле излучения взрывных газов, нагретых до высокой температуры. Под влиянием этих двух факторов образуются зоны просветления в тумане, имеющие в общих чертах форму шара. Радиус R такой зоны зависит от мощности заряда и водности тумана.

Зависимость избыточного давления ΔP в ударной волне от расстояния R до центра взрыва определяется формулой М.А. Садовского [2]

$$\Delta P = 7 \frac{q}{R^3} \left(\frac{V}{V_T} \right) + 2.7 \frac{q^{2/3}}{R^2} \left(\frac{V}{V_T} \right)^{2/3} + 0.84 \frac{q^{1/3}}{R} \left(\frac{V}{V_T} \right)^{1/3}, \quad (1)$$

где V – удельная энергия взрывчатого вещества; V_T – удельная энергия тротила; R выражено в м; q – в кг; ΔP – в атм.

При удалении от центра взрыва амплитуда ударной волны быстро уменьшается, ударная волна становится слабой. На этой стадии зависимость между ΔP и приращением ΔT выражается формулой [3]

$$\Delta T = \frac{\Delta P}{\rho_0 C_p}, \quad (2)$$

где ρ_0 – плотность невозмущенного воздуха, C_p – теплоемкость воздуха при постоянном давлении.

В таблице представлены значения ΔP и ΔT на различных расстояниях R от центра взрыва и при различных значениях веса заряда q , при $\rho_0 = 1 \text{ кг}\cdot\text{м}^{-3}$, $C_p = 1 \text{ дж}\cdot\text{кг}^{-1}\cdot\text{град}^{-1}$ и $V = V_T$. Нижняя строка в каждой колонке относится к взрыву на поверхности грунта.

Таблица 1

Значения ΔP и ΔT при различных R и q				
$R, \text{ м}$		50	100	150
$q=10 \text{ кг}$	$\Delta P, \text{ атм.}$	0,042	0,020	0,012
		0,057	0,026	0,017
	$\Delta T, {}^\circ\text{C}$	4,20	2,0	1,2
		5,70	2,6	1,7
$q=50 \text{ кг}$	$\Delta P, \text{ атм.}$	0,078	0,040	0,021
		0,110	0,047	0,027
	$\Delta T, {}^\circ\text{C}$	7,8	4,0	2,1
		11,0	4,7	2,7
$q=100 \text{ кг}$	$\Delta P, \text{ атм.}$	0,107	0,046	0,030
		0,150	0,062	0,038
	$\Delta T, {}^\circ\text{C}$	10,7	4,6	3,0
		15,0	6,2	3,8

Из данных таблицы видно, что при мощных взрывах ($q = 100$ кг) на расстояниях порядка 150...200 метров от места взрыва температура на фронте ударной волны выше, чем температура невозмущенного воздуха, на 6,2 и 3,4°C соответственно.

На основе математических расчетов и экспериментов получено, что время τ полного испарения капли внутри шара радиусом R рассчитывается по формуле:

$$\tau = \frac{\rho_k \rho_0 C_p R_n T_0^2 r_0^2 R}{2\beta \rho_n(T_0) L q^{1/3} \Delta}, \quad (3)$$

где $\rho_k = 10^3 \text{ кг}\cdot\text{м}^{-3}$; $\rho_0 = 1,2 \text{ кг}\cdot\text{м}^{-3}$; $C_p = 10^3 \text{ дж}\cdot\text{кг}^{-1}\cdot\text{град}^{-1}$; $R_n = 0,47 \cdot 10^3 \text{ дж}\cdot\text{кг}^{-1}\cdot\text{град}^{-1}$; $T_0 = 280 \text{ }^\circ\text{К}$; $r_0 = 10^{-6} \bar{r}_0$, где \bar{r}_0 – средний радиус облачных капель в мкм; $R = 50 \text{ м}$; $\beta = 0,84 \cdot 10^4 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{кг}^{-1/3}$; $\rho_n(T_0) = 7,8 \cdot 10^{-3} \text{ кг}\cdot\text{м}^{-3}$; $L = 2,5 \cdot 10^6 \text{ дж}\cdot\text{кг}^{-1}\cdot\text{град}^{-1}$; при $q = 10 \text{ кг}$; $\Delta = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2\cdot\text{с}^{-1}$.

Радиус шара R в облачной среде, внутри которого все капли с радиусами $r \leq r_0$ полностью испаряются,

$$R = \frac{5}{\bar{r}_0^4} q \left(\frac{V}{V_T} \right), \quad (4)$$

где R выражено в м, q – в кг, \bar{r}_0 – в мкм.

При $q = 10 \text{ кг}$, $V = V_T$ и $\bar{r}_0 = 1 \text{ мкм}$ по формуле (4) получаем: $R_1 = 50 \text{ м}$, $R_2 = 200 \text{ м}$, $R_3 = 800 \text{ м}$; где R_1 – когда взрыв производится на высоте $h = 30 \dots 200 \text{ м}$; R_3 – когда $h = 2 \dots 3 \text{ м}$ от поверхности земли.

Выводы.

1. Распространение ударных волн в облачной среде приводит к созданию зоны просветления вследствие испарения облачных капель под действием повышения температуры и давления на волне сжатия по сравнению с их значениями в невозмущенном воздухе. При мощных взрывах (см. таблицу) на расстояниях 100 \div 200 м от места взрыва температура на фронте ударной волны еще существенно отличается от температуры в невозмущенной среде (на 6,2 и 3,4°C соответственно).

2. Получена формула для расчета времени τ полного испарения капель тумана в виде (3).

3. Величина радиуса шара R_i , внутри которого все капли тумана полностью испаряются, зависит от высоты взрыва теплового

заряда над поверхностью грунта. Если взрыв заряда производится в тумане на относительно большой высоте ($h = 50 \div 200$ м), то радиус шара R_i определяется по формуле (4) ($R = 50$ м). Если же взрыв происходит на поверхности грунта, то радиус увеличивается в 4 раза ($R_2 = 200$ м). Когда заряд взрывается на небольшой (1 – 2 м) высоте над грунтом, в тумане распространяются одна за другой две ударные волны – прямая и отраженная, разделенные коротким промежутком времени в миллисекунды. При этом избыточное давление в прямой и отраженной ударных волнах складываются и радиус шара $R_3 = 800$ м.

Литература

1. Калов Х.М., Калов Р.Х. Физические основы, методы и средства активных воздействий на грозо-градовые облака и туманы. Нальчик: Изд. М. и В. Котляровых (ООО "Полиграфсервис и Т") 2010. 220 с.
2. Покровский Г.И. Взрыв. М.: Недра, 1967. 411 с.
3. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966. 687 с.

УДК 517.95

ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

© Карапетова Л.Л.

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
"Институт прикладной математики и автоматизации" (Россия, Нальчик)
e-mail: k.liana86@mail.ru

Рассмотрим уравнение

$$D_{0t}^\alpha u(x, t) + (-1)^n \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n}} = f(x, t), \quad (1)$$

где $n \in \mathbb{N}$, D_{0t}^α – оператор дробного (в смысле Римана-Лиувилля) интегродифференцирования порядка α , $0 < \alpha < 1$ [1].

При $\alpha = 1$ в работе [2] для уравнения (1) доказана единственность решения задачи Коши в классе функций быстрого роста. Для уравнения теплопроводности в работе [3] доказана теорема единственности. Для уравнения с регуляризованной дробной производной в работе [4] была доказана теорема единственности в классе

функций экспоненциального роста. В работе [5] построено решение задачи Коши и доказана теорема единственности в классе функций, удовлетворяющих аналогу условия А.Н. Тихонова.

В данной работе для уравнения (1) доказана теорема единственности решения задачи Коши в классе функций быстрого роста.

(Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-01-00462 А).

Литература

1. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. М.: Высш. шк., 1995. 301 с.
2. *Ладыженская О.А.* О единственности решения задачи Коши для линейного параболического уравнения// Математический сборник. 1950. Т. 27(69), № 2. С. 175-184.
3. *Тихонов А.Н.* Теоремы единственности для уравнения теплопроводности// Математический сборник. 1935. Т. 42, № 2. С. 199-216.
4. *Кочубей А.Н.* Диффузия дробного порядка// Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26, № 4. С. 660-670.
5. *Псху А.В.* Фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения дробного порядка// Изв. РАН Сер. матем. 2009. Т. 73, № 2. С. 141-182.

УДК 517.956

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ИТЕРИРОВАННОГО ОБОБЩЕННОГО ОПЕРАТОРА ЭЙЛЕРА-ПУАССОНА-ДАРБУ

© Каримов Ш.Т.

Ферганский государственный университет (Узбекистан, Фергана)
e-mail: shkarimov09@rambler.ru

Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ - точка n -мерного евклидового пространства R^n . В области $\Omega = \{(x, t) : x \in R^n, t \in R^1, t > 0\}$ рассмотрим задачу Коши для многомерного уравнения высокого порядка вида

$$L_{\gamma, \lambda}^m(u) \equiv (B_\gamma^t - \Delta_x + \lambda^2)^m u = 0, \quad (x, t) \in \Omega, \quad (1)$$

с полуоднородными начальными условиями

$$\frac{\partial^{2k} u}{\partial t^{2k}} \Big|_{t=0} = \varphi_k(x), \quad \frac{\partial^{2k+1} u}{\partial t^{2k+1}} \Big|_{t=0} = 0, \quad x \in R^n, \quad k = \overline{0, m-1}, \quad (2)$$

или

$$\frac{\partial^{2k} u}{\partial t^{2k}} \Big|_{t=0} = 0, \quad t^{2\gamma+1} \frac{\partial^{2k+1} u}{\partial t^{2k+1}} \Big|_{t=0} = \psi_k(x), \quad x \in R^n, \quad k = \overline{0, m-1}, \quad (3)$$

где $u = u(x, t)$, $B_\gamma^t \equiv \partial^2/\partial t^2 + [(2\gamma + 1)/t]\partial/\partial t$, $\Delta_x \equiv \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$, m - натуральное число, $\gamma, \lambda \in R$, $\gamma > -1/2$, здесь $\varphi_k(x)$, $\psi_k(x)$, $k = \overline{0, m-1}$ - заданные дифференцируемые функции.

Когда $\lambda = 0$, в работах [1], [2] получены представления решения поставленной задачи Коши. При этом решение, конструировано используя решение задачи Коши для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу (ЭПД). Последнее основано на том факте, что среднее сферическое достаточно гладкой функции удовлетворяет уравнению Дарбу [3]. Отправляясь от этого факта [4] получают формулу Кирхгофа для решений уравнений ЭПД, в том числе для волнового уравнения. Однако, когда $\lambda \neq 0$, этот факт не имеет места, поэтому этот подход неприменим. Необходимо применение нестандартного математического аппарата учитывающего специфику уравнений с сингулярными коэффициентами.

В качестве такого математического аппарата можно использовать оператор интегрирования дробного порядка Эрдейи-Кобера. Применение этого оператора позволяет сводить уравнения с младшим членом $\lambda^2 u$ и с сингулярным оператором Бесселя, который действует по одной или нескольким переменным, к не сингулярным уравнениям без младшего члена $\lambda^2 u$.

В работе Лоундеса [5] был введен и исследован обобщенный оператор Эрдейи-Кобера с функцией Бесселя в ядре

$$J_\lambda(\eta, \alpha) f(x) = 2^\alpha \lambda^{1-\alpha} x^{-2\alpha-2\eta} \int_0^x \frac{J_{\alpha-1}(\lambda\sqrt{x^2-t^2})}{(x^2-t^2)^{(1-\alpha)/2}} t^{2\eta+1} f(t) dt, \quad (4)$$

где $\alpha, \eta, \lambda \in R$, $\alpha > 0$, $\eta \geq -(1/2)$, $J_\nu(z)$ - функция Бесселя первого рода порядка ν .

Основные свойства оператора (4) можно найти в книге [6].

Пусть $[B_\eta^x]^0 = E$, E - единичный оператор, $[B_\eta^x]^m = [B_\eta^x]^{m-1}[B_\eta^x] = [B_\eta^x][B_\eta^x]...[B_\eta^x]$ - m -ая степень оператора Бесселя.

В работе [7] доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть $\alpha > 0$, $\eta \geq -(1/2)$, $f(x) \in C^{2m}(0, b)$, $b > 0$, функции $x^{2\eta+1}[B_\eta^x]^{k+1}f(x)$ интегрируемы в нуле и

$\lim_{x \rightarrow 0} x^{2\eta+1} \frac{d}{dx} [B_\eta^x]^k f(x) = 0$, $k = \overline{0, m-1}$. Тогда

$$[B_{\eta+\alpha}^x + \lambda^2]^m J_\lambda(\eta, \alpha) f(x) = J_\lambda(\eta, \alpha) [B_\eta^x]^m f(x).$$

Пусть функция $u(x, t) = u(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ непрерывно дифференцируема до порядка $2m$ по переменной t и порядка не меньше чем m по x . L_x - не зависящий от t линейный дифференциальный оператор любого конечного порядка по переменной $x \in R^n$.

Теорема 2. Пусть $\alpha > 0$, $\eta \geq -(1/2)$, функции $t^{2\eta+1} [B_\eta^t]^k u(x, t)$ интегрируемы при $t \rightarrow 0$ и $\lim_{t \rightarrow 0} t^{2\eta+1} \frac{\partial}{\partial t} [B_\eta^t]^k u(x, t) = 0$, $k = \overline{0, m-1}$. Тогда

$$(B_{\eta+\alpha}^t + \lambda^2 + L_x)^m J_\lambda^t(\eta, \alpha) u(x, t) = J_\lambda^t(\eta, \alpha) (B_\eta^t + L_x)^m u(x, t),$$

верхний индекс t в операторах означает переменную, по которой действуют эти операторы.

Применяя доказанные теоремы, найдена явная формула решения исследуемой задачи (1)–(2), при нечетном n , в виде

$$u(x, t) = l_n t^{1-2\alpha} \left\{ \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-1}{2}} \int_{|\xi-x|< t} \frac{\bar{J}_{\alpha-1} \left(\lambda \sqrt{t^2 - |\xi-x|^2} \right)}{[t^2 - |\xi-x|^2]^{1-\alpha}} f_0(\xi) d\xi + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{2^{-2k}}{k!(\alpha)_k} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-1}{2}} \int_{|\xi-x|< t} \frac{\bar{J}_{\alpha+k-1} \left(\lambda \sqrt{t^2 - |\xi-x|^2} \right)}{[t^2 - |\xi-x|^2]^{1-\alpha-k}} f_k(\xi) d\xi \right\},$$

где $f_k(x) = \sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j \Delta_x^j \Phi_{k-j}(x)$, $\Phi_k(x) = \sum_{j=0}^k a_j C_k^j \lambda^{2(k-j)} \varphi_j(x)$, $k = \overline{0, m-1}$, $a_j = \Gamma(\alpha + (2j+1)/2) / \Gamma((2j+1)/2)$, $C_k^j = k!/[j!(k-j)!]$ - биномиальные коэффициенты, $\alpha = \gamma + 1/2 > 0$, $l_n = [1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots \cdot (n-2)\omega_n \Gamma(\alpha)]^{-1}$, $\omega_n = 2\pi^{(n/2)} / \Gamma(n/2)$.

Аналогичная формула найдена и при четном n , а также и для задачи (1)–(3). Доказано, что полученные формулы, при определенных условиях на заданные начальные функции, являются единственными классическими решениями исследуемых задач.

Литература

1. Иванов Л.А. Задача Коши для некоторых операторов с особенностями// Дифференциальные уравнения. Минск, 1982. Т. 18 (6). С. 1020–1028.
2. Алдашев С.А. О задаче Коши для операторов распадающихся на множители с особенностями// Дифференциальные уравнения. 1981. Т. 17 (2). С. 247–255.
3. Weinstein A. On the wave equation and the equation of Euler-Poisson. In: Proc. Fifth Symp. Appl. Math., AMS, 1954. P. 137–147.
4. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 2. М.-Л.: ГИТТЛ, 1951.
5. Lowndes J.S. A generalization of the Erdélyi-Kober operators// Proc. Edinb. Math. Soc. 1970, 17, №2, P. 139–148.
6. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 702 с.
7. Каримов Ш.Т. Новые свойства обобщенного оператора Эрдэйи-Кобера и их приложения// Докл. АН РУз. 2014. №5. С. 11–13.

UDC 517.9

A DIFFERENCE SCHEME FOR THE TEMPERED TIME FRACTIONAL ALLERS' EQUATION

© Karova F.A.

Institute of Applied Mathematics and Automation (Russia, Nalchik)
e-mail: karova.fatimat@mail.ru

Abstract. Moisture movement in a capillary porous environment is described by the equation of Aller [1]. Solution of Dirichlet boundary value problem for the Allers' equation in differential and difference settings are studied. By the method energy inequalities, a priori estimate is obtained for the solution of the differential problems. The obtained results are supported by the numerical calculations carried out for test problems.

The Dirichlet boundary value problem.

In rectangle $\bar{Q}_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ let us study the boundary value problem

$$\partial_{0t}^{\alpha, \lambda} u = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \partial_{0t}^{\beta, \mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - q(x, t)u + f(x, t), \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (3)$$

where $\partial_{0t}^{\gamma, \delta} u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t e^{-\delta(t-s)} (t-s)^{-\gamma} u_s(x, s) ds$ is a tempered time fractional derivative of order γ , $0 < \gamma < 1$, and parameter $\delta \geq 0$, $0 < c_1 \leq k(x, t)$, $\eta(x, t) \leq c_2$, $\eta_t(x, t) \geq 0$, $q(x, t) \geq 0$ on \bar{Q}_T .

Theorem 1. If $k(x, t) \in C^{1,0}(\bar{Q}_T)$, $\eta(x, t) \in C^{1,1}(\bar{Q}_T)$, $q(x, t)$, $f(x, t) \in (\bar{Q}_T)$, $0 < c_1 \leq k(x, t)$, $\eta(x, t) \leq c_2$, $\eta_t(x, t) \geq 0$, then the solution $u(x, t)$ of the problem (1) – (3) satisfies a priori estimate

$$\begin{aligned} D_{0t}^{\alpha-1, \lambda} \|u\|_0^2 + \frac{c_2^2}{c_1} \int_0^t \|u_x\|_0^2 ds + \frac{c_1^2}{c_2} D_{0t}^{\beta-1, \mu} \|u_x\|_0^2 \leq \\ \leq \frac{l^2}{2c_1} \int_0^t \|f\|_0^2 ds + \frac{c_1^2}{c_2 \Gamma(2-\beta)} \int_0^t \frac{e^{-\mu \eta} d\eta}{\eta^\beta} \|u'_0\|_0^2 + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{e^{-\lambda \eta} d\eta}{\eta^\alpha} \|u_0\|_0^2. \end{aligned} \quad (4)$$

The uniqueness and continuous dependence of the solution of the problem (1) – (3) on the input data follow from a priori estimate (4).

Difference schemes for the Dirichlet boundary value problem. In this section we considered case, when $\eta(x, t) = \eta(x)$. In the rectangle \bar{Q}_T we introduce the grid $\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$, where

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad hN = l\},$$

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, \dots, j_0, \quad \tau j_0 = T\}.$$

To problem (1) – (3) we assign the difference scheme

$$\Delta_{0t_{j+1}}^{\alpha, \lambda} y = \Lambda_1 y^{j+1} + \Delta_{0t_{j+1}}^{\beta, \mu} \Lambda_2 y + \varphi_i^{j+1}, \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad 1 \leq j \leq j_0-1, \quad (5)$$

$$y(0, t) = 0, \quad y(l, t) = 0, \quad t \in \bar{\omega}_\tau, \quad (6)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad (7)$$

where

$$\Lambda_1 y = (ay_{\bar{x}})_x, \quad a_i^j = k(x_{i-1/2}, t_{j+1}),$$

$$\Lambda_2 y = (by_{\bar{x}})_x, \quad b_i = \eta(x_{i-1/2}),$$

$$\varphi_i^{j+1} = f(x_i, t_{j+1}),$$

$$\Delta_{0t_{j+1}}^{\gamma,\delta} y = \sum_{s=0}^j c_{j-s}^{(\gamma,\delta)} (v(t_{s+1}) - v(t_s))$$

where

$$c_l^{(\gamma,\delta)} = \frac{\tau^{-\gamma} e^{-\delta t_{l+1/2}}}{\Gamma(2-\gamma)} \left(a_l^{(\gamma)} + \delta \tau b_l^{(\gamma)} \right), \quad l \geq 0,$$

$$a_l^{(\gamma)} = (l+1)^{1-\gamma} - l^{1-\gamma},$$

$$b_l^{(\gamma)} = \frac{1}{2-\gamma} [(l+1)^{2-\gamma} - l^{2-\gamma}] - \frac{1}{2} [(l+1)^{1-\gamma} - l^{1-\gamma}], \quad l \geq 1$$

is the difference analogue of the tempered time fractional derivative of order γ , $0 < \gamma < 1$, and parameter $\delta \geq 0$.

Theorem 2. *The difference scheme (5) – (7) is absolutely stable and its solution satisfies a priori estimate*

$$\begin{aligned} & \sum_{s=0}^j c_{j-s}^{(\alpha,\lambda)} \|y^{s+1}\|_0^2 \tau + \sum_{s=0}^j c_{j-s}^{(\beta,\mu)} \|\sqrt{b}y_{\bar{x}}^{s+1}\|_0^2 \tau \\ & \leq \frac{l^2}{2} \sum_{s=0}^j \|\varphi^s\|_0^2 \tau + \|y^0\|_0^2 \sum_{s=0}^j c_s^{(\alpha,\lambda)} \tau + \|\sqrt{b}y_{\bar{x}}^0\|_0^2 \sum_{s=0}^j c_s^{(\beta,\mu)} \tau, \end{aligned} \quad (8)$$

where $(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h$, $(y, v] = \sum_{i=1}^N y_i v_i h$, $\|y\|_0^2 = (y, y)$, $\|y]\|_0^2 = (y, y]$.

References

1. Chudnovsky A.F. Thermophysics Soil. Moscow: Nauka, 1976. 137 p.
2. Alikhanov A.A. A new difference scheme for the time fractional diffusion equation// J. Comput. Phys. 2015. 280. P. 424–438.
3. Alikhanov A.A. Numerical methods of solutions of boundary value problems for the multi-term variable-distributed order diffusion equation// Appl. Math. Comput. 2015. 268. P. 12–22.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВНУТРИЭТНИЧЕСКИХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

© Кенетова Р.О.

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
"Институт прикладной математики и автоматизации" (Россия, Нальчик)
e-mail: raisa.kenetova@mail.ru

Пусть в этносе из $N = N(t)$ человек, живущих в некоторой географической области с определенной системой связи, в момент времени t содержатся $U = U(t)$ пассионариев и $V = V(t)$ субпассионариев. Допустим, что фаза подъема внутриэтнической эволюции начинается в момент времени $t = 0$ и заканчивается при $t = t_m$. Очевидно, что области значения $R(N), R(U), R(V)$ функций N, U, V принадлежат множеству целых чисел. Поэтому, вместо разрывных целочисленных функций N, U, V введем непрерывно дифференцируемые функции $n = n(t), u = u(t), v = v(t)$, имеющие в каждый момент времени те же целые части, что и N, U, V соответственно, т.е. $[n(t)] = N(t), [u(t)] = U(t), [v(t)] = V(t)$ для всех $t \in [0, t_m]$.

Будем предполагать, что

$$n(t) = u(t) + v(t), \quad 0 \leq t \leq t_m. \quad (1)$$

В теории популяции, в том что числе человеческой, наиболее апробированным законом развития является логистический закон роста [1, с. 103]

$$n'(t) = \mu n(t) - \frac{\mu}{K} n^2(t), \quad (2)$$

где K – емкость среды обитания, μ – коэффициент автоприроста.

Уравнение (2) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{n(t)} \right) = \frac{\mu}{K} - \frac{\mu}{n(t)}. \quad (3)$$

Уравнение (3) является линейным относительно функции $1/n(t)$.

Логистический закон (2) не учитывает адекватно историю или стохастический характер внутриэтнической эволюции. Чтобы учесть эти факторы можно воспользоваться вместо дифференциального уравнения (2) следующей моделью

$$D_{0t}^\alpha \left[\frac{1}{n(\tau)} \right] + \frac{\mu}{n(t)} = \delta t^\beta, \quad (4)$$

где $\alpha, \mu, \delta, \beta$ – постоянные параметры модели, которые характеризуют тот или иной этнос, причем $0 < \alpha < 1$, $\beta > -1$;

$$D_{0t}^\alpha u(\tau) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{u(\tau)d\tau}{(t-\tau)^\alpha}$$

– оператор дробного дифференцирования Римана-Лиувилля порядка α [1, с. 28], $\Gamma(\alpha)$ – гамма функция Эйлера.

Относительно функции $z(t) = 1/n(t)$ уравнение (4) является линейным дифференциальным уравнением дробного порядка α

$$D_{0t}^\alpha z(\tau) + \mu z(\tau) = \delta t^\beta, \quad 0 < t < t_m. \quad (5)$$

Решение уравнения дробного порядка (5), удовлетворяющее начальному условию $\lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-1} z(\tau) = 0$ имеет вид [2, с. 92]

$$z(t) = \delta D_{0t}^{-\alpha} \tau^\beta - \mu \delta \Gamma(\alpha) D_{0t}^{-\alpha} \{E_{1/2}[-\mu(t-\tau)^\alpha; \alpha] D_{0\tau}^{-\alpha} \eta^\beta\},$$

где $E_\rho(z, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu+k/\rho)}$ – функция типа Миттаг-Леффлера [2, с. 86].

Литература

1. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. 301 с.
2. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

УДК 517.925.42

МОДЕЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ЭРЕДИТАРНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ДУФФИНГА С ПРОИЗВОДНОЙ ПЕРЕМЕННОГО ДРОБНОГО ПОРЯДКА РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩАЯ ВЯЗКОЕ ТРЕНИЕ

© Ким В.А.

Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга
(Россия, Петропавловск-Камчатский)
e-mail: valentinekim93@mail.ru

В настоящее время широкое развитие получило одно из научных направлений нелинейной динамики – дробная динамика. Суть, которой состоит в учете эффектов памяти и последействия, характеризующимся производными дробных порядков. Более подробно вопросы исследования таких систем изложены в книге И. Петраса [1], в книге В.В. Учайкина [2] рассматриваются элементы эредитарной динамики, которая включает дробную динамику как частный случай.

В работе [3] была предложена модель осциллятора Дуффинга с фрактальным трением. Фрактальное трение обладает свойствами вязкого трения за счет степенного ядра в интегральном операторе («тяжелые хвосты»). Поэтому такой осциллятор может иметь различные приложения, например [4,5].

В настоящей работе мы продолжим изучать осциллятор Дуффинга с фрактальным трением, но порядок дробной производной будет представлять собой функцию от времени, а не константу как в работе [3]. Далее построим численную явную конечно-разностную схему для счета приближенного решения соответствующей задачи Коши, а также на основе численного решения построим и исследуем фазовые траектории.

Постановка задачи и методика решения. Найти решение $x(t)$, где $t \in [0, T]$ следующей задачи Коши:

$$\ddot{x}(t) + \alpha D_{0t}^{q(t)} x(\tau) - x(t) + x^3(t) = \delta \cos(\omega t), \quad x(0) = x_0, \dot{x}(0) = y_0, \quad (1)$$

где $D_{0t}^{q(t)} x(\tau) = \frac{1}{\Gamma(q(t))} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{q(t)}}$ – производная Римана-Лиувилля переменного дробного порядка $0 < q(t) < 1$, α – коэффициент вязкого трения, δ и ω – амплитуда и частота внешней периодической силы, x_0 и y_0 – заданные константы, начальные условия.

Случай, когда $q(t)$ представляет константу был подробно исследован в работе [3]. В работе [6] была рассмотрена модель эредитарного осциллятора Дуффинга с производной Герасимова-Капuto.

Задачу Коши (1) удобно представить в виде системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t), \\ D_{0t}^{q(t)} x(\tau) = w(t), \\ \dot{y}(t) = x(t) - \alpha w(t) - x^3(t) + \delta \cos(\omega t), \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0. \end{cases} \quad (2)$$

Система (2), в силу нелинейности, не имеет точного решения, поэтому будем искать приближенное решение с помощью теории конечно-разностных схем [7-9]. Разобьем отрезок $[0, T]$ на N равных частей с шагом h . Решение дифференциальной задачи $x(t)$ перейдет в приближенное сеточное решение $x(t_k)$, $t_k = kh$, $k = 1, \dots, N$. Производную дробного порядка в системе (2) аппроксимируем разностным аналогом – производной Грюнвальда-Летникова [10]:

$$D_{0t}^{q(t)} x(\tau) \approx \frac{1}{h^{q_{k-1}}} \sum_{j=0}^{k-1} c_j^{(q_{k-1})} x_{k-j} = \frac{x_k}{h^{q_{k-1}}} + \sum_{j=1}^{k-1} c_j^{(q_{k-1})} x_{k-j}, \quad (3)$$

$$c_0^{(q_{k-1})} = 1, c_j^{(q_{k-1})} = \left(1 - \frac{1+q_{k-1}}{j}\right) c_{j-1}^{q_{k-1}},$$

а целочисленные производные:

$$\dot{x}(t) \approx \frac{x_k - x_{k-1}}{h}, \dot{y}(t) \approx \frac{y_k - y_{k-1}}{h}. \quad (4)$$

Подставляя (3) и (4) в систему (2), приходим к следующему приближенному решению задачи Коши (2):

$$\begin{cases} x_k = x_{k-1} + hy_{k-1}, \\ x_k = w_{k-1}h^{q_{k-1}} - \sum_{j=1}^{k-1} c_j^{(q_{k-1})} x_{k-j}, \\ y_k = y_{k-1} + [\alpha w_{k-1} - x_{k-1}^3 + \delta \cos(\omega(k-1))] h. \end{cases} \quad (4)$$

Можно отметить, исходя из работы [10], что аппроксимация (5) дифференциальной задачи (2) имеет первый порядок. Мы не будем проводить исследования явной схемы (5) на устойчивость и сходимость. Явные схемы, как правило условно устойчивы, т.е. существует ограничение на шаг h . Оценить шаг h можно с помощью метода двойного счета [11]. Устойчивость точки покоя системы (2) можно провести по аналогии работы [12].

Литература

1. Petras I. Fractional-Order Nonlinear Systems: Modeling, Analysis and Simulation. New York: Springer, 2010.
2. Учайкин В.В. Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с.
3. Syta A., Litak G., Lenci S., Scheffler M. Chaotic vibrations of the Duffing system with fractional damping // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2014. vol. 24. no. 1. 013107.

4. Gao X., Yu J. Chaos in the fractional order periodically forced complex Duffing's oscillators// *Chaos, Solitons & Fractals*. 2005. Vol. 24, №. 4. P. 1097-1104.
5. Rossikhin Y.A., Shitikova M.V. Application of fractional calculus for dynamic problems of solid mechanics: novel trends and recent results// *Applied Mechanics Reviews*. 2010. Vol. 63, №1. 010801.
6. Паровик Р.И. Математическое моделирование нелокальной колебательной системы Дуффинга с фрактальным трением// Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2015. № 1(10). С. 18–24.
7. Паровик Р.И. О численном решении уравнения фрактального осциллятора с производной дробного переменного порядка от времени // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2014. № 1(8). С. 60–65.
8. Паровик Р.И. Численный анализ некоторых осцилляционных уравнений с производной дробного порядка// Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2014. № 2(9). С. 30–35.
9. Паровик Р.И. Об одной конечно-разностной схеме для математической модели нелинейного эредитарного осциллятора// Международный научно-исследовательский журнал. 2016. № 4-2 (46). С. 138–142.
10. Петухов А.А., Ревизников Д.Л. Алгоритмы численных решений дробно-дифференциальных уравнений// Вестник МАИ. 2009. Т. 16, № 6. С. 228–243.
11. Марчук Г.И. Вычислительные методы. М.: Наука, 1977. 456 с.
12. Паровик Р.И. Об исследовании устойчивости эредитарного осциллятора Ван-дер-Поля// Фундаментальные исследования. 2016. № 3(2). С. 283–287.

УДК 517.95

ОБ АНАЛОГЕ ЗАДАЧИ А.А. ДЕЗИНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО ПОРЯДКА

© Киржинов Р.А.

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
"Институт прикладной математики и автоматизации" (Россия, Нальчик)
e-mail: kirzhinov.r@mail.ru

В области $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < r, -\alpha < y < \beta\}$ евклидовой плоскости точек (x, y) , где r, α и β — действительные положительные числа, рассматривается аналог задачи А.А. Дезина [1, с. 174] для

уравнения в частных производных смешанного типа второго порядка

$$\begin{cases} u_{xx} - u_y = f^+, & y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy} = f^-, & y < 0, \end{cases}$$

где $u = u(x, y)$ – неизвестная функция, $f^+ = f^+(x, y)$, $f^- = f^-(x, y)$ – заданные и достаточно гладкие функции соответственно в $\bar{\Omega}^+$ и $\bar{\Omega}^-$, здесь $\Omega^+ = \Omega \cap (y > 0)$, $\Omega^- = \Omega \cap (y < 0)$.

В данной работе получены условия существования единственного решения $u(x, y)$ исследуемой задачи в области Ω . Для доказательства единственности решения использован метод функции Грина. Решение найдено в явном виде.

Отметим, что результаты данной работы обобщают результаты работ [2, 3].

Литература

1. Нахушева З.А. Нелокальные краевые задачи для основных и смешанного типов дифференциальных уравнений. Нальчик: Издательство Учреждения Российской академии наук Кабардино–Балкарского научного центра РАН, 2011, 196 с.
2. Киржинов Р.А. Аналог задачи А.А. Дезина для уравнения смешанного параболо–гиперболического типа// Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2014, Т. 16, № 2, С. 41–46.
3. Киржинов Р.А. О единственности решения аналога задачи А.А. Дезина для уравнения смешанного параболо–гиперболического типа// Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2015, Т. 17, № 3, С. 28–30.

УДК 004.942

ПРИМЕНЕНИЕ СОВРЕМЕННЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ПРИ ИЗУЧЕНИИ БИОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

© Киселева Т.В., Шелест П.Д.

Северо-Кавказский федеральный университет (Россия, Ставрополь)
e-mail: appinform@ncfu.ru

В современном мире трудно представить себе обучение без применения информационных технологий. Для изучения биологических процессов широко применяются два вида математического

моделирования: аналитическое и имитационное. И хотя аналитическое моделирование помогает установить некоторые закономерности и общие тенденции развития и поведения организмов в живой природе, чаще всего происходящие биологические процессы трудно описать средствами аналитической математики.

Развитие современных информационных технологий позволило существенно раздвинуть границы моделирования процессов в биологии. Применение системно-динамической модели, использующей единый подход к описанию систем, классификации их элементов и взаимосвязей, позволяет описывать поведение биологической системы и ее структуры как множество взаимодействующих связей. Построенные в рамках правил системной динамики модели являются наглядными и легко корректируемыми.

Процесс моделирования в системной динамике можно разбить на два этапа. На первом этапе определяется граница системы. Важно выделить ту область рассматриваемого объекта, поведение которой нас интересует. Также, следует определить интересующий нас уровень детализации элементов системы. После этого устанавливаются и описываются взаимосвязи между ее элементами: как количественные, так и качественные. На втором этапе проводится анализ построенной модели с помощью компьютера. Затем рассматривается поведение системы при различных значениях начальных переменных. По полученным результатам в модель вносятся соответствующие корректировки: уточняются количественные показатели и, при необходимости, корректируется структура взаимодействия элементов [1].

Для анализа используется специализированное программное обеспечение, которое позволяет работать с моделью в терминах системной динамики [2]. Методы системной динамики поддерживаются такими инструментами, как DYNAMO, Stella, Vensim, PowerSim, iThink, ModelMaker и др.

Таким образом, применение современных информационных технологий для моделирования биологических процессов дает возможность на компьютерных моделях анализировать и устанавливать все более глубокие и сложные взаимосвязи между биологической теорией и опытом.

Литература

1. Киселева Т.В., Шелест П.Д. Моделирование биологических процессов средствами системной динамики// Актуальные проблемы современной науки – новому поколению: сборник научных трудов международной на-

учной конференции / Под общей редакцией: Бигдай О.Б. Ставрополь: СтУ, 2016. Т. 2. С. 114–116.

2. Киселева Т.В. Моделирование сложных систем средствами системной динамики// Актуальные проблемы и инновации в экономике, технике, образовании, информационных технологиях: сборник научных трудов международной научной конференции / Под общей редакцией: Бигдай О.Б. Ставрополь: СевКавГТИ, 2011. С. 124–127.

УДК 517.95

ОБРАТНЫЕ И НЕЛОКАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

© Кожанов А.И.

Институт математики им С.Л. Соболева СО РАН (Россия, Новосибирск)
e-mail: kozhanov@math.nsc.ru

В докладе излагаются результаты о разрешимости новых линейных и нелинейных коэффициентных обратных задач для различных классов дифференциальных уравнений. Кроме того, в докладе приводятся результаты о разрешимости новых нелокальных краевых задач для дифференциальных уравнений, как связанных с обратными задачами, так и имеющих самостоятельное значение.

УДК 517.956.25

О РЕШЕНИЯХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С L_1 – ДАННЫМИ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

© Кожевникова Л.М.

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета
(Россия, Стерлитамак)
e-mail: kosul@mail.ru

В работе [1] для эллиптических уравнений $\Delta_p u = a_0(x, u)$ с L_1 – данными ($\sup_{|u| < c} |a_0(x, u)| \in L_{1, \text{loc}}(\Omega)$) было использовано понятие энтропийного решения задачи Дирихле с нулевым граничным условием и доказаны его существование и единственность в произвольной области Ω . Понятие энтропийного решения впервые было введено С.Н. Кружковым [2] для уравнений первого порядка. Изучению существования энтропийных решений задачи Дирихле в

пространствах Орлича для изотропных эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями второго порядка (Ω – ограниченная область) посвящена статья А. Бенкиране и Дж. Бенноуна [3].

Следует заметить, что в известных автору работах результаты установлены для энтропийных решений эллиптических задач в ограниченных областях (за исключением статьи [1]) с однородными граничными условиями.

Пусть Ω — произвольная область пространства $\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)\}$, $n \geq 2$. Для анизотропных эллиптических уравнений второго порядка с L_1 — правой частью рассматривается задача Дирихле

$$\sum_{i=1}^n (a_i(\mathbf{x}, u, \nabla u))_{x_i} = a_0(\mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x} \in \Omega; \quad (1)$$

$$u(\mathbf{x}) \Big|_{\partial\Omega} = \psi(\mathbf{x}) \Big|_{\partial\Omega}. \quad (2)$$

Автором доказаны теоремы существования и единственности энтропийного решения задачи Дирихле (1), (2) в анизотропном пространстве Соболева-Орлича без предположения ограниченности области Ω и гладкости ее границы.

Литература

1. Benilan Ph., Boccardo L., Gallouet Th., Pierre M., Vazquez J.L. An L_1 -theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equation// Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze. 1995. V. 22, № 2. P. 241–273.
2. Круэсков С.Н. Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными// Матем. сборник. 1970. Т. 81(123), № 2. С. 228–255.
3. Benkirane A., Bennouna J. Existence of entropy solutions for some elliptic problems involving derivatives of nonlinear terms in Orlicz spaces// Abstr. Appl. Anal. 2002. V. 7, № 2. P. 85–102.

УДК 517.956

О НЕЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ СО СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

© Косимов Х.Н.¹, Абдуолимова М.К.²

Ферганский государственный университет (Узбекистан, Фергана)

¹e-mail: x.n.qosimov@gmail.com

²e-mail: m.abduolimova@gmail.com

Рассмотрим уравнение

$$(-y)^m U_{xx} - U_{yy} = 0, \quad m = const > 0 \quad (1)$$

в области D , ограниченной характеристиками

$$AC : x - \frac{2}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0, BC : x + \frac{2}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1$$

уравнения (1), выходящими из точки $A(0, 0)$, $B(1, 0)$ и отрезком AB прямой $y = 0$.

Введем обобщенные операторы дробного интегродифференцирования от функции по другой функции в следующем виде [1]

$$F_{0x} \begin{bmatrix} a, & b \\ c, & g(x) \end{bmatrix} \varphi(x) \equiv \\ \equiv \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-c)} \int_0^x [g(x) - g(t)]^{c-1} F(a, b, -c; \frac{g(x) - g(t)}{g(x)}) \varphi(t) g'(t) dt, & c < 0, \\ [g(x)]^a \frac{d}{dg(x)} [g(x)]^{-a} F_{0x} \begin{bmatrix} a, & b+1 \\ c-1, & g(x) \end{bmatrix} \varphi(x), & 0 < c < 1. \end{cases}$$

В работе исследуется следующая

Задача. Найти функцию $U(x, y)$ удовлетворяющую условиям:

- 1) $U(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C'(D \cup AB);$
- 2) $U(x, y)$ регулярное решение уравнения (1) в области D ;
- 3) $U(x, y)$ удовлетворяет условиям $U(x, 0) = \tau(x)$, $x \in \overline{AB}$,

$$F_{0x} \begin{bmatrix} a, & b \\ c; & x^2 \end{bmatrix} (x^2)^l U[\theta(x)] = a(x) U_y(x, 0) + b(x), \quad x \in AB.$$

Литература

1. Самко С.Г, Килбас А.А, Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и их приложения.: Минск., Наука и техника. 1987, 788 с.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СРЕДСТВ
ПРОГРАММИРОВАНИЯ МАТНСАД ДЛЯ
РЕАЛИЗАЦИИ АЛГОРИТМА МЕТОДА СЕТОК ПРИ
РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЯ
ДАВЛЕНИЯ МНОГОКОМПОНЕНТНОГО РАССОЛА В
ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

© Крахоткина Е.В.

Северо-Кавказский федеральный университет (Россия, Ставрополь)
appinform@ncfu.ru

Процесс перераспределения давления в пористой среде описывается уравнением пьезопроводности

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \chi^2 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right), \quad (1)$$

решением которого является функция

$$p(t, x, y, z) = p_1(t, x) \times p_2(t, y) \times p_3(t, z), \quad (2)$$

причем $p_1(t, x)$, $p_2(t, y)$, $p_3(t, z)$ являются решениями одномерных краевых задач, которые подробно рассмотрены в [1].

В работе [2] найдено решение задачи построения функции перераспределения давления многокомпонентного рассола в пористой среде предложено решение данной задачи методом сеток. Целью данной работы является разработка модуля с помощью средств программирования среды автоматизации математических вычислений MathCad [3] для поиска решения краевой задачи:

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}$$

при следующих начальном

$$p_1(0, x) = x^2, \quad (0 < x \leq 0.028)$$

и граничных условиях

$$p_1(t, 0) = 0, p_1(t, 2) = 0, \quad (0 < t \leq 1800).$$

Пример разработанного средствами программирования среды автоматизации математических вычислений MathCad приведен на рисунках 1 – 3.

```

L := 0.028      T := 1800      N := 10      K := 200
f(x, t) := 0    φ(x) := x2      μ(t) := 0      ν(t) := 0      a := 6.85·10-9
h := L / N     h = 2.8 · 10-3   Δ := T / K      Δ = 9      γ := a2 · Δ / h2      γ = 5.387 · 10-11
i := 0..N      j := 0..K      xi := i · h      tj := j · Δ

x =


|    | 0                      |
|----|------------------------|
| 0  | 0                      |
| 1  | 2.8 · 10 <sup>-3</sup> |
| 2  | 5.6 · 10 <sup>-3</sup> |
| 3  | 8.4 · 10 <sup>-3</sup> |
| 4  | 0.011                  |
| 5  | 0.014                  |
| 6  | 0.017                  |
| 7  | 0.02                   |
| 8  | 0.022                  |
| 9  | 0.025                  |
| 10 | 0.028                  |


t =


|    | 0   |
|----|-----|
| 0  | 0   |
| 1  | 9   |
| 2  | 18  |
| 3  | 27  |
| 4  | 36  |
| 5  | 45  |
| 6  | 54  |
| 7  | 63  |
| 8  | 72  |
| 9  | 81  |
| 10 | ... |


Pi,0 := φ(xi)      P0,j := μ(tj)      PN,j := ν(tj)

```

Рис. 1. Фрагмент модуля для решения задачи процесса перераспределения давления многокомпонентного рассола в пористой среде.
Ввод исходных данных и предварительные расчеты.

```

Ne_yavn(P, γ, Δ, ε, x, t) := 
  U ← 1
  k ← 0
  while U > ε
    for i ∈ 1..N - 1
      for j ∈ 1..K
        V ← γ / (1 + 2·γ) · (Pi-1,j + Pi+1,j) + Pi,j-1 / (1 + 2·γ) + Δ / (1 + 2·γ) · f(xi, tj)
        Ri,j ← |V - Pi,j|
        Pi,j ← V
      U ← max(R)
      k ← k + 1
  (P
  R
  k)

```

Рис. 2. Фрагмент модуля для решения задачи процесса перераспределения давления многокомпонентного рассола в пористой среде. Программный модуль.

$$H := Ne_yavn(P, \gamma, \Delta, 0.0001, x, t) \quad P := H_0 \quad R := H_1 \quad k_2 := H_2 \quad k := 100$$

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	$7.84 \cdot 10^{-6}$				
2	$3.136 \cdot 10^{-5}$				
3	$7.056 \cdot 10^{-5}$				
4	$1.254 \cdot 10^{-4}$				
5	$1.96 \cdot 10^{-4}$				
6	$2.822 \cdot 10^{-4}$				
7	$3.842 \cdot 10^{-4}$				
8	$5.018 \cdot 10^{-4}$				
9	$6.35 \cdot 10^{-4}$				
10	0	0	0	0	...

Рис. 3. Фрагмент модуля для решения задачи процесса перераспределения давления многокомпонентного рассола в пористой среде.
Проверка работы модуля по заданным экспериментальным данным.

Литература

1. Борисенко А.А., Семенчин Е.А., Крахоткина Е.В., Брацихин А.А. Математическое моделирование фильтрационно-диффузионных процессов в пористых средах (на примере мышечной ткани): монография. Ставрополь, СевКавГТУ, 2009. 170 с.
2. Семенчин Е.А., Крахоткина Е.В. Расчет периодически изменяющегося давления в пористой среде методом сеток// Циклы. Материалы третьей международной конференции. Часть третья. Ставрополь. СевКавГТУ, 2001. С. 45–47.
3. Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. Решение задач вычислительной математики в пакетах MathCAD 12, MatLab 7, Maple 9. М.: НТ Пресс, 2006. 496 с.

УДК 517.958

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНФОРМАЦИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

© Куготова М.Н.

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
"Институт прикладной математики и автоматизации" (Россия, Нальчик)
e-mail: kugotova.radima@mail.ru

В работе исследуется информационное взаимодействие индивидов в группе, имеющей численность n . В рассматриваемой математической модели предполагается, что неохваченный информацией индивид может ее получить либо от СМИ, либо от информированного ранее индивида. С учетом нелокальности по времени и предполагая однородность социума, информационное взаимодействие может быть описано следующей моделью:

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} u = (a + bu)(n - u), \quad u(0) = u_0, \quad 0 < \alpha < 1, \quad t \in (0, T), \quad (1)$$

где $\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}$ дробная производная порядка α [1, с. 11], параметр α характеризует коммуникационную структуру, $u(0) = u_0$ — численность адептов в момент времени t . Обозначим через a интенсивность распространения информации через СМИ, а через b интенсивность распространения информации через информированного ранее индивида. В случае, когда $\alpha = 1$, эта модель рассмотрена в работе [2, с. 19].

В данной работе проводится анализ модели для всех $\alpha \in (0, 1)$, выполнена численная реализация в среде C#.

Литература

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 272 с.
2. Михайлов А.П., Петров А.П., Маревцева Н.А., Третьякова И.В. Развитие модели распространения информации в социуме// Математическое моделирование, 2014, Т.26, № 3, С.65-73.

УДК 517.95

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ЛИНИЯМИ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ВЫРОЖДЕНИЯ

© Кудаева З.В.

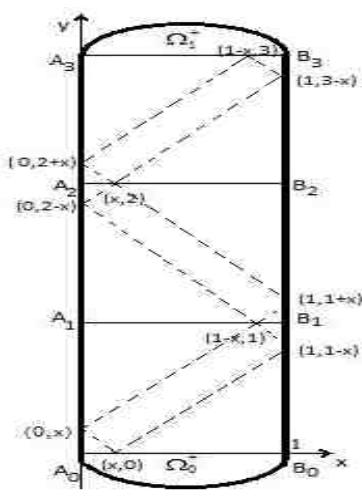
Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
"Институт прикладной математики и автоматизации" (Россия, Нальчик)
e-mail: kudaeva_zalina@mail.ru

Рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными x, y :

$$\operatorname{sign}(y^2 - ym) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (1)$$

где m – натуральное нечетное число.

Уравнение (1) является уравнением гиперболического типа в полосе $0 < y < m$, эллиптического типа вне этой полосы и параболически вырождается на параллельных линиях $y = 0$, $y = m$, где коэффициент $k(y) = \operatorname{sign}(y^2 - ym)$ при старших производных претерпевает разрыв первого рода.



Пусть Ω – смешанная область (см. рис.), гиперболическая часть которой совпадает с прямоугольной областью $\Omega^- = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < m\}$, а эллиптическая представляет собой объединение двух односвязных областей Ω_0^+ и Ω_1^+ , расположенных в полуплоскости $y < 0$ и $y > m$ соответственно: Ω_0^+ ограничена кривой σ_0 с концами в точках $A_0 = (0, 0)$, $B_0 = (1, 0)$ и отрезком A_0B_0 прямой $y = 0$; Ω_1^+ ограничена кривой σ_1 с концами в точках $A_m = (0, m)$, $B_m = (1, m)$ и отрезком A_mB_m прямой $y = m$.

Сформулируем задачу Дирихле для уравнения (1) в области Ω .

Задача D. Найти решение $u = u(x, y)$ уравнения (1) непрерывное в $\bar{\Omega}$ и удовлетворяющее следующим условиям:

$$\lim_{y \rightarrow +0} u_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow -0} u_y(x, y), \quad 0 < x < 1,$$

$$\lim_{y \rightarrow m+0} u_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow m-0} u_y(x, y), \quad 0 < x < 1,$$

$$u|_{\sigma_0} = \varphi_0(x, y), u|_{\sigma_1} = \varphi_1(x, y),$$

$$u|_{A_0A_m} = \psi_0(y), \quad u|_{B_0B_m} = \psi_1(y), \quad 0 \leq y \leq m,$$

где $\varphi_0(x, y)$, $\varphi_1(x, y)$, $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$ – заданные достаточно гладкие функции.

Для уравнения (1) в области Ω справедлив принцип экстремума, который сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема. Пусть $u(x, y)$ -решение задачи D при $\psi_0(y) = \psi_1(y) = 0$ для всех $y \in [0, m]$. Тогда положительный максимум (отрицательный минимум) функции $u(x, y)$ на компакте $\bar{\Omega}^+ = \bar{\Omega}_0^+ \cup \bar{\Omega}_1^+$ достигается на $\sigma_0 \cup \sigma_1$.

Доказательство единственности решения задачи D существенно опирается на данную теорему, принцип Зарембы [1], а также теорему о среднем значении для волнового уравнения [2, с.165].

Существование решения задачи доказывается методом редукции к сингулярному интегральному уравнению [3].

Случай когда область Ω^- представляет собой квадрат $\Omega^- = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ был рассмотрен в работе [4].

Литература

1. Zaremba S. Sur un probleme mixte rebatif a l'equation de Laplace // Усп. матем. наук. 1946. I, 3-4.
2. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высш. шк., 1995. 301 с.
3. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. М.: АН СССР, 1959. 164 с.
4. Кудаева З.В. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с двумя параллельными линиями параболического вырождения// Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2007. Т.9, № 2. С. 39–43.

УДК 517.927.6

О НЕОСЦИЛЛАЦИИ НА УРАВНЕНИЯ ГРАФЕ

© Кулаев Р.Ч.

Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН
Северо-Осетинский государственный университет им. К.Л. Хетагурова
(Россия, Владикавказ)
e-mail:kulaev@smath.ru

На графе-дереве Γ рассматривается однородное дифференциальное уравнение 4-го порядка

$$Lu = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (1)$$

На ребрах графа уравнение порождается самосопряженным дифференциальным выражением четвертого порядка, описывающим упругие деформации изгиба стержня (см. [1,2]), а в каждой внутренней вершине графа заданы либо условия жесткого (см. [1]), либо шарнирного (см. [2]) соединения стержней.

Пусть $a, b \in \partial\Gamma$ и γ_a – ребро примыкающее к вершине a . Для каждого $s \in \gamma_a \cup a$ введем в рассмотрение краевую задачу для уравнения (1) с краевыми условиями (при ориентации граничных ребер внутрь графа)

$$\begin{aligned} u(s) &= 0, & \vartheta(a)u'(s) - \beta(a)u''(s) &= 0, \\ u(b) &= 0, & \vartheta(b)u'(b) - \beta(b)u''(b) &= 1, \\ u(c) &= 0, & \vartheta(c)u'(c) - \beta(c)u''(c) &= 0, & c \in \partial\Gamma \setminus \{a, b\}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\vartheta, \beta \geq 0$, $\vartheta + \beta > 0$. Обозначим через $v_s(x)$ решение задачи (2).

Теорема 1. Пусть $\xi \in \gamma_a$ и $v'_\xi(\xi) = v''_\xi(\xi) = 0$, $\operatorname{sign} v_\xi(\xi+0) > 0$. Тогда для всех $s \in \gamma_a \setminus (a, \xi)$ достаточно близких к точке ξ выполнено неравенство $\operatorname{sign} v_s(s+0) < 0$, а для всех $s \in (a, \xi)$ достаточно близких к точке ξ выполнено неравенство $\operatorname{sign} v_s(s+0) > 0$.

Для каждой граничной вершины $a \in \partial\Gamma$ рассмотрим краевую задачу для уравнения (1) с краевыми условиями

$$\begin{aligned} u(a) &= 0, & \vartheta(a)u'(a) - \beta(a)u''(a) &= 1, \\ u(c) &= 0, & \vartheta(c)u'(c) - \beta(c)u''(c) &= 0, & c \in \partial\Gamma \setminus a. \end{aligned} \quad (3)$$

Определение. Будем говорить, что уравнение (1) критически неосциллирует на графике Γ , если для любой вершины $a \in \partial\Gamma$ решение краевой задачи (1), (3) с $\beta(\cdot) \equiv 0$ положительно на Γ и хотябы одно из этих решений имеет на $\partial\Gamma$ нуль кратности три.

Свойство критической неосцилляции обобщает понятие точного промежутка неосцилляции в классической теории (см. [3]). Из результатов [2] следует, что для уравнения с условиями только шарнирного соединения во внутренних вершинах критичность неосцилляции не возникает. Если же в некоторой узловой вершине заданы условия жесткого соединения, то для такого уравнения критичность неосцилляции заключается в том, что даже незначительное изменение области задания уравнения приводит к тому, что оно перестает быть неосциллирующим. Причем потеря свойства неосцилляции происходит не только при «расширении» графа, но и при его «уменьшении» (см. [1]). Такой эффект не наблюдается в классической теории неосцилляции и, как показывает следующая теорема, имеет место только для графа не гомеоморфного интервалу.

Теорема 2. Если дифференциальное уравнение (1) слабо (сильно) не осциллирует на графике-цепи Γ , то оно слабо (сильно) не осциллирует и на любом его подграфе $\Gamma_0 \subset \Gamma$.

Теорема 3. Пусть Γ – граф-цепочка и уравнение (1) критически не осциллирует на подграфе $\Gamma_0 \subset \Gamma$ ($\Gamma_0 \neq \Gamma$). Тогда функция Грина краевой задачи (1), (3) на графе Γ знакопеременна.

Из теоремы 3 и результатов [1] следует, что свойство критической неосцилляции вычленяет грань между возможностью и невозможностью для функции Грина быть какой-то краевой задачи положительной, причем в наилучшем положении оказывается задача Дирихле (1), (3).

Литература

1. Кулаев Р.Ч. Неосцилляция уравнения четвертого порядка на графе// Математический сборник. 2015. Т. 206, №12. С. 79–118.
2. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В. и др. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М.: Физматлит, 2004. 192 с.
3. Дерр В.Я. Неосцилляция решений дифференциальных уравнений// Вестник Удмуртского университета. 2009. Вып. 1. С. 46–89.

УДК 517.598[550.3+551.5]

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ФРАКТАЛЬНОСТИ СРЕДЫ НА МЕХАНИЗМЫ РОСТА ОБЛАЧНЫХ ЧАСТИЦ

© Кумыков Т.С.

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
"Институт прикладной математики и автоматизации" (Россия, Нальчик)
e-mail: macist20@mail.ru

Облака, как и многие объекты в природе, представляют собой нерегулярные фракталы [1]. Исследование эволюции размеров частиц в капельных облаках под влиянием конденсации и коагуляции капель, учитывающих фрактальность облачной среды, представляет собой практически важную задачу для разработки методов прогноза погоды, поскольку от размеров капель зависит интенсивность выпадения осадков [2].

Поэтому при исследовании процессов, протекающих в облаках, для выявления роли фрактальности среды необходимо использовать аппарат дробного исчисления.

В связи с этим целью данной работы является оценка влияния фрактальности облачной среды на различные механизмы формирования и интенсивность осадков при заданных начальных значениях параметров, входящих в микрофизический алгоритм.

Рассматривается процесс роста частиц с учетом фрактальности среды в двух режимах:

а) конденсационный рост

$$\partial_{0t}^{\alpha} r(t) = \frac{3\tau\varepsilon DC}{\rho r(t)}, \quad 0 < \alpha < 1;$$

б) коагуляционный рост

$$\partial_{0t}^{\alpha} R(t) = \tau w(R(t) - R_0), \quad 0 < \alpha < 1,$$

где $\partial_{0t}^{\alpha} r(t)$ – производная по Капуто, α – феноменологический параметр, τ – характерное время процесса, $\varepsilon = \frac{B}{B+D/r}$, $B = \gamma \sqrt{\frac{RT}{2\pi\mu}}$, C – разность между концентрацией пара на большом расстоянии от капли и равновесной концентрацией пара у поверхности; γ – коэффициент конденсации, μ – молекулярный вес воды, R – универсальная газовая постоянная, T – температура, ρ – плотность воды, D – коэффициент диффузии водяного пара в воздухе, $R(t)$ – радиус капли, w – вероятность слияния, R_0 – радиус в начальный момент времени коагуляции.

Полученные зависимости размера частиц от фрактальности среды в различных режимах сравниваются с классической теорией, разработанной Максвеллом для стационарного конденсационного роста неподвижной сферической частицы.

Литература

1. Рис Ф., Вальдфогель А. Анализ фрактальной размерности облаков с мощными конвективными токами // Фракталы в физике: Труды VI международного симпозиума по фракталам в физике (МЦТФ, Триест, Италия, 9–12 июля, 1985). С. 644–649.
2. Кумыков Т. С. Моделирование динамики заряда пузырьков во фрактальных облачных каплях // Известия КБНЦ РАН. 2015. № 6. С. 23–27.

УДК 528.91

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГИС ПРИ КАРТОГРАФИРОВАНИИ ОПАСНЫХ ПРИРОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

© Кюль Е.В.

Центр географических исследований
Кабардино-Балкарского научного центра РАН (Россия, Нальчик)
e-mail: elenakyul@mail.ru

Использование ГИС при картографических исследованиях применяется достаточно широко. ГИС-технологии используются там, где требуется представить пространственное распределение больших массивов разнородных данных в строгой привязке к конкретной области географического пространства. Актуальность не вызывает сомнений, так как картографический метод отображения информации является наиболее удобным. Кроме того уменьшаются соответственно как временные, так и финансовые затраты на проведение научных исследований. Но при этом большинство ГИС, применяемых для данных целей являются двумерными. В данном случае автор использовал для оценки подверженности территории опасным природным процессам (ОПП), в частности, снежных лавин авторскую трехмерную ГИС, разработанную сотрудником Высокогорного геофизического института Алитой С.Л. для районирования бассейна реки Баксан (КБР) по типам проявления селевого процесса (данная программа прошла регистрацию в Роспатенте как "Оцифровщик топографических карт") [1]. Для этого в уже разработанную ГИС для решения поставленной задачи – морфометрического анализа рельефа и построения цифровой модели рельефа был добавлен дополнительно ряд функций. Для проведения детальных геоморфологических исследований на исследуемой территории необходимо сделать оценку рельефа по сумме основных численных морфометрических параметров рельефа: глубине, α , разнице высот между водоразделами и тальвегами; густоте расчленения, β , частоте чередования повышений и понижений рельефа; интенсивности расчленения рельефа, $\text{tg}\gamma = \beta/\alpha$ [2]. При этом она может быть использована и для картографической оценки деятельности других ОПП. Научная новизна и практическая значимость использования авторской ГИС достаточно высоки. Перевод бумажного варианта топографической карты в цифровой и построение на этой основе специальных цифровых карт осуществляется с наименьшими затратами. При этом введён коэффициент расчленения (двумерный площадной показатель), который является более информативным, чем применяемый, так как наиболее объективно отображает параметры склона. Формула для его вычисления:

$$k = (S - S_r)/S_R * 100\%,$$

где S_r – площадь горизонтальной проекции склона; S – фактическая площадь склона.

Материалы и методы исследований. Автор использовал методические разработки, полученные при составлении ряда картографических работ и проведении ландшафтно-геоморфологического районирования территории КБР [3,4].

Результаты исследований. Получена цифровая модель рельефа для Южного Приэльбрусья – региона, интенсивно развивающегося в рекреационном отношении. За основу построения ГИС взята топографическая карта исследуемого района (Центральный Кавказ, северный склон, Южное Приэльбрусье, верховья р. Баксан, Кабардино-Балкарская Республика) М 1:200000. На первом этапе проведена трассировка изогипс топографической карты в полуавтоматическом режиме с заданной детализацией; на втором – выполнена автоматическая фильтрация изображения и получена карта содержащая только нужные изогипсы; на третьем - произведен ввод высот в ручном режиме. На основе цифровой модели рельефа, создан комплект цифровых карт: 1) оценки рельефа по экспозиции, углу наклона поверхности и коэффициенту расчленения; 2) оценки лавинной опасности.

Выводы. Применение ГИС, в частности 3-х мерной позволяет получить на основе построенной цифровой модели рельефа цифровые карты оценки рельефа по морфометрическим параметрам и провести инженерно-геологическое районирование для оценки пригодности освоения территории под конкретный тип землепользования с учётом ОПП (в данном случае лавинной опасности). На сегодняшний день существует ряд методов количественной оценки подверженности территории ОПП. Встраивание этих методов в структуру разработанной ГИС даёт возможность быстро и наглядно районировать территорию по тому или иному параметру, а также проводить сравнительное районирование по любой комбинации таких показателей. При этом трехмерные ГИС можно использовать практически для описания всех ОПП.

Литература

1. Алита С.Л. Оценка рисков развития опасных склоновых явлений и паводков на основе применения ГИС-технологий / В сб.: Материалы Международной научной конференции с элементами научной школы "Инновационные методы и средства исследований в области физики атмосферы, гидрометеорологии, экологии и изменения климата". 2013. Ставрополь. С. 189–196.
2. Геологический словарь. Т. 1, 2. М. 1978.

3. Атлас природных опасностей и стихийных бедствий Кабардино-Балкарской республики /Кюль Е.В.и др. С-Пб.: Гидрометеоиздат, 2000, 66 с.
4. Кюль Е.В. Принципы геоэкологического картографирования и районирования лавинной деятельности. Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН. 2012. 227 с.

УДК 519.21 + 537.86

ПОТОК ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РАДИАЦИОННО- КОНДУКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА В ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ТВЕРДОТЕЛЬНОЙ СРЕДЕ

© Лам Тан Фат, Вирченко Ю.П.

Белгородский государственный национальный
исследовательский университет (Россия, Белгород)
e-mail: lam_tan_phat1802@yahoo.com

Исследуется стохастическая модель радиационно-кондуктивного теплообмена в твердотельной диэлектрической среде. Математическая модель представляет собой стохастические дифференциальные уравнения Максвелла с стохастическим источником в виде флюктуационного электрического тока, вызванного тепловыми колебаниями атомов (ионов) среды,

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \tilde{\mathbf{j}} &= [\nabla, \tilde{\mathbf{H}}], \quad (\nabla, \tilde{\mathbf{E}}) = \frac{4\pi}{\varepsilon} \tilde{\rho}, \\ \frac{\mu}{c} \frac{\partial \tilde{\mathbf{H}}}{\partial t} &= -[\nabla, \tilde{\mathbf{E}}], \quad (\nabla, \tilde{\mathbf{H}}) = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\tilde{\mathbf{E}}$ и $\tilde{\mathbf{H}}$ – напряженности электрического и магнитного полей теплового излучения внутри среды, коэффициенты ε и μ – электрическая и магнитная проницаемости, которые не зависят от $\{\mathbf{x}, t\}$. В уравнениях (1) стохастические источники: векторное поле $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x}, t)$, $\tilde{\rho}(\mathbf{x}, t)$ представляют собой соответственно плотности электрического тока и заряда, возникающих на микромасштабах вследствие тепловых флюктуаций. Они подчинены уравнению непрерывности

$$\dot{\tilde{\rho}} + (\nabla, \tilde{\mathbf{j}}) = 0. \quad (2)$$

По этой причине, для полного математического задания модели достаточно определить поле $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x}, t)$. Такое определение дается формулой $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x}, t) = \tilde{\varphi}(\mathbf{x}, t)a(\mathbf{x}, t; T) + \sigma\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, t)$, где σ – коэффициент электропроводности среды, $a(\mathbf{x}, t; T)$ – фиксированная функция, которая представляет собой функционал от распределения температуры T в среде и которая определяется на основе статфизических соображений, а случайное поле $\tilde{\varphi}(\mathbf{x}, t)$ является однородным, стохастически изотропным обобщенным гауссовским векторным полем с нулевым средним значением. Распределение вероятностей этого поля полностью определяется его корреляционной функцией $K_{j_1 j_2}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, t_1 - t_2) = \langle \tilde{\varphi}_{j_1}(\mathbf{x}_1, t_1)\tilde{\varphi}_{j_2}(\mathbf{x}_2, t_2) \rangle$, которая принимается в виде

$$K_{j_1 j_2}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, t_1 - t_2) = K(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|)\delta_{j_1 j_2}\delta(t_1 - t_2).$$

В рамках сформулированной модели вычисляется математическое ожидание $\langle \tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{x}, t) \rangle$ векторного поля (c – скорость света в вакуме)

$$\tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{x}, t) = \frac{c}{4\pi}[\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{H}}](\mathbf{x}, t), \quad (3)$$

которое представляет собой поток энергии электромагнитного излучения в стационарном поле, с точки зрения теории случайных процессов, и которое, таким образом, является определяемым моделью функционалом от распределения температуры $T(\mathbf{x}, t)$. Такое среднее дается выражением

$$S_j(\mathbf{x}, t) = \epsilon_{jll'} \frac{c}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^8} \exp \left[i(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \mathbf{x}) + i(\omega - \omega')t \right] \times \\ \times \left\langle \tilde{\mathcal{E}}_l(\mathbf{k}, \omega) \tilde{\mathcal{H}}_{l'}^*(\mathbf{k}', \omega') \right\rangle d\mathbf{k} d\mathbf{k}' d\omega d\omega', \quad (4)$$

где Fourier-образы $\tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{k}, \omega)$ и $\tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{k}, \omega)$ даются выражениями

$$\tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{k}, \omega) = i \frac{4\pi}{\varepsilon} \cdot \frac{\left((\omega^2 - i\omega\gamma)\tilde{\boldsymbol{\iota}}(\mathbf{k}, \omega) - \bar{c}^2(\mathbf{k}, \tilde{\boldsymbol{\iota}}(\mathbf{k}, \omega))\mathbf{k} \right)}{(\omega - i\gamma)(\omega^2 - \bar{c}^2\mathbf{k}^2 - i\omega\gamma)}, \quad (5)$$

$$\tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{k}, \omega) = -i \frac{4\pi c}{\varepsilon\mu} \cdot \frac{[\mathbf{k}, \tilde{\boldsymbol{\iota}}(\mathbf{k}, \omega)]}{(\omega^2 - \bar{c}^2\mathbf{k}^2 - i\omega\gamma)}, \quad (6)$$

$\bar{c}^2 = c^2/\varepsilon\mu$ и соответствуют обобщенным функциям на пространстве бесконечно дифференцируемых, быстро убывающих функций в \mathbb{R}^4 . Здесь обобщенное случайное поле $\tilde{\iota}(\mathbf{k}, \omega)$ имеет вид

$$\tilde{\iota}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\mathbb{R}^4} \exp(-i\omega t - i(\mathbf{k}, \mathbf{x})) a(T(\mathbf{x}, t)) \tilde{\varphi}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} dt.$$

Относительно функции $K(r)$, кроме ее положительной определенности, которая необходима в силу теоремы Боннера-Хинчина, мы предполагаем следующую ее структуру $r_0^{-3}Q(r/r_0)$, где $r_0 > 0$ – малый параметр. Помимо этого малого параметра, вводится параметр L – максимальный размер температурной неоднородности (за пределами фиксированной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с линейным размером L , $T(\mathbf{x}) = T_0$ при $t = 0$), малые параметры $\kappa/L\bar{c}\kappa \ll 1$, κ – теплоемкость среды, а κ – ее теплопроводность и $\gamma L/\bar{c} \ll 1$, $\gamma = 4\pi\sigma/\varepsilon$.

Плотность потока $S_j(\mathbf{x}, t)$ как главный член ее асимптотики при $\kappa/L\bar{c}\kappa \rightarrow 0$, $\gamma L/\bar{c} \rightarrow 0$, $r_0/L \rightarrow 0$, где предельные переходы понимаются как повторные. В результате всех проведенных вычислений получается следующий результат

$$S_j(\mathbf{x}, t) = \frac{r_0^{-3}KR}{4\pi\bar{c}^2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{y_j e^{-3\gamma|\mathbf{y}|/2\bar{c}}}{|\mathbf{y}|^3} a^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t; T) d\mathbf{y},$$

$$R = 4\pi\bar{c}^2/\varepsilon, K = \int Q(|\mathbf{x}|) d\mathbf{x} = \text{const.}$$

Литература

1. Virchenko Yu.P., Saprykin M.A. Nonequilibrium thermodynamics of heat radiation conduction in dielectric media// Functional Materials. 2011. Т. 18, № 4. С. 504–511.
2. Вирченко Ю.П., Сапрыкин М.А. Флуктуационный подход в теории радиационно-кондуктивного теплообмена// Доповіді НАНУ. 2010. Т. 11. С. 63–69.

УДК 517.5

СИЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ В ОБОБЩЕННЫХ ГЕЛЬДЕРОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

© Ласурия Р.А., Голава М.Р.

Абхазский государственный университет (Абхазия, Сухум)
e-mail: rlasuria67@yandex.ru

Пусть $C = C(0, 2\pi)$ пространство непрерывных 2π -периодических функций с нормой $\|f\|_C := \max_x |f(x)|$,

$$S[f] := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

– ряд Фурье функции f , $S_n(x; f)$ – частные суммы порядка n ряда $S[f]$, H_ω – пространство функций $f \in C$ с нормой $\|f\|_\omega := \|f\|_C + |f|_\omega$, где

$$|f|_\omega := \sup_{h>0} \frac{\|\Delta_h f\|_C}{\omega(h)} < +\infty,$$

$\Delta_h f(x) := f(x+h) - f(x)$, $h > 0$, $\omega(\cdot)$ – функция типа модуля непрерывности, $E_n(f)_\omega$ – наилучшее приближение f в пространстве H_ω . Последовательность неотрицательных функций $\lambda_k(v)$, $v \in V \subset \mathbb{R}$, удовлетворяет условию Λ_q , если

a) $\sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=2^i n+1}^{2^{i+1} n} \lambda_k(v) \ln^q(k+1) \right\}^{\frac{1}{q}} < \infty, \quad \forall v \in V,$

$$n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$$

б) \exists константа $M_n = M_n(\Lambda_q)$, такая что

$$\sum_{i=0}^{\infty} (2^i n \Lambda_{2^i n+1, 2^{i+1} n}(v))^{\frac{1}{q}} \leq M_n, \quad \forall v \in V,$$

$$\Lambda_{m,n}(v) := \max_{m \leq k \leq n} \lambda_k(v).$$

Теорема. Если $H_\omega \subset H_{\omega^*}$, то $\forall f \in H_\omega, \forall n \in \mathbb{N}_0$ и $\forall q \geq 1$ справедливо неравенство

$$\left\| \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=2^i n+1}^{2^{i+1} n} \lambda_k(v) |S_k(f) - f|^q \right\}^{\frac{1}{q}} \right\|_{\omega^*} \leq$$

$$\leq A_q \sum_{i=0}^{\infty} (2^i n \Lambda_{2^i n+1, 2^{i+1} n}(v))^{\frac{1}{q}} E_{2^i n}(f)_{\omega^*}, \quad A_q := const > 0,$$

в частности, если $\tilde{\omega}(h) := \frac{\omega(h)}{\omega^*(h)}$ монотонно возрастает, то

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}} \lambda_k(v) |S_k(f) - f|^q \right\}^{\frac{1}{q}} \right\|_{\omega^*} \leq \\ & \leq A_q |f|_{\omega} \sum_{i=0}^{\infty} (2^i \Lambda_{2^i+1, 2^{i+1}}(v))^{\frac{1}{q}} \tilde{\omega}\left(\frac{1}{2^i}\right). \end{aligned}$$

Подобные вопросы изучались в работах [1, 2].

Литература

1. Gorzenska M., Lesniewicz M., Rempulska L. Strong approximation of functions in Holder spaces// Acta Sci. Math. (Szeged), 58 (1993), 233–241.
2. Ласурция Р.А. Оценки группы уклонений в обобщённой гёльдеровой метрике// Укр. мат. журн. –2001. –53. –№9. –с. 1210-1212.

УДК 517.95

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДРОБНОЙ ДИФФУЗИИ

© Лосанова Ф.М.

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
"Институт прикладной математики и автоматизации" (Россия, Нальчик)
e-mail: losanova@gmail.com

В области $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < \infty, 0 < y < T\}$ евклидовой плоскости независимых переменных (x, y) рассмотрим уравнение

$$u_{xx}(x, y) - D_{0y}^{\alpha} u(x, \eta) = f(x, y), \quad (1)$$

где

$$D_{0y}^{\alpha} u(x, \eta) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^y \frac{u(x, \eta) d\eta}{(y-\eta)^{\alpha+1}}, & \alpha < 0, \\ u(x, y), & \alpha = 0, \\ \frac{\partial^n}{\partial y^n} D_{0y}^{\alpha-n} u(x, \eta), & n-1 < \alpha \leq n, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

– оператор дробного интегродифференцирования (в смысле Римана–Лиувилля) порядка α [1, с. 9], $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция Эйлера, $0 < \alpha \leq 1$.

Решение $u(x, y)$ уравнения (1) назовем *регулярным* в области Ω , если $y^{1-\alpha}u(x, y) \in C(\bar{\Omega})$, $u_{xx}(x, y), D_{0y}^\alpha u(x, \eta) \in C(\Omega)$.

Задача. В области Ω требуется найти регулярное решение $u(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям:

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-1} u(x, \eta) = \tau(x), \quad 0 \leq x < \infty, \quad (2)$$

$$\int_0^\infty K(x, y)u(x, y)dx = \psi(y), \quad 0 < y < T, \quad (3)$$

где $\tau(x), \psi(y), K(x, y)$ - заданные непрерывные функции.

Доказана теорема существования и единственности. Решение найдено в классе функций быстрого роста [2, с. 120].

Литература

1. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. 301 с.
2. Пеху А. В. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

УДК 519.7

ПРОЦЕДУРА НАПРАВЛЕННОГО ПОИСКА КОРРЕКТНЫХ ОПЕРАЦИЙ НАД АЛГОРИТМАМИ

© Лютикова Л.А.¹, Шматова Е.В.²

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
"Институт прикладной математики и автоматизации" (Россия, Нальчик)

¹e-mail: lylarisa@yandex.ru

²e-mail: lenavsh@yandex.ru

При решении задач конструктивного обучения возникает необходимость нахождения функций наиболее выразительно реализующих заданные обучающие выборки.

Пусть на вход системы подается вектор значений $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и каждый вход обладает весом w_j , $j = 1, \dots, m$. На выходе системы имеется результирующее значение y .

Ставится задача: построить (таблично задать) набор функций, удовлетворяющих условию:

$$f(x_i, w_i) = y, \quad (1)$$

где $f(x_i, w_i)$ - есть функция представимая через операции псевдосложения и псевдоумножения.

Для реализации поставленной задачи предложим следующий метод.

Пусть дана k -значная логика $L = \langle L, \bar{x}, \&, \vee, \neg, \rightarrow \rangle$, $L = \{0, 1, \dots, k-1\}$.

Множество функций $\sigma(x, y) : \sigma(x, 0) = \sigma(0, x) = x$ назовем функциями псевдосложения, а множество функций $\pi(x, y) : \pi(x, 0) = \pi(0, x) = 0$ - функциями псевдоумножения.

При заданных входных значениях x и w и выходном y имеем частично определенную k -значную функцию, которая определена на наборе (x, w) значением y . Для этого вначале построим допустимые операции псевдоумножения для $x_i w_i$, $i = 1, \dots, n$ в виде дерева.

Рассмотрим $x_1 w_1$. Эта величина нам неизвестна, но должна принимать одно из значений $L = \{0, 1, \dots, k-1\}$ (в силу замкнутости операции псевдоумножения). Отсюда вытекает необходимость выполнения одного из трех условий:

$$x_1 w_1 = 0, x_1 w_1 = 1, \dots, x_1 w_1 = k-1 \quad (2)$$

При этом получаем k возможности реализации функции $\Pi \in \pi$ (т.е. три разветвления дерева). На следующем шаге рассмотрим следующее соотношение $x_2 w_2$ и с учетом сформулированных ранее предположений каждая из ветвей (2) разобьется в свою очередь на k ветви. Продолжая выполнять описанные выше шаги построим дерево допустимых значений таблиц истинности операции псевдоумножения. Если на некотором шаге допущение будет противоречить сделанному ранее предположению относительно данного варианта функции Π , то такая ветка является тупиковой и она отбрасывается. Последним шагом является рассмотрение $x_n w_n$, после чего процесс нахождения псевдоумножения заканчивается. Множество допустимых решений функции Π собирается подъемом от верхних листвьев дерева к корню. В результате получаем совокупность таблиц истинности функции псевдоумножения.

Если совокупность множества π пуста, то для функций $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ нельзя указать такие операции псевдосложения и псевдоумножения, чтобы выполнялось соотношение (1).

Пусть $a_i = x_i w_i$, $i = 1, \dots, n$, тогда каждой найденной операции $\Pi \in \pi$ можно поставить в соответствие вектор $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Т.е. (1) перепишется: $\Sigma(a_1, a_2, \dots, a_n) = y$. И далее для определения операции псевдосложения воспользуемся алгоритмом представимости функции через операции псевдосложения, предложенный в [2].

Утверждение. *Существует алгоритм для нахождения функций псевдоумножения и псевдосложения, реализующих заданные условия $f(x_i, w_i) = y$.*

Предложенный метод планируется применить для построения корректоров алгоритмов распознавания [1, 3].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 15-01-03381.

Литература

1. Шибзухов З.М.. Агрегирующие корректные операции над алгоритмами// Доклады Академии наук. Т. 462, №6, 2015. С. 391—393.
2. Шматова Е.В. Логическая схема построения операций псевдосложения в трехзначной логике// Материалы X Школы молодых ученых “Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики”. Нальчик: Издательство КБНЦ РАН, 2012. С. 107–109.
3. Лютикова Л.А., Шматова Е.В. Логический анализ корректирующих операций для построения качественного алгоритма распознавания// Программные продукты и системы. 2016, №1 (113). С. 108–112.

УДК 517.9

ДРОБНОЕ ИНТЕГРАЛЫ И ПРОИЗВОДНЫЕ КИПРИЯНОВА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

© Ляхов Л.Н.

Воронежский государственный университет (Россия, Воронеж)
e-mail: levnlya@mail.ru

В 60-х годах прошлого столетия И.А. Киприянов ввел операторы дробного интегродифференцирования, порожденное преобразованием Фурье-Бесселя (см. [1], с. 427-428). Как оказалось, эти формулы применяются для построения решений задачи Коши для сингулярного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу с оператором Бесселя по времени.

В докладе будут приведены соответствующие формулы.

Литература

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их применения. Минск Наука и техника 1987. 688 с.

УДК 517.58

ГАУССОВО СООТНОШЕНИЕ ДЛЯ СМЕЖНЫХ ФУНКЦИЙ ГОРНА H_3

© Мавлявиев Р.М.¹, Гарипов И.Б.²

Казанский (Приволжский) федеральный университет (Россия, Казань)

¹e-mail: mavly72@mail.ru

²e-mail: ilnur_garipov@mail.ru

При решении задач для обобщенного осесимметрического уравнения Гельмгольца возникает необходимость в использовании конфлюэнтной гипергеометрической функции Горна. Известно [1], что эта функция записывается через функцию Гаусса:

$$H_3(\alpha, \beta; \delta; z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1-\alpha)_n} \frac{t^n}{n!} F(\alpha - n, \beta; \delta; z) \quad (|z| < 1), \quad (1)$$

где символ Погаммера определяется формулой

$$(1-\alpha)_n = \underbrace{(1-\alpha)(2-\alpha)\dots(n-1-\alpha)(n-\alpha)}_n. \quad (2)$$

Используя (2), запишем соотношение

$$(-\alpha)_n(n-\alpha) = \underbrace{(-\alpha)(1-\alpha)(2-\alpha)\dots(n-1-\alpha)(n-\alpha)}_n = -\alpha(1-\alpha)_n,$$

которое по свойствам пропорции представимо в виде

$$\frac{\alpha}{(1-(\alpha+1))_n} = \frac{(\alpha-n)}{(1-\alpha)_n}. \quad (3)$$

Целью данной работы является доказательство следующего соотношения типа Гаусса между смежными функциями Горна

$$(\beta - \alpha) H_3(\alpha, \beta; \delta; z, t) - \beta H_3(\alpha, \beta + 1; \delta; z, t) +$$

$$+\alpha H_3(\alpha+1, \beta; \delta; z, t) = \frac{1}{1-\alpha} t H_3(\alpha-1, \beta; \delta; z, t). \quad (4)$$

Как указано в [1], при $t = 0$ функция H_3 вырождается в гипергеометрическую функцию

$$H_3(\alpha, \beta; \delta; z, 0) = F(\alpha, \beta; \delta; z). \quad (5)$$

В работе [2] приведены 15 соотношений Гаусса между смежными гипергеометрическими функциями, например

$$(b-a)F(a, b; c; z) - bF(a, b+1; c; z) + aF(a+1, b; c; z) = 0. \quad (6)$$

С учетом (5) очевидно, что при $t = 0$ соотношение (4) вырождается в формулу (6) с точностью до обозначений параметров.

Взяв параметры $a = \alpha - n$, $b = \beta$, $c = \delta$ из (6) получаем

$$\begin{aligned} & (\beta - \alpha)F(\alpha - n, \beta; \delta; z) - \beta F(\alpha - n, \beta + 1; \delta; z) = \\ & = -(\alpha - n)F(\alpha - n + 1, \beta; \delta; z) - nF(\alpha - n, \beta; \delta; z). \end{aligned} \quad (7)$$

Используя (1), представим левую часть (4) в виде рядов:

$$\begin{aligned} & (\beta - \alpha)H_3(\alpha, \beta; \delta; z, t) - \beta H_3(\alpha, \beta + 1; \delta; z, t) + \alpha H_3(\alpha + 1, \beta; \delta + z, t) = \\ & = (\beta - \alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1-\alpha)_n} \frac{t^n}{n!} F(\alpha - n, \beta; \delta; z) - \\ & - \beta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1-\alpha)_n} \frac{t^n}{n!} F(\alpha - n, \beta + 1; \delta; z) + \\ & + \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1-(\alpha+1))_n} \frac{t^n}{n!} F(\alpha + 1 - n, \beta + 1; \delta; z) = \end{aligned}$$

учитывая формулу (3), объединим ряды

$$\begin{aligned} & = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1-\alpha)_n} \frac{t^n}{n!} \left((\beta - \alpha)F(\alpha - n, \beta; \delta; z) - \beta F(\alpha - n, \beta + 1; \delta; z) + \right. \\ & \quad \left. + (\alpha - n)F(\alpha + 1 - n, \beta + 1; \delta; z) \right) = \end{aligned}$$

и упростим ряд, используя соотношение (7)

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1-\alpha)_n} \frac{t^n}{n!} \left(-nF(\alpha - n, \beta; \delta; z) \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= 0 + \frac{1}{(1-\alpha)} t \underbrace{\sum_{n-1=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(1-(\alpha-1))_{n-1}} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} F(\alpha-1-(n-1), \beta; \delta; z)}_{H_3(\alpha-1, \beta; \delta; z, t)} = \\
&= \frac{1}{(1-\alpha)} t H_3(\alpha-1, \beta; \delta; z, t).
\end{aligned}$$

Тем самым формула (4) доказана. В частности, из нее при параметрах $\alpha = \beta = k$; $\delta = 2k$ следует, что

$$H_3(k+1, k; 2k; z, t) - H_3(k, k+1; 2k; z, t) = \frac{1}{k(1-k)} t H_3(k-1, k; 2k; z, t).$$

Литература

1. Капилевич М. Б. О конфлюэнтных гипергеометрических функциях Горна // Дифференциальные уравнения. 1966. Т. II, № 9. С. 1239-1254.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, Т. I. Гипергеометрическая функция, функции Лежандра. М.: Наука, 1973. 296 с.

УДК 536.712; 536.752

К ВЫВОДУ ФРАКТАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СИСТЕМ

© Магомедов Р.А.¹, [Мейланов Р.П.], Мейланов Р.Р.¹,
Ахмедов Э.Н.¹, Бейбалаев В.Д.^{1,2}, Аливердиев А.А.^{1,2}

¹ФГБУН Институт проблем геотермии ДНЦ РАН (Россия, Махачкала)

²Дагестанский государственный университет (Россия, Махачкала)

e-mail: ramazan_magomedov@rambler.ru

Интерес к выводу уравнений состояния связан с получением новых веществ и их композиций, и применением таких веществ в широкой области изменения температуры и давления, с охватом экстремальных состояний [1].

В этой связи ведутся интенсивные исследования по обобщению как термодинамики, так и статистической физики, в частности, с применением дробного исчисления [2-3]. В случае равновесной термодинамики переход к дробным производным по термодинамическим параметрам (температура, объем) [2] вносит в теорию новый параметр – показатель производной дробного порядка α , который учитывает нелокальность интеграла столкновений, и расширяет область применимости полученного однопараметрического семейства уравнений состояния.

В работе используется метод дробного исчисления для вывода фрактального уравнения состояния для многокомпонентных веществ.

При выводе уравнения состояния используется соотношение

$$P = -\frac{\Gamma(2-\alpha)}{V^{1-\alpha}} \frac{\partial^\alpha F}{\partial V_T^\alpha}, \quad (1)$$

где $F = -kT \ln Z$ – потенциал Гельмгольца.

Статистическая сумма Z в общем случае дается выражением [4]

$$Z = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3N} N!} \int \cdots \int dp_1 \dots dp_N dr_1 \dots dr_N \exp\left(-\frac{H}{kT}\right),$$

где N – число частиц в системе, p – импульс частицы, r – координата частицы, \hbar – постоянная Планка, k – постоянная Больцмана.

Сумма кинетической и потенциальной энергии определяется выражением

$$H = \sum_{n=1}^N \frac{P_n^2}{2m_i} + U(r_1 \dots r_N),$$

где m_i – масса молекулы i -ой компоненты.

Для потенциала Гельмгольца, в приближении парного взаимодействия, имеем

$$F = kT \left\{ \ln \left(\frac{V^N}{N! \Lambda^{3N}} \right) + \ln \left(1 - \frac{N}{V} \sum_{i=1}^3 x_i B_i - \frac{N}{V} \sum_{i < j=1}^3 x_{ij} B_{ij} \right) \right\}, \quad (2)$$

где $\Lambda = \sqrt{2\pi\hbar/m_i kT}$ – эффективная тепловая длина частицы, x_i – концентрация i -ой компоненты в системе, B_i – второй вироальный коэффициент i -ой компоненты.

Подставим (2) в (1) и вычислим производную дробного порядка, используя при этом табличные интегралы из [5]

$$P = \frac{NkT}{V} \left\{ 1 + \frac{B(T)/V}{1 + NB(T)/V} + (1-\alpha) \left[\ln \left(\frac{eV}{N} \left[\frac{m_1^x m_2^y m_3^z kT}{2\pi\hbar^2} \right]^{\frac{3}{2}} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \psi(1) - \psi(2-\alpha) - \frac{1}{N} \left(\ln(1+A/V) + \psi(2-\alpha) - \psi(1) \right) \right] \right\}, \quad (3)$$

где $A = NB(T)$, $B(T) = \sum_{i=1}^3 x_i B_i + \sum_{i < j}^3 x_{ij} B_{ij}$ – обобщенный второй вироальный коэффициент системы, $\psi(x)$ – пси функция от числа x , $x+y+z=1$ – массовые доли компонент в системе.

Оставим линейные по малому параметру $\frac{B(T)}{V} < 1$ члены и, пре-небрегая малыми членами $1/N \ll 1$, окончательно получим следую-щее уравнение состояния

$$P = \frac{NkT}{V} \left\{ 1 + \frac{B(T)}{V} + (1 - \alpha) \left[\ln \left(\frac{eV}{N} \left[\frac{m_1^x m_2^y m_3^z kT}{2\pi\hbar^2} \right]^{\frac{3}{2}} \right) + \psi(1) - \psi(2 - \alpha) - \frac{B(T)}{V} \right] \right\}, \quad (4)$$

при $\alpha = 1$ уравнение состояния (4) совпадает с традиционным урав-нением состояния.

Таким образом, исходя из обобщения равновесной термодинами-ки на случай производных дробного порядка, можно вывести од-нопараметрическое уравнение состояния и на его основе получить аналитические выражения для термодинамических характеристик вещества [2].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-08-00067.

Литература

1. *Фортов В.Е.* Уравнения состояния от идеального газа до кварк-глюонной плазмы. Москва: Физматлит, 2013. 492 с.
2. *Мейланов Р.П., Магомедов Р.А.* Термодинамика в дробном исчислении// ИФЖ. 2014. Т. 87, № 6. С. 1455–1465.
3. *Meilanov R.P., Shabanova M.R., Akhmedov E.N.* Some peculiarities of the solution of the heat conduction equation in fractional calculus// Chaos, Solitons and Fractals. 2015. № 75. С. 29–33.
4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. Москва: Наука, 1964. 568 с.
5. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Москва: Наука, 1981. 800 с.

УДК 517.91

**КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С
ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ**
© Мажгихова М.Г.

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
"Институт прикладной математики и автоматизации" (Россия, Нальчик)
e-mail: mazhgihova.madina@yandex.ru

Рассмотрим уравнение

$$\partial_{0t}^\alpha u(\eta) - \lambda u(t) - \mu H(t - \tau)u(t - \tau) = f(t), \quad 0 < t < 1, \quad (1)$$

где $\partial_{0t}^\alpha u(t)$ –дробная производная Капуто [1, с. 11], $H(t)$ – функция Хевисайда, $1 < \alpha \leq 2$, λ, μ – произвольные постоянные, τ – фиксированное положительное число.

Задача Коши для уравнения (1) исследована в работе [2]. Начальная задача для уравнения (1) с оператором Римана-Лиувилля изучена в [3]. Задачи Дирихле и Неймана для уравнения (1) рассмотрены в работах [4] и [5].

Регулярным решением уравнения (1) назовем функцию $u = u(t)$, имеющую абсолютно непрерывную производную первого порядка и удовлетворяющую этому уравнению для всех $t \in (0, 1)$.

Задача. Найти регулярное решение $u(t)$ уравнения (1) при $0 < t < 1$, удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} au(0) + bu'(0) &= 0, \\ cu(1) + du'(1) &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где a, b, c, d – заданные постоянные, причем $a^2 + b^2 \neq 0$, $c^2 + d^2 \neq 0$.

Справедлива следующая

Теорема. 1) Пусть функция $f(t) \in C(0, 1)$ представима в виде

$$f(t) = D_{0t}^{\alpha-2}g(t), \quad g(t) \in L(0, 1),$$

и выполнено условие

$$\Delta \neq 0, \quad (3)$$

где

$$\Delta = a(cW_2(1) + dW_1(1)) - b(cW_1(1) + dW_2(1)).$$

Тогда существует регулярное решение задачи (1)-(2), которое имеет вид

$$u(t) = \int_0^1 f(\xi)G(t, \xi)d\xi,$$

где

$$\begin{aligned} G(t, \xi) &= H(t - \xi)W_\alpha(t - \xi) + (cW_\alpha(1 - \xi) + dW_{\alpha-1}(1 - \xi)) \times \\ &\times \left(\frac{b}{\Delta}W_1(t) - \frac{a}{\Delta}W_2(t) \right), \end{aligned}$$

$$W_\nu(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m (t - m\tau)_+^{\alpha m + \nu - 1} E_{\alpha, \alpha m + \nu}^{m+1}(\lambda(t - m\tau)_+^\alpha), \quad \nu \in \mathbb{R},$$

$$E_{\alpha, \beta}^\rho(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_k z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta) k!}$$

– обобщенная функция Миттаг-Леффлера [6], $(\rho)_k$ – символ Погамера, $\Gamma(z)$ – Гамма-функция Эйлера,

$$(t - m\tau)_+^\rho = \begin{cases} (t - m\tau)^\rho, & t - m\tau > 0 \\ 0, & t - m\tau \leq 0. \end{cases}$$

2) Решение задачи (1)-(2) единствено тогда и только тогда, когда выполнено условие (3).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 06-01-00462-а.

Литература

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
2. Мажсихова М.Г. Начальная задача для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук Т.16. №4. 2014. С. 28-30.
3. Мажсихова М.Г. Начальная задача для обыкновенного дифференциального уравнения с производной Римана-Лиувилля с запаздывающим аргументом // Ученые записки ОГУ. №4 (67). 2015. С. 46-47.
4. Мажсихова М.Г. Задача Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2015. Т.17. №2. С. 42-47.
5. Мажсихова М.Г. Задача Неймана для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом // Известия КБНЦ РАН. 2016. №2(70). С. 15-20.
6. Prabhakar T.R. A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel // Yokohama Math. J., 19. (1971) 7-15.

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ АЛЛЕРА

© Макаова Р.Х.

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
 "Институт прикладной математики и автоматизации" (Россия, Нальчик)
 e-mail: makaova.ruzanna@mail.ru

В прямоугольной области $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < r, 0 < y < T\}$ рассматривается уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial y} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + f(x, y), \quad (1)$$

где a, b - заданные положительные числа; $f(x, y)$ - заданная функция; $u = u(x, y)$ - значение искомой функции в точке x в момент времени y .

Уравнение (1) называется уравнением Аллера [1, с. 255] и относится к уравнениям псевдопарараболического типа [2], описывающих фильтрацию жидкости в пористых средах [3], [4]. В работе [5] доказана однозначная разрешимость задачи Трикоми для уравнения смешанного типа с оператором Аллера в главной части.

Регулярным в области Ω решением уравнения (1) назовем функцию $u = u(x, y)$ такую, что $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, $u_{xx}, u_{xxy} \in C(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (1).

В работе исследуется

Первая краевая задача. *Найти регулярное в области Ω решение уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию*

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq r, \quad (2)$$

и граничным условиям:

$$u(0, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq T, \quad (3)$$

$$u(r, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq T, \quad (4)$$

где $\varphi(x) \in C^2[0, r]$.

Основным результатом является следующая

Теорема. *Задача (2)-(4) для уравнения (1) имеет не более одного решения.*

Литература

1. *Нахушев А.М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М: Наука, 2006. 287 с.
2. *Showalter R.E., Ting T.W.* Pseudoparabolic partial differential equations // SIAM J. Math. Anal. 1970. Vol. 1, № 1. P. 1-26.
3. *Barenblatt G.I., Zheltov Iu.P., Kochina I.N.* Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks [strata] // PMM. 1960. Vol. 24, No 5. Pp. 852-864.
4. *Coleman B.D., Duffin R.J., Mizel V.J.* Instability, Uniqueness, and Nonexistence Theorems for the Equation on a Strip // Arch. Rat. Mech. Anal. 1965. Vol. 19. Pp. 100-116.
5. *Макаова Р.Х.* Задача Трикоми для одного уравнения смешанного типа // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной Академии наук. 2015. Т. 17, № 1. С. 22-24.

УДК 517.925.42

ОБ ОДНОЙ ЭРЕДИТАРНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ, МОДЕЛИРУЮЩЕЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ЦИКЛЫ

© Макаров Д.В.

Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга
(Россия, Петропавловск-Камчатский)
e-mail: daniel.makarov.pk@yandex.ru

Важность математического моделирования экономических процессов неоспорима. Это обусловлено тем, что математическое описание экономических систем дает количественное и качественное представление о экономических показателях с целью их дальнейшего прогнозирования в следующие промежутки времени, а также рекомендации для принятия правильного управлеченческого решения [1]. Для нас наибольший интерес представляет исследование экономических кризисов, так как именно они определяют экономическое благосостояние граждан и степень социального напряжения в стране. Еще в 20-е годы прошлого века советский экономист Н.Д. Кондратьев выделил во временных экономических рядах долгосрочные периодические колебания (волны) с длительностью 50-55 лет [2]. Далее другие исследователи в последствие аналогично выявили волны другой длительности, например, волны базовых инвестиций [3] и т.д. Наиболее полное математическое описание моделирования циклов Кондратьева было проведено, на наш взгляд,

в работах С.В. Дубовского [4-6]. В настоящей работе была предложена математическая модель, которая обобщает известную модель Дубовского в случае учета эффектов памяти в экономической системе и является логическим продолжением работ [7] и [8]. Эффекты памяти описываются с помощью теории дробного исчисления, а именно производных дробного порядка [9]. Такие модели можно найти в работах зарубежных авторов [10-14], а также в работах отечественных авторов [15-17].

Постановка задачи и методика решения. Обобщенная модель циклов Кондратьева может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} \partial_{0t}^\alpha x(\tau) = -\lambda n x(t)(x(t)-1)(y(t)-y^*), \\ \partial_{0t}^\beta y(\tau) = n(1-n)y^2(t)(x(t)-x^*) + f(t), \\ x(0) = a, y(0) = b, \end{cases} \quad (1)$$

где $\partial_{0t}^\alpha x(\tau) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\dot{x}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^\alpha}$ и $\partial_{0t}^\beta y(\tau) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \frac{\dot{y}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^\beta}$ – производные дробных порядков $0 < \alpha, \beta < 1$ в смысле Герасимова-Капуто; $\Gamma(x)$ – гамма-функция Эйлера; $x(t)$ – эффективность новых технологий; $y(t)$ – эффективность фондоотдачи; x^* и y^* – равновесное стационарное решение системы (1); n – норма накопления; λ – коэффициент, который определяется из статистики временного ряда; $f(t)$ – внешнее воздействие на экономическую систему; $t \in [0, T]$ – временная координата, T – время моделирования процесса; a и b – начальные условия, заданные константы.

Заметим, что нелинейная система (1) в случае значений параметров $\alpha = \beta = 1$ и $f(t) = 0$ переходит в модель Дубовского [4]. Поэтому очевидно, что решение системы (1) будет обобщать решение модели Дубовского. Решение нелинейной системы (1) будем искать с помощью численных методов – конечно-разностных схем. Разобьем временной отрезок $[0, T]$ на N равных частей, с шагом τ . Аппроксимацию дробных производных в уравнении (1) проводим согласно работе [18]. Тогда система (1) запишется в конечно-разностной постановке в виде:

$$\begin{cases} x_0 = a, y_0 = b, \\ x_1 = x_0 \left(1 - \frac{\lambda n}{A} (x_0 - 1)(y_0 - y^*)\right), y_1 = y_0 \left(1 + \frac{n(1-n)}{B} y_0 (x_0 - x^*)\right), j = 0, \\ x_2 = x_1 \left(1 - \frac{\lambda n}{A} (x_1 - 1)(y_1 - y^*)\right), y_2 = y_1 \left(1 + \frac{n(1-n)}{B} y_1 (x_1 - x^*)\right), j = 1, \\ x_{j+1} = x_j \left(1 - \frac{\lambda n}{A} (x_j - 1)(y_j - y^*)\right) - \sum_{k=1}^{j-1} p_k (x_{j-k+1} - x_{j-k}), \\ y_{j+1} = y_j \left(1 + \frac{n(1-n)}{B} y_j (x_j - x^*)\right) - \sum_{k=1}^{j-1} q_k (x_{j-k+1} - x_{j-k}) + f_j, j = 2, \dots, N-1. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь $A = \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}$, $B = \frac{\tau^{-\beta}}{\Gamma(2-\beta)}$, $p_k = (1+k)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}$, $q_k = (1+k)^{1-\beta} - k^{1-\beta}$.

Решение (2) в случае, когда $\alpha = \beta = 1$ и $f_j = 0$, переходит в решение для модели Дубовского [4]. Исследуем решение (2) в зависимости от различных значений дробных параметров α и β , а также построим фазовые траектории. В этой работе мы не останавливаемся на вопросах устойчивости или сходимости явной конечно разностной схемы (2).

Далее в работе были построены фазовые траектории, которые в зависимости от значений дробных порядков α и β выходят на различные предельные циклы, которые можно рассматривать как экономические циклы.

Литература

1. *Паровик Р.И.* Моделирование выбора руководством высшего учебного заведения оптимального решения, согласованного с управляющими решениями его филиалов// Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2013. № 1(6). С. 5-11.
2. *Кондратьев Н.Д., Опарин Д.Н.* Большие циклы конъюнктуры. М.: Институт экономики, 1928. 287 с.
3. *Mensch G.* Stalemate in Technology. Innovations Overcome the Depression Cambrg. Ballinger Pub Co. 1979. 241 p.
4. *Дубовский С.В.* Объект моделирования – цикл Кондратьева// Математическое моделирование. 1995. Т.7. № 6. С. 65-74.
5. *Дубовский С.В.* Моделирование циклов Кондратьева и прогнозирование кризисов. В кн. Кондратьевские волны. Аспекты и перспективы / под. ред. Акаева А.А. Волгоград: Учитель, 2012. С. 179-188.
6. *Дубовский С.В.* Прогнозирование катастроф (на примере циклов Н.Д. Кондратьева)// Общественные науки и современность. 1993. № 5. С. 82–91.
7. *Макаров Д.В.* Экономико-математическое моделирование инновационных систем// Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2014. № 1(8). С. 66–70.
8. *Макаров Д.В., Паровик Р.И.* Обобщенная математическая модель Дубовского для прогнозирования экономических кризисов// Научно-технический вестник Поволжья. 2016. № 1. С. 74-77.
9. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

10. *Boleanu M.* Fractional dynamical systems and applications in economy// Differential Geometry - Dynamical Systems. Vol. 10. 2008. P. 62–70.
11. *Yiding Y., Lei H., Guanchun L.* Modeling and application of new nonlinear fractional financial model// Journal of Applied Mathematics. 2013.
12. *Tejado I., Duarte V., Nuno V.* Fractional Calculus in Economic Growth Modeling. The Portuguese case. Conference: 2014 International Conference on Fractional Differentiation and its Applications (FDA'14).
13. *Mendes R.V.* A fractional calculus interpretation of the fractional volatility model// Nonlinear Dyn. 2008.
14. *Zhenhua H., Xiaokang T.* A new discrete economic model involving generalized fractal derivative// Advances in Difference Equations. 2015. V. 65.
15. *Шпилько Я.Е., Соломко А.А., Паровик Р.И.* Параметризация уравнения Самуэльсона в модели Эванса об установлении равновесно цены на рынке одного товара// Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2012. № 2(5). С. 33–36.
16. *Самута В.В., Стрелова В.А., Паровик Р.И.* Нелокальная модель неоклассического экономического роста Солоу// Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2012. №2(5). С. 37–41.
17. *Нахушева З.А.* Об одной односекторной макроэкономической модели долгосрочного прогнозирования// Доклады АМАН. 2012. Т. 14, № 1. С. 124–127.
18. *Паровик Р.И.* Математическое моделирование линейных эредитарных осцилляторов. Петропавловск-Камчатский: КамГУ имени Витуса Беринга, 2015. 178 с.

УДК 519.642.2:517.968.72

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ
НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ
ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ПРОИЗВОДНЫМИ
ДРОБНОГО ПОРЯДКА**

© Малиева Ф.Ф.

Дагестанский государственный университет (Россия, Махачкала)
e-mail: faridadavudova@mail.ru

Изучение нелинейных математических моделей различных физико-химических процессов на данном этапе развития науки является одним из актуальных направлений современной математической физики. Это обусловлено использованием в современной фи-

зике и технике воздействий на вещество электрических полей большей интенсивности, пучков частиц высокой энергии, мощного лазерного когерентного излучения, ударных волн высокой интенсивности, мощных тепловых потоков.

Рассмотрим в области $D = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t < T\}$ первую краевую задачу для нелинейного уравнения теплопроводности с производными дробного порядка.

Задача. Найти решение уравнения

$$\rho \cdot c \cdot {}^c D_{0t}^\alpha T(x, t) = D_{x+}^\beta (k(T) D_{x+}^\gamma T(x, t)) + f(T) \quad (1)$$

удовлетворяющее начальному условию $T(x, 0) = \phi(x)$ и граничным условиям

$$T(0, t) = \mu_1(t), \quad T(1, t) = \mu_2(t).$$

Здесь ${}^c D_{0t}^\alpha T(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{T'(x, s)}{(t-s)^\alpha} ds$ – частная дробная производная Caputo [1], $D_{x+}^\alpha T(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^x \frac{T(x, s)}{(t-s)^\alpha} ds$ – дробная производная Римана-Лиувилля, $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1, 0 < \gamma < 1, k(t), f(t)$ – достаточно гладкие функции, $0 < c_1 \leq k(t) \leq c_2$.

Рассмотрим случай, когда $\beta = \gamma = 1$, то есть уравнение вида:

$$\rho \cdot c \cdot {}^c D_{0t}^\alpha T(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(T) \frac{\partial}{\partial x} T(x, t) \right) + f(T). \quad (2)$$

Воспользовавшись аппроксимацией дробной производной, для задачи (2)

$$\begin{aligned} \rho \cdot c \cdot \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{i=0}^n \frac{y_m^{i+1} - y_m^i}{\tau} \left(t_{(n-i+1)}^{(1-\alpha)} - t_{(n-i)}^{(1-\alpha)} \right) = \\ \frac{1}{h} \left(k_{m+1/2}^n \frac{y_{m+1}^{n+1} - y_m^{n+1}}{h} - k_{m-1/2}^n \frac{y_m^{n+1} - y_{m-1}^{n+1}}{h} \right) + f(y_m^n). \end{aligned} \quad (3)$$

$$T_m^0 = \phi(x_m), \quad T_0^n = \mu_1(t_n), \quad T_M^n = \mu_2(t_n).$$

Полученную разностную схему можно свести к наиболее общему виду:

$$A_m \cdot y_{m+1}^{n+1} + B_m \cdot y_m^{n+1} + C_m \cdot y_{m-1}^{n+1} = F_m, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \text{где } A_m = \frac{k_{m+1/2}^n}{h^2}, \quad C_m = \frac{k_{m-1/2}^n}{h^2}, \quad B_m = \frac{k_{m+1/2}^n - k_{m-1/2}^n}{h^2} + \frac{\rho c (t_1^{1-\alpha} - t_0^{1-\alpha})}{\Gamma(2-\alpha) \cdot \tau}, \\ k_{m+1/2} = \frac{k(y_m) + k(y_{m+1})}{2}, \quad k_{m-1/2} = \frac{k(y_{m-1}) + k(y_m)}{2}, \quad F_m = -\rho \cdot c \cdot \frac{1}{\Gamma(2-\alpha) \cdot \tau} \times \\ \times \left(y_m^n \left(t_1^{1-\alpha} - t_0^{1-\alpha} \right) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y_m^{i+1} - y_m^i}{\tau} \left(t_{n-i+1}^{1-\alpha} - t_{n-i}^{1-\alpha} \right) \right) - f(y_m^n). \end{aligned}$$

Доказана теорема.

Теорема. *Неявная разностная схема (3) безусловна устойчива.*

Литература

1. *Нахушев А.М.* Элементы дробного исчисления и их применение. Нальчик, 2003. 299 с.
2. *Бейбалаев В.Д.* Численный метод решения математической модели теплопереноса в средах с фрактальной структурой// Фундаментальные исследования. Москва. 2007. №12. С. 249–251.
3. *Бейбалаев В.Д.* Численный метод решения задачи переноса с двусторонней производной дробного порядка// Вестник Самарского гос. тех. ун-та. Серия физ.-мат. науки. 2009. Т. 1(18). С. 267–270.
4. *Бейбалаев В.Д.* Математическая модель переноса в средах с фрактальной структурой// Математическое моделирование. Москва, 2009. Т. 21, №5. С. 55–62.
5. *Бейбалаев В.Д., Абдулаев И.А., Наврузова К.А., Гаджисеева Т.Ю.* О разностных методах решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дробного дифференцирования// Вестник ДГУ. Вып. 6, 2014. С. 53–61.

УДК 517.95

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

© Мамчуев Мурат О.

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
"Институт прикладной математики и автоматизации" (Россия, Нальчик)
e-mail: mamchuev@rambler.ru

В области $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < a, 0 < y < b\}$, $a, b \leq \infty$ рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$D_{0x}^\alpha u(x, y) + AD_{0y}^\beta u(x, y) = Bu(x, y) + f(x, y), \quad (1)$$

где D_{0t}^γ – оператор дробного (в смысле Римана-Лиувилля) интегро-дифференцирования порядка γ [1, с.9], $\alpha, \beta \in (0, 1)$, $f(x, y) = \|f_1(x, y), f_2(x, y), \dots, f_n(x, y)\|$ и $u(x, y) = \|u_1(x, y), u_2(x, y), \dots, u_n(x, y)\|$ – соответственно заданный и искомый n -мерные векторы, A и B – заданные постоянные матрицы порядка n .

В тридцатых годах XX-го века английский математик E.M. Wright ввёл следующую целую функцию

$$\phi(\rho, \mu; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k! \Gamma(\rho k + \mu)}, \quad \rho > -1, \quad \mu \in \mathbb{C}$$

зависящую от двух параметров ρ и μ , здесь $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера.

Определим функцию матричного аргумента соответствующую функции $\phi(\rho, \mu; \lambda z)$. Пусть матрица A с помощью матрицы H приводится к жордановой нормальной форме $J(\lambda)$, то есть

$$A = H J(\lambda) H^{-1},$$

где $J(\lambda) = \text{diag}[J_1(\lambda_1), \dots, J_p(\lambda_p)]$ – квазидиагональная матрица с клетками вида

$$J_i \equiv J_i(\lambda_i) = \begin{vmatrix} \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots & \\ & & & \lambda_i \end{vmatrix},$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_p$ – собственные числа матрицы A .

Тогда функция Райта матричного аргумента определяется следующим образом

$$\phi(\rho, \mu; Az) = H \phi(\rho, \mu; J(\lambda)z) H^{-1},$$

где

$$\phi(\rho, \mu; J(\lambda)z) = \text{diag}[\phi(\rho, \mu; J_1(\lambda_1)z), \dots, \phi(\rho, \mu; J_p(\lambda_p)z)],$$

$$\phi(\rho, \mu; J_i(\lambda_i)z) = \begin{vmatrix} \phi_{\rho, \mu}^{(0)}(\lambda_i z) & \phi_{\rho, \mu}^{(1)}(\lambda_i z) & \dots & \phi_{\rho, \mu}^{(r_i)}(\lambda_i z) \\ 0 & \phi_{\rho, \mu}^{(0)}(\lambda_i z) & \dots & \phi_{\rho, \mu}^{(r_i-1)}(\lambda_i z) \\ 0 & \ddots & \vdots & \\ & & & \phi_{\rho, \mu}^{(0)}(\lambda_i z) \end{vmatrix},$$

$$\phi_{\rho, \mu}^{(m)}(\lambda z) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m}{\partial \lambda^m} \phi(\rho, \mu; \lambda z) = \frac{z^m}{m!} \phi(\rho, \mu - \rho m; \lambda z).$$

Пусть все собственные числа матрицы A положительны. Сформулируем краевую задачу для системы (1).

Задача. Найти решение $u(x, y)$ системы (1), удовлетворяющее следующим краевым условиям:

$$\lim_{x \rightarrow 0} D_{0x}^{\alpha-1} u = \varphi(y), \quad 0 < y < b, \quad (2)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\beta-1} u = \psi(x), \quad 0 < x < a, \quad (3)$$

где $\varphi(y), \psi(x)$ – заданные n -мерные вектор-функции.

В работах [2], [3] задача (1) – (3) исследована для случая $n = 1$, в работах [3], [4] – в случае когда A – единичная матрица.

Регулярным решением системы (1) в области Ω называется вектор-функция $u(x, y)$ удовлетворяющая во всех точках $(x, y) \in \Omega$ системе (1), такая, что $x^{1-\alpha} y^{1-\beta} u(x, y) \in C(\bar{\Omega})$, $D_{0x}^\alpha u, D_{0y}^\beta u \in C(\Omega)$.

Справедлива следующая

Теорема. Пусть $\alpha, \beta \in (0; 1)$, $x^{1-\alpha} \psi(x) \in C[0; a]$, $y^{1-\beta} \varphi(y) \in C[0; b]$, $x^{1-\alpha} y^{1-\beta} f(x, y) \in C(\bar{\Omega})$, $f(x, y)$ удовлетворяет условию Гельдера по одной из переменных, и выполняется условие согласования $\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\beta-1} \varphi(y) = \lim_{x \rightarrow 0} D_{0x}^{\alpha-1} \psi(x)$. Тогда существует единственное регулярное в области Ω решение задачи (1) – (3). Решение имеет вид

$$u(x, y) = \int_0^x G(x-t, y) A\psi(t) dt + \int_0^y G(x, y-s) \varphi(s) ds + \\ + \int_0^y \int_0^x G(x-t, y-s) f(t, s) dt ds,$$

где

$$G(x, y) = \int_0^\infty e^{B\tau} \frac{1}{x} \phi(-\alpha, 0; \tau x^{-\alpha}) \frac{1}{y} \phi(-\beta, 0; A\tau y^{-\beta}).$$

Литература

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
2. Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.
3. Мамчуков М.О. Краевые задачи для уравнений и систем уравнений с частными производными дробного порядка. Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2013. 200 с.

4. Мамчев M.O. Краевая задача для системы уравнений с частными производными дробного порядка// Дифференциальные уравнения. 2008. Т. 44, № 12. С. 1674–1686.

УДК 517.958:[531-142.6+536]

**К ВОПРОСУ О ПРИМЕНЕНИИ ДРОБНОГО
ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ В
МОДЕЛИРОВАНИИ ДИФФУЗИОННО-ДРЕЙФОВОГО
ТРАНСПОРТА НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА В СЛОЯХ С
ФРАКТАЛЬНОЙ СТРУКТУРОЙ**

© Мамчев Мухтар О.

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
"Институт прикладной математики и автоматизации" (Россия, Нальчик)
e-mail: mamchuevmo@yandex.ru

Для описания различных процессов переноса в средах с фрактальной структурой в настоящее время широко применяется математический аппарат дробного интегродифференцирования [1-3]. Это позволяет за счет введения нового параметра модели – порядка дробной производной – избежать численного решения сложных систем интегро-дифференциальных уравнений и обогащает описание системы.

Будем использовать оператор дробного интегро-дифференцирования Римана-Лиувилля [1,4]:

$$D_{st}^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sign}(t-s)}{\Gamma(-\alpha)} \int_s^t \frac{f(t')}{(t-t')^{1+\alpha}} dt', & \alpha < 0, \\ f(t), & \alpha = 0, \\ \operatorname{sign}^n(t-s) \frac{d^n}{dt^n} D_{st}^{\alpha-n} f(t), & n-1 < \alpha \leq n, \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

а также регуляризованную дробную производную (производную Капuto)

$$\partial_{st}^\alpha f(t) = \operatorname{sign}^n(t-s) D_{st}^{\alpha-n} \frac{d^n f(t)}{dt^n}, \quad n-1 < \alpha \leq n, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция Эйлера, α - порядок операторов.

В работе [3] дается вывод уравнения диффузионно-дрейфового транспорта носителей заряда (НЗ) без учета процессов генерации и рекомбинации, которое имеет вид

$$\partial_{0t}^\alpha \rho - \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + a \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

где $\rho(x, t)$ – плотность заряда, $a = \mu E \sqrt{\frac{\tau}{D}} = \text{const}$, τ – время жизни НЗ, пространственная переменная x является безразмерной (отнесена к $\sqrt{D\tau}$). Если в начальный момент времени плотность заряда равна $\rho_0(x)$, то функция $\rho(x, t)$ определяется как решение задачи Коши с начальным условием

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x). \quad (2)$$

Решение задачи (1), (2) имеет вид [3,4]

$$\rho(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0(\xi) D_{0t}^{\alpha-1} k(x - \xi, t) d\xi, \quad (3)$$

где

$$k(x, t) = \frac{\exp(ax/2)}{2t} \int_{|x|}^{\infty} \phi\left(-\frac{\alpha}{2}, 0; -\frac{t'}{t^{\alpha/2}}\right) J_0\left(\frac{a\sqrt{t'^2 - x^2}}{2}\right) dt',$$

$\phi(\alpha, \beta; t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n! \Gamma(\alpha n + \beta)}$ и $J_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \Gamma(n+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n}$ – функции Райта и Бесселя соответственно.

В настоящей работе проводится исследование модели диффузионно-дрейфового транспорта носителей заряда в слоях с фрактальной структурой. Показано, что для плотности заряда $\rho(x, t)$ выполняется следующий закон сохранения заряда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0(x) dx.$$

Это свойство является необходимым для применения уравнения (1) для моделирования переноса заряда в фрактальных полупроводниковых структурах.

Литература

1. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
2. *Сибатов Р.Т., Учайкин В.В.* Дробно-дифференциальный подход к описанию дисперсионного переноса в полупроводниках //УФН. 179, 10, 1079 (2009).

3. Рехвиашвили С.Ш., Мамчуков Мурат О., Мамчуков Мухтар О. Модель диффузионно-дрейфового транспорта носителей заряда в слоях с фрактальной структурой // ФТТ. 2016. Т.58. № 4.
4. Мамчуков Мурат О. Краевые задачи для уравнений и систем уравнений с частными производными дробного порядка. – Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2013. 200 с.

УДК 517.095

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ПО ОТЫСКАНИЮ ПРАВОЙ ЧАСТИ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

© Мартемьянова Н.В.

Самарский государственный социально-педагогический университет
(Россия, Самара)
e-mail: ninamartem@yandex.ru

Рассмотрим уравнение типа Чаплыгина с неизвестной правой частью

$$Lu \equiv K(y)u_{xx} + u_{yy} - b^2 K(y)u = f(x) \quad (1)$$

в прямоугольной области $D = \{(x, y) | 0 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$, где $K(y) = sgn y \cdot |y|^n$, $n > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $b > 0$ – заданные действительные числа, и поставим следующую обратную задачу с нелокальным граничным условием.

Обратная задача. Найти в области D функции $u(x, y)$ и $f(x)$, удовлетворяющие условиям:

$$u \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_- \cup D_+); \quad (2)$$

$$f(x) \in C(0, 1) \cap L_2[0, 1]; \quad (3)$$

$$Lu = f(x), (x, y) \in D_- \cup D_+; \quad (4)$$

$$u(0, y) = u(1, y), u_x(0, y) = 0, -\alpha \leq y \leq \beta; \quad (5)$$

$$u(x, \beta) = \varphi(x), u(x, -\alpha) = \psi(x), 0 \leq x \leq 1; \quad (6)$$

$$u_y(x, -\alpha) = g(x), 0 \leq x \leq 1, \quad (7)$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $g(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, $\varphi(0) = \varphi(1)$, $\psi(0) = \psi(1)$, $\varphi'(0) = \psi'(0) = 0$, $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$.

В данной работе, следуя [1-3], установлен критерий единственности поставленной обратной задачи.

Теорема. *Если существует решение задачи (2) – (7), то оно единственно тогда и только тогда, когда при всех $k \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ выполнены условия*

$$\begin{aligned} \Delta(k) &= \omega_k^+(\beta)\sqrt{\alpha}\gamma_k[J_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q)\overline{\overline{Y}}_{\frac{1}{2q}-1}(p_k\alpha^q)-J_{\frac{1}{2q}-1}(p_k\alpha^q)\overline{Y}_{\frac{1}{2q}-1}(p_k\alpha^q)]+ \\ &+ \omega_k^-(\alpha)\sqrt{\beta}\gamma_k[I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)\overline{\overline{Y}}_{\frac{1}{2q}-1}(p_k\alpha^q)+K_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)J_{\frac{1}{2q}-1}(p_k\alpha^q)]+ \\ &+ \omega_k^{-' }(-\alpha)\sqrt{\alpha\beta}[I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q)+K_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)J_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q)] \neq 0, \quad (8) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \omega_k^+(y) &= \frac{1}{q}\sqrt{y}I_{\frac{1}{2q}}(p_ky^q)\int_0^y\sqrt{t}K_{\frac{1}{2q}}(p_kt^q)dt- \\ &- \frac{1}{q}\sqrt{y}K_{\frac{1}{2q}}(p_ky^q)\int_0^y\sqrt{t}I_{\frac{1}{2q}}(p_kt^q)dt, \quad y > 0, \\ \omega_k^-(y) &= \frac{\pi}{2q}\sqrt{-y}J_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q)\int_0^y\sqrt{-t}Y_{\frac{1}{2q}}(p_k(-t)^q)dt- \\ &- \frac{\pi}{2q}\sqrt{-y}Y_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q)\int_0^y\sqrt{-t}J_{\frac{1}{2q}}(p_k(-t)^q)dt, \quad y < 0, \\ \overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y^q)) &= \frac{\pi}{2\sin\frac{\pi}{2q}}(J_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y^q))+J_{-\frac{1}{2q}}(p_k(-y^q))), \\ \overline{\overline{Y}}_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y^q)) &= \frac{\pi}{2\sin\frac{\pi}{2q}}(J_{\frac{1}{2q}-1}(p_k(-y^q))+J_{-\frac{1}{2q}-1}(p_k(-y^q))), \end{aligned}$$

$J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$ – функции Бесселя, $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$ – модифицированные функции Бесселя, $\gamma_k = p_k q \alpha^{q-\frac{1}{2}}$, $p_k = \sqrt{b^2 + (2\pi k)^2}/q$, $q = (n+2)/2$.

Единственность решения доказана на основе полноты системы функций

$$2(1-x), 4(1-x)\cos 2\pi kx, 4\sin 2\pi kx \quad k = 1, 2, \dots$$

в пространстве $L_2[0, 1]$.

В случае, когда при некоторых α , β и $k = l \in N_0$ нарушено условие (8), т. е. $\Delta(l) = 0$, построено ненулевое решение соответствующей однородной задачи (2) – (7), при $\varphi(x) = \psi(x) = g(x) \equiv 0$,

$$u_l(x, y) = u_l(y) \cos 2\pi lx, \quad f_l(x) = f_l \cos 2\pi lx,$$

где

$$u_l(y) = \begin{cases} \frac{f_l}{B_l(\alpha,y)} [\sqrt{\beta y} \omega_l^-(-\alpha) A_l(y, \beta) - \sqrt{\alpha y} \omega_l^+(\beta) B_l(y, \beta)] + \\ + \sqrt{\alpha \beta} \omega_l^+(y) B_l(\alpha, \beta), & y > 0, \\ \frac{f_l}{B_l(\alpha,y)} [-\sqrt{-\beta y} \omega_l^-(-\alpha) B_l(-y, \beta) - \sqrt{-\alpha y} \omega_l^+(\beta) G_l(\alpha, -y)] + \\ + \sqrt{\alpha \beta} \omega_l^+(y) B_l(\alpha, \beta), & y < 0, \end{cases}$$

$$A_l(y_1, y_2) = I_{\frac{1}{2q}}(p_l y_1^q) K_{\frac{1}{2q}}(p_l y_2^q) - K_{\frac{1}{2q}}(p_l y_1^q) I_{\frac{1}{2q}}(p_l y_2^q),$$

$$B_l(y_1, y_2) = I_{\frac{1}{2q}}(p_l y_2^q) \bar{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_l y_1^q) + K_{\frac{1}{2q}}(p_l y_2^q) J_{\frac{1}{2q}}(p_l y_1^q),$$

$$G_l(y_1, y_2) = J_{\frac{1}{2q}}(p_l y_2^q) \bar{\bar{Y}}_{\frac{1}{2q}-1}(p_l y_1^q) - J_{\frac{1}{2q}-1}(p_l y_1^q) \bar{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_l y_2^q),$$

f_l – не равная нулю произвольная постоянная.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-31-00421.

Литература

1. Сабитова Ю.К. Критерий единственности решения нелокальной задачи для вырождающегося уравнения смешанного типа в прямоугольной области// Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46, № 8. С. 1205-1208.
2. Бурханова (Хаджси) И.А. Критерий единственности решения обратной задачи уравнения смешанного типа с оператором типа Чаплыгина// Дифференциальные уравнения и смежные проблемы: Труды международной научной конференции: В 2т. Уфа: РИЦ БашГУ, 2013. Т. 1. С. 140 – 144.
3. Сабитов К.Б., Сидоров С.Н. Обратная задача для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения с нелокальным граничным условием// Известия Вузов. Математика. 2015. №. 1. С. 46-59.

УДК 517.95

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

© Масаева О.Х.

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
"Институт прикладной математики и автоматизации" (Россия, Нальчик)
e-mail: olesya.masaeva@yandex.ru

Рассмотрим в области $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < r, -a < y < b\}$, $a, b > 0$, уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^\alpha u}{\partial y^\alpha} = 0, \quad 1 < \alpha < 2, \quad (1)$$

где $\frac{\partial^\alpha u}{\partial y^\alpha} = D_{0y}^{\alpha-2} u_{yy}$, $D_{0y}^{\alpha-2}$ – оператор дробного интегро-дифференцирования Римана-Лиувилля порядка $2 - \alpha$ [1, с. 9].

Ранее, уравнение (1) рассматривалось в работах [2] и [3]. В указанных работах получены условия однозначной разрешимости задачи Дирихле для уравнения (1) в случае $y > 0$ в прямоугольной области. В данной работе получено необходимое и достаточное условие единственности решения задачи Дирихле для уравнения (1) в области Ω .

Регулярным решением уравнения (1) в области Ω назовем функцию $u = u(x, y)$ такую, что $u \in C^1(\bar{\Omega})$, функции $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^\alpha u}{\partial y^\alpha}$ являются непрерывными в области Ω за исключением точек $(x, 0)$, $0 < x < r$.

Задача. Найти в области Ω регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(0, y) = u(r, y) = 0, \quad (2)$$

$$u(x, -a) = u(x, b) = 0. \quad (3)$$

Рассмотрим функцию типа Миттаг-Леффлера [4, с. 12]

$$E_{1/\alpha}(z; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \mu)}.$$

Теорема. Для того, чтобы задача (1)–(3) имела только тригонометрическое решение необходимо и достаточно, чтобы

$$bE_{1/\alpha}(-\lambda_n b^\alpha; 2)E_{1/\alpha}(-\lambda_n a^\alpha; 1) + aE_{1/\alpha}(-\lambda_n a^\alpha; 2)E_{1/\alpha}(-\lambda_n b^\alpha; 1) \neq 0,$$

$$\text{где } \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{r}\right)^2, n = 1, 2, \dots$$

Теорема доказана методом, предложенным в работе [5]. При $\alpha = 2$ полученное условие единственности согласуется с классическим результатом Бургина и Дуффина для единственности решения задачи Дирихле для волнового уравнения [6].

Литература

1. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

2. *Масаева О. Х.* Задача Дирихле для нелокального волнового уравнения // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49, № 12, С. 1554–1559.
3. *Масаева О. Х.* Необходимое и достаточное условие единственности решения задачи Дирихле для нелокального волнового уравнения // Вестник КРАУНЦ. Физ-мат. науки. 2015. Т. 11, №2. С. 16-20.
4. *Псеху А. В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.
5. *Нахушев А. М.* Критерий единственности задачи Дирихле для уравнения смешанного типа в цилиндрической области // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6, № 1, С. 190-191.
6. *Bourgin D. G., Duffin R.* The Dirichlet problem for the vibrating string equation // Bull. Amer. Math. Soc. 1939. Vol. 45, pp. 851-858.

UDC 517.957:536.2

ON GLOBAL EXISTENCE OF SOLUTIONS TO CROSS-DIFFUSION PARABOLIC SYSTEM NOT IN DIVERGENCE FORM

© Matyakubov A.S.

National university of Uzbekistan (Tashkent, Uzbekistan)
e-mail: almasa@list.ru

1. Introduction.

In this paper, we consider the following Cauchy problem to a quasi-linear degenerate parabolic system not in divergence form:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= v^{m_1} \nabla \left(|\nabla u^k|^{p-2} \nabla u^n \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= u^{m_2} \nabla \left(|\nabla v^k|^{p-2} \nabla v^n \right), \end{aligned} \quad t > 0, \quad x \in R^N, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x) \geq 0, \quad v|_{t=0} = v_0(x) \geq 0, \quad x \in R^N, \quad (2)$$

where p , m_1 , m_2 , k , n - are positive constants, $N \geq 1$.

Comparing with the classical divergence form equations are more close to the actual circumstances in some cases. For example, for the biological species, the diffusion of divergence form implies that the species is able to move to all locations within its environment with equal probability, but if we consider this problem with the objective conditions, the population density will affects the rate of diffusion, so a kind of 'biased' diffusion equation will be more realistic, for the non-divergence form diffusion, the diffusion rate is regulated by population

density, that is increasing for large populations and decreasing for small populations.

System (1) has been suggested as a mathematical model for a variety of physical problems (see [1-5, 7-8]).

For instance, this system can be used to describe the development of multiple groups in the dynamics of biological groups, where u and v are the densities of the different groups (see [1]).

Porous medium equations with local sources or with nonlocal sources subjected to nonlocal boundary conditions were studied (see [9-11]). They discussed the conditions of existence and blow-up.

2. Comparison principle and global solvability of solutions.

Let $1 - \alpha_1(k(p-2) + n - 1) - \alpha_2 m_1 > 0$, $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ and

$$\alpha_1(k(p-2) + n - 1) + \alpha_2 m_1 = \alpha_2(k(p-2) + n - 1) + \alpha_1 m_2.$$

Then we introduce the notations:

$$h_i = \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_i(k(p-2) + n - 1) - \alpha_3 - i m_i}, \quad \gamma_i = \frac{(p-1)(k(p-2) + n - 1 - m_i)}{(k(p-2) + n - 1)^2 - m_1 m_2}, \quad i = 1, 2.$$

Applying the method of comparison of solutions [12] and method of standard equations [6] we obtain the estimates of the solution of problem (1)-(2).

Theorem. *Let $k(p-2) + n > m + 1$, $m = \max\{m_1, m_2\}$, $\gamma_i > m_i \gamma_{3-i}$, $-\frac{N}{p} \frac{\gamma_i}{\gamma_i - m_i \gamma_{3-i}} + h_i \leq 0$, $i = 1, 2$, $u_+(0, x) \geq u_0(x)$, $v_+(0, x) \geq v_0(x)$, $x \in R$. Then the problem (1) - (2) has a global solution with estimate $u(t, x) \leq u_+(t, x)$, $v(t, x) \leq v_+(t, x)$, where*

$$u_+(t, x) = A(T+t)^{-\alpha_1} \left(a - \frac{h_1^{-\frac{1}{p-1}} \alpha_1^{\frac{1}{p-1}} |x|^{\frac{p}{p-1}}}{(T+t)^{\frac{1-\alpha_1(k(p-2)+n-1)-\alpha_2 m_1}{p-1}}} \right)_+^{\gamma_1},$$

$$v_+(t, x) = B(T+t)^{-\alpha_2} \left(a - \frac{h_1^{-\frac{1}{p-1}} \alpha_1^{\frac{1}{p-1}} |x|^{\frac{p}{p-1}}}{(T+t)^{\frac{1-\alpha_1(k(p-2)+n-1)-\alpha_2 m_1}{p-1}}} \right)_+^{\gamma_2},$$

$$A^{k(p-2)+n-1} B^{m_1} = \frac{p-1}{p^2 n (\gamma_1 - m_1 \gamma_2)} \left| \frac{p-1}{pk\gamma_1} \right|^{p-2},$$

$$B^{k(p-2)+n-1} A^{m_2} = \frac{p-1}{p^2 n (\gamma_2 - m_2 \gamma_1)} \left| \frac{p-1}{pk\gamma_2} \right|^{p-2}, \quad (b)_+ = \max(0, b).$$

Proof. We prove properties of a global solvability of weak solutions of the system (1) using a comparison principle (see [12]). For this goal we construct a new system of equation using the standard equation method as in [6]:

$$u(t, x) = (T+t)^{-\alpha_1} \bar{f}(\xi), \quad v(t, x) = (T+t)^{-\alpha_2} \bar{\phi}(\xi),$$

$$\text{where } \xi = \frac{h_1^{-\frac{1}{p}} \alpha_1^{\frac{1}{p}} |x|}{(T+t)^{\frac{1-\alpha_1(k(p-2)+n-1)-\alpha_2 m_1}{p}}}, \quad \bar{f}(\xi) = A \left(a - \xi^{\frac{p}{p-1}} \right)_+^{\gamma_1},$$

$$\bar{\phi}(\xi) = B \left(a - \xi^{\frac{p}{p-1}} \right)_+^{\gamma_2}, A^{k(p-2)+n-1} B^{m_1} = \frac{p-1}{p^2 n (\gamma_1 - m_1 \gamma_2)} \left| \frac{p-1}{pk\gamma_1} \right|^{p-2},$$

$$B^{k(p-2)+n-1} A^{m_2} = \frac{p-1}{p^2 n (\gamma_2 - m_2 \gamma_1)} \left| \frac{p-1}{pk\gamma_2} \right|^{p-2}.$$

It is easy to check that

$$Lu_+(t, x) = \left(-\frac{N}{p} \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - m_1 \gamma_2} + h_1 \right) \bar{f}(\xi),$$

$$Lv_+(t, x) = \left(-\frac{N}{p} \frac{\gamma_2}{\gamma_2 - m_2 \gamma_1} + h_2 \right) \bar{\phi}(\xi).$$

From this expression it follows that for execution the inequalities $Lu_+ \leq 0$, $Lv_+ \leq 0$ is satisfaction of the conditions $-\frac{N}{p} \frac{\gamma_i}{\gamma_i - m_i \gamma_{3-i}} + h_i \leq 0$, $i = 1, 2$. By the conditions of the theorem last inequalities are satisfied. Then, by theorem comparison of solutions for the problem (1)-(2) there is a global solution in $t > 0$, $x \in R^N$ and for him the following estimation $u_+(t, x) \geq u(t, x)$, $v_+(t, x) \geq v(t, x)$, $x \in R^N$ is hold.

The proof of the theorem is complete.

References

1. Gao Y., Meng Q., Guo Y. Study of properties of solutions for quasilinear parabolic systems// MATEC Web of Conferences. 2016, 61 (1) P. 1–4.
2. Zheng P., Mu Ch., Liu D., Yao X., Zhou Sh. Blow-Up Analysis for a Quasi-linear Degenerate Parabolic Equation with Strongly Nonlinear Source// Abstract and Applied Analysis, 2012, Vol. 2012. P. 1–19.
3. Zhou Sh., Zheng S. Asymptotic behavior of solutions to a degenerate parabolic equation with a gradient source term// Asymptotic Analysis, 2015, Vol. 91, №. 2. P. 91–102.
4. Chunhua J., Jingxue Y. Self-similar solutions for a class of non-divergence form equations// Nonlinear Differ. Equ. Appl. Nodea, 2013, Vol. 20, Issue 3. P. 873–893.
5. Raimbekov J. The Properties of the Solutions for Cauchy Problem of Nonlinear Parabolic Equations in Non-Divergent Form with Density// Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. 2015. Vol. 8, №. 2. P. 192–200.
6. Aripov M. Standard Equation's Methods for Solutions to Nonlinear problems// Tashkent: Fan, 1988. 138 p.
7. Sun Y., Shi Y., Wu M. Nonexistence and longtime behaviors of solutions to a class of nonlinear degenerate parabolic equations not in divergence form // Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series, 2016. Vol. 32, Issue 2. P. 327–332.

8. Zhou S., Tang X., Yang C. A doubly degenerate diffusion equation not in divergence form with gradient term// Boundary Value Problems, 2016. Vol. 2016. 2016: 126, P. 1–19.
9. Zhong G., Tian L. Blow-up for a parabolic system with nonlocal sources and nonlocal boundary conditions// Boundary Value Problems, 2015, Vol. 2015, 2015: 61.
10. Han Y., Gao W. A porous medium equation with nonlocal boundary condition and a localized source// J. Appl. Anal., 2012. Vol. 3. P. 601–613.
11. Chen Y. Global blow-up for a localized quasilinear parabolic system with nonlocal boundary conditions // Appl. Anal., 2013. Vol. 7. P. 1495–1510.
12. Samarskii A.A., Galaktionov V.A., Kurdyumov S.P., Mikhailov A.P. Blow-Up in Quasilinear Parabolic Equations// Berlin: De Gruyter Expositions in Mathematics, 19, 2011. 538 p.

УДК 519.6, 004.9

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИНВЕСТИЦИЙ

© Милостивая Ю.С.

Финансовый университет при Правительстве РФ (Россия, Владикавказ)
e-mail: juliamil97@mail.ru

Динамическое программирование представляет собой способ решения сложных задач путем разбиения их на более простые подзадачи. В большинстве случаев многие из этих подзадач одинаковы. Метод динамического программирования заключается в том, чтобы выполнить действия каждой подзадачи только один раз, тем самым сократив количество вычислений. Данный способ особенно полезен в случаях, когда число повторяющихся подзадач достаточно велико.

Оптимальная подструктура в динамическом программировании означает, что оптимальное решение подзадач меньшего размера может быть применено для выполнения исходной задачи. Решить ее можно выполнив следующие три шага:

Разделение задачи на отдельные части меньшего размера.

Нахождение оптимального решения подзадач, решая такой же алгоритм в три этапа.

Применение полученного решения подзадач для выполнения главной задачи.

Динамическое программирование является разделом математического программирования, изучающим объединение приемов, методов и способов, которые дают возможность найти оптимальное решение задачи, основанное на расчете последствий каждого решения и исследования наилучшей стратегии для дальнейших решений.

Решение динамическим программированием является многоуровневым, поэтому данный термин не только определяет особый вид задач, а также характеризует способы нахождения решений отдельных классов задач математического программирования.

Существуют два класса задач, где методы и способы динамического программирования используются наиболее удачно.

К первому классу относятся задачи планирования деятельности экономического объекта: предприятия, отрасли и т.п., с учетом изменения потребности в выпускаемой продукции во времени.

Ко второму классу задач можно отнести те, которые наилучшим способом распределяют ресурсы между различными направлениями во времени.

Способы динамического программирования достигают наилучший результат там, где по условию задачи необходимо принимать решения поэтапно.

В общем виде задача динамического программирования заключается в оптимальном распределении капиталовложений с целью получения максимальной прибыли. Планируется распределение начальной суммы средств E_0 между n предприятиями. Предполагается, что выделенные предприятию в начале планового периода средства $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$ приносят доход $F_k(\Pi_k)$ при $k=1, 2, \dots, n$. Доход, полученный от вложения средств в каждое предприятие, не зависит от вложения средств в другие предприятия, а общий доход равен сумме доходов, полученных от всех средств, вложенных во все предприятия.

Математическая модель задачи следующая:

$$Z = \sum_{k=1}^n F_k(\Pi_k) \rightarrow \max$$

при ограничениях $\Pi_1 + \Pi_2 + \dots + \Pi_n = E_0, \Pi_k \geq 0, k = \overline{1, n}$.

В работе исследуется реализация метода динамического программирования для решения задачи о распределении ресурсов в размере 1 000 условных единиц (E_0) между тремя предприятиями (n) за четыре временных периода. Предположим, что прибыль (P_1) первого предприятия составляет 10% от размера инвестируемой суммы в каждый временной период, прибыль (P_2) второго предприятия – 20%, прибыль (P_3) третьего – 30%. Требуется определить при каком инвестировании будет получена максимальная прибыль (Z).

Проанализировав результаты динамического программирования, получено, что при четырехкратном вложении денежных средств для обеспечения максимального дохода, равного 150 условных единиц, инвестиции в размере 1000 условных единиц необходимо распределить следующим образом: первому предприятию выделить 250, второму – 250, третьему – 500 условных единиц.

Методом динамического программирования получены также результаты распределения инвестиций на два, пять и десять периодов. Максимальная прибыль от вложения денежных инвестиций в сумме 1 000 условных единиц ожидается при двухкратном вложении. Для этого предприятию, доходность которого составляет 30% от суммы однократного вложения необходимо выделить 600 условных денежных единиц, а двум другим предприятиям – по 200. В этом случае будет получена прибыль в размере 250 условных единиц. Самая маленькая прибыль ожидается в случае самого большого количества периодов инвестирования.

Таким образом, можно сделать вывод, что увеличение количества периодов вложения инвестиционных средств в представленном соотношении приводит к значительному снижению ожидаемой прибыли. Использование метода динамического программирования и компьютерных технологий позволяет снизить затраты времени при принятии решений по оптимальному распределению инвестиций.

Литература

1. Самаров К. Л. Математика // Учебно-методическое пособие по разделу элементы теории графов, динамическое программирование, сетевое планирование. ООО "Резольвента 2009. URL: <http://www.resolventa.ru/data/metodstud/dynamprog.pdf> (дата обращения 05.05.2016)

**О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ С
АНАЛОГАМИ УСЛОВИЯ ФРАНКЛЯ НА
ХАРАКТЕРИСТИКЕ И НА ОТРЕЗКЕ ВЫРОЖДЕНИЯ
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С
СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ**

© Мирсабуров М.

Термезский государственный университет (Узбекистан, Термез)
e-mail: mirsaburov@mail.ru

I. Постановка задачи F. Пусть D – конечная односвязная область комплексной плоскости $z = x + iy$, ограниченная при $y > 0$ нормальной кривой $\sigma_0(y = \sigma_0(x)) : x^2 + 4(m+2)^{-2}y^{m+2} = 1$, с концами в точках $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, а при $y < 0$ – характеристиками AC и BC уравнения

$$(signy)|y|^m u_{xx} + u_{yy} - \frac{m}{2y} u_y = 0, \quad (1)$$

где постоянная $m > 0$.

Обозначим через D^+ и D^- части области D , лежащие соответственно в полуплоскостях $y > 0$ и $y < 0$, а через C_0 точку пересечения характеристика AC с характеристикой, выходящей из точки $E(c, 0)$, где $c \in I = (-1, 1)$ – интервал оси $y = 0$.

Пусть $p(x) = ax - b$ и $q(x) = a - bx$ линейные диффеоморфизмы из множества точек отрезка $[-1, 1]$ во множество точек отрезка $[-1, c]$ и $[c, 1]$ соответственно, причем $p(-1) = -1$, $p(1) = c$, $q(-1) = 1$, $q(1) = c$, где $a = (1+c)/2$, $b = (1-c)/2$.

Настоящая работа посвящена исследованию корректности задачи с аналогами типа условия Франкля [1,2,3,4] на характеристике AC и отрезке вырождения AB .

Задача F. Требуется найти в области D функцию $u(x, y) \in C(\overline{D})$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) функция $u(x, y)$ принадлежит $C^2(D^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в области D^+ ;

2) функция $u(x, y)$ является обобщенным решением класса $R_1(\tau'(x), \nu(x) \in H)$ (определение для $\tau(x)$ и $\nu(x)$ см. ниже);

3) на интервале вырождения AB имеет место условие сопряжения

$$\lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{-m/2} \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y \rightarrow +0} y^{-m/2} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad x \in I, \quad (2)$$

причем эти пределы при $x = \pm 1$ могут иметь особенности порядка ниже единицы;

4) выполнены условия

$$u(x, y) |_{\sigma_0} = \varphi(x), \quad x \in \bar{I}, \quad (3)$$

$$u[\theta(p(x))] - u[\theta(q(x))] = \psi(x), \quad x \in \bar{I}, \quad (4)$$

$$u(p(x), 0) - u(q(x), 0) = f(x), \quad x \in \bar{I}, \quad (5)$$

тогда

$$\theta(x_0) = \frac{x_0 - 1}{2} - i \left[\frac{(m+2)(1+x_0)}{4} \right]^{2/(m+2)},$$

— аффикс точки пересечения характеристики AC с характеристикой, исходящей из точки $M_0(x_0, 0)$, $x_0 \in I$ [5, 6]. Заданные функции $\psi(x)$, $f(x) \in C[-1, 1] \cap C^{1,\alpha_0}(-1, 1)$, $\varphi(x) \in C^{0,\alpha_0}[-1, 1]$ причем $\varphi(x) = (1-x^2)\varphi_0(x)$, $\varphi_0(x) \in C^{0,\alpha_0}[-1, 1]$.

Заметим, что условия (4) и (5) соответственно являются аналогами условия Франкля [1] на кусках AC_0 и C_0C характеристики AC и на частях AE и EB отрезка вырождения AB . Условие (5) с использованием обозначения $u(x, 0) = \tau(x)$ принимает вид

$$\tau(p(x)) - \tau(q(x)) = f(x), \quad x \in I. \quad (5^*)$$

II. Единственность решения задачи F. Формула Даламбера, дающая в области D^- решение видоизмененной задачи Коши с начальными данными

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad x \in \bar{I}; \quad \lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{-m/2} \frac{\partial u}{\partial y} = \nu(x), \quad x \in I,$$

имеет вид [7, с.39]

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1}{2} \left[\tau \left(x - \frac{2}{m+2} (-y)^{(m+2)/2} \right) + \tau \left(x + \frac{2}{m+2} (-y)^{(m+2)/2} \right) \right] - \\ &- \frac{(-y)^{(m+2)/2}}{m+2} \int_{-1}^1 \nu \left[x + \frac{2t}{m+2} (-y)^{(m+2)/2} \right] dt. \end{aligned} \quad (6)$$

С помощью формулы Даламбера (6) нетрудно вычислить значения

$$u[\theta(p(x))] = \frac{\tau(-1) + \tau(p(x))}{2} - \frac{1}{2} \int_{-1}^{p(x)} \nu(t) dt, \quad (7)$$

$$u[\theta(q(x))] = \frac{\tau(-1) + \tau(q(x))}{2} - \frac{1}{2} \int_{-1}^{q(x)} \nu(t) dt, \quad (8)$$

Подставляя теперь функции (7) и (8) в краевое условие (4), с учетом равенства (5*) имеем

$$a\nu(p(x)) + b\nu(q(x)) = \Psi_1(x), \quad x \in I, \quad (9)$$

где $\Psi_1(x) = f(x) - 2\psi(x)$.

Соотношение (9) является первым функциональным соотношением между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, привнесенное на интервал $I = (-1, 1)$ оси $y = 0$ из области D^- .

Аналогом принципа экстремума А.В.Бицадзе является

Теорема 1. *Решение $u(x, y)$ задачи F , при выполнении условий $\psi(x) \equiv 0$, $f(x) \equiv 0$ своего наибольшего положительного значения (НПЗ) или наименьшего отрицательного значения (НОЗ) в замкнутой области \overline{D}^+ может принимать только в точках нормальной кривой σ_0 .*

Доказательство. Пусть функция $u(x, y)$ удовлетворяет условиям теоремы 1. В силу принципа Хопфа [8, с.25] решение $u(x, y)$ уравнения (1) своего НПЗ во внутренних точках области D^+ не достигает.

Пусть решение $u(x, y)$ своего НПЗ достигает во внутренней точке $P(\xi_0, 0)$ интервала I . Тогда в силу соответствующего однородного условия (5*) (с $f(x) \equiv 0$) решение $u(x, y)$ своего НПЗ достигает в двух точках: $(p(x_0), 0)$ и $(q(x_0), 0)$, следовательно, в этих точках $\nu(p(x_0)) < 0$, $\nu(q(x_0)) < 0$ [7, с.74]. Отсюда следует, что

$$a\nu(p(x_0)) + b\nu(q(x_0)) < 0, \quad x_0 \in I. \quad (10)$$

С другой стороны в силу соответствующего однородного условия (9) (с $\Psi_1(x) \equiv 0$) имеем

$$a\nu(p(x_0)) + b\nu(q(x_0)) = 0, \quad x_0 \in I.$$

что противоречить неравенству (10).

Следовательно, решение $u(x, y)$ своего НПЗ во внутренних точках интервала I не достигает.

Аналогично, как и выше можно показать, что решение $u(x, y)$ задачи F своего НОЗ во внутренних точках интервала I не достигает.

Таким образом, решение $u(x, y) \in C(\overline{D}^+)$ своего НПЗ и НОЗ достигает в точках нормальной кривой σ_0 .

Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 вытекает

Следствие. *Задача F имеет не более одного решения.*

В самом деле, в силу теоремы 1 решение однородной задачи F своего НПЗ и НОЗ достигает в точках нормальной кривой σ_0 и в этих точках в силу соответствующего однородного условия (3) (с $\varphi(x) \equiv 0$) : $u(x, y)|_{\sigma} = 0$. Отсюда следует, что $u(x, y) \equiv 0$ всюду в замкнутой области \overline{D}^+ , следовательно, и во всей смешанной области D .

Литература

1. *Франкль Ф.И.* Обтекание профилей газом с местной сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения// Прикл.математика и механика. 1956. Т. 20, №2. С. 196–202.
2. *Девингталь Ю.В.* О существовании и единственности решения одной задачи Франкля// Изв. вузов. Математика. 1958. №2(3). С. 39–51.
3. *Линь Цзянь-бин.* О некоторых задачах Франкля// Вестн. ЛГУ. Математика, механика и астрономия. 1961. Т. 3, №13. С. 28–39.
4. *Капустин Н.Ю., Сабитов К.Б.* О решении одной проблемы в теории задачи Франкля для уравнений смешанного типа// Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. №1. С. 60–68.
5. *Жегалов В.И.* Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничными условиями на переходной линии// Учен. зап. Казанск. ун-та. 1962. 122(3). С. 3–16.
6. *Нахушев А.М.* О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа// Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5, №1. С. 44–59.
7. *Салахутдинов М.С., Мирсабуров М.* Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами. Ташкент 2005. "Universitet", "Yangiyo'l poligraf servis".
8. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.

**СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ
ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ОДНОГО
КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ НА
ПЛОСКОСТИ**

© Мухамадиев Э.М.¹, Наимов А.Н.²

Вологодский государственный университет (Россия, Вологда)

¹e-mail: emuhamadiev@rambler.ru

²e-mail: nan67@rambler.ru

В теории обыкновенных дифференциальных уравнений известна теорема Боля [1] о существовании и единственности ограниченного на всей числовой оси $R = (-\infty, +\infty)$ решения линейного обыкновенного дифференциального уравнения

$$y^{(m)} + c_1 y^{(m-1)} + \dots + c_{m-1} y' + c_m y = f(x), \quad x \in R, \quad (1)$$

с постоянными коэффициентами c_1, \dots, c_m и правой частью $f(x)$, непрерывной и ограниченной на R . Согласно теореме Боля, уравнение (1) при любой непрерывной и ограниченной на R функции $f(x)$ имеет единственное ограниченное решение только в том случае, когда символ (характеристический многочлен) уравнения

$$s^m + c_1 s^{m-1} + \dots + c_{m-1} s + c_m,$$

где $s = \sigma + i\tau$ - комплексная переменная, не имеет чисто мнимых корней $i\tau$, $\tau \in R$.

В настоящей работе формулируется и доказывается аналог теоремы Боля для линейных дифференциальных уравнений в частных производных следующего вида:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^{m_1+m_2} u}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2}} + \sum_{k_1=1}^{m_1} a_{1k_1} \frac{\partial^{m_1-k_1+m_2} u}{\partial x_1^{m_1-k_1} \partial x_2^{m_2}} + \sum_{k_2=1}^{m_2} a_{2k_2} \frac{\partial^{m_1+m_2-k_2} u}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2-k_2}} + \\ & + \sum_{k_1=0}^{m_1-1} \sum_{k_2=0}^{m_2-1} b_{k_1 k_2} \frac{\partial^{k_1+k_2} u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}} = f(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in R^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь m_1, m_2 - натуральные числа, коэффициенты $a_{1k_1}, a_{2k_2}, b_{k_1 k_2}$ - комплексные числа.

Вопрос о существовании ограниченных решений линейных дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами исследован в работе [2]. В этой работе доказано, что произвольное дифференциальное уравнение вида

$$\sum_{k_1=0}^{m_1} \dots \sum_{k_n=0}^{m_n} c_{k_1 \dots k_n} \frac{\partial^{k_1+\dots+k_n} u}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} = f(x_1, \dots, x_n), \quad (x_1, \dots, x_n) \in R^n,$$

с постоянными коэффициентами $c_{k_1 \dots k_n}$ однозначно разрешимо в пространстве ограниченных обобщенных функций тогда и только тогда, когда символ уравнения

$$\sum_{k_1=0}^{m_1} \dots \sum_{k_n=0}^{m_n} c_{k_1 \dots k_n} s_1^{k_1} \cdot \dots \cdot s_n^{k_n},$$

где s_1, \dots, s_n - комплексные переменные, не имеет чисто мнимых корней $(i\tau_1, \dots, i\tau_n)$, $\tau_j \in R$, $j = \overline{1, n}$. При этом, если f является непрерывной и ограниченной в R^n функцией, то решение u не всегда будет непрерывным и ограниченным вместе со всеми производными, входящими в уравнение. Гладкость решения, как показывают теоремы о гипоэллиптичности [3], зависит от поведения символа уравнения в бесконечно удаленных точках. Поэтому представляет интерес вопрос о нахождении дополнительных условий на символ, кроме отсутствия чисто мнимых корней, обеспечивающих гладкость решения в классическом смысле.

Ограниченному решению уравнения (2) назовем комплексно-значную функцию $u(x_1, x_2)$, которая непрерывна и ограничена на R^2 вместе со всеми частными производными

$$\frac{\partial^{k_1+k_2} u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}}, \quad \text{где} \quad k_j = \overline{0, m_j}, \quad j = 1, 2,$$

и удовлетворяет уравнению (2).

Имеет место следующая теорема.

Теорема. Уравнение (2) при любой непрерывной и ограниченной на R^2 функции $f(x_1, x_2)$ имеет единственное ограниченное решение тогда и только тогда, когда символ уравнения

$$Q(s_1, s_2) = s_1^{m_1} s_2^{m_2} + \sum_{k_1=1}^{m_1} a_{1k_1} s_1^{m_1-k_1} s_2^{m_2} +$$

$$+ \sum_{k_2=1}^{m_2} a_{2k_2} s_1^{m_1} s_2^{m_2-k_2} + \sum_{k_1=0}^{m_1-1} \sum_{k_2=0}^{m_2-1} b_{k_1 k_2} s_1^{k_1} s_2^{k_2}$$

и следующие два многочлена не имеют чисто мнимых корней:

$$Q_1(s) = s^{m_1} + \sum_{k_1=1}^{m_1} a_{1k_1} s^{m_1-k_1}, \quad (3)$$

$$Q_2(s) = s^{m_2} + \sum_{k_2=1}^{m_2} a_{2k_2} s^{m_2-k_2}. \quad (4)$$

Сформулированная теорема в частном случае, когда $m_1 = m_2 = 1$, доказана в работах [4] и [5].

Литература

1. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
2. Мухамадиев Э.М. К теории дифференциальных уравнений в пространстве ограниченных обобщенных функций// Известия АН Таджикской ССР. 1988. Т. 110, № 4. С. 77-80.
3. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. М.: Наука, 1965. 328 с.
4. Мухамадиев Э.М., Байзаев С. Ограниченные решения гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами// Известия АН Республики Таджикистан. 2011. Т. 142, № 1. С. 20-25.
5. Мухамадиев Э.М., Наимов А.Н., Сатторов А.Х. Об ограниченных решениях одного класса гиперболических уравнений на плоскости// Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52, № 1. С. 86-93.

УДК 536.2.01; 532.685; 517.958; 531.72

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

© Назаралиев М.А.², Бейбалаев В.Д.^{1,2,3},
Аливердиев А.А.^{1,2}, Ахмедов Э.Н.¹,
Мейланов Р.Р.¹, Магомедов Р.А.¹

¹ФГБУН Институт проблем геотермии ДНЦ РАН (Россия, Махачкала)

²Дагестанский государственный университет (Россия, Махачкала)

³Дагестанский государственный институт народного хозяйства (Россия, Махачкала)

e-mail: kaspip_03@mail.ru

Несмотря на историческую давность повышенного интереса к исследованиям движения жидкости в пористых средах [1-6] теория фильтрации далека от своего завершения, до сих пор остаются нерешенные проблемы фундаментального характера. Это связано с тем, что особенности многофазных пористых структур приводят к сложной природе явлений тепломассопереноса, для которых характерны нелокальные эффекты памяти, сильных пространственных корреляций и самоорганизации.

В работе [3] были получены уравнения нелокальной неизотермической фильтрации в дробном исчислении. В данной статье рассматривается численный метод решения краевой задачи для системы уравнений нелокальной неизотермической фильтрации. Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\partial_{0t}^\alpha P(x, t) - D_P(x, t) R_x^\beta P(x, t) + V_P(x, t) R_x^\gamma P(x, t) = c \partial_{0t}^\alpha T(x, t), \quad (1)$$

$$\partial_{0t}^\alpha T(x, t) - D_T(x, t) R_x^\beta T(x, t) + V_T(x, t) R_x^\gamma T(x, t) = c \partial_{0t}^\alpha P(x, t), \quad (2)$$

$$P(x, 0) = \varphi_1(t), T(x, 0) = \varphi_2(t), \quad (3)$$

$$P(-L, t) = \nu_1(t), P(L, t) = \nu_2(t), \quad (4)$$

$$T(-L, t) = \mu_1(t), T(L, t) = \mu_2(t),$$

где $\partial_{0t}^\alpha T(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\tau \frac{T'(x, z)}{(t-z)^\alpha} dz$ – производная Caputo [1], $R_x^\beta T(x, t) = \frac{1}{2\Gamma(2-\beta)\cos(\frac{\pi}{2}(2-\beta))} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \int_{-L}^L \frac{T(\xi, t)}{|x-\xi|^{\beta-1}} d\xi$ – производная Рисса [2].

Система уравнений (1, 2) совместно с уравнением состояния $\rho = \rho(P, T)$ описывает процессы нелокальной неизотермической фильтрации на основе дробного исчисления, V_P – скорость фильтрации жидкости, V_T – скорость конвективного переноса тепла.

Краевую задачу для уравнения (1 - 4) будем решать численным методом. Для этого в области $\bar{D} = \{(x, t) : -L < x < +L, 0 \leq t \leq T\}$ введем сетку:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_{h\tau} = \left\{ (x_i, t_n) : x_i = -L + ih, t_n = n\tau, i = 0, 1, \dots, K, \right. \\ \left. h = \frac{2L}{K}, n = 0, 1, \dots, n, \tau = \frac{T}{N} \right\} \end{aligned}$$

с шагом h по x и τ по t .

Согласно теореме Летникова [1], если $f \in C^2(D)$, то производная Грюнвальда-Летникова совпадает с производной Римана-Лиувилля.

Используя выражение

$$R^\beta T(x, t) = \frac{1}{2\Gamma(2-\beta)\cos(\frac{\pi}{2}(2-\beta))} (D_-^\beta T(x, t) + D_+^\beta T(x, t))$$

и определение Грюнвальда-Летникова дробной производной по пространству

$$T_{a+}^\alpha(x) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{[\frac{x-a}{h}]} q_k T(x - kh), T_{b-}^\alpha(x) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{[\frac{b-x}{h}]} q_k T(x + kh),$$

дробные производные по координате заменим разностными выражениями [5]

$$(D_+^\beta T)_i \sim \frac{1}{h^\beta} \sum_{k=0}^{i+1} q_k T_{i-k+1} = \Lambda_+^\beta u_i, \quad (5)$$

$$(D_-^\beta T)_i \sim \frac{1}{h^\beta} \sum_{k=0}^{K-i+1} q_k T_{i+k-1} = \Lambda_-^\beta u_i. \quad (6)$$

Для производной $\partial_{0t}^\alpha T$ имеет место разностная аппроксимация [4]

$$(\partial_{0t}^\alpha T)_n \sim \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau} \sum_{k=0}^n (T^{k+1} - T^k) (t_{n-k+1}^{1-\alpha} - t_{n-k}^{1-\alpha}). \quad (7)$$

С учетом соотношений (5), (6) и (7) получим следующую разностную схему с весами

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau} \sum_{k=0}^n (P_i^{k+1} - P_i^k) (t_{n-k+1}^{1-\alpha} - t_{n-k}^{1-\alpha}) - \\ & - \frac{(D_P)_i^{n+1} (\Lambda_+^\beta P_i^{n+1} + \Lambda_-^\beta P_i^{n+1})}{2\Gamma(2-\beta)\cos(\frac{\pi}{2}(2-\beta))h^\beta} + \frac{(V_P)_i^{n+1} (\Lambda_+^\gamma P_i^{n+1} + \Lambda_-^\gamma P_i^{n+1})}{2\Gamma(2-\gamma)\cos(\frac{\pi}{2}(2-\gamma))h^\gamma} = \\ & = c_1 \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau} \sum_{k=0}^n (T_i^{k+1} - T_i^k) (t_{n-k+1}^{1-\alpha} - t_{n-k}^{1-\alpha}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau} \sum_{k=0}^n (T_i^{k+1} - T_i^k)(t_{n-k+1}^{1-\alpha} - t_{n-k}^{1-\alpha}) - \\
& - \frac{(D_T)_i^{n+1}(\Lambda_+^\beta T_i^{n+1} + \Lambda_-^\beta T_i^{n+1})}{2\Gamma(2-\beta) \cos(\frac{\pi}{2}(2-\beta))h^\beta} + \frac{(V_T)_i^{n+1}(\Lambda_+^\gamma T_i^{n+1} + \Lambda_-^\gamma T_i^{n+1})}{2\Gamma(2-\gamma) \cos(\frac{\pi}{2}(2-\gamma))h^\gamma} = \\
& = c_1 \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau} \sum_{k=0}^n (P_i^{k+1} - P_i^k)(t_{n-k+1}^{1-\alpha} - t_{n-k}^{1-\alpha}), \quad (8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_i^0 &= \varphi_1(x_i), T_i^0 = \varphi_2(x_i), P_0^n = \nu_1(t_n), T_0^n = \mu_1(t_n), \\
P_K^n &= \nu_2(t_n), T_K^n = \mu_2(t_n).
\end{aligned}$$

Доказана следующая

Теорема. Разностная схема (8) безусловна устойчива.

Литература

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 272 с.
2. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и Техника, 1987. 498 с.
3. Ахмедов Э.Н., Мейланов Р.Р. Особенности распределения температуры и давления в пласте при нелокальной неизотермической фильтрации// Сб. материалов IV Международной конференции “Возобновляемая энергетика: Проблемы и перспективы”. Махачкала, 2015. С. 314–319.
4. Бейбалаев В.Д., Абдуллаев И.А., Навruzова К.А., Гаджисеева Т.Ю. О разностных методах решения задачи Коши для ОДУ с оператором дробного дифференцирования// Вестник ДГУ. Махачкала, 2014. Вып. 6. С. 53–61.
5. Бейбалаев В.Д. Численный метод решения задачи переноса с двусторонней производной дробного порядка// Вестник Самарского гос. тех. ун-та. Серия физ.-мат. науки. Самара, 2009. Т. 1 № 18. С. 267–270.

УДК 517.9

О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ СДВИГОМ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ГИЛЬБЕРТА НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

© Назимов А.Б.

Вологодский государственный университет (Россия, Вологда)
e-mail: n.akbar54@mail.ru

Разрешимость и, в частности, однозначная разрешимость сингулярных интегральных уравнений Гильберта нейтрального типа и их дискретных аналогов имеет особое место в рассматриваемом вопросе. В работах Н.Г. Афендиковой, С.М. Белоцерковского, И.К. Лифанова, М.М. Солдатова, Е.Е. Тыртышникова (соответствующие ссылки можно найти в [1]) получен ответ на поставленные вопросы, когда ядра интегральных операторов в регулярной части уравнения Гильберта нейтрального типа являются отдельно взятыми тригонометрическими функциями.

Рассмотрим интегральное уравнение Гильберта нейтрального типа

$$(Tx)(t) + (Kx)(t) = f(t), \quad f \in H^\gamma(0, 2\pi), \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} (Tx)(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{t-s}{2} x(s) ds, \\ (Kx)(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k_1(t-s)x(s)ds + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k_2(t-s)x(s)ds, \\ k_1(t-s) &= \sum_{m=-M}^M b_m e^{im(t-s)}, \quad k_2(t-s) = \sum_{m=-M}^M c_m e^{im(t-s)}, \end{aligned} \quad (2)$$

b_m, c_m ($m = -M, \dots, M$) – произвольные комплексные числа, $H^\gamma(0, 2\pi)$ - пространство 2π -периодических комплекснозначных гёльдеровых функций с показателем $0 < \gamma < 1$.

В [1] исследован вопрос разрешимости уравнения (1) в пространстве $H^\gamma(0, 2\pi)$ и использован метод регуляризации сдвигом при решении дискретного аналога уравнения (1) - системы линейных алгебраических уравнений порядка N . В настоящем докладе метод регуляризации сдвигом использован в исследовании разрешимости уравнения (1) в пространстве $H^\gamma(0, 2\pi)$ и доказаны теоремы сходимости решения регуляризованных сдвигом уравнения (1) к соответствующим решениям уравнения (1). Приведем формулировки некоторых из этих теорем.

Как известно [2], необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения (1), когда $K \equiv 0$ (классическое уравнение Гильберта), является равенство нулю среднего значения правой части, то есть

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt = 0. \quad (3)$$

Если выполнено условие (3), то для любого комплексного числа d_0 существует только одно решение $x_0 \in H^\gamma(0, 2\pi)$ уравнения (1), удовлетворяющее условию

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x_0(t) dt = d_0. \quad (4)$$

Теорема сходимости решения регуляризованного сдвигом уравнения, формулируется так:

Теорема 1. *Пусть для данной правой части $f \in H^\gamma(0, 2\pi)$ выполнено условие (3). Тогда для любого комплексного числа $\alpha \neq 0$ уравнение*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(ctg \frac{t-s}{2} + \alpha \right) x(s) ds = f(t) + \alpha d_0$$

имеет единственное решение $x_\alpha \in H^\gamma(0, 2\pi)$, которое при $\alpha \rightarrow 0$ сходится равномерно к решению x_0 , удовлетворяющему условию (4).

В общем случае, условие разрешимости уравнения (1) зависит от коэффициентов тригонометрических многочленов (2). Многообразие ситуаций, которое возникает в этом случае, зависит от числа $b_0 + c_0$, ранга и линейно зависимости строк матриц

$$B_k = \begin{pmatrix} i + b_{-k} & c_{-k} \\ c_k & -i + b_k \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, M.$$

Приведем некоторые из этих утверждений.

Теорема 2. *Пусть $b_0 + c_0 = 0$ и $\det B_k \neq 0$ для всех $k = 1, \dots, M$. Тогда необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения (1) является выполнение соотношения (3). Если выполнено условие (3), то для любого комплексного числа d_0 существует только одно решение $x_0 \in H^\gamma(0, 2\pi)$, удовлетворяющее условию (4) и для любого комплексного числа $\alpha \neq 0$ уравнение*

$$(Tx)(t) + (Kx)(t) + \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(s) ds = f(t) + \alpha d_0$$

имеет единственное решение $x_\alpha \in H^\gamma(0, 2\pi)$, которое сходится равномерно к x_0 при $\alpha \rightarrow 0$.

Теорема 3. Пусть $b_0 + c_0 = 0$ и для некоторого $k = 1, \dots, M$ выполнено равенство $\det B_k = 0$. Тогда необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения (1) является выполнение условий

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikt} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikt} f(t) dt = 0. \quad (5)$$

Если выполнены условия (5), то для любых комплексных чисел d_k и d_{-k} существует только одно решение $x_0 \in H^\gamma(0, 2\pi)$, удовлетворяющее условиям

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iks} x_0(s) ds = d_k, \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-iks} x_0(s) ds = d_{-k},$$

и для любых комплексных чисел $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, уравнение

$$(Tx)(t) + (Kx)(t) + \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iks} x(s) ds + \\ + \frac{\beta}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-iks} x(s) ds = f(t) + \alpha d_k + \beta d_{-k} \quad (6)$$

имеет единственное решение $x_{\alpha, \beta} \in H^\gamma(0, 2\pi)$, которое сходится равномерно к x_0 при $\alpha \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow 0$.

Литература

- Назимов А.Б., Мухамадиев Э.М., Морозов В.А., Муллоджсанов М. Метод регуляризации сдвигом. Теория и приложения. Монография. Вологда: ВоГУ, 2012. 368 с.
- Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент (в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн). М.: ТОО "Янус", 1995. 520 с.

УДК 519.2

РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА SPH НА ГРАФИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОРАХ

© Николаев Е.И.

Северо-Кавказский федеральный университет (Россия, Ставрополь)
e-mail: notdeveloper@gmail.com

На современном этапе развития численных методов решения задач математической физики наибольшее распространение получили сеточные численные методы. Развитие аппаратных средств, графических вычислителей в частности, делает эффективным применение бессеточных численных методов (mesh-free method, MF-метод) [1]. В работе рассматривается подмножество MF-методов – метод гидродинамики сглаженных частиц (smoothed particle hydrodynamics, SPH) [2]. С помощью SPH класс численно исследуемых задач расширяется: течения с деформациями границ расчетной области; моделирование задач со свободной поверхностью; взаимодействие жидких, пластичных и твердых сред; фазовые переходы. Учитывая относительную независимость частиц в SPH, то есть возможность распараллеливания вычислительного процесса, наиболее эффективной платформой для метода частиц является система на базе графических процессоров (GPU) [3].

SPH-метод предполагает реализацию следующих этапов численного эксперимента [1, 2, 4]:

1. Инициализация. Представление (дискретизация) исходных уравнений модели множеством частиц. Проблема генерации частиц жидкости рассмотрена в [1, 2].

2. Генерация виртуальных частиц на границах расчетных областей и подобластей. Особый статус имеют частицы, которые находятся на границах расчетных областей. На границе “твердое тело – жидкость” производится формирование слоя частиц, которые не взаимодействуют с частицами жидкости, но для того, чтобы метод был устойчив необходимо формировать несколько последовательных слоев за границей расчетной области (виртуальные частицы). Отсутствие виртуальных частиц приведет к скачку плотности частиц на границе и приведет к некорректным результатам аппроксимации в области граничных частиц [1, 4].

3. Вычисление сглаживающих функций. Для функций, исследуемых в процессе моделирования, существует большое количество функций сглаживания [1]. Исследователь может самостоятельно вывести функции сглаживания и функцию ядра для каждой конкретной задачи.

4. Вычисление физических характеристик частиц (силы, искусственной вязкости).

5. Обновление параметров частицы: энергии, момента, плотности (в случае сжимаемых течений), координат, скорости. Произво-

дится расчет новых координат [4].

6. Обновление шага сглаживания. Частицы на каждом шаге алгоритма изменяют свое положение, это приводит к перестроению массивов соседей, а также к переопределению шага сглаживания [2].

7. Шаги 3 – 6 алгоритма повторяются при моделировании. Каждый цикл символизирует временной шаг.

Реализация SPH на GPU требует применения специальных приемов, учитывающих специфику GPU: иерархическая память, блочный характер потоков, ограниченный объем глобальной памяти видеoadаптера. В соответствии с указанными особенностями при реализации SPH на GPU предлагается внедрение следующих модификаций стандартного алгоритма:

- использование разделяемой памяти при расчете влияния соседних частиц;
- ускорение вычислений за счет применение атомарных операций;
- ориентация алгоритмов на варпы (warp) потоков, вместо оперирования отдельными потоками;
- встроенная система визуализации, позволяющая сократить количество ресурсоемких операций обмена между GPU и CPU.

Все перечисленные модификации позволяют существенно повысить скорость вычислений. Каждая модификация основана на использовании архитектурной особенности GPU. Количество таких особенностей постоянно увеличивается [3], поэтому открываются все новые перспективы по улучшению методов SPH.

Литература

1. *Liu G.R., Liu M.B.* Smoothed particle hydrodynamics. A Meshfree Particle Method// World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. 2003.
2. *Lambert M. Surhone, Mariam T. Tennoe, Susan F. Henssonow* Smoothed-Particle Hydrodynamics. Betascript publishing, 2011. 124 p.
3. Материалы для разработчика CUDA. [Электронный ресурс] Режим доступа. URL: <https://developer.nvidia.com/cuda-zone>.
4. *Суравикин А.* Реализация метода SPH на CUDA для моделирования несжимаемых жидкостей// Наука и образование. М.: Научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2012.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СИНГУЛЯРНОЗАКРЕПЛЕННОЙ КОНСОЛИ

© Обласова И.Н.¹, Ширяева Н.В.¹, Тимофеева Е.Ф.¹,
Агаханова Я.С.², Винокурский Д.Л.¹

¹Северо-Кавказский Федеральный Университет (Россия, Ставрополь)

²Московский физико-технический институт (Россия, Москва)

e-mail: dlvinokursky@gmail.com, appinform@ncfu.ru

Данная работа посвящена исследованию наиболее значимых свойств математической модели сингулярнозакрепленной консоли. Нами было построено и исследовано интегро-дифференциальное уравнение

$$(pu'')'(x) + \int_0^x u(s)dQ(s) = F(x) + const,$$

в предположении, что p , Q и F — функции ограниченной вариации, а штрих означает обычную производную. Решения были найдены в классе непрерывно дифференцируемых функций, вторые производные которых имеют ограниченную на $[0,1]$ вариацию, и производные (pu'') имеют конечное на $[0; 1]$ изменение.

Генезис такого уравнения объясняется для случая, когда уравнение имеет физическую природу, возникая из задачи минимизации функционала энергии для консоли.

$$\Phi(u) = \int_0^1 \frac{pu''^2}{2} dx + \int_0^1 \frac{u^2}{2} dQ - \int_0^1 udF.$$

Существенное значение в нашем анализе модели было установление податливости классической консоли, а именно доказательство теорем.

Теорема. *Если $F(x)(\neq const)$ не убывает на $[0;1]$, то решение $u(x)$ задачи*

$$\left\{ \begin{array}{l} (pu'')'(x) = F(x) + const, \\ u(0) = 0, \\ u'(0) = 0, \\ u''(1) = 0, \\ (pu'')'(1) = 0. \end{array} \right.$$

положительно в интервале $(0; 1)$.

Теорема. Пусть $F(x)$ ($\neq \text{const}$) не убывает на $[0; 1]$. Тогда для решения краевой задачи справедливо неравенство $u''(0) > 0$.

Теорема. Если $K(x, s)$ функция влияния краевой задачи

$$\begin{cases} (pu'')'(x) + \int_0^x u(s)dQ(s) = F(x) + \text{const}, \\ u(0) = 0, \\ u'(0) = 0, \\ u''(1) = 0, \\ (pu'')'(1) = 0, \end{cases}$$

то решение представимо в виде $u(x) = \int_0^1 K(x, s)dF(s)$.

Последний интеграл понимается по Риману-Стильесу.

УДК 539.313:517.968.72

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НАСЛЕДСТВЕННО УПРУГОГО ТЕЛА В ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОРМЕ И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПОЛЗУЧЕСТИ

© Огородников Е.Н.

Самарский государственный технический университет (Россия, Самара)

e-mail: eugen.ogo@gmail.com

В большинстве источников одномерная обобщённая модель наследственно упругого тела (вязкоупругого тела с памятью) записывается в виде [1–3]

$$\sigma(t) + \sum_{k=1}^n b_k D^{\beta_k} \sigma(t) = E_0 \varepsilon(t) + \sum_{k=1}^m a_k D^{\alpha_k} \varepsilon(t), \quad (1)$$

где $\sigma(t)$, $\varepsilon(t)$ — напряжение и деформация тела в момент времени t . Как отмечается в монографии [3], многие авторы используют в равенстве (1) "подходящие дробные производные", причём по известным причинам предпочтение отдаётся производным по Капуто или лиувиллевской форме дробного интегродифференцирования. В работе [4] отмечается, что если в исходном постулате В. Вольтерры использовать интегральный оператор с началом в нуле и абелевым ядром, то получающееся определяющее соотношение будет представлять собой дробный аналог модельного соотношения Максвелла в интегральной форме

$$E\eta\varepsilon(t) = \eta\sigma(t) + EI_{0t}^\alpha\sigma(t), \quad (2)$$

где E , η — некоторые константы, которые при $\alpha \rightarrow 1 - 0$ совпадают с модулем упругости и коэффициентом демпфирования соответственно в классической модели Максвелла; I_{0t}^α — интегральный оператор Римана—Лиувилля порядка $\alpha > 0$ [3]. Используя метод структурного моделирования вязкоупругого тела в работе [4] показано, как из соотношения (2) получаются хорошо известный дробный аналог закона Ньютона (модель Скотт Блэра), дробные аналоги моделей Фойхта, Максвелла, Кельвина и Зенера в терминах дробных производных Римана—Лиувилля. Нетрудно получить определяющие соотношения в дифференциальной форме для моделей с различным сочетанием дробных аналогов фойхтовской и максвелловской моделей. Так, например, определяющее соотношение в модели с последовательным соединением дробных аналогов модели Фойхта записывается в виде

$$\begin{aligned} \eta_1 \eta_2 D_{0t}^{\alpha_1} D_{0t}^{\alpha_2} \varepsilon + (E_2 \eta_1 D_{0t}^{\alpha_1} + E_1 \eta_2 D_{0t}^{\alpha_2}) \varepsilon + E_1 E_2 \varepsilon = \\ = (E_1 + E_2) \sigma + (\eta_1 D_{0t}^{\alpha_1} + \eta_2 D_{0t}^{\alpha_2}) \sigma, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1)$. Если в равенстве (3) сумма $\alpha_1 + \alpha_2 \in (0, 1)$, то равенство $D_{0t}^{\alpha_1} D_{0t}^{\alpha_2} \varepsilon = D_{0t}^{\alpha_1 + \alpha_2} \varepsilon$ справедливо по крайней мере в классе функций $\varepsilon(t) \in AC[0, T]$. Но если $\alpha_1 + \alpha_2 \in (1, 2)$, то это не верно, т.к. дробные производные Римана—Лиувилля не обладают в общем случае полугрупповым свойством, и возможность записи обобщённой дробной реологической модели в форме (1) вызывает определённые сомнения. Наконец, использование определяющего соотношения (3) для решения задачи ползучести требует нахождения корректных начальных условий.

Все перечисленные проблемы снимаются, если исходные определяющие соотношения вводятся и записываются в интегральной форме. Заметим здесь, что Ю. Н. Работнов осознанно избегал понятия дробных производных в своих исследованиях [5].

Предельным переходом при $E \rightarrow +\infty$ в (2) получаем аналог закона Скотт Блэра в интегральной форме:— закон Г. Л. Слонимского [6]

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{\eta} I_{0t}^\alpha \sigma(t). \quad (4)$$

Параллельное соединение идеального упругого элемента с вязкоупругим элементом Г. Л. Слонимского (6) приводит к дробному аналогу модели Фойхта в интегральной форме

$$\eta \varepsilon(t) + E_0 I_{0t}^\alpha \varepsilon(t) = I_{0t}^\alpha \sigma(t). \quad (5)$$

Комбинируя законы (2), (6) и (4) в различных сочетаниях в рамках структурного механического подхода к моделированию вязкоупругого тела с памятью мы будем получать определяющие соотношения сразу в интегральной форме и проблема решения задачи о ползучести сводится к нахождению резольвенты интегрального уравнения вольтерровского типа.

Например, определяющее соотношение в модели с последовательным соединением двух дробных аналогов модели Фойхта в интегральной форме приводит к равенству

$$\begin{aligned} \eta_1\eta_2\varepsilon + (E_1\eta_2I_{0t}^{\alpha_1} + E_2\eta_1I_{0t}^{\alpha_2})\varepsilon + E_1E_2I_{0t}^{\alpha_1+\alpha_2}\varepsilon = \\ = (\eta_2I_{0t}^{\alpha_1} + \eta_1I_{0t}^{\alpha_2})\sigma + (E_1 + E_2)I_{0t}^{\alpha_1+\alpha_2}\sigma. \end{aligned} \quad (6)$$

Уравнение (6) относительно искомой функции деформации $\varepsilon(t)$ является уравнением вольтерровского типа. Интегральный оператор в левой части (6) допускает факторизацию

$$(I + \beta_1I_{0t}^{\alpha_1})(I + \beta_2I_{0t}^{\alpha_2})\varepsilon(t) = f(t), \quad (7)$$

где I — тождественный оператор, константы $\beta_1 = E_1/\eta_1$, $\beta_2 = E_2/\eta_2$, а $f(t)$ — правая часть интегрального уравнения (6) с коэффициентом $(\eta_1\eta_2)^{-1}$. Решение интегрального уравнения

$$\varepsilon(t) = (I + \beta_2I_{0t}^{\alpha_2})^{-1}(I + \beta_1I_{0t}^{\alpha_1})^{-1}f = (I - \beta_2E_{0t;-\beta_2}^{\alpha_2,\alpha_2})(I - \beta_1E_{0t;-\beta_1}^{\alpha_1,\alpha_1})f,$$

в частности, для $\sigma(t) = \sigma_0 = \text{const}$ удается найти в явном виде в терминах специальных функций, связанных с функцией типа Миттаг—Леффлера, и с использованием свойств оператора

$$E_{0t;\lambda}^{\mu,\alpha}f = \int_0^t \text{Exp}(\alpha, \mu; \lambda; t - \tau)f(\tau)d\tau,$$

где $\text{Exp}(\alpha, \mu; \lambda; t) = t^{\mu-1}E_\alpha(\lambda t^\alpha; \mu)$ — обобщённая дробная экспоненциальная функция, $E_\alpha(z; \mu)$ — функция типа Миттаг—Леффлера.

Литература

1. Mainardi F. Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity. Imperial College Press, 2010. 368 p.
2. Bagley R. L., Torvik P. J. A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity // J. Rheol. 1983 Vol. 27, no. 3. P. 201–210.
3. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and Applications of Fractional Equations. North-Holland Mathematics Studies, 204, Elsevier, Amsterdam, 2006, xx+523 pp

4. Огородников Е. Н., Радченко В. П., Унгарова Л. Г. Математическое моделирование наследственно упругого деформируемого тела на основе структурных моделей и аппарата дробного интегро-дифференцирования Римана—Лиувилля// Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2016, №1 (20). С.167–194
5. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последействием// ПММ, 12:1, 1948. С. 53–62
6. Слонимский Г. Л. О законах деформации реальных материалов// ЖТФ, 9:20, 1939. С. 1791–1799

УДК 517.927

ОБЫКНОВЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С СИНГУЛЯРНОЙ ИЛИ СВЕРХ СИНГУЛЯРНОЙ ТОЧКОЙ

© Олимов А.Г.

Худжандский государственный университет им. Б.Г. Гафурова
(Таджикистан, Худжанд)
e-mail: Abdumanon1950@mail.ru

На интервале $\Gamma = (0, a)$ ($a > 0$) вещественной числовой оси рассмотрим уравнение вида

$$y''' + \frac{3p(x)}{x^\alpha} y'' + \frac{r(x)}{x^{2\alpha}} y' + \frac{s(x)}{x^{3\alpha}} y = \frac{f(x)}{x^{3\alpha}} \quad (1)$$

где $\alpha \geq 1$ – действительное число, $p(x) \in C^2(\bar{\Gamma})$, $r(x) \in C^1(\bar{\Gamma})$, $s(x), f(x) \in C(\bar{\Gamma})$ – известные, $y(x)$ – искомая функция, а также следующий его частный случай:

$$\begin{aligned} L_\alpha y &\equiv y''' + \frac{3p(x)}{x^\alpha} y'' + \frac{3x^\alpha p'(x) - 3\alpha x^{\alpha-1} p(x) + 3p^2(x)}{x^{2\alpha}} y' + \\ &+ \frac{x^{2\alpha} p''(x) + [3x^\alpha p(x) - 2\alpha x^{2\alpha-1}] p'(x) + (\alpha^2 + \alpha)x^{2\alpha-2} p(x) - 3\alpha x^{\alpha-1} p^2(x) + p^3(x)}{x^{3\alpha}} y = \\ &= \frac{f(x)}{x^{3\alpha}}, \end{aligned} \quad (2)$$

которое назовем соответствующим уравнению (1) модельным уравнением.

Отметим, что исследованию обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков с сингулярными и сверхсингулярными коэффициентами посвящен ряд работ, например, [1-3]. В данной работе общее решения уравнения (1) находится в явном виде или выражается при помощи решений интегрального уравнения Вольтерра второго рода со слабой особенностью и применяется к постановке и решению задачи типа Коши, с данными на особой точке $x = 0$.

1. Общее решение модельного уравнения (2), согласно [2, 3] выражается следующей формулой:

$$y(x) = \exp[-w_p^\alpha(x) + p(0)\omega^\alpha(x)]K_\alpha[p, f, c_0, c_1, c_2] \text{ при } \alpha > 1, \quad (3)$$

$$y(x) = x^{-p(0)}\exp[-w_p^1(x)]K_1[p, f, c_0, c_1, c_2] \text{ при } \alpha = 1, \quad (4)$$

где $K_\alpha[p, f, c_0, c_1, c_2]$, $w_p^\alpha(x)$ и $\omega^\alpha(x)$ – известные функции [2, 3], а $c_j, j = \overline{0, 2}$ – произвольные постоянные.

2. В общем случае уравнение (1) представим в виде

$$L_\alpha y = \frac{f(x) + x^\alpha \Omega_\alpha^1(x)y'(x) + \Omega_\alpha^2(x)y(x)}{x^{3\alpha}}, \quad (5)$$

где $\Omega_\alpha^1(x)$ и $\Omega_\alpha^2(x)$ – известные функции, явно выражаемые при помощи функций $p(x)$, $p'(x)$, $p''(x)$, $r(x)$, и $s(x)$ [2]. Обращаем уравнение (5) на основании формул (3) и (4).

Тогда, получим следующие утверждения:

Теорема 1. Пусть в уравнении (1) $p(x) \in C^2(\bar{\Gamma})$, $r(x) \in C^1(\bar{\Gamma})$, $s(x)$, $f(x) \in C(\bar{\Gamma})$, $p(0) > 0$ при $\alpha > 1$ и $p(0) > 2$ при $\alpha = 1$. В случае $\alpha \geq 2$ функция $p(x)$ подчиняется дополнительному условию

$$|p(x) - p(0)| \leq Hx^h, \quad H > 0, \quad h > \alpha - 1 \text{ при } x \rightarrow +0.$$

Функции $\Omega_\alpha^1(x)$, $\Omega_\alpha^2(x)$ в точке $x = 0$ обращаются в нуль и в ее окрестности удовлетворяют асимптотическим равенствам

$$\Omega_\alpha^1(x) = O(x^{\delta_1}), \quad \Omega_\alpha^2(x) = O(x^{\delta_2}), \quad \delta_1, \delta_2 > 3\alpha - 1.$$

Тогда задача решения дифференциального уравнения (1) эквивалентна задаче решения интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$\varphi(x) - \int_0^x M_\alpha(x, \xi)\varphi(\xi)d\xi = K_\alpha[p, f, c_0, c_1, c_2] \quad (6)$$

с ядром $M_\alpha(x, \xi)$ [2], имеющим слабую особенность при $\xi = 0$, непрерывной на $\bar{\Gamma}$ правой частью и неизвестной функцией $\varphi(x)$, связанной с искомой функцией $y(x)$ при помощи равенств $y(x) = \exp[-w_p^\alpha(x) + p(0)\omega^\alpha(x)]\varphi(x)$, $y(x) = x^{-p(0)}\exp[-w_p^1(x)]\varphi(x)$ при $\alpha > 1$ и $\alpha = 1$, соответственно.

Замечание 1. Пусть в уравнении (1) $p(0) < 0$, в случае $\alpha > 1$; $p(0) \leq 2$, в случае $\alpha = 1$ и функция $f(x)$ в точке $x = 0$ равняется нулю, а в ее окрестности удовлетворяет, соответственно асимптотическим равенствам

$$f(x) = O(x^\delta \exp[p(0)\omega^\alpha(x)]), \delta > 3\alpha - 1; f(x) = O(x^\gamma), \gamma > 2 - p(0).$$

Тогда заключение теоремы 1 опять остается верным.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда общее решение уравнения (1) из класса $C^3(\Gamma)$ выражается формулой

$$\begin{aligned} y(x) = & \exp[-w_p^\alpha(x) + p(0)\omega^\alpha(x)] \left\{ \int_0^x \Gamma_\alpha(x, \xi) K_\alpha[p, f, c_0, c_1, c_2] d\xi + \right. \\ & \left. + K_\alpha[p, f, c_0, c_1, c_2] \right\} \text{ при } \alpha > 1 \text{ и} \\ y(x) = & x^{-p(0)} \exp[-w_p^1(x)] \left\{ \int_0^x \Gamma_1(x, \xi) K_1[p, f, c_0, c_1, c_2] d\xi + K_1[p, f, c_0, c_1, c_2] \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

при $\alpha = 1$, где $\Gamma_\alpha(x, \xi)$ есть резольвента интегрального уравнения Вольтерра второго рода (6) с ядром имеющим слабую особенность и непрерывной правой частью.

Формулы (7) позволяют ставить и решить следующую задачу:
Задача типа Коши. Требуется найти решение уравнения (1) из класса $C^3(\Gamma)$ по следующим условиям на особой точке $x = 0$:

$$\exp[-p(0)\omega^\alpha(x)]B_\alpha^j y(x)|_{x=+0} = y_j \text{ при } \alpha > 1 \text{ и}$$

$$[x^{-p(0)}B_1^j y(x)]|_{x=+0} = y_j \text{ при } \alpha = 1,$$

где $B_\alpha y = y' + \frac{p(x)}{x^\alpha}y$, $B_\alpha^k y = B_\alpha(B_\alpha^{k-1}y)$, $B_\alpha^0 y \equiv y$, $y_j, j = \overline{0, 2}$ - заданные постоянные числа.

Легко можно убедиться, что единственное решение задачи типа Коши получается из формул (7) заменой в них произвольные постоянные c_j начальными данными, согласно равенству: $c_j = y_j, j = \overline{0, 2}$.

Литература

1. Rajabov N. Higher order ordinary differential equation with super-singular points// Partial Differential and Integral Equations. Kluwer Academic Publishers. 1999. P. 347–357.
2. Олимов А.Г., Раджабов Н. Линейное обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка общего вида со сверхсингулярной точкой// Вестник Таджикского Национального Университета. 2016. 1/1(192). С. 62–65.
3. Олимов А.Г. К теории одного обыкновенного дифференциального уравнения специального типа с сингулярной точкой // Современные проблемы математического анализа и их приложений. Мат-лы междунар. научн. конф., посвящ. 60-летию академика АН РТ Бойматова К.Х. Душанбе: Дониш, 2010. С. 79–81.

UDC 517.958

INVERSE COEFFICIENT PROBLEMS FOR ONE-DIMENSIONAL HEAT TRANSFER WITH A PRESERVATION OF MEDIUM TEMPERATURE CONDITION

© Oralsyn G.

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling (Kazakhstan, Almaty),
Al-Farabi Kazakh National University (Kazakhstan, Almaty)
e-mail: oralsyn@math.kz

The solvability of various inverse problems for parabolic equations was studied in papers of Anikonov Yu.E., Belov Yu.Ya., Bubnov B.A., Prilepko A.I., Kostin A.B., Monakhov V.N., Kozhanov A.I., Kaliyev I., Sabitov K.B., Pyatkov S.G., Ashyralyev A., Kerimov N.B., Ismailov M.I., Sadybekov M.A. and many others.

Unlike the preceding works, we study the inverse problem for a heat equation subject to boundary conditions with respect to a spatial variable under which the system of eigenfunctions of the corresponding spectral problem for an ordinary differential operator does not form a basis.

In the domain $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t < T\}$ consider a problem on finding unknown coefficient $p(t)$ of the heat equation

$$u_t = u_{xx}(x, t) - p(t)u(x, t) + f(x, t) \quad (1)$$

and its solution satisfying the initial condition

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

the nonlocal boundary condition

$$u_x(0, t) = u_x(1, t) + \alpha u(1, t), \quad u(0, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

and the overdetermination conditions

$$\int_0^1 u(x, t) dx = E(t), \quad E(t) \neq 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

where $E(t) \in W_2^1(0, T)$. Here the parameter α is any positive number, and $f(x), \varphi(x)$ and $E(t)$ are given functions. At $\alpha = 0$ the boundary conditions (3) are well-known and called in literature as Samarskii-Ionkin conditions.

The most close to the theme of the present paper is [1]. The existence of classical solution of an inverse problem analogous to our investigated problem has been justified in this paper. However, due to the fact that boundary conditions in [1] are regular, but not strengthened regular, from the input data of the problem there have been required the improvement of the smoothness and satisfaction to additional conditions. In the present paper these conditions are completely removed and it is shown that the inverse problem has the unique generalized solution.

We have proved the unique existence of a generalized solution to the mentioned problem. The main result of the paper is theorem on the existence and uniqueness of a generalized solution of the problem (1)-(4).

The main result of the paper is:

Theorem. *If functions φ and f belong to classes $\varphi \in W_2^2(0, 1)$, $f \in L_2(\Omega)$, $E(t) \neq 0$ and $E(t) \in W_2^1(0, T)$, then a unique generalized solution $u(x, t) \in W_2^{2,1}(\Omega)$, $p(t) \in L_2(0, 1)$ of the problem (1)-(4) exists.*

Throughout this note we mainly use techniques from our works [2–3].

Research supported by the grant 0824/GF4 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

References

1. Kerimov N. B., and Ismailov M. I. An inverse coefficient problem for the heat equation in the case of nonlocal boundary conditions // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2012. V. 396, № 2. P. 546-554.
2. Oralsyn G. and Sadybekov M. A. An inverse coefficient problem of heat conductivity with a nonlocal Samarskii-Ionkin type condition // AIP Conf. Proc. 2015. V. 1676. P. 020016. <http://dx.doi.org/10.1063/1.4930442>.

3. *Oralsyn G.* Inverse coefficient problems for one-dimensional heat transfer with a preservation of medium temperature condition // AIP Conf. Proc. 2016. V. 1759. P. 020084. <http://dx.doi.org/10.1063/1.4959698>.

UDC 517.958

ON ONE MATHEMATICAL MODEL OF THE EXTRACTION PROCESS OF POLYDISPERSE POROUS MATERIAL

(c) Orazov I.

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling (Kazakhstan, Almaty)
Auezov South Kazakhstan State University (Kazakhstan, Shymkent)
e-mail: orazov@math.kz

The solvability of various inverse problems for parabolic equations was studied in papers of Anikonov Yu.E. and Belov Yu.Ya., Bubnov B.A., Prilepko A.I. and Kostin A.B., Monakhov V.N., Kozhanov A.I., Kaliyev I., Sabitov K.B., Sadybekov M.A. and many others.

Unlike the preceding works, we study the inverse problem for a heat equation subject to boundary conditions with respect to a spatial variable under which the system of eigenfunctions of the corresponding spectral problem for an ordinary differential operator does not form a basis.

For simplicity we consider only a model equation of one-dimensional extraction process of a target component from the solid polydisperse porous materials in one separately taken macropore:

$$\Psi_t(x, t) - \Psi_{xx}(x, t) = f(x), \quad (1)$$

where $\Psi(x, t)$ is a dimensionless concentration of the target component in macropores at x at time point t . Here $f(x)$ is an influence of outer source.

Therefore the problem is considered in the domain $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t < T\}$. Here $t = 0$ is an initial time point and $t = T$ is a final one.

Natural to assume that the value of concentration on the farthest boundary of the macropore equals to zero:

$$\Psi(1, t) = 0, 0 \leq t \leq T. \quad (2)$$

For many forms of the solid polydisperse porous materials, the volume of the diffusion (of the target component from micropore into

macropore) at the near end at every time point t is proportional to the change speed of the average value of quantity of the target component in the macropores. Then

$$\alpha \Psi(0, t) = \frac{d}{dt} \int_0^1 \Psi(\xi, t) d\xi, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

where the proportional coefficient α is a positive constant.

Our goal is to find functions of influence of the outer source $f(x)$ by means of some additional information. The knowledge of $f(x)$ allows in future to calculate necessary concentration of the target component in the micropores.

As the additional information we take values of initial and final conditions of the concentration of the target component in the macropores:

$$\Psi(x, 0) = \varphi(x), \quad \Psi(x, T) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (4)$$

Thus the investigated process is reduced to the mathematical problem: *Find the right-hand side $f(x)$ of the diffusion equation (1), and its solution $\Psi(x, t)$ subject to the boundary ones (2), (3) and the initial and final conditions (4).*

We have proved the unique existence of the generalized solution to the mentioned problem. The main result of this paper is a theorem.

Theorem. *If functions $\varphi(x)$ and $\psi(x)$ belong to $W_2^2(0, 1)$ and satisfy the conditions (2)-(3), then problem (1)-(4) has a unique generalized solution*

$$\Psi(x, t) \in W_2^{2,1}(\Omega), \quad f(x) \in L_2(0, 1).$$

Throughout this note we mainly use techniques from our works [1–3].

Research supported by the grant 0824/GF4 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

References

1. *Orazov I., and Sadybekov M. A.* One nonlocal problem of determination of the temperature and density of heat sources // Russian Mathematics. 2012. V. 56, № 2. P. 60-64.
2. *Orazov I., and Sadybekov M. A.* On a class of problems of determining the temperature and density of heat sources given initial and final temperature // Siberian Mathematical Journal. 2012. V. 53, № 1. P. 146-151.
3. *Orazov I., and Ayaz S. Zh.* Construction of mathematical models of extraction processes with nonlocal conditions by a spatial variable // AIP Conf. Proc. 2016. V. 1759. P. 020079. <http://dx.doi.org/10.1063/1.4959693>.

УДК 551.4.013

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЯ НА РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ОБВАЛОВ

© Орлова Н.С.

Южный математический институт – филиал Федерального государственного бюджетного учреждения науки Федеральный научный центр "Владикавказский научный центр Российской академии наук"; Финансовый университет при Правительстве РФ (Россия, Владикавказ)
e-mail: norlova.umi.vnc@gmail.com

В настоящее время оценка размеров зон поражения, вызванных обвалами массы горных пород, представляется актуальным научно-практическим исследованием. Осуществить такое исследование возможно с использованием математического моделирования.

В настоящей работе используется двухжидкостная модель движения обломков горных пород с использованием континуального подхода, когда движение потока вещества представляется в виде сплошной среды. Данный подход не требует использования мощных вычислительных ресурсов. Кроме того, в модели учитывается оживление потока обвальных горных пород в процессе их движения по склону. Моделирование оживления потока обвальных горных пород осуществляется с использованием кинетической теории грануллярных газов, которая учитывает хаотическое движение обломков (вследствие их столкновений друг с другом и с поверхностью склона) как в плотном, так и в разреженном состоянии.

Для моделирования движения обвалов использовался свободно распространяемый пакет для численного моделирования задач гидроаэромеханики OpenFOAM (англ. Open Source Field Operation And Manipulation CFD ToolBox) при поддержке программы "Университетский кластер" с удаленным доступом к консоли на управляемом узле вычислительного кластера JSCC RAS web-лаборатории UniHUB (URL: <https://unihub.ru/tools/js3console> (date of treatment: 30.04.2016)).

Для описания движения обвала с учетом оживления использовался решатель twoPhaseEulerFoam. В решателе twoPhaseEulerFoam реализована двухжидкостная модель кипящего (ожиженного) слоя на основе континуального подхода (подхода Эйлера), при котором

движение слоя рассматривается как движение двух взаимодействующих континуумов, связанных с газом и частицами. Основные уравнения двухжидкостной модели - уравнения неразрывности и уравнения количества движения для обеих фаз [1,2].

Были проведены тестовые расчеты модели с целью дальнейшего ее использования для моделирования движения обвалов. Задача решалась в двумерном приближении [3]. Рассматривалась область, состоящая из склона, сопряженного с горизонтальным участком. Расчеты проводились при разном значении угла склона к горизонтальной поверхности ($\beta_1 = 37$ градусов, $\beta_2 = 45$ градусов и $\beta_3 = 54$ градуса). Более подробно условия вычислений описаны в работе [4].

В качестве граничного условия для скорости твердой фазы на склоне и горизонтальном участке использовалось условие проскальзывания. При этом расчеты проводились при различных значениях коэффициента проскальзывания (в пределах от нуля до 1). Кроме того, расчеты проводились и при условии прилипания.

Результаты вычислений показали, что значение коэффициента проскальзывания, в целом, не влияет на характер движения обвала. Наблюдаются небольшие количественные расхождения в расчетах по распределению твердой фазы и скорости ее движения вдоль склона, которые были получены при разных значениях коэффициента проскальзывания.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-35-00147).

Литература

1. *Henrik R.* Computational Fluid Dynamics of Dispersed Two-Phase Flows at High Phase Fractions // Thesis submitted for the degree of Doctor of Philosophy of the University of London and Diploma of Imperial College, 2002. 343 p.
2. *Berend van Wachem.* Derivation, Implementation, and Validation of Computer Simulation Models for Gas-Solid Fluidized Beds // Dissertation at Delft University of Technology, 2000. 222 p.
3. *Орлова Н.С., Волик М.В.* Моделирование движения обвалов с использованием континуального подхода // Материалы конференции "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения - VI". Ростов-на-Дону 24-29 апреля 2016 года. Ростов-на-Дону: ЮФУ, 2016. С. 150–151.
4. *Орлова Н.С., Волик М.В.* Математическое моделирование движения обвалов с использованием континуального подхода // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2016. № 3. Принята к печати.

УДК 531.3; 534.615; 517.958:531-133;

ИССЛЕДОВАНИЕ СОУДАРЕНИЙ ОСЦИЛЛЯТОРА С УПРУГИМ ПОЛУПРОСТРАНСТВОМ

© Ошхунов М.М.¹, Рехвиашвили С.Ш.¹, Нарожнов В.В.²

¹ФГБОУ ВО «Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова» (Россия, Нальчик)

e-mail: muaed@inbox.ru

²Федеральное государственное бюджетное научное учреждение

"Институт прикладной математики и автоматизации" (Россия, Нальчик)

e-mail: rsergo@mail.ru, e-mail: narojnov.victor@gmail.com

В настоящей работе реализован механический осциллятор – ударник на упругой балке, который совершает вынужденные колебания и соударения с упругим полупространством – металлическим образцом. Проведены исследования звуковых сигналов, возникающих при ударах осциллятора о поверхность различных металлических образцов [1, 2]. Экспериментальным результатам дана физическая интерпретация и предложена математическая модель, описывающая процесс соударения.

Рассмотрим затухающие колебания осциллятора в поле сил тяжести в отсутствие соударений и внешней возбуждающей силы. Уравнение движения записывается в виде

$$x'' + 2ax' + x + b = 0, \quad (1)$$

$$a = \frac{\gamma}{m\omega_0^2}, \quad b = \frac{g}{\omega_0^2}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

где $x(t)$ – смещение, являющееся функцией безразмерного времени, g – ускорение свободного падения, m – эффективная масса осциллятора, k – изгибная жесткость, γ – коэффициент затухания. Общее решение уравнения (1) имеет вид

$$x(t) = \exp(-at)[c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)] - b, \quad (2)$$

$$\omega = \sqrt{1 - a^2}.$$

Решение (2) в нашем случае должно удовлетворять следующим начальным условиям

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = v_0, \quad (3)$$

где v_0 – начальная скорость. Отсюда получаем

$$c_1 = b, \quad c_2 = \frac{v_0 + ab}{\omega}, \quad a < 1. \quad (4)$$

Из решения (2) следует, что в отсутствие внешнего возбуждения амплитуда колебаний осциллятора должна затухать по экспоненциальному закону. Такое затухание регистрируется также и в режиме соударений осциллятора.

При движении ударника в процессе контакта коэффициент жесткости в уравнении (1) зависит от смещения x , что приводит к нелинейному дифференциальному уравнению

$$mx'' + 2\gamma x' + k(x)x + mg = 0, \quad (5)$$

где $k(x)$ – характеристика жесткости внедрения зонда в упругое полупространство. Очевидно, что в нашем эксперименте выполняется условие $k(x)x \gg mg$ и, кроме того, изгибной жесткостью балки можно также пренебречь. Таким образом, движение шара при контакте вплоть до остановки и процесс выталкивания можно описать простым уравнением:

$$x'' + \omega_0^2 x = 0. \quad (6)$$

Если $\omega_0 = const$, то решение уравнения (6) с учетом начальных условий (3) будет иметь вид

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t). \quad (7)$$

Время контакта в данном случае равно

$$\tau = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega_0} = \frac{\pi x_0}{v_0}, \quad (8)$$

где T – период, x_0 – максимальная глубина внедрения зонда в образец. Отметим, что формула (2) была получена ранее в работе [1] в модели сталкивающихся шаров.

В наиболее общем случае для расчета контактной жесткости при ударе зонда необходимо использовать известное решение задачи Герца для взаимодействия шара с упругим полупространством [3, 4]. Уравнение движения зонда в зоне контакта приобретает вид

$$x'' + \alpha x^{3/2} = 0, \quad (9)$$

$$\alpha = \frac{4E\sqrt{R}}{3m(1 - \sigma^2)},$$

где E – модуль упругости образца, σ – коэффициент Пуассона для материала образца, R – радиус кривизны кончика зонда. При записи упругой силы в уравнении (9) предполагалось, что модуль упругости материала ударника намного превышает модуль упругости образца. Представим уравнение (9) в следующем виде

$$vdv = -\alpha x^{3/2}dx, \quad (10)$$

$$v = x'.$$

Интегрируя уравнение (10), находим

$$\frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = -\frac{2\alpha}{5}x^{5/2}. \quad (11)$$

При $v = 0$ смещение достигает максимального значения [1]:

$$x_0 = \left(\frac{5v_0^2}{4\alpha}\right)^{2/5} = v_0^{4/5} \left[\frac{15m(1 - \sigma^2)}{16E\sqrt{R}}\right]^{2/5}. \quad (12)$$

Интегрируя уравнение (11) с учетом (12), находим длительность удара

$$\tau \approx 2.9432 \frac{x_0}{v_0} = 2.9432 \left[\frac{15m(1 - \sigma^2)}{16E\sqrt{v_0 R}}\right]^{2/5}. \quad (13)$$

Таким образом, приходим к выводу, что формулы (2) и (13) достаточно хорошо согласуются между собой (различие определяется отношением $\pi/2.9432 \approx 1.067$). Это означает, что для интерпретации наших экспериментов вполне достаточно воспользоваться линейной моделью, которая описывается уравнением (6). В рамках этой модели амплитуда акустического сигнала, возникающего при соударениях зонда о поверхность твердого тела, пропорциональна $1/\sqrt{E}$, что дает возможность использовать акустические измерения для определения модуля упругости образца [1].

Различные модели, описывающие движение тел с учетом затухания, пропорционального скорости, описаны в работе [5]. В работе [6] предлагается модель внедрения штампа сферической формы в слой, лежащий на жестком основании, причем для оценки силы сопротивления внедрению предлагается заменить сплошную среду системой независимых пружин. Схожие идеи изложены в работе [4].

Такой подход справедлив при не очень больших значениях коэффициента Пуассона, однако преимуществом такой модели является возможность учета нелинейных свойств среды и потери энергии, связанные с явлениями гистерезиса.

Следует отметить, что предложенные математические модели построены в предположении упругости свойств образцов, однако из экспериментальных результатов следует, что имеет место процесс затухания, связанный с пластичностью материала и потерей энергии в процессе соударения. Учет этих свойств требует дальнейшей разработки нелинейных математических моделей, описывающих реальные свойства образцов, в том числе наличие петли гистерезиса в процессе соударения осциллятора с полупространством.

Литература

1. Рехвиашвили С.Ш., Наројснов В.В. Нелинейная динамика и акустические сигналы при упругих соударениях зонда с поверхностью твердого тела // Известия ВУЗов. Прикладная и нелинейная динамика. 2013. Т. 21. № 6. С. 49-57.
2. Рехвиашвили С. Ш., Наројснов В.В. Стенд для исследования вязкоупругих свойств металлов и сплавов с помощью зондового акустического метода // Патент на изобретение №2552600. Приоритет изобретения 27.05.2013, зарегистрировано 07.05.2015. С. 1-5.
3. Ландау Л.Д., Либшиц Е.М. Теория упругости. Москва: Наука, 1987. 246 с.
4. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. Москва: Мир, 1989. 510 с.
5. Ошхунов М.М., Нагоев З.В. Метод дискретно-динамических частиц в задачах механики деформируемого твердого тела // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2011. № 4. С. 155-169.
6. Ошхунов М.М. Удар жесткой сферы о слой, лежащий на жестком основании // Труды МФТИ, серия «Аэрофизика и прикладная математика», Долгопрудный, 1973. С. 52-59.

УДК 517.925.42

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ФРАКТАЛЬНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ВАН-ДЕР-ПОЛЯ

© Паровик Р.И.

Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН
(Россия, Паратунка)
e-mail: romanparovik@gmail.com

В работе предложена новая математическая модель, обобщающая модель осциллятора Ван-дер-Поля, которая характеризуют эредитарный автоколебательный процесс. Наличие «памяти» или эредитарности в колебательной системе обусловлено зависимостью текущего ее состояния от предыдущих состояний. Этот эффект можно описать с помощью математического аппарата дробного интегро-дифференцирования [1,2]. Для решения рассмотренной модели были предложены две расчетные явные конечно-разностные схемы. Согласно расчетным схемам были построены и изучены осциллограммы и фазовые траектории. Одним из ключевых результатов в работе является следующий результат, что несмотря на наличие производных дробных переменных порядков и отсутствия внешнего гармонического воздействия, осциллограммы со временем выходят на постоянную амплитуду, а фазовые траектории на предельный цикл. Это важный результат так как ранее считалось, что введение в исходное уравнение без правой части производных дробных порядков приводит к появлению диссипации энергии и к затуханию колебаний [2].

Постановка задачи и методика решения. Рассмотрим следующее уравнение с производными дробных переменных порядков:

$$\partial_{0t}^{\beta(x(t),t)} x(\tau) - \lambda (1 - x(t)^2) \partial_{0t}^{\gamma(x(t),t)} x(\tau) + x(t) = f(t), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \partial_{0t}^{\beta(x(t),t)} x(\tau) &= \frac{1}{\Gamma(2 - \beta(x(t), t))} \int_0^t \frac{\ddot{x}(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{\beta(x(t), t) - 1}}, \\ \partial_{0t}^{\gamma(x(t),t)} x(\tau) &= \frac{1}{\Gamma(1 - \gamma(x(t), t))} \int_0^t \frac{\dot{x}(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{\gamma(x(t), t)}}. \end{aligned}$$

где $0 < \gamma(x(t), t) < 1, 1 < \beta(x(t), t) < 2$ – порядки дробных производных, известные функции, $x(t)$ – функция смещения, $f(t)$ – функция внешнего воздействия, $t \in [0, T]$ – время, T – время моделирования процесса, λ – параметр, характеризующий нелинейность и силу затухания колебаний.

Существует другое определение производных дробных переменных порядков, входящих в уравнение (1) [3], поэтому мы также рассмотрим следующее уравнение:

$$\partial_{0t}^{\beta(x(\tau),\tau)} x(\tau) - \lambda (1 - x(t)^2) \partial_{0t}^{\gamma(x(\tau),\tau)} x(\tau) + x(t) = f(t), \quad (2)$$

$$\partial_{0t}^{\beta(x(\tau),\tau)} x(\tau) = \int_0^t \frac{\ddot{x}(\tau) d\tau}{\Gamma(2 - \beta(x(\tau), \tau)) (t - \tau)^{\beta(x(\tau), \tau) - 1}},$$

$$\partial_{0t}^{\gamma(x(\tau), \tau)} x(\tau) = \int_0^t \frac{\dot{x}(\tau) d\tau}{\Gamma(1 - \gamma(x(\tau), \tau)) (t - \tau)^{\gamma(x(\tau), \tau)}}.$$

Уравнения (1) и (2) описывают эредитарный (фрактальный) осциллятор Ван-дер-Поля [4] с переменными дробными порядками, для которых справедливы следующие начальные условия:

$$x(0) = x_0, \dot{x}(0) = y_0. \quad (3)$$

В силу нелинейности уравнений (1) и (2) задачи Коши (1),(3) и (2),(3) будем решать с помощью численных методов – теории конечно-разностных схем [5]. Для этого разобьем временной отрезок $[0, T]$ на N равных частей с постоянным шагом $\tau = T/N$. Аппроксимацию функции решения $x(t)$ проведем сеточной функцией $x(t_j) = x_j$, $j = 0, 1, 2, \dots, N - 1$. Аппроксимацию операторов дробных переменных порядков проведем согласно работам [6],[7]. В итоге от дифференциальной задачи Коши (1) и (3) мы переходим к разностной задаче Коши вида:

$$\begin{aligned} x_1 &= \tau y_0 + x_0, j = 0, \\ x_{j+1} &= A_j x_j - B_j x_{j-1} - B_j \sum_{k=1}^{j-1} p_k^j (x_{j-k+1} - 2x_{j-k} + x_{j-k-1}) - \quad (4) \\ &- C_j \sum_{k=1}^{j-1} q_k^j (x_{j-k+1} - x_{j-k}) + D_j f_j, j = 1, \dots, N - 1, \\ A_j &= \frac{\frac{2\tau^{-\beta_j}}{\Gamma(3-\beta_j)} + \frac{\lambda\tau^{-\gamma_j}(x_j^2-1)}{\Gamma(2-\gamma_j)} - 1}{\frac{\tau^{-\beta_j}}{\Gamma(3-\beta_j)} + \frac{\lambda\tau^{-\gamma_j}(x_j^2-1)}{\Gamma(2-\gamma_j)}}, B_j = \frac{\frac{\tau^{-\beta_j}}{\Gamma(3-\beta_j)}}{\frac{\tau^{-\beta_j}}{\Gamma(3-\beta_j)} + \frac{\lambda\tau^{-\gamma_j}(x_j^2-1)}{\Gamma(2-\gamma_j)}}, \\ C_j &= \frac{\frac{\lambda\tau^{-\gamma_j}}{\Gamma(2-\gamma_j)} (x_j^2 - 1)}{\frac{\tau^{-\beta_j}}{\Gamma(3-\beta_j)} + \frac{\lambda\tau^{-\gamma_j}(x_j^2-1)}{\Gamma(2-\gamma_j)}}, D_j = \frac{1}{\frac{\tau^{-\beta_j}}{\Gamma(3-\beta_j)} + \frac{\lambda\tau^{-\gamma_j}(x_j^2-1)}{\Gamma(2-\gamma_j)}}, \\ p_k^j &= (k+1)^{2-\beta_j} - k^{2-\beta_j}, q_k^j = (k+1)^{1-\gamma_j} - k^{1-\gamma_j}. \end{aligned}$$

Аналогично, от дифференциальной задачи Коши (2) и (3) мы можем перейти к разностной задаче Коши:

$$x_1 = \tau y_0 + x_0, j = 0,$$

$$\begin{aligned}
x_{j+1} = & A_j x_j - B_j x_{j-1} - B_j \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\tau^{-\beta_k} p_k}{\Gamma(3-\beta_k)} (x_{j-k+1} - 2x_{j-k} + x_{j-k-1}) - \\
& - C_j \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\tau^{-\gamma_k} q_k}{\Gamma(2-\gamma_k)} (x_{j-k+1} - x_{j-k}) + D_j f_j, j = 1, \dots, N-1, \\
A_j = & \frac{\frac{2\tau^{-\beta_0}}{\Gamma(3-\beta_0)} + \frac{\lambda\tau^{-\gamma_0}(x_j^2-1)}{\Gamma(2-\gamma_0)} - 1}{\frac{\tau^{-\beta_0}}{\Gamma(3-\beta_0)} + \frac{\lambda\tau^{-\gamma_0}(x_j^2-1)}{\Gamma(2-\gamma_0)}}, B_j = \frac{\frac{\tau^{-\beta_0}}{\Gamma(3-\beta_0)}}{\frac{\tau^{-\beta_0}}{\Gamma(3-\beta_0)} + \frac{\lambda\tau^{-\gamma_0}(x_j^2-1)}{\Gamma(2-\gamma_0)}} \\
C_j = & \frac{\frac{\lambda\tau^{-\gamma_0}}{\Gamma(2-\gamma_0)} (x_j^2 - 1)}{\frac{\tau^{-\beta_0}}{\Gamma(3-\beta_0)} + \frac{\lambda\tau^{-\gamma_0}(x_j^2-1)}{\Gamma(2-\gamma_0)}}, D_j = \frac{1}{\frac{\tau^{-\beta_0}}{\Gamma(3-\beta_0)} + \frac{\lambda\tau^{-\gamma_0}(x_j^2-1)}{\Gamma(2-\gamma_0)}}, \\
p_k = & (k+1)^{2-\beta_k} - k^{2-\beta_k}, q_k = (k+1)^{1-\gamma_k} - k^{1-\gamma_k}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Результаты моделирования. Рассмотрим следующий пример работы схем (4) и (5), когда значения управляющих параметров: $N = 2000, T = 100, \tau = 0.05, \lambda = 0.3, \delta = 0, x_0 = 0.2, y_0 = 0, \beta(x(t), t) = 1.86 - 0.01 \cos(t^2 x(t)), \gamma(x(t), t) = 0.76 + 0.03 \cos(t^2 x(t))$.

Результаты исследования приведены в следующей таблице для $t \in [0, 1]$.

Таблица 1: Исследование конечно-разностных схем (4) и (5)

N	Максимальная по модулю ошибка, схема (4), Err_1	Максимальная по модулю ошибка, схема (5), Err_2	Расчетный порядок сходимости по схеме (4) $p_1 = \ln(Err_1) / \ln \tau$	Расчетный порядок сходимости по схеме (5) $p_2 = \ln(Err_2) / \ln \tau$
20	0.00138559287	0.00138565289	2.197001122	2.196986662
40	0.00072544611	0.00072554204	1.959598804	1.959562960
80	0.00037563251	0.00037579202	1.799829147	1.799732262
160	0.00019331091	0.00019339410	1.684909925	1.684825150
200	0.00015557551	0.00015499209	1.654936604	1.655645721
2000	0.00001737038	0.00001941259	1.442031937	1.427407967

Из таблицы видно, что максимальные по модулю ошибки уменьшаются при увеличении количества узловых точек N . Это говорит

о сходимости схем (4) и (5), расчетные кривые стремятся к некоторым асимптотическим кривым. Расчетные порядки сходимости этих схем, тоже уменьшается с увеличением узловых точек расчетной сетки и имеют значения больше единицы.

Далее в работе были рассмотрены другие примеры с правой частью в виде периодической функции. Показано, что фазовые траектории выходят на предельные циклы различной формы. Несомненно результаты моделирования могут быть использованы в исследовании эредитарных динамических систем.

Литература

1. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его приложения. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
2. *Учайкин В.В.* Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с.
3. *Паровик Р.И.* Математическое моделирование линейных эредитарных осцилляторов. Петропавловск-Камчатский: КамГУ имени Витуса Беринга, 2015. 178 с.
4. *Паровик Р.И.* Математическая модель фрактального осциллятора Вандер-Поля // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2015. Т. 17, № 2. С. 57-62.
5. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.
6. *Паровик Р.И.* Конечно-разностные схемы для фрактального осциллятора с переменными дробными порядками // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2015. № 2(11). С. 88-95.
7. *Паровик Р.И.* О численном решении уравнения фрактального осциллятора с производной дробного переменного порядка от времени // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2014. № 1(8). С. 60-65.

УДК 517.5

О КОНСТРУКТИВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ СИЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ТИПА МАРЦИНКЕВИЧА РЯДОВ ФУРЬЕ НА КЛАССАХ $C(T^M)$

© Пачулия Н.Л., Пачулия Н.Н.

Абхазский государственный университет (Абхазия, Сухум)
e-mail: niaz-pachulia@rambler.ru

Пусть $C = C(T^m)$ ($T = [-\pi, \pi]$) — множество 2π -периодических по каждой из m переменных непрерывных функций, $f \in C(T^m)$, $S[f]$ — ее ряд Фурье по тригонометрической системе функций, $S_k(f, x)$ — прямоугольные частные суммы $S[f]$, N_σ — множество последовательностей натуральных чисел (n_j) , для которых $1 + \sigma^{-1} \leq n_{j+1} n_j^{-1} \leq \sigma$, $\forall j \in N_0 = \{0, 1, \dots\}$

Далее, пусть $(n_j) \in N_\sigma$ и $\Lambda_\tau(N_\sigma)$ ($\tau > 1$) — множество неотрицательных последовательностей чисел $(\lambda_k) = \lambda$ для которых

$$\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} (\lambda_k)^\tau \leq A (n_{j+1} - n_j)^{1-\tau} \left(\sum_{k=n_{j-1}}^{n_j-1} \lambda_k \right)^\tau,$$

$A > 0$, $P = \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) : \alpha_j = 0, 1\}$, $\alpha \in P$ и $k \in N = \{1, 2, \dots\}$, то $k\alpha = (k\alpha_1, \dots, k\alpha_m)$.

Величину

$$H_q(f, x) = H_q(f, x, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k |S_{k\alpha}(f, x) - f(x)|^q$$

назовем сильным преобразованием типа Марцинкевича $S[f]$, где $q > 0$, $(\lambda_k) \in \Lambda_\tau(N_\sigma)$, $\tau > 1$ и $\alpha \in P$.

В работе наряду с другими результатами содержится следующее утверждение.

Теорема. Пусть $f \in C(T^m)$, $(n_j) \in N_\sigma$, $(\lambda_k) \in \Lambda_\tau(N_\sigma)$, $\tau > 1$, $\alpha \in P$, $q > 0$ и $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k (E_{k\alpha}(f))^q < \infty$. Тогда $H_q \in C$ и при $q \geq 1$

$$\omega(H_q^{\frac{1}{q}}, \delta\alpha) \leq A(\omega(f, \delta\alpha)) \left(\sum_{k=0}^{\lceil \delta^{-1} \rceil} \delta^{-1} [\lambda_k] \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{k=\lceil (\sigma\delta)^{-1} \rceil}^{\infty} \lambda_k (E_{k\alpha}(f))^q \right)^{1/q}. \quad (1)$$

В частности, если $\sum_{k \in N_0} \lambda_k < \infty$, то из (1) следует

$$\omega\left(H_q^{\frac{1}{q}}, \delta\alpha\right) \leq A\omega(f, \delta\alpha),$$

а при $q \in (0, 1)$

$$\omega(H_q, \delta\alpha) \leq A((\omega(f, \delta\alpha))^q \sum_{k=0}^{\lceil \delta^{-1} \rceil} \delta^{-1}) + \sum_{k=\lceil (\sigma\delta)^{-1} \rceil}^{\infty} \lambda_k (E_{k\alpha}(f))^q \lambda_k. \quad (2)$$

В случае $\sum_{k \in N_0} \lambda_k < \infty$, из (2) следует $\omega(H_q, \delta\alpha) \leq A(\omega(f, \delta\alpha))^q$, где $E_{k\alpha}(f)$ – полное наилучшее приближение функции f тригонометрическими полиномами порядка не выше k α , а

$$\omega(g, \delta\alpha) = \max_{|t_j| \leq \delta_j} |g(x + t(\alpha)) - g(x)|,$$

$t(\alpha) = (t_1(\alpha), \dots, t_m(\alpha))$ $t_j(\alpha) = t_j$, если $\alpha_j = 1$; $t_j(\alpha) = 0$, если $\alpha_j = 0$; $\delta = \left(\sum_{k=1}^m \delta_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

Отметим, что содержание теоремы при $m = 1$ совпадает с результатом, анонсированным нами в работе [1].

Литература

- Пачулиа Н.Л., Пачулиа Н.Н. О конструктивных характеристиках сильных преобразований Рядов Фурье// Материалы. 9-ый международный симпозиум. Ряды Фурье и их приложения. Новороссийск. 27 мая – 3 июня 2016 г.

УДК 519.63

СВЯЗЬ ЧИСЛЕННЫХ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И ДРОБНЫХ УРАВНЕНИЙ

© Пименов В.Г.

Уральский федеральный университет (Екатеринбург, Россия)
e-mail: v.g.pimenov@urfu.ru

Многие математические модели, особенно в биологии, могут содержать различные эффекты: распределенность состояния, временную динамику, нелинейные эффекты наследственности [1]. В силу сложности объектов основным инструментом исследования таких моделей являются численные алгоритмы [2], причем классические методы теории разностных схем неприменимы. В докладе приводятся возможности для обоснования сходимости с единой позиции численных схем решения различных типов уравнений с наследственностью: параболического и гиперболического типов, уравнений переноса, смешанных функционально-дифференциальных уравнений.

Основным элементом этой схемы является пошаговая формула (метод)

$$y_{n+1} = S_n y_n + \Delta \Phi(t_n, I(\{y_i\}_n)), \quad (1)$$

где t_n — момент времени с номером n , Δ — шаг по времени, y_n — дискретная модель (элемент линейного нормированного пространства Y_n , которое характеризуется пространственным шагом h), $\{y_i\}_n$ — предыстория модели к моменту t_n , I — оператор интерполяции, S_n — линейный оператор перехода, Φ — функция продвижения на шаг.

Эта схема первоначально применялась для исследования численных алгоритмов решения обыкновенных и функционально-дифференциальных уравнений. Основным результатом является теорема сходимости (определения порядка сходимости, устойчивости, а также порядков невязки и стартовых значений см. в [2, 3]):

Теорема. *Пусть метод (1) устойчив, функция Φ удовлетворяет условию липшицевости по второму аргументу, оператор интерполяции I удовлетворяет условию липшицевости, стартовые значения имеют порядок $\Delta^{p_1} + h^{p_2}$, невязка метода имеет порядок $\Delta^{p_3} + h^{p_4}$, где $p_1 > 0, p_2 > 0, p_3 > 0, p_4 > 0$, тогда метод сходится, причем порядок сходимости не меньше $\Delta^{\min\{p_1, p_3\}} + h^{\min\{p_2, p_4\}}$.*

Разработанные алгоритмы численного решения уравнений с наследственностью и одной пространственной переменной параболического типа [4], гиперболического типа [5], уравнения переноса [6], а также многомерные задачи, исследуются путем вложения в эту схему.

Дробные дифференциальные уравнения см., например [7], в последние десятилетия вызывают огромный интерес у прикладников в связи с большой точностью моделей во многих областях науки. В частности, имеется большое число работ по конструированию и исследованию численных алгоритмов решения уравнений с частными производными дробных порядков, как по пространственным, так и по временной переменной [8–11]. Во многих моделях уравнения осложнены эффектом наследственности – функционального запаздывания по времени, который близок по сути к эффекту, создающемуся дробными производными по времени, оба эти эффекта можно считать частными случаями свойства вольтерровости. Однако, если для уравнений с дробной производной по пространству и с наследственностью по времени конструкции схемы (1) переносится практически без изменений [12], то для уравнений с дробной производной по времени и с эффектом наследственности конструкции требуют существенной модификации и техника зачастую оказы-ва-

ется неприменимой. В докладе предполагается дать анализ случаев для уравнения вида

$$\beta_1 \frac{\partial u}{\partial t} + \beta_2 \frac{\partial^u}{\partial t^\gamma} = -V \frac{\partial u}{\partial x} + D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t, u_t(x, \cdot)), \quad (2)$$

где $u_t(x, \cdot) = \{u(x, t + s), -\tau \leq s \leq 0\}$ — предыстория функции, в зависимости от коэффициентов уравнения β_1, β_2, V, D , порядка дробной производной γ и выбранного метода.

Работа выполнена при поддержке Программы повышения конкурентоспособности ведущих университетов РФ (соглашение 02.A03.21.0006 от 27 августа 2013 г.) и проекта РНФ 14-35-00005.

Литература

1. *Wu J.* Theory and Application of Partial Functional Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1996. 438 p.
2. *Пименов В.Г.* Разностные методы решения уравнений в частных производных с наследственностью. Екатеринбург: Издательство Уральского университета, 2014. 132 с.
3. *Пименов В.Г.* Общие линейные методы численного решения функционально-дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 1. С. 105-114.
4. *Пименов В.Г., Ложников А.Б.* Разностные схемы численного решения уравнения теплопроводности с последействием // Труды ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17, № 1. С. 178-189.
5. *Пименов В.Г., Таширова Е.Е.* Численные методы решения уравнения гиперболического типа с наследственностью // Труды ИММ УрО РАН. 2012. Т. 18, № 2. С. 222-231.
6. *Пименов В.Г., Свиридов С.В.* Сеточные методы решения уравнения переноса с запаздыванием // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. № 3. С. 59-74.
7. *Diethelm K.* The Analysis of Fractional differential equations. Berlin: Springer, 2010. 250 p.
8. *Шхануков-Лафишев М.Х., Таукенова Ф.И.* Разностные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка // ЖКВМ. 2006. Т. 46. № 10. С. 1871-1881.
9. *Tadjeran C., Meerschaert M.M., Scheffler H.P.* A second-order accurate numerical approximation for the fractional diffusion equation // Journal of Computational Physics. 2006. V. 213. P. 205-214.
10. *Liu F., Zhuang P., Burrage K.* Numerical methods and analysis for a class of fractional advection-dispersional models // Computers and Mathematics with Applications. 2012. V. 64. P. 2990-3007.

11. Alikhanov A.A. A new difference scheme for the time fractional diffusion equation // Journal of Computational Physics. 2015. V. 280. P. 424-438.
12. Pimenov V.G., Hendy A.S. Numerical methods for the equation with fractional derivative on state and with functional delay on time // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2015. Т. 20, вып. 5, 2015. С. 1358-1361.

UDC 517.95

NUMERICAL SOLUTION FOR A CLASS OF SEMI-LINEAR DELAYED DIFFUSION-WAVE SYSTEM WITH TIME FRACTIONAL ORDER

© Pimenov V.G., Hendy A.S.

Department of Computational Mathematics, Institute of Mathematics and
Computer Science Ural Federal University (Russia, Yekaterinburg)
e-mail:vladimir.pimenov@urfu.ru, ahmed.hendy@fsc.bu.edu.eg

A numerical scheme for a class of non-linear fractional diffusion-wave system (FDW) with fixed time delay is considered. This study is an extension of the numerical schemes which introduced in [2, 3]. This approach focuses on derivation of a linearized compact difference scheme side by side with analyzing unique solvability, convergence and stability of the resulted numerical solution in L_∞ -norm by means of the discrete energy method. Numerical experiments are given to verify the numerical accuracy of the difference scheme.

We construct a linear difference scheme to solve numerically FDW effected with a non-linear delayed source function, more specific we consider

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} = K \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t, u(x, t), u(x, t - s)), \quad (1a)$$

with the following initial and boundary conditions

$$u(x, t) = \psi(x, t), \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \in [-s, 0), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi_1(x), \quad (1b)$$

$$u(0, t) = \phi_0(t), \quad u(L, t) = \phi_L(t), \quad t > 0, \quad (1c)$$

such that $t > 0$, $0 \leq x \leq L$, $1 < \alpha < 2$, $f(x, t, u(x, t), u(x, t - s)) = \lambda u(x, t)g(u(x, t - s))$, $\lambda > 0$. Where $s > 0$ is the delay parameter, K is a positive constant and the fractional derivative is introduced in Caputo sense.

In order to introduce the difference scheme, some further notations are needed to fix. Take two positive integers M and n , let $h = \frac{L}{M}$, $\tau = \frac{s}{n}$ and denote $x_i = i h$, $t_k = k \tau$ and $t_{k-1/2} = (k - \frac{1}{2}) \tau = \frac{1}{2}(t_k + t_{k-1})$. Cover the space-time domain by $\Omega_{h\tau} = \Omega_h \times \Omega_\tau$, where $\Omega_h = \{x_i \mid 0 \leq i \leq M\}$, $\Omega_\tau = \{t_k \mid -n \leq k \leq N\}$, $N = \lfloor \frac{T}{\tau} \rfloor$. Let $\mathcal{W} = \{\nu \mid \nu = v_i^k, 0 \leq i \leq M, -n \leq k \leq N\}$ be a grid function space on $\Omega_{h\tau}$. For $\nu \in \mathcal{W}$, we denote $v_i^{k-1/2} = \frac{1}{2}(v_i^k + v_i^{k-1})$ and $\delta_x^2 v_i^k = \frac{1}{h^2}(v_{i+1}^k - 2v_i^k + v_{i-1}^k)$.

We define the grid function on $\Omega_{h\tau}$: $V(i, k) = \nu(x_i, t_k)$.

Lemma 1. *Let $q(x) \in C^6[x_{i-1}, x_{i+1}]$, then $\frac{1}{12}(q''(x_{i-1}) + 10q''(x_i) + q''(x_{i+1})) - \frac{1}{h^2}(q(x_{i-1}) - 2q(x_i) + q(x_{i+1})) = \frac{h^4}{240}q^{(6)}(\omega_i)$, $\omega_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$.*

Then, for $g = (g_0, g_1, \dots, g_M)$, the linear operator \mathfrak{A} is defined as

$$\mathfrak{A}g_i = \frac{1}{12}(g_{i-1} + 10g_i + g_{i+1}), \quad 1 \leq i \leq M-1.$$

In [1], an approximation for the time Caputo fractional derivative at $t_{k-1/2}$ with $1 < \alpha_l < 2$ was given:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha \nu(x_i, t_{k-1/2})}{\partial t^\alpha} &= \frac{1}{\bar{\mu}} \left(b_0^\alpha \delta_t \nu_i^{k-1/2} - \sum_{j=1}^{k-1} (b_{k-j-1}^\alpha - b_{k-j}^\alpha) \delta_t \nu_i^{j-1/2} - b_{k-1}^\alpha \psi_1(x_i) \right) + (2) \\ &\quad + R_i^{k-1/2}, \end{aligned}$$

where

$$b_k^\alpha = \frac{\tau^{2-\alpha}}{2-\alpha} ((k+1)^{2-\alpha} - k^{2-\alpha}), \quad \bar{\mu} = \tau \Gamma(2-\alpha), \quad (3)$$

$$|R_i^{k-1/2}| \leq \frac{1}{\Gamma(3-\alpha)} \left(\frac{2-\alpha}{12} + \frac{2^{3-\alpha}}{3-\alpha} - (1+2^{1-\alpha}) + \frac{1}{12} \right) \max_{0 \leq t \leq t_k} \left| \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right| \tau^{3-\alpha}, \quad (4)$$

We also define

$$\nu_i^{k-1/2} = \frac{1}{2}(\nu_i^k + \nu_i^{k-1}), \quad \delta_t \nu_i^{k-1/2} = \frac{1}{\tau}(\nu_i^k - \nu_i^{k-1}), \quad (5)$$

$$\delta_x \nu_{i-1/2}^k = \frac{1}{h}(\nu_i^k - \nu_{i-1}^k), \quad \delta_x^2 \nu_i^k = \frac{1}{h}(\delta_x \nu_{i+1/2}^k - \delta_x \nu_{i-1/2}^k). \quad (6)$$

Lemma 2. *By using Taylor expansions we obtain*

$$\frac{\partial^2 \nu(x_i, t_{k-1/2})}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \nu(x_i, t_k)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \nu(x_i, t_{k-1})}{\partial x^2} \right) + O(\tau^2),$$

$$\nu(x_i, t_{k-1/2}) = V_i^{k-1/2} = \frac{1}{2}V_i^k + \frac{1}{2}V_i^{k-1} + O(\tau^2),$$

$$\nu(x_i, t_{k+1/2} - s) = V_i^{k-n-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}V_i^{k-n} + \frac{1}{2}V_i^{k-n-1} + O(\tau^2).$$

We are now in a position to apply and combine the above to obtain

$$\begin{aligned}
& \mathfrak{A} \left[\frac{1}{\bar{\mu}} \left(b_0^\alpha \delta_t V_i^{k-1/2} - \sum_{j=1}^{k-1} (b_{k-j-1}^\alpha - b_{k-j}^\alpha) \delta_t V_i^{j-1/2} - b_{k-1}^\alpha \psi_1(x_i) \right) \right] \\
& = K \delta_x^2 V_i^{k-1/2} + \mathfrak{A} f \left(x_i, t_{k-1/2}, \frac{1}{2} V_i^k + \frac{1}{2} V_i^{k-1}, \frac{1}{2} V_i^{k-n-1} + \frac{1}{2} V_i^{k-n} \right) + \\
& \quad + R_i^{k-1/2},
\end{aligned} \tag{7}$$

where

$$|R_i^{k-1/2}| \leq \bar{C} (\tau^{3-\alpha} + h^4), \tag{8}$$

such that $1 \leq i \leq M-1$, $1 \leq k \leq N$.

The final form of our difference scheme is obtained by neglecting $R_i^{k-1/2}$ and replacing V_i^k by ν_i^k .

Lemma 3. *The difference scheme is uniquely solvable.*

Theorem. *Let $\nu(x, t) \in [0, L] \times [-s, T]$, be the solution of (1) such that $\nu(x_i, t_k) = V_i^k$ and ν_i^k ($0 \leq i \leq M$, $-n \leq k \leq N$) be the solution of the difference scheme, denote $e_i^k = V_i^k - \nu_i^k$, for $0 \leq i \leq M$, $-n \leq k \leq N$, and then if there exists a constant C and*

$$\tau \leq \tau_0 = \left(\frac{\epsilon_0}{4C} \right)^{\frac{1}{3-\alpha}}, h \leq h_0 = \left(\frac{\epsilon_0}{4C} \right)^{\frac{1}{4}}, \tag{9}$$

one has that

$$\|e^k\|_\infty \leq C (\tau^{3-\alpha} + h^4), \quad 0 \leq k \leq N. \tag{10}$$

References

1. *Du R., Cao W.R., Sun Z.Z.* A compact difference scheme for the fractional diffusion-wave equation// Applied Mathematical Modeling. 34, 2010, P. 2997-3007.
2. *Hao Z., Fan K., Cao W., Sun Z.* A finite difference scheme for semi linear space-fractional diffusion equations with time delay. Applied Mathematics and Computation. 275, 2016. P. 238–254.
3. *Pimenov V.G., Hendy A.S., De Staelen R.H.* On a class of non-linear delay distributed order fractional diffusion equations. Journal of Computational and Applied Mathematics. Available online 2 March 2016.

UDC 517.988.8

APPROXIMATION OF FRACTIONAL EQUATIONS

(c) Piskarev S.

Lomonosov Moscow State University (Russia, Moscow)

e-mail: piskarev@gmail.com

In this talk we continue our investigations [1] on discretization of fractional differential equations in time.

Some years ago in [2] and [3] were considered the relation between well-posed Cauchy problems

$$v'(t) = A^l v(t) + g(t), t > 0, v(0) = u^0,$$

and

$$(\mathbf{D}_t^{1/l} u)(t) = Au(t), t > 0, u(0) = u^0.$$

Moreover, they have shown that for such kind problems with the operator A which generates C_0 -semigroup one has $v(t) \equiv u(t)$ for any $t > 0$ as soon as $l = 2$ and special choice of $g(t)$.

In this talk, we would like to use such kind of relations for discretization of fractional differential equations of order 1/2.

Research was partially supported by grant of RFBR 15-01-00026-a.

References

1. Liu R., Li M., Pastor J. and Piskarev S. On the approximation of fractional resolution families// Differential Equations. 2014. **50**(7). P. 927–937.
2. Keyantuo V., Lizama C. On a connection between powers of operators and fractional Cauchy problems// J. Evol. Equ. 2012. 12, №. 2. P. 245–265.
3. Li M., Chuang Ch., Li Fu-Bo On fractional powers of generators of fractional resolvent families// J. Funct. Anal. 2010. 259, №. 10. P. 2702–2726.

УДК 517.926

К ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

(c) Псху А.В.

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
"Институт прикладной математики и автоматизации" (Россия, Нальчик)
e-mail: pskhu@list.ru

Рассмотрим уравнение

$$\left(\frac{d^{\sigma_0}}{dx^{\sigma_0}} - \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{d^{\sigma_k}}{dx^{\sigma_k}} \right) u(x) = f(x),$$

где $d^{\sigma_k}/dx^{\sigma_k}$ – оператор дробного дифференцирования Джрабашяна-Нерсесяна порядка σ_k ($\sigma_k \geq 0$), $\lambda_k \in \mathbb{C}$, ассоциированный с последовательностью $\{\gamma_0^k, \gamma_1^k, \dots, \gamma_{n(k)}^k\}$ [1].

В работе обсуждаются вопросы, связанные с представлением фундаментального решения, построением общего решения и определением корректной формы задания начальных данных для рассматриваемого уравнения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-01-00462.

Литература

1. Джрабашян М.М., Нерсесян А.Б. Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка // Изв. Акад. Наук Арм. ССР. Сер. матем. 1968. Т. 3, № 1. С. 3–29.

УДК 517.91

ЗАДАЧА ГУРСА ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

© Пшибихова Р.А.

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
"Институт прикладной математики и автоматизации" (Россия, Нальчик)
e-mail: pshibihova@mail.ru

Для уравнения

$$D_{0x}^\alpha D_{0y}^\beta u(x, y) + a(x, y) D_{0x}^\alpha u(x, y) + b(x, y) D_{0y}^\beta u(x, y) + c(x, y) u(x, y) = f(x, y), \quad (1)$$

где $\alpha, \beta \in (0, 1)$, $a(x, y)$, $b(x, y)$ – непрерывно дифференцируемые функции, $c(x, y)$ – непрерывная функция, в области $D = (0, a) \times (0, b)$, $a < \infty, b < \infty$ рассмотрена следующая

Задача. Найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\beta-1} u(x, y) = \psi(x), \quad 0 < x < a, \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} D_{0x}^{\alpha-1} u(x, y) = \varphi(y), \quad 0 < y < b, \quad (3)$$

где φ, ψ – заданные непрерывные функции.

Уравнение (1) при $a(x, y) = b(x, y) = 0, c(x, y) = 1$ было исследовано в работе [1]. В данной работе для уравнения (1) получено общее представление решения краевой задачи (2), (3), построен аналог функции Римана.

Литература

1. Пшибихова Р.А. Задача Гурса для обобщенного телеграфного уравнения дробного порядка// Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50, №6. С. 839–843

УДК 517.962

КОРРЕКТНАЯ ПОСТАНОВКА ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПО ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

© Раджабов Н.Р.

Научно-исследовательский институт

Таджикского национального университета (Таджикистан, Душанбе)
e-mail: nusrat38@mail.ru

Через Ω обозначим цилиндрическую область $\Omega = \{(z, t); a < t < b, |z| < R\}$. Нижнее основание этого цилиндра обозначим через $D = \{t = a, |z| < R\}$ и боковую поверхность этого цилиндра обозначим через $S = a < t < b, |z| \leq R, z = x + iy$. В области Ω рассмотрим интегральное уравнение

$$\begin{aligned} \varphi(t, z) + \int_a^t \frac{A(s) \varphi(s, z)}{(s - a)} ds - \frac{\lambda}{\pi} \iint_D \frac{\exp[i\theta] \varphi(t, s) ds}{(R - \rho)^\beta (s - z)} - \\ - \frac{1}{\pi} \int_a^t \frac{ds}{(s - a)} \iint_D \frac{\exp[i\theta] B(t, s) ds}{(R - \rho)^\beta (s - z)} = f(t, z), \quad (1) \end{aligned}$$

где $A(t), B(t, z), f(t, z)$ – заданные функции соответственно областей S, D и Ω , $\theta = \arg s, s = \xi + i\eta, ds = d\xi d\eta, \varphi(t, z)$ – неизвестная

функция, $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2$, $\lambda = const$, $\beta = const > 1$. Решение интегрального уравнения (1) будем искать в классе функций $\varphi(t, z) \in C(\bar{\Omega})$, $\varphi(a, z) = 0$, $\varphi(t, Re^{i\theta}) = 0$, $\theta = \arg z$, с асимптотическими поведениями

$$\varphi(t, z) = o[(t - a)^\varepsilon], \quad \varepsilon > 0, \text{ при } t \rightarrow a, \quad (2)$$

$$\varphi(t, z) = 0[(R - r)^{\delta_1}], \quad \delta_1 > \beta - 1, \text{ при } r \rightarrow R. \quad (3)$$

Проблеме исследованием частных случаев интегрального уравнения (1) посвящен работы [1]-[3].

Оказывается, для корректности краевых задач для уравнения (1), в случаях, когда общее решение уравнения (1) содержит произвольные функции, необходимо, кроме условия на боковую поверхность и условия на нижнее основание, задавать условие на основную ось цилиндра. Например, для интегрального уравнения (1) следующая задача является корректно поставленной:

Задача N_1 . Требуется найти решение интегрального уравнения (1) при $A(t) = \mu$, $B(t, s) = \delta$, представимое в виде

$$\varphi(t, z) = \sum_{k=1}^{\infty} (t - a)^{k+\gamma} \varphi_k(z), \quad (4)$$

где $\varphi_k(z)$ - произвольные функции точек области D , по следующим граничным условиям на боковую поверхность и нижнее основание

$$\begin{aligned} Re \left\{ \exp \left[\delta_0 w_R^\beta(r) \right] [\varphi(t, z)(t - a)^{-\gamma}]_{t=a} \right\}_{r=R} &= E_0(\tau), \quad \tau = Re^{i\theta} \\ Re \left\{ \exp \left[\delta_1 w_R^\beta(r) \right] \frac{\partial}{\partial t} [\varphi(t, z) \exp [\gamma w_a^\alpha(t)]]_{t=a} \right\}_{r=R} &= E_1(\tau), \\ Re \left\{ \exp \left[\delta_2 w_R^\beta(r) \right] \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\varphi(t, z) \exp [\gamma w_a^\alpha(t)]]_{t=a} \right\}_{r=R} &= E_2(\tau), \\ Re \left\{ \exp \left[\delta_3 w_R^\beta(r) \right] \frac{\partial^3}{\partial t^3} [\varphi(t, z) \exp [\gamma w_a^\alpha(t)]]_{t=a} \right\}_{r=R} &= E_3(\tau), \quad (5) \\ \dots \\ Re \left\{ \exp \left[\delta_n w_R^\beta(r) \right] \frac{\partial^n}{\partial t^n} [\varphi(t, z) \exp [\gamma w_a^\alpha(t)]]_{t=a} \right\}_{r=R} &= E_n(\tau), \end{aligned}$$

где $E_j(\tau)$ ($j = 0, 1, 2, 3, \dots, n$) – заданные функции точек ребра $S \cap D$, и следующим условиям на ось цилиндра

$$\left\{ \exp \left[\delta_0 w_R^\beta(r) \right] [(t - a)^{-\gamma} \varphi(t, z)]_{t=a} \right\}_{z=0} = A_0,$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \exp \left[\delta_1 w_R^\beta(r) \right] \left[\frac{\partial}{\partial t} (t-a)^{-\gamma} \varphi(t, z) \right]_{t=a} \right\}_{z=0} = A_1, \\
& \left\{ \exp \left[\delta_2 w_R^\beta(r) \right] \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} (t-a)^{-\gamma} \varphi(t, z) \right]_{t=a} \right\}_{z=0} = A_2, \\
& \left\{ \exp \left[\delta_3 w_R^\beta(r) \right] \left[\frac{\partial^3}{\partial t^3} (t-a)^{-\gamma} \varphi(t, z) \right]_{t=a} \right\}_{z=0} = A_3, \\
& \dots \dots \dots \\
& \left\{ \exp \left[\delta_n w_R^\beta(r) \right] \left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} (t-a)^{-\gamma} \varphi(t, z) \right]_{t=a} \right\}_{z=0} = A_n,
\end{aligned} \tag{6}$$

где $A_j (j = 0, 1, 2, 3, \dots, n)$ – заданные постоянные.

Предполагая, что в интегральном уравнении (1) правая часть, т.е. функция $f(t, z)$, представима в виде

$$f(t, z) = \sum_{k=1}^{\infty} (t-a)^{k+\gamma} f_k(z),$$

и подставляя значения $f(t, z)$ и $\varphi(t, z)$ в интегральное уравнение (1), для определения неизвестных функций $\varphi_k(z) (k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots)$ получим бесконечную расщеплённую систему двумерных интегральных уравнений типов И.Н. Векуа, теория которой разработана в [1]. Решая эту систему, находим значения $\varphi_k(z)$ через соответствующие значения аналитических функций. Подставляя эти найденные значения $\varphi_k(z)$ в представление (4), получим общее представление многообразия решений (1) через бесконечное число произвольных аналитических функций комплексного переменного z . Найденные формулы обращения полученного интегрального представления, то есть соответствующие аналитические функции, находятся через значения неизвестной функции и ее производных. После, используя граничные условия (5), находятся значения произвольных аналитических функций в области D через произвольные постоянные. Далее, используя условия (6), находятся значения произвольных постоянных через значения известных постоянных $A_j (j = 0, 1, 2, 3, \dots, n)$. Подставляя эти найденные значения неизвестных постоянных в общее представление, получим решение задачи N_1 .

Литература

1. Rajabov N. Volterra Type Integral Equations with boundary and interior fixed singularity and super-singularity kernels and their application. LAP LAMBERT Academic Publishing, Leipzig, Germany 2011, 282 p.

2. Раджабов Н.Р. К теории одного класса двумерного комплексного интегрального уравнения, в которой вся граница является особой линией// Доклады Адыгской (Черкесской) Международной Академии Наук. 2014. Т. 16, №1. С. 16–23.
3. Раджабов Н.Р. К теории одного класса интегрального уравнения Вольтерровского типа по цилиндрической области// Доклады Адыгской (Черкесской) Международной Академии Наук. 2015. Т. 17, №4. С. 77–83ю

УДК 517.962

К ТЕОРИИ ОДНОГО КЛАССА ДВУМЕРНОГО СИММЕТРИЧНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА С СИНГУЛЯРНЫМИ ЯДРАМИ

© Раджабов Н.Р., Раджабова Л.Н., Зарипов С.

Таджикский национальный университет (Таджикистан, Душанбе)
e-mail: nusrat38@mail.ru

Через D_0 обозначим прямоугольник $D_0 = \{(x, y) : -a < x < a, 0 < y < b\}$. Соответственно обозначим $D_0^+ = \{(x, y) : 0 < x < a, 0 < y < b\}$, $D_0^- = \{(x, y) : -a < x < 0, 0 < y < b\}$, $\Gamma_0 = \{x : -a < x < a, y = 0\}$, $\Gamma_1 = \{y : x = 0, 0 < y < b\}$, $L_1 = \{x : a < x < 0\}$, $L_2 = \{x : 0 < x < a\}$. В области $D = D_0 \setminus \Gamma_1$ рассмотрим интегральное уравнение

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) + \int_{-x}^x \frac{A(t) \varphi(t, y)}{|t|^\alpha} dt + \mu \int_0^y \frac{\varphi(x, s)}{s} ds \\ + \int_{-x}^x \frac{B(t) dt}{|t|^\alpha} \int_0^y \frac{\varphi(t, s)}{s} ds = f(x, y), \quad (1) \end{aligned}$$

где $A(x)$, $B(x)$, $f(x, y)$ – заданные функции точек Γ_0 , D_0 , μ – заданная постоянная, $\phi(x, y)$ – искомая функция, $\alpha = const > 0$.

Решение интегрального уравнения (1) будем искать в классе функций $\phi(x, y) \in C(\bar{\Gamma})$, $\phi(0, 0) = 0$ с асимптотическим поведением $\phi(x, y) = o[(x - a)^{\delta_1}(y - a)^\varepsilon]$, $\delta_1 > \alpha - 1$, $\varepsilon > 0$ при $(x, y) \rightarrow (a, a)$.

Проблеме исследования одномерных и двумерных интегральных уравнений с сингулярными точками и сингулярными линиями посвящено работы [1]–[5].

Пусть в интегральном уравнении (1) $\alpha = 1$ и функция $f(x, y)$ представима в виде

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} y^{k+\gamma} f_k(x), \quad (2)$$

где $f_k(x)$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots$) – известные функции, $\gamma = \text{const} > 0$.

Решение интегрального уравнения (1) будем искать в классе функций представимых в виде

$$\varphi(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} y^{k+\gamma} \varphi_k(x), \quad (3)$$

где $\varphi_k(x)$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots$) – неизвестные функции. Подставляя значения $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ из (2) и (3) в уравнение (1), после некоторых вычислений имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} y^{k+\gamma} \left[\varphi_k(x) + \int_{-x}^x \frac{A(t) \varphi_k(t)}{|t|} dt + \frac{\mu}{k+\gamma} \varphi_k(x) + \right. \\ \left. + \frac{1}{k+\gamma} \int_{-x}^x \frac{B(t) \varphi_k(t)}{|t|} dt \right] = \sum_{k=0}^{\infty} y^{k+\gamma} f_k(x). \end{aligned} \quad (4)$$

Приравнивая коэффициенты при $y^{k+\gamma}$ слева и справа при $k = 0, 1, 2, \dots$ для определения неизвестных функций $\varphi_k(x)$ получим следующую бесконечную систему расщепленных одномерных интегральных уравнений, теория которой хорошо разработана в [1].

$$\varphi_k(x) + \int_{-x}^x \frac{\delta_k(t) \varphi_k(t)}{|t|} dt = \omega_k f_k(x), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots, \quad (5)$$

где

$$\delta_k(x) = \frac{A(x)(k+\gamma) + B(x)}{k+\gamma+\mu}, \quad \omega_k = \frac{k+\gamma}{k+\gamma+\mu}.$$

Согласно [1], если решение системы интегральных уравнений (5) при $B_k(0) = \delta_k(+0) - \delta_k(-0) < 0$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots$) существуют, тогда они даются формулами

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} \varphi_k^0(x) C_k + \omega_k [f_k(x) - T_k[f_k(x)]], & \text{когда } x \in L_1, \\ -\varphi_k^0(x) C_k + \omega_k [f_k(-x)] + T_k[f_k(x)], & \text{когда } x \in L_2, \end{cases} \quad (6)$$

где C_k ($k = 0, 1, 2, 3, \dots$) — произвольные постоянные ,

$$\varphi_k^0(x) = \exp[-W_{\delta_k}(x)] |x|^{B_k(0)}, W_{\delta_k}(x) = \int_0^x \frac{B_k(t) - B_k(0)}{|t|} dt,$$

$$T_k[f_k(x)] = \int_0^x \left| \frac{t}{x} \right|^{B_k(0)} \exp[W_{\delta_k}(t) - W_{\delta_k}(0)] \frac{B_k(t)}{t} dt,$$

$k = 0, 1, 2, 3, \dots$

Подставляя эти значения $\varphi_k(x)$ из (6) в формулу (3), находим решение интегрального уравнения (1) в этом случае.

Таким образом, если решение интегрального уравнения (1) при $B_k(0) < 0$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots$) существует, тогда оно представимо в следующем виде

$$\varphi(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} y^{k+\gamma} \{ \varphi_k^0(x) C_k + \omega_k [f_k(x) - T_k[f_k(x)]] \}, \text{ когда } x \in L_2, \quad (7)$$

$$\varphi(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} y^{k+\gamma} \{ -\varphi_k^0(x) C_k + \omega_k [f_k(x) + T_k[f_k(x)]] \}, \text{ когда } x \in L_1. \quad (8)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что если существует следующий предел $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|C_{k+1}|}{|C_k|} = L$, и выполнено условие

$$Lb < 1 \quad (9)$$

и ряд вида (2) сходится абсолютно и равномерно, тогда ряды видов (7), (8) также сходятся абсолютно и равномерно.

Таким образом, доказана

Теорема 1. Пусть в интегральном уравнении (1), функция $f(x, y)$ представима в виде абсолютно и равномерно сходящегося функционального ряда (2). Пусть функции $A(x)$, $B(x)$ и постоянная μ такие, что

$$\begin{aligned} B_k(0) &= \\ &= \delta_k(+0) - \delta_k(-0) = \frac{\mu(k+\gamma)(A(+0) - A(-0)) + B(+0) - B(-0)}{k+\gamma+\mu} < 0 \end{aligned}$$

и

$$B_k(x) - B_k(0) = o[|x|^{\gamma_k}],$$

$\gamma_k > 0$, при $x \rightarrow 0$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ Функция $f(x, y)$ представима в виде (2), где $f_k(x) \in C[-a, a]$, $f_k(0) = 0$ с асимптотическим поведением $f_k(x) = o[|x|^{\omega_k}]$, $\omega_k > |B_k(0)|$ при $x \rightarrow 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Тогда интегральное уравнение (1) в классе функций, представимых в виде (3) всегда разрешимо и его общее решение в этом классе представимо в виде (6), где $C_k (k = 0, 1, 2, 3, \dots)$ – произвольные постоянные, удовлетворяющие условию (9).

Допустим, что решение уравнения (1), функция $\varphi(x, y)$ – бесконечно-дифференцируемая. Тогда из равенства (3) имеем

$$\begin{aligned} (y^{-\gamma} \varphi(x, y))_{y=0} &= \varphi_0(x), \left[\frac{\partial}{\partial y} (y^{-\gamma} \varphi(x, y)) \right]_{y=0} = \varphi_1(x), \\ 2! \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} (y^{-\gamma} \varphi(x, y)) \right]_{y=0} &= \varphi_2(x), 3! \left[\frac{\partial^3}{\partial y^3} (y^{-\gamma} \varphi(x, y)) \right]_{y=0} = \varphi_3(x), \\ \dots \dots \dots n! \left[\frac{\partial^n}{\partial y^n} (y^{-\gamma} \varphi(x, y)) \right]_{y=0} &= \varphi_n(x), \dots \dots \dots \quad (10) \end{aligned}$$

Таким образом, если решение интегрального уравнения (1), функция $\varphi(x, y)$ – бесконечно-дифференцируема, ряд вида (3) обратим, то есть в этом случае неизвестные функции $\varphi_n(x)$ через значения решения интегрального уравнения (1) и его производных на Γ_0 находятся по формулам (10).

Интегральное представление (7), (8) и его формулы обращения (10) дают возможность для уравнения (1) ставить и исследовать следующую задачу

Задача R₁. Требуется найти решение интегрального уравнения (1), представимое в виде (3) при $\mu(k + \gamma)(A(+0) - A(-0)) + B(+0) - B(-0) < 0$ по граничным условиям

$$\begin{aligned} (|x|^{B_0(0)} (y^{-\gamma} \varphi(x, y))_{y=0})_{x=-0} &= A_0, (|x|^{B_1(0)} \left[\frac{\partial}{\partial y} (y^{-\gamma} \varphi(x, y)) \right]_{y=0})_{x=-0} = A_1, \\ (|x|^{B_1(0)} \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} (y^{-\gamma} \varphi(x, y)) \right]_{y=0})_{x=-0} &= A_2, \\ (|x|^{B_2(0)} \left[\frac{\partial^3}{\partial y^3} (y^{-\gamma} \varphi(x, y)) \right]_{y=0})_{x=-0} &= A_3, \\ \dots \dots \dots (|x|^{B_n(0)} \left[\frac{\partial^n}{\partial y^n} (y^{-\gamma} \varphi(x, y)) \right]_{y=0})_{x=-0} &= A_n, \dots, (R_1) \end{aligned}$$

где $A_j (j = 0, 1, 2, 3, \dots)$ – заданные постоянные.

Решение задачи R₁. Используя представление (3), его свойства (10) и условие (R₁) находим неизвестные постоянные C_j из следующих равенств $j!C_j = A_j (j = 0, 1, 2, 3, \dots)$. Отсюда $C_j = \frac{A_j}{j!} (j = 0, 1, 2, 3, \dots)$

Подставляя эти значения C_j в формулу (7), (8), находим решение задачи R_1 в виде

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} y^{k+\gamma} \left\{ \varphi_k^0(x) \frac{A_j}{j!} + \omega_k [f_k(x) - T_k[f_k(x)]] \right\}, & \text{когда } x \in L_1 \\ \sum_{k=0}^{\infty} y^{k+\gamma} \left\{ -\varphi_k^0(x) \frac{A_j}{j!} + \omega_k [f_k(-x)] + T_k[f_k(x)] \right\}, & \text{когда } x \in L_2 \end{cases} \quad (11)$$

Итак, доказана

Теорема 2. Пусть в интегральном уравнении (1) функции $A(x)$, $B(x)$, $f(x, y)$ удовлетворяют всем условиям теоремы 1. В задаче R_1 постоянные A_j , такие, что существует предел $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|A_{k+1}|}{|A_k|} = A < \infty$. Тогда задача R_1 имеет единственное решение, которое даётся формулой (11).

Литература

1. Rajabov N. Volterra Type Integral Equations with boundary and interior fixed singularity and super-singularity kernels and their application. LAP LAMBERT Academic Publishing, Leipzig, Germany 2011, 282 p.
2. Раджабов Н.Р., Раджабова Л.Н. Введение в теорию многомерных интегральных уравнений типа Вольтерра с фиксированными сингулярными и сверх-сингулярными ядрами и их приложения. LAP LAMBERT Academic Publishing, Leipzig, Germany, 2012, 502 p.
3. Раджабова Л.Н., Раджабов Н.Р. К теории одного класса двумерного слабо-сингулярного интегрального уравнения типа Вольтерра на первом квадранте// ДАН Республики Таджикистан, 2014, Т. 57, № 6. С. 443-451.
4. Раджабов Н.Р., Зарипов С. К теории одного класса двумерного симметричного интегрального уравнения вольтерровского типа с одной граничной и одной внутренней сингулярной линиями// ДАН Республики Таджикистан, 2013, Т. 56, № 12. С. 962-970.
5. Rajabov N. Integral representation of the manifold solution for new class of the Volterra type integral equation with a boundary singularity in kernels for odd power// Programs and Abstracts 10th International ISAAC Congress, 2015/8/3-8- University of Macau. P. 56-57.

**КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА
ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРОВСКОГО
ТИПА С ДВУМЯ ГРАНИЧНЫМИ СИНГУЛЯРНЫМИ
ТОЧКАМИ**

© Раджабов Н.Р., Раджабова Л.Н., Сайдов С.А.

Научно-исследовательский институт ТНУ (Душанбе, Таджикистан)
e-mail: nusrat38@mail.ru

Через Γ обозначим множество точек $\Gamma = \{x : a < x < b\}$ на вещественной оси. На Γ рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(x) + \int_a^x \left[p + q \ln \left[\left(\frac{x-a}{b-x} \right) \left(\frac{b-t}{t-a} \right) \right] \right] \frac{\varphi(t)}{(t-a)(b-t)} dt = f(x), \quad (1)$$

где p и q заданные постоянные, $f(x)$ – заданная функция, $\varphi(x)$ – искомая функция.

Решение интегрального уравнения (1) будем искать в классе функций $\varphi(x) \in C(\Gamma)$, $\varphi(a) = 0$ с асимптотическим поведением $\varphi(x) = o[(x-a)^\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$ при $x \rightarrow a$, а в точке $x = b$ решение интегрального уравнения (1) может обращаться в нуль или в бесконечность.

Теория интегрального уравнения (1), когда $q=0$, построена в [1]-[4]. В [5] получено представление многообразия решений уравнения (1) в зависимости от корней соответствующего характеристического уравнения, а также изучены свойства полученных решений.

Для интегрального уравнения (1) ставятся и исследуются следующие краевые задачи.

Задача R_1 . Требуется найти решение интегрального уравнения (1) при $p < 0$, $p^2 = 4(b-a)q$ по граничным условиям

$$[p_1(\varphi)]_{x=a} = A_1, [p_2(\varphi)]_{x=a} = A_2, \quad (1)$$

где

$$p_1(\varphi) = \left(\frac{b-x}{x-a} \right)^{\frac{|K_1(a,a)|}{2(b-a)}} \left[(b-a) + \frac{|K_1(a,a)|}{2} \ln \left(\frac{x-a}{b-x} \right) \varphi(x) - \ln \left(\frac{x-a}{b-x} \right) D_{a,b}^x(\varphi(x)) \right],$$

$$p_2(\varphi) = \left(\frac{b-x}{x-a} \right)^{\frac{|K_1(a,a)|}{2(b-a)}} \left[D_{a,b}^x(\varphi(x)) - \frac{|K_1(a,a)|}{2} \varphi(x) \right],$$

A_1, A_2 —заданные постоянные.

Задача R_2 . Требуется найти решение интегрального уравнения (1) при $p < 0$, $p^2 < 4(b-a)q$ по граничным условиям

$$[p_3(\varphi)]_{x=a} = A_3, [p_4(\varphi)]_{x=a} = A_4, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} p_3(\varphi) &= \left(\frac{b-x}{x-a} \right)^{\frac{|K_1(a,a)|}{2(b-a)}} \left[-D_{a,b}^x(\varphi(x)) \sin\omega(x) + \left(\frac{|K_1(a,a)|}{2} \sin\omega(x) + B(b-a) \cos\omega(x) \right) \right], \\ p_4(\varphi) &= \left(\frac{b-x}{x-a} \right)^{\frac{|K_1(a,a)|}{2(b-a)}} \left[D_{a,b}^x(\varphi(x)) \cos\omega(x) - \left(\frac{|K_1(a,a)|}{2} \cos\omega(x) - B(b-a) \sin\omega(x) \right) \varphi(x) \right], \end{aligned}$$

A_3, A_4 —заданные постоянные.

Эти задачи исследуются на основе использования интегральных представлений многообразия решений уравнения (1) [5], когда корни соответствующего характеристического уравнения

$$\lambda^2(b-a) + p\lambda + q = 0$$

являются вещественными равными и комплексно-сопряженными, свойства полученного решения [5].

Литература

1. Rajabov N. Volterra type integral equation with boundary and interior fixed singularity points-LAP LAMBERT Academic Publishing, Germany. 2011, 282 p.
2. Раджабов Н.Р., Сайдов С. К теории общего интегрального уравнения Вольтерровского типа с двумя граничными сингулярными точками// ДАН РТ, 2012. Т. 55, №7. С. 519–525.
3. Раджабов Н.Р., Сфидов С. Тр. Всеросс. Науч. Конф. С междунар. Участием “Дифференциальные уравнения и их приложения” 27-30 июня 2011, Стерлитамак-Уфа: Гилем, 2011. С. 72–74.
4. Раджабов Н.Р., Сайдов С. К теории одного класса одномерного модельного интегрального уравнения Вольтерровского типа с двумя граничными сингулярными точками. Материалы XI Школы молодых учёных “Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы современного анализа и информатики”, Терскол, Россия, 2013. С. 55–58.
5. Rajabov N, Saidov S. About New Class of Volterra Type Integral Equation with Two boundary singularity in kernels. Proceedings of the 2014 International Conference on Pure Mathematics-Applied Mathematics(PM-AM 4), Venice, Italy, March15-17, 2014. P. 214–217.

**КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ТИПА
КОШИ-РИМАНА С ОСОБЕННОСТЯМИ РАЗНОГО
ПОРЯДКА В КОЭФФИЦИЕНТАХ**

© Расулов А.Б.

Национальный исследовательский университет
"Московский энергетический институт" (Россия, Москва)
e-mail: rasulov_abdu@rambler.ru

Пусть область G содержит точку $z = 0$ и окружность $L = \{z : |z| = R\}$ и ограничена простым ляпуновским контуром ∂G , ориентированным против часовой стрелки. Удобно положить $G_0 = G \setminus \{0 \cup L\}$ и $G_\varepsilon = G \setminus \{g_{0\varepsilon} \cup g_{1\varepsilon}\}$ с малым $\varepsilon > 0$, где $g_{0\varepsilon} = \{z : |z| < \varepsilon\}$ и $g_{1\varepsilon} = \{z : R - \varepsilon < |z| < R + \varepsilon\}$. В области G_0 рассмотрим уравнение

$$u_{\bar{z}} - z(|z||R - |z||^n)^{-1}a(z)u + |z|^{-m}b(z)\bar{u} = f(z), \quad (1)$$

где $2\partial_{\bar{z}} = \partial_x + i\partial_y$, $a, b \in C(\overline{G})$, $f \in L^p(G)$, $n > 1, 0 < m < 1$ и $p > 2$. Через T и T_ε соответственно обозначим оператор Векуа [1] по областям G и G_ε .

Лемма 1. В предположении $A_0(z) = z(a(z) - a(R))(|z||R - |z||^n)^{-1} \in L^p(G)$ сингулярный интеграл $\Omega(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0}(T_\varepsilon A)(z)$, $z \neq L$, существует и определяет функцию, которая представлена в виде $\Omega(z) = a(R)\omega(z) + h(z)$, где $h(z) \in H(\overline{G})$ определяется равенством

$$h(z) = (TA_0)(z) + \frac{1}{\pi i} \frac{a(R)}{(n-1)} \int_{\partial G} \frac{1}{|R - \rho|^{n-1}} \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

На основе этой леммы построено общее решение уравнения

$$u_{\bar{z}} - Au = f, \quad (2)$$

где для краткости положено $A(z) = z(|z||R - |z||^n)^{-1}a(z)$, $a(z) \in C(\overline{G})$. В данном случае коэффициент A ограничен в начале координат и имеет сильную неподвижную особенность на окружности L .

В случае, когда коэффициенты $a(z) \neq 0, b(z) \neq 0$ для любого $z \in \overline{G}$, используя общее решение уравнения (2), приходим к

интегральному уравнению $V + T(B\bar{V}) = \phi + F$, где $V = e^{-\Omega}u$, $B = |z|^{-m}b(z)e^{-2i\text{Im}\Omega}$, $F = T(e^{-\Omega}f)$, значение Ω указано в лемме 1.

В случае отсутствия сингулярности коэффициентов подобное уравнение возникало у И.Н. Векуа [1]; для его обращения он предложил метод последовательных приближений. Однако, этот метод применим лишь в предположении, что коэффициент b по модулю достаточно мал. В общем случае необходимо построить в явном виде резольвенту этого уравнения, что и является предметом рассмотрения настоящей работы.

С этой целью предварительно изучим действие в $L^p(G)$ более общего интегрального оператора вида

$$(K\varphi)(z) = \int_G \frac{\varphi(\zeta)d_2\zeta}{|\zeta|^{\alpha_0}|\zeta - z|^{\alpha_1}}, \quad z \in G,$$

с положительными α_j .

Лемма 2. Пусть $0 < \alpha_0 < 1 \leq \alpha_1 < 2$, $\alpha_0 + 2\alpha_1 < 3$, $p > 2/(3 - \alpha_0 - 2\alpha_1)$, так что $0 < \mu_0 = 3 - \alpha_0 - 2\alpha_1 - 2/p < 1$. Тогда оператор $K: L^p(G) \rightarrow C^\mu(\bar{G})$ ограничен.

На основе этой леммы построена резольвента интегрального уравнения и найдено интегральное представление общего решения. Используя полученное интегральное представления, исследована

Задача типа Римана-Гильберта R . Требуется найти решение $U(z) \in C(\bar{G} \setminus \{L \cup 0\})$ уравнения (1), удовлетворяющее краевому условию

$$\text{Re}[\lambda U]_{\partial G} = g(t),$$

где функция $\lambda(t) \in C(\partial G)$, $\lambda(t) \neq 0$, $t \in \partial G$.

Литература

1. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. Физматгиз. М. 1959.

УДК 517.929.7, 517.954

ЗАДАЧА СТЕФАНА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С КОЭФФИЦИЕНТОМ ШТОРМА

© Расулов М.С., Тахиров А.Ж.

Национальный университет Узбекистана (Узбекистан, Ташкент)
e-mail: inter_uz@yahoo.com

В известной работе [1] M. Storm установил, что в обычных металлах некоторые коэффициенты ($a(u)$ - удельная темпопёмкость, $b(u)$ - коэффициент теплопроводности) нелинейной теплопроводности обладают свойством

$$\frac{\frac{d}{du} \sqrt{\frac{a(u)}{b(u)}}}{a(u)} = \lambda = \text{const} > 0. \quad (1)$$

Задача Стефана для таких уравнений исследованы в работах [2, 3], где построены автомодельные решения задач и проведены некоторые качественные исследования.

В настоящей работе рассматривается задача

$$a(u)u_t = (b(u)u_x)_x + cu_x^2, \quad t > 0, \quad 0 < x < s(t), \quad (2)$$

$$b(u(t, 0))u_x(t, 0) = \frac{q_0}{\sqrt{t}}, \quad t > 0, \quad (3)$$

$$u(t, s(t)) = P, \quad t \geq 0, \quad (4)$$

$$b(P)u_x(t, s(t)) = \frac{P_0}{\sqrt{t}}. \quad (5)$$

Здесь коэффициенты $a(u)$, $b(u)$ удовлетворяют условию (1), $a(u) \geq a_0 > 0$, $b(u) \geq b_0 > 0$, $s(0) = 0$, $c = \text{const}$.

В случае $c = 0$ для уравнения (2) задача Стефана исследована в различных постановках.

Пока не удается построить общие аналитические решения нелинейных проблем теплопереноса.

Для рассматриваемой задачи при наличии особенностей у иско-мых функций, и области вырождения в начальный момент времени, построены автомодельные решения.

Литература

1. *Storm M.L.* Heat conduction in simple metals// J. Appl.Phys., 1951. 22, №7. P. 940–951.
2. *Hill J.M., Hart V.G.* The Stefan problem in nonlinear heat conduction// J. Appl. Math. Phys., 1986. №37. P. 206–229.
3. *Briozzo A.C., Natale M.* One-dimensional nonlinear Stefan problem in Storm's materials// Mathematics, 2014. №2. P. 1–11.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕНОСА ТЕПЛА С УЧЕТОМ АНГАРМОНИЗМА КОЛЕБАНИЙ АТОМОВ СРЕДЫ

© Рехвиашвили С.Ш.¹, Кунижев Х.Л.²

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
"Институт прикладной математики и автоматизации" (Россия, Нальчик)

¹e-mail: rsergo@mail.ru

²e-mail: kh.kunizhev@gmail.com

Рассмотрим процесс распространения тепла в кристаллическом твердом теле с учетом ангармонизма колебаний атомов. Количество тепла, проходящее через сечение ΔS за время Δt , равно

$$\alpha \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} \Delta S \Delta t,$$

где $T = T(z, t)$ - температура тела, α - коэффициент теплопроводности, z - координата. Количество тепла через некоторый малый интервал расстояний ΔZ становится равным

$$\alpha \frac{\partial T(z + \Delta z, t)}{\partial z} \Delta S \Delta t.$$

Следовательно, количества тепла в слое толщиной ΔZ есть

$$\alpha \frac{\partial T(z + \Delta z, t)}{\partial z} \Delta S \Delta t - \alpha \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} \Delta S \Delta t \sim \alpha \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2} \Delta V \Delta t, \quad (1)$$

где $\Delta V = \Delta z \Delta S$ - объем нагретого слоя. Далее необходимо учесть ангармонизм колебаний атомов в области высоких температур. В данном случае имеет место линейная зависимость изобарной теплоемкости от температуры [1, 2]:

$$C_p = C_0(1 + \beta T), \quad (2)$$

где C_0 и β - положительные константы. С учетом (2) теплота в рассматриваемом слое равна

$$\rho \frac{\partial Q}{\partial t} \Delta V \Delta t = \rho \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_0^T C_p(T') dT' \right] \Delta V \Delta t = C_0(1 + \beta T) \frac{\partial T}{\partial t} \Delta V \Delta t, \quad (3)$$

где ρ - плотность вещества. Приравнивая (1) и (3), находим

$$(1 + \beta T) \frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad (4)$$

где a - коэффициент температуропроводности. Для коэффициентов в уравнении (4) без нарушения общности можно принять $\beta = a = 1$. В этом случае уравнение (4) принимает общий вид

$$(1 + T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}. \quad (5)$$

Уравнение (5) представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных параболического типа. В настоящей работе для уравнения (4) разрабатываются численные методы решения задачи Коши, первой и второй краевой задач.

Литература

1. Рехвиашвили С.Ш. Теплоемкость твердых тел фрактальной структуры с учетом ангармонизма колебаний атомов // ЖТФ. Год 2008. Т. 78, №12, С. 54-58
2. Рехвиашвили С.Ш. Размерные явления в физике конденсированного состояния и нанотехнологиях. // Нальчик: КБНЦ РАН. Год 2014. С. 250.

UDC 517.95

EXACT SOLUTIONS OF DIRICHLET TYPE PROBLEM TO ELLIPTIC EQUATION, WHICH TYPE DEGENERATES AT THE AXIS OF CYLINDER

© Rutkauskas S.

Vilnius University (Lithuania, Vilnius)
e-mail: stasys.rutkauskas@mii.vu.lt

The elliptic equation

$$u_{zz} + r^{2\alpha} \Delta u - cu = 0, \quad \alpha > 0,$$

which type degenerates (either weakly or strongly) at the axis of 3-dimmensional cylinder $Q = \{r < R, 0 < z < H\}$, is considered. (Here $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, Δ is Laplace's operator.) The statement of a Dirichlet type problem in the class of smooth functions is given and, subject to the type of degeneracy, the exact classical solutions are obtained.

There is shown that the smoothness of the solutions on the degeneracy line depends on the type of degeneracy and also on the vicinity of the boundary function near the points, in which the line $r = 0$ cross the bases of the cylinder Q . Besides, there are indicated the cases when some orthogonality conditions for boundary function are required. The uniqueness of the solutions is proved.

УДК 517.956.6

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЛЕРСТЕДТА С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

© Рузиев М.Х.

Институт математики при Национальном университете Узбекистана
(Узбекистан, Ташкент)
e-mail: mruziev@mail.ru

Пусть $D = D^+ \cup D^- \cup I$ – область комплексной плоскости $z = x + iy$, где D^+ -полуплоскость $y > 0$, D^- - конечная область полуплоскости $y < 0$, ограниченная характеристиками AC и BC уравнения

$$(signy)|y|^m u_{xx} + u_{yy} - \frac{m}{2y} u_y = 0, \quad (1)$$

исходящими из точек $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, и отрезком AB прямой $y = 0$, $I = \{(x, y) : -1 < x < 1, y = 0\}$, m – положительное действительное число.

Пусть D_R^+ – конечная область, отсекаемая от области D^+ дугой $A_R B_R$ нормальной кривой $x^2 + 4y^{m+2}/(m+2)^2 = R^2$, $-R \leq x \leq R$, $0 \leq y \leq \left(\frac{(m+2)R}{2}\right)^{2/(m+2)}$, $A_R(-R, 0), B_R(R, 0)$.

Введем обозначения: $\bar{I}_1 = \{(x, y) : -\infty < x \leq -1, y = 0\}$, $\bar{I}_2 = \{(x, y) : 1 \leq x < \infty\}$, $C_0(C_1)$ – точки пересечения характеристики $AC(BC)$ с характеристикой, исходящей из точки $E(c, 0)$, где $c \in I$ – произвольное фиксированное число, $D_R = D_R^+ \cup D^-$, D_R – подобласть неограниченной области D .

Пусть $p(x) \in C^1[-1, c]$ – диффеоморфизм переводящий отрезок $[-1, c]$ в отрезок $[c, 1]$, причем $p'(x) < 0$, $p(-1) = 1, p(c) = c$. В качестве примера такой функции приведем линейную функцию $p(x) = \delta - kx$, где $k = (1 - c)/(1 + c)$, $\delta = 2c/(1 + c)$.

Задача C. Требуется найти в области D функцию $u(x, y)$, которая

- 1) непрерывна в любой подобласти \bar{D}_R неограниченной области D ;
- 2) принадлежит пространству $C^2(D^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в этой области;
- 3) является обобщенным решением класса R_1 ($\tau'(x), \nu(x) \in H$) в области D^- ;
- 4) выполняются равенства

$$\lim_{R \rightarrow \infty} u(x, y) = 0, \quad y \geq 0, \quad R^2 = x^2 + 4(m+2)^{-2}y^{m+2};$$

- 5) удовлетворяет краевым условиям

$$\begin{aligned} u(x, y)|_{y=0} &= \varphi_i(x), \quad x \in I_i, i = 1, 2, \\ u[\theta_0(x)] + \mu u[\theta_1(p(x))] &= \psi(x), \quad -1 \leq x \leq c; \\ u(p(x), 0) - u(x, 0) &= u(c, 0) + f(x), \quad -1 \leq x \leq c, \end{aligned}$$

и условию сопряжения

$$\lim_{y \rightarrow +0} y^{-m/2} u_y = \lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{-m/2} u_y, \quad x \in I/\{c\},$$

причем эти пределы при $x = \pm 1, x = c$ могут иметь особенности порядка нижне единицы а $f(x), \psi(x), \varphi_i(x), i = 1, 2$ - заданные функции, где $f(x) \in C[-1, c] \cap C^{1,\delta_1}(-1, c)$, $f(c) = 0, f(-1) = 0$, $\psi(x) \in C[-1, c] \cap C^{1,\delta_2}(-1, c)$, $\psi(-1) = 0$, μ - постоянное положительное число, функции $\varphi_i(x)$ соответственно в точках $x = -1, x = 1$ обращаются в нуль и для достаточно больших $|x|$ удовлетворяют неравенству $|\varphi_i(x)| \leq M|x|^{-\delta}$, где δ, M - положительные постоянные, $\theta_0(x_0)$ и $\theta_1(p(x_0))$ - соответственно координаты точек пересечения характеристик AC и BC с характеристиками, исходящими из точек $(x_0, 0)$ и $p(x_0, 0)$, $x_0 \in I$,

$$\begin{aligned} \theta_0(x_0) &= \left(\frac{x_0 - 1}{2}, -\left(\frac{(m+2)(1+x_0)}{4}\right)^{2/(m+2)} \right), \\ \theta_1(p(x_0)) &= \left(\frac{1+p(x_0)}{2}, -\left(\frac{(m+2)(1-p(x_0))}{4}\right)^{2/(m+2)} \right). \end{aligned}$$

Отметим, что для уравнения (1) в конечной области некоторые задачи изучены в работах [1-2].

Теорема 1. Пусть $\varphi_i(x) \equiv 0$, $i = 1, 2$, $\psi(x) \equiv 0$, $f(x) \equiv 0$, $\mu \geq 0$. Тогда задача С имеет лишь тривиальное решение.

Теорема 2. Пусть $p(x) = \delta - kx$, где $k = (1 - c)/(1 + c)$, $\delta = 2c/(1 + c)$, $0 \leq \mu < k^{\frac{1}{4}}(1 - k^{\frac{1}{4}})$. Тогда решение задачи С существует.

Работа выполнена при поддержке проекта № Ф4-ФА-Ф010.

Литература

1. Мирсабурова Г.М. Задача с нелокальными условиями для уравнений смешанного типа// Известия вузов. Математика. 2014. №10. С.35-42.
2. Чориева С.Т. Задача Бицадзе-Самарского с условием Франкля на отрезке линии вырождения для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом// Известия вузов. Математика. 2013. №5. С. 51–60.

УДК 517.95

О ЗНАКООПРЕДЕЛЕННОСТИ РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

© Сабитов К.Б.

Институт прикладных исследований Республики Башкортостан
(Россия, Стерлитамак)
e-mail: sabitov_fmf@mail.ru

Рассмотрим уравнение смешанного параболо-гиперболического типа высокого порядка

$$S^m u(x, y) = g(x, y), \quad m \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

где

$$S^1 v = Sv = \begin{cases} u_{xx} - u_y, & y > 0, \\ -u_{xx} + u_{yy}, & y < 0, \end{cases} \quad g(x, y) = \begin{cases} g_1(x, y), & y > 0, \\ g_2(x, y), & y < 0, \end{cases}$$

в области G , ограниченной при $y > 0$ отрезками AA_1 , A_1B_1 , B_1B , где $A = (0, 0)$, $A_1 = (0, d)$, $B = (0, l)$, $B_1 = (l, d)$, $l, d > 0$, а при $y < 0$ характеристиками AC ($x + y = 0$) и CB ($x - y = l$) уравнения (1).

Задача. Найти в области G функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x, y) \in C^{2m}(G_-) \cap C_{x,y}^{2m,m}(G_+ \cup A_1 B_1) \cap C_{x,y}^{2m-1,m}(G) \cap C_{x,y}^{2m-2,m-1}(\bar{G}); \quad (2)$$

$$S^m u(x, y) \equiv g(x, y), \quad (x, y) \in G_- \cup G_+ \cup A_1 B_1; \quad (3)$$

$$S^k u(x, y) = 0 \text{ на } AA_1 \cup BB_1; \quad (4)$$

$$S^k u(x, y) = 0 \text{ на } AC, \quad (5)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots, m - 1$.

Отметим, что важность изучения краевых задач на сопряжение для уравнений смешанного типа высших порядков отмечалось А.В. Бицадзе [1, с. 117] в плане построения общей теории краевых задач. В качестве модельного уравнения четвертого порядка смешанного типа он предложил вторые степени операторов Лаврентьева-Бицадзе и Трикоми. Затем краевые задачи для уравнений смешанного эллиптико-гиперболического и параболо-гиперболического типов высоких порядков изучались во многих работах [2 – 12].

Уравнения смешанного параболо-гиперболического типа возникают при математическом моделировании различных процессов естествознания, например, при изучении движения газа или малосжимаемой жидкости в канале, окруженном пористой средой. В канале газодинамическое давление жидкости или газа удовлетворяет волновому уравнению, а в пористой среде описывается уравнением фильтрации, которое в этом случае совпадает с уравнением диффузии. Математическое исследование напряженности электромагнитного поля в неоднородной среде, состоящей из диэлектрика и проводящей среды, приводит к системе, состоящей из волнового уравнения и уравнения диффузии. Многие задачи теплообмена в средах с различным временем релаксации и массообмена в капиллярно-пористых средах также сводятся к задачам для параболо-гиперболических уравнений. О математических моделях естествознания, приводящих к изучению краевых задач для уравнений параболо-гиперболического типа достаточно подробно приведен обзор в работе [13].

В данной работе, следуя [12], ставится задача качественного характера о том, что если правая часть уравнения (1) $g(x, y) > 0$ на $G_+ \cup G_-$, то как ведет себя функция $u(x, y)$ в G , т.е. требуется доказать, что $u(x, y) \neq 0$ на $G_+ \cup G_-$.

Поскольку оператор $S^m u$ в области G_+ совпадает с оператором теплопроводности в степени, т.е. с поликалорическим, то естественно возникает вопрос о знакоопределенности решения неоднородного поликалорического уравнения в зависимости от знака правой части. В связи с чем в данной работе исследован этот вопрос и дан полный ответ на поставленную задачу, т.е. показано, что если в задаче (2) – (5) функция $g_1(x, y) \geq 0$ (≤ 0) и $g_1(x, y) \not\equiv 0$ на $G_+ \cup A_1 B_1$, $g_2(x, y) > 0$ (< 0) на G_- , то $u(x, y) > 0$ (< 0) на $G_- \cup G_+ \cup A_1 B_1$ когда m – четное натуральное число; $u(x, y) < 0$ (> 0) на $G_- \cup G_+ \cup A_1 B_1$ когда m – нечетное натуральное число.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 14-01-97003.

Литература

1. *Бицадзе А.В.* Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959. 164 с.
2. *Агишев Р.Я.* К проблеме уравнений смешанного типа// Труды Казанского авиационного института. 1957. Т. 35, № 3. С. 3–10.
3. *Смирнов М.М.* Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа// Вестник ЛГУ. Серия матем., мех. и астр. 1957. Вып. 1, № 1. С. 80–86.
4. *Жегалов В.И.* Краевая задача для уравнения смешанного типа высшего порядка// ДАН СССР. 1961. Т. 136, № 2. С. 274–276.
5. *Бицадзе А.В., Салахутдинов М.С.* К теории уравнений смешанно-составного типа// Сибирский математический журнал. 1961. Т. 11, № 1. С. 7–19.
6. *Джсураев Т.Д.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: ФАН, 1979. 239 с.
7. *Джсураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов А.* Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. Ташкент: ФАН, 1986. 220 с.
8. *Кожсанов А.И.* Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики нечетного порядка. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1990. 150 с.
9. *Сабитов К.Б.* Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа третьего порядка// ДАН. 2009. Т. 427, № 5. С. 593–596.
10. *Сабитов К.Б.* Краевая задача для уравнения смешанного типа третьего порядка в прямоугольной области// Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49, № 2. С. 186–196.
11. *Сабитов К.Б.* Задача Дирихле для уравнений с частными производными высоких порядков// Математические заметки. 2015. Т. 97. Вып. 2. С. 262–276.

12. Сабитов К.Б. О положительности решения неоднородного уравнения смешанного типа высшего порядка// Известия вузов. Математика. 2016. № 3. С. 65–71.
13. Капустин Н.Ю. Задачи для параболо-гиперболических уравнений и соответствующие спектральные вопросы с параметром в граничных точках: дис. . . д-ра физ.-мат.наук. М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 2012.

УДК 519.6

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ЛИНЕЙНЫМ ИСТОЧНИКОМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРИМЕСИ В РУСЛАХ РЕК

© Саиег Т.Х.

Северо-Кавказский федеральный университет (Россия, Ставрополь)
e-mail: appinform@ncfu.ru

В области $Q_{t_0} = G \cdot (0, t_0]$, $G = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_p) : 0 < x_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, p\}$ рассмотрим задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + \int_0^t k(x, t, \tau)u(x, \tau) d\tau + f(x, t), \quad x \in G, \quad t \in (0, t_0], \quad (1)$$

$$u|_\Gamma = 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (3)$$

где $Lu = \sum_{\alpha=1}^p L_\alpha u$, $L_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}$, $\alpha = 1, 2, \dots, p$. Γ – граница области G .

Пусть задача (1)-(3) имеет регулярное решение. Умножим уравнение (1) скалярно на U :

$$(U_t, U) - (U_{xx}, U) - \left(\int_0^t K(x, t, \tau)U(x, \tau)d\tau, U \right) = (f, U) \quad (4)$$

Оценим внутренний интеграл и проинтегрируем по τ от 0 до t , получим

$$\begin{aligned} & \int_0^t \|U(x, \tau)\|_0 d\tau \int_0^\tau \|U(x_1, \tau_1)\|_0 d\tau_1 \leq \int_0^t \|U(x, \tau)\|_0 d\tau \int_0^t \|U(x, \tau)\|_0 d\tau = \\ & = \left(\int_0^t \|U(x, \tau)\|_0 d\tau \right)^2 \leq \int_0^t d\tau \int_0^t \|U(x, \tau)\|_0^2 d\tau = t \|U\|_{2, Qt}^2. \end{aligned}$$

Нашли априорную оценку

$$\|U\|_0^2 + \|U_x\|_{2,Qt}^2 \leq 2M(t) \left(\|f\|_{2,Qt}^2 + \|U_0(x)\|_0^2 \right) \quad (5)$$

Из оценки (5) следует единственность решения исходной задачи (1)-(3).

Задаче (1)-(3) поставим в схему и оценим интеграл.

С учётом неравенства $\|y\|_0^2 \leq \frac{1}{2} \|y_x\|_0^2$, находим

$$\begin{aligned} \|y\|_0^2 - \|\bar{y}\|_0^2 + v \|y_x\|_0^2 \tau &\leq M_1 \|y(x, t)\|_0 \sum_{j'=1}^j \|y(x, t_{j'})\|_0 \tau + \frac{\tau}{4\varepsilon} \|f\|_0^2, \\ v = 2 - \frac{\varepsilon}{2} &> 0. \end{aligned}$$

Откуда

$$\begin{aligned} \|y\|_0^2 + v \sum_{j'=1}^j \|y_x^{j'}\|_0^2 \tau &\leq 2M_1 t_j \sum_{j'=1}^j \|y(x, t_{j'})\|_0^2 \tau + \\ + \frac{1}{4\varepsilon} \sum_{j'=1}^j \|f^{j'}\|_0^2 \tau + \|u_0(x)\|_0^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Применяя оценку (6) к задаче для погрешности находим

$$\|z\|_0^2 + v \sum_{j'=1}^j \|z_x^{j'}\|_0^2 \tau \leq M \sum_{j'=1}^j \|\psi^{j'}\|_0^2 \tau.$$

Откуда следует сходимость со скоростью $O(h)$.

Литература

1. Кожсанов А.И. Параболические уравнения с нелинейным нелокальным источником. Сиб. матем. журн., 1994. Т. 35, № 5. С. 1062–1073.
2. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. 616 с.
3. Кайгермазов А.А., Саигег Т.Х. Об одной математической модели с возрастной структурой// Нелинейные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики. Киев, 1997. С. 130–132.
4. Саигег Т.Х. Нелинейного нелокального источника первая начально-краевая задача для нагруженного уравнения пореболического типа// Естественные и точные технические и прикладные науки. Научно-технической конференции по итогам работы профессорско-преподавательского состава. СевКавГТУ. г. Ставрополь. 2011 г.

5. Сафарев Т.Х. Сходимость первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности с нелокальным линейным источником // Пятая международная научно-техническая конференция. Инфокоммуникационные технологии в науке и технике. Ставрополь. 2-6 мая 2012.

УДК 517.9

ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО НАГРУЖЕННОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

© Сафаров Д.С.

Курган-Тюбинский государственный университет им. Носира Хусрава
(Таджикистан, Курган-Тюбе)
e-mail: safarov5252@mail.ru

На комплексной плоскости C рассмотрим нагруженное интегральное уравнение вида

$$\varphi(z) + \lambda T_\varsigma \varphi(z) + a(z)\varphi(z_0) = f(z), \quad (1)$$

где $z = x + iy$, $a(z)$, $f(z)$ – заданные двоякопериодические функции с основными периодами ω_1, ω_2 , $Im(\omega_2/\omega_1) \neq 0$, $T_\varsigma \varphi$ – интегральный оператор вида

$$T_\varsigma \varphi = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \varphi(z) \zeta(t-z) d_t \Omega,$$

$\zeta(z)$ – дзета-функция Вейерштрасса [1], построенная на периодах ω_1, ω_2 . Нагруженные уравнения и их приложения (дифференциальные и интегральные) изучены в монографии [2].

Интегральный оператор $T_\varsigma \varphi$ обладает свойствами дифференциального и интегрального оператора Векуа [3] и является квазипериодической функцией

$$T_\varsigma \varphi(z + \omega_j) = T_\varsigma \varphi(z) + \eta_j \varphi_0, \quad \varphi_0 = \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \varphi(z) d\Omega,$$

где η_1, η_2 – циклические постоянные, вместе с ω_1, ω_2 , связаны соотношением Лежандра [1], $\eta_1 \omega_2, -\eta_2 \omega_1 = 2\pi i$.

В [4] изучены все свойства интегрального оператора $T_\varsigma \varphi$ и показано, что

$$T_\varsigma : \{\rho; \rho \in L_p^*, \iint_{\Omega} \rho(z) d\Omega = 0\} \rightarrow W_p^{*,1}, \quad p > 2,$$

где $L_p^*, W_p^{*,1}$ соответственно пространство двоякопериодических функций классов $L_\rho(\overline{\Omega}), W_p^1(\Omega)$, $p > 2$.

В заметке найдено условие однозначной разрешимости интегрального уравнения (1) в пространстве L_p^* при условии $a(z), f(z) \in L_p^*$, $\rho > 2$.

Введем обозначение $\Omega_0 = \text{mes} \Omega = |\omega_1|^2 \text{Im}(\omega_2/\omega_1)$,

$$\Gamma_1 = \frac{\pi}{\Omega_0} \Gamma = \frac{\pi}{\Omega_0} \{m_1\omega_1 + m_2\omega_2, m_1, m_2 - \text{целые числа}\}.$$

Тогда возможны случаи $\lambda \in \Gamma_1$ или $\lambda \notin \Gamma_1$. Собственные значения и собственные функции интегрального уравнения (1) определяются из однородного уравнения

$$\varphi(z) + \lambda T_\varsigma \varphi(z) = 0. \quad (2)$$

Как следует из результатов работы [4], при $\lambda \notin \Gamma_1$ оператор $(I + \lambda T_\varsigma)^{-1}$ обратим в пространстве $L_p^*, p > 2$ и его обратный оператор имеет вид

$$(I + \lambda T_\varsigma)^{-1} = I + \lambda T_\sigma, I - \text{единичный оператор},$$

где T_σ – интегральный оператор вида

$$T_\sigma \rho(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \rho(t) e^{\lambda(\bar{t}-\bar{z}+d(\lambda-z))} \frac{\sigma(t-z-\Delta)}{\sigma(-\Delta)\sigma(t-z)} d_t \Omega,$$

здесь $\rho \in L_\rho^*$, $\sigma(z)$ – сигма функция Вейерштрасса, постоянные d, Δ имеют вид

$$\Delta \equiv \frac{\lambda \Omega_0}{\pi} (\text{mod} \Gamma), \quad d = \frac{\lambda}{2\pi i} [\bar{\omega}_1 \eta_2 - \bar{\omega}_2 \eta_1] (\text{mod} \Gamma).$$

Справедлива следующая

Теорема. Пусть $a, f \in L_p^*, p > 2, \lambda \notin \Gamma_1$ и выполнено условие

$$A(z_0) = 1 + a(z_0) - \lambda T_\sigma a(z_0) \neq 0. \quad (3)$$

Тогда интегральное уравнение (1) при любой правой части $f(z) \in L_p^*, p > 2$ имеет единственное решение вида

$$\varphi(z) = (I + \lambda T_\varsigma)^{-1} f(z) - \frac{B(z_0)}{A(z_0)} (I + \lambda T_\varsigma)^{-1} a(z),$$

где $B(z_0) = f(z_0) + \lambda T_\sigma f(z_0)$.

В случае, когда $\lambda \in \Gamma_1$ показывается, что однородное уравнение (2) допускает собственные значения, а для разрешимости интегрального уравнения (1) нужны условия ортогональности на правой части.

Литература

1. Ахиезер Н.И. Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука. 1970. 304 с.
2. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их приложения. М.: "Наука". 2012, 232 с.
3. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. М.: "Физматгиз", 1959. 628 с.
4. Сафаров Д.С. Двоякопериодические обобщенные аналитические функции и их приложения. Душанбе, Дониш, 2012. 190 с.
5. Сафаров Д.С., Шодиев М.С. Двоякопериодическое решение одного интегрального уравнения типа Фредгольма, Вестник Курган-Тюбинского гос. университета им. Н.Хусрова (научный журнал) 2(26), 2003.

УДК 517.95

К ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

© Сафина Р.М.

Поволжская государственная академия физической культуры, спорта и туризма (Россия, Казань)
e-mail: ramma77705@mail.ru

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$Su \equiv u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)u_{yy} + \frac{k}{x}u_x - c^2u = 0 \quad (1)$$

в прямоугольной области $D = \{(x, y) | 0 < x < l, -\alpha < y < \beta\}$, где $k < 1$, $k \neq 0$, $c > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, l – заданные действительные числа.

Задача Дирихле. Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D^+ \cup D^-), \quad (2)$$

$$Su(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in D^+ \cup D^-, \quad (3)$$

$$u(x, \beta) = \varphi(x), \quad u(x, -\alpha) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (4)$$

$$u(l, y) = 0, \quad -\alpha \leq y \leq \beta, \quad (5)$$

$$u(0, y) = 0, \quad -\alpha \leq y \leq \beta, \quad (6)$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям $\varphi(0) = \varphi(l) = \psi(0) = \psi(l) = 0$, $D^+ = D \cap \{y > 0\}$, $D^- = D \cap \{y < 0\}$.

В работах [1, 2] для уравнения (1) изучена первая граничная задача в прямоугольной области D при $k \neq 0$ и $c = 0$.

В данной работе, на основании статей [3-6], методом спектрального анализа установлен критерий единственности решения задачи (2) – (6) при всех $k < 1$ и $c > 0$. Решение построено в виде суммы ряда Фурье-Бесселя. При обосновании равномерной сходимости построенного ряда возникает проблема малых знаменателей. В связи с чем возникает сложная задача по установлению оценки отделенности от нуля малого знаменателя с соответствующей асимптотикой. Полученная оценка позволяет доказать равномерную сходимость ряда в классе регулярных решений (2).

Литература

1. Сафина Р.М. Задача Дирихле для уравнения Пулькина в прямоугольной области// Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучн.серия. 2014. № 10. С. 91–101.
2. Сафина Р.М. Задача Келдыша для уравнения Пулькина в прямоугольной области // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучн.серия. 2015. № 3. С. 53–64.
3. Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа в прямоугольной области// ДАН. 2007. Т. 413, № 1. С. 23–26.
4. Сабитов К.Б., Сулейманова А.Х. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа второго рода в прямоугольной области// Изв. вузов. Математика. 2007. № 4. С. 45–53.
5. Сабитов К.Б., Сулейманова А.Х. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с характеристическим вырождением в прямоугольной области // Изв. вузов. Математика. 2009. № 11. С. 43–52.
6. Сабитов К.Б., Вагапова Э.В. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения в прямоугольной области// Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49, № 1. С. 68–78.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ НАГРУЖЕНИЙ В РЕШЕНИИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ АНОМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

© Сербина Л.И.

Ставропольский государственный педагогический институт
(Россия, Ставрополь)
e-mail: lserbina@mail.ru

Исследование неустановившегося движения грунтовых вод в рамках методов математического моделирования систем с распределенными параметрами, сводится к решению краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений или линейных дифференциальных уравнений с нелинейными граничными условиями. Точное аналитическое решение задач в указанной постановке, учитывающих нелинейные неравновесные эффекты, связано в большинстве случаев с весьма серьезными математическими сложностями и часто неразрешимыми. В исследовании этих задач имеются только отдельные результаты, полученные с помощью дополнительных существенных допущений. Одно из современных направлений развития теории нелинейных краевых задач, существенно расширяющих возможности методов моделирования нелинейных динамических процессов, связано с постановкой и поиском методов разрешимости краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений [1].

В работе, развивая основные положения методов нагруженных уравнений и продолжая исследования ранее начатые в этом направлении, в рамках построения эффективного алгоритма поиска приближенного решения краевой задачи для нелинейного дифференциального уравнения с частными производными второго порядка параболического типа [2], предложен и теоретически обоснован метод нагружений. В основе такого подхода лежит замена исходного нелинейного уравнения некоторым линейным уравнением с нагрузкой, решение которого удается найти. Принципиально важной чертой предложенного метода нагружений является то, что он позволяет заданием дополнительных условий, представляющих реализацию различных нелинейных функциональных зависимостей между параметрами системы и граничных условий, обеспечить необходимую точность получаемого решения. Вопрос разработки численно-аналитических методов определения количествен-

ной эволюции параметров системы в пространстве состояний, связанной нелинейной зависимостью от интенсивности возмущения и перестройкой пространственно-временной структуры порового пространства, приводящих к возникновению критических состояний и аномальному режиму системы, сведен к исследованию вопроса постановки и разрешимости начально-краевой задачи для нагруженного дифференциального уравнения параболического типа.

Литература

1. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применения. М: Наука, 2012. 232 с.
2. Сербина Л.И. Нелокальные математические модели переноса в водонасыщенных системах. М.: Наука, 2007. 167 с.

УДК 517.95

НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЧАСТЬЮ

© Сидоров С.Н.

Институт стратегических исследований Республики Башкортостан
(Россия, Стерлитамак)
e-mail: stsid@mail.ru

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$Lu = F(x, t) = \begin{cases} t^n u_{xx} - u_t - b^2 t^n u = F_1(x, t), & t > 0, \\ u_{xx} - u_{tt} - b^2 u = F_2(x, t), & t < 0, \end{cases} \quad (1)$$

в прямоугольной области $D = \{(x, t) | 0 < x < l, -\alpha < t < \beta\}$, где $n \geq 0$, $b \geq 0$, $l > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ – заданные действительные числа, $F_i(x, t)$, $i = 1, 2$, – известные функции.

Задача. Найти функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x, t) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C_x^1(\overline{D}) \cap C_x^2(D_+) \cap C^2(D_-); \quad (2)$$

$$Lu(x, t) = F(x, t), \quad (x, t) \in D_- \cup D_+; \quad (3)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad -\alpha \leq t \leq \beta; \quad (4)$$

$$u(x, -\alpha) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (5)$$

где $F_1(x, t)$, $F_2(x, t)$ – заданные достаточно гладкие функции, $D_- = D \cap \{t < 0\}$, $D_+ = D \cap \{t > 0\}$.

Отметим, что задача (2) – (5) для однородного уравнения (1), т.е. когда $F_i(x, t) \equiv 0$, $i = 1, 2$, была изучена в работах [1 – 4] в прямоугольной области D при $l = 1$, $b \geq 0$, $n \geq 0$ и $m \geq 0$. В работах [5 – 7] для однородного уравнения (1) при $n > 0$ и $m > 0$ изучена нелокальная задача в которой вместо условия (5) задано нелокальное условие $u(x, -\alpha) - u(x, \beta) = \psi(x)$, $0 \leq x \leq 1$.

Необходимость исследования задачи (2) – (5) для неоднородного уравнения (1) возникает в связи с решением проблемы Гельфандса И.М., т.е. построением в явном виде решения задачи, и изучением обратных задач для уравнения (1) по отысканию сомножителей правой части $F_i(x, t) = f_i(x)g_i(t)$, $i = 1, 2$, либо зависящих от x , либо зависящих от t . В работах [8, 9] были изучены обратные задачи по отысканию функций $u(x, t)$ и $f_i(x)$, когда $g_i(t) \equiv 1$.

Решение задачи (2) – (5) построено в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной спектральной задачи

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \mu_k x, \quad \mu_k = \frac{\pi k}{l}, \quad (6)$$

где

$$T_k(t) = \begin{cases} \frac{w_k}{\Delta(k)} e^{-\lambda_k^2 t^{n+1}/(n+1)} + \\ \quad + \int_0^t g_{1k}(s) e^{-\lambda_k^2 (t^{n+1}/(n+1) - s^{n+1}/(n+1))} ds, & t > 0, \\ \frac{w_k}{\Delta(k)} \cos \lambda_k t + \frac{g_{1k}(0+0)}{\lambda_k} \sin \lambda_k t - \\ \quad - \frac{1}{\lambda_k} \int_t^0 g_{2k}(s) \sin [\lambda_k(t-s)] ds, & t < 0, \end{cases}$$

$$w_k = \frac{g_{1k}(0+0)}{\lambda_k} \sin \lambda_k \alpha - \frac{1}{\lambda_k} \int_{-\alpha}^0 g_{2k}(s) \sin [\lambda_k(s+\alpha)] ds,$$

$$\lambda_k = \sqrt{b^2 + \mu_k^2}, \quad g_{ik}(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l F_i(x, t) \sin \mu_k x dx, \quad i = 1, 2,$$

при условии, что при всех $k \in \mathbb{N}$ выражение $\Delta(k) = \cos \lambda_k \alpha \neq 0$.

Установлен следующий критерий единственности решения задачи.

Теорема 1. *Если существует решение задачи (2) – (5), то оно единственно только тогда, когда при всех $k \in \mathbb{N}$ выполнены условия $\Delta(k) \neq 0$.*

При обосновании сходимости построенного ряда возникают малые знаменатели, затрудняющие сходимость этого рядов. В связи с этим для доказательства равномерной сходимости ряда установлена оценка об отдаленности от нуля малого знаменателя с соответствующей асимптотикой, которая позволила доказать существование регулярного решения, т.е. в классе функций (2) и (3).

Лемма. *Если $b = 0$ и $\tilde{\alpha} = \alpha/l$ является произвольным натуральным числом, то существует постоянная C_0 , такая, что при всех $k \in \mathbb{N}$*

$$|\Delta(k)| = C_0 > 0.$$

Теорема 2. *Пусть $F_1(x, t) \in C(\overline{D}_+) \cap C_{x,t}^{2,0}(\overline{D}_+)$, $F_1(0, t) = F_1(l, t) = 0$, $F''_{1xx}(0, t) = F''_{1xx}(l, t) = 0$, $0 \leq t \leq \beta$; $F_2(x, t) \in C(\overline{D}_-) \cap C_{x,t}^{2,0}(\overline{D}_-)$, $F_2(0, t) = F_2(l, t) = 0$, $F''_{2xx}(0, t) = F''_{2xx}(l, t) = 0$, $-\alpha \leq t \leq 0$ и выполнены условия леммы. Тогда существует единственное решение задачи (2) – (5) и оно определяется рядом (6).*

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 14-01-97003.

Литература

1. Сабитов К.Б., Рахманова Л.Х. Начально-гранична задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44, № 9. С. 1175–1181.
2. Сабитов К.Б. Задача Трикоми для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Мат. заметки. 2009. Т. 86, Вып. 2. С. 273–279.
3. Сабитов К.Б. Начально-гранична задача для параболо-гиперболического уравнения со степенным вырождением на переходной линии // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 1. С. 1–8.
4. Сабитов К.Б. Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа. Уфа: Гилем, Башк. энцикл., 2015. 240 с.
5. Сидоров С.Н. Нелокальная задача для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения // Доклады АМАН. 2012. Т. 14, № 3. С. 34–44.

6. Сабитов К.Б., Сидоров С.Н. Об одной нелокальной задаче для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 3. С. 356–365.
7. Сидоров С.Н. Нелокальные задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа со степенным вырождением // Известия вузов. Математика. 2015. № 12. С. 55–64.
8. Сидоров С.Н. Нелокальная обратная задача по определению правых частей вырождающегося уравнения смешанного параболо-гиперболического типа // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. 2014. № 25 (196). Вып. 37. С. 45–57.
9. Сабитов К.Б., Сидоров С.Н. Обратная задача для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения с нелокальным граничным условием // Известия Вузов. Математика. 2015. № 1. С. 46–59.

УДК 517.9

ИНТЕГРАЛЫ С ОДНОРОДНО-РАЗНОСТНЫМИ ЯДРАМИ НА ПЛОСКОСТИ

© Солдатов А.П.

Белгородский государственный национальный
исследовательский университет (Россия, Белгород)
e-mail: soldatov@bsu.edu.ru

Рассматриваются в области D комплексной плоскости двумерные сингулярные интегралы вида

$$\psi(z) = \int_D Q_2(t, t-z) \varphi_2(t) d_2 t, \quad z \in D,$$

и обобщенные интегралы типа Коши

$$\phi(z) = \int_{\Gamma} Q_1(t, t-z) \varphi_1(t) d_1 t, \quad z \in D,$$

где ядро $Q_k(t, \xi)$ однородной степени $-k$ по переменной $\xi \in \mathbb{C}$ и кривая $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$. Подобные интегралы возникают при исследовании эллиптических краевых задач.

Обсуждаются условия, обеспечивающие принадлежность функций ϕ и ψ классу Гельдера $C^{\mu}(\overline{D})$. Рассмотрен также случай интегралов с L^p плотностью. Даны приложения к задаче Римана-Гильберта для эллиптической системы первого порядка с непрерывными коэффициентами.

УДК 517.925

О ПОЛНЫХ И ВЕКТОРНЫХ ЧАСТОТАХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

© Сташ А.Х.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования "Адыгейский государственный университет"
(Россия, Майкоп)
e-mail: aidamir.stash@gmail.com

Ляпуновские характеристики колеблемости решений как однородных, так и неоднородных дифференциальных уравнений впервые были введены И.Н. Сергеевым в работах [1–4]. Для решений линейных однородных автономных дифференциальных уравнений их полные и векторные частоты нулей полностью изучены в работах [4, 5], а полные и векторные частоты строгих смен знаков, нестрогих смен знаков и корней – в [6–8].

Из всех характеристик колеблемости решений линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами были изучены только полные частоты нулей [2]. В настоящей заметке приводятся свойства остальных частот решений неоднородного уравнения.

Рассмотрим множество Q функций, представимых в виде конечной суммы квазимногочленов:

$$\sum_{j=1}^l e^{\alpha_j t} (u_j(t) \cos \beta_j t + v_j(t) \sin \beta_j t), \quad \alpha_j \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \beta_1 \leq \dots \leq \beta_l$$

(u_j, v_j – действительные многочлены) с попарно различными показателями $\delta_j = \alpha_j + i\beta_j$. Далее, для заданного $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим пространство $\mathcal{C}^n \times Q$ линейных неоднородных дифференциальных уравнений n -го порядка

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = f(t), \quad t \in \mathbb{R}^+ \equiv [0; +\infty),$$

отождествляемых каждое со своей парой (a, f) , где $a \equiv (a_1, \dots, a_n)$ – строка постоянных действительных коэффициентов, а $f \in Q$ – неоднородность.

Определение 1 [1]. Скажем, что в точке $t > 0$ происходит строгая (нестрогая) смена знака функции $y: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, если в любой окрестности этой точки функция y принимает как положительные (неотрицательные), так и отрицательные (неположительные) значения.

Для множества \mathbb{R}_*^∞ всех конечных ненулевых последовательностей, каждой числовой функции $y \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$, последовательности $m \in \mathbb{R}_*^k \subset \mathbb{R}_*^\infty$ (k не фиксировано), вектор-функции $\psi y \equiv (y, \dot{y}, \dots, y^{(k-1)})$ и момента времени $t > 0$ введем обозначения:

$\nu^-(y, m, t)$ – число точек строгой смены знака скалярного произведения $\langle \psi y, m \rangle$ на промежутке $(0, t]$;

$\nu^\sim(y, m, t)$ – число точек нестрогой смены знака функции $\langle \psi y, m \rangle$ на промежутке $(0, t]$;

$\nu^0(y, m, t)$ – число нулей функции $\langle \psi y, m \rangle$ на промежутке $(0, t]$;

$\nu^+(y, m, t)$ – число корней функции $\langle \psi y, m \rangle$ на промежутке $(0, t]$, т.е. нулей с учетом их кратности;

$\nu^*(y, m, t)$ – число гиперкорней функции $\langle \psi y, m \rangle$ на промежутке $(0, t]$, т.е. при его подсчете каждый некратный корень берется ровно один раз, а кратный – сразу бесконечно много раз.

Определение 2 [2, 3]. Верхняя (нижняя) полная и векторная частоты знаков, нулей, корней и гиперкорней функции $y \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$ зададим формулами

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}^\epsilon(y) &\equiv \inf_{m \in \mathbb{R}_*^\infty} \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\pi}{t} \nu^\epsilon(y, m, t) & \check{\sigma}^\epsilon(y) &\equiv \inf_{m \in \mathbb{R}_*^\infty} \underline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\pi}{t} \nu^\epsilon(y, m, t), \\ \hat{\zeta}^\epsilon(y) &\equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^\infty} \frac{\pi}{t} \nu^\epsilon(y, m, t) & \check{\zeta}^\epsilon(y) &\equiv \underline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^\infty} \frac{\pi}{t} \nu^\epsilon(y, m, t)\end{aligned}$$

при $\epsilon = -, \sim, 0, +, *$ соответственно. В случае совпадения полной или векторной верхней частоты функции y с одноименной нижней будем называть ее точной и обозначать $\sigma^\epsilon(y)$ или $\zeta^\epsilon(y)$.

Определение 3 [2]. Для каждого $\omega = \check{\zeta}^\epsilon, \hat{\zeta}^\epsilon, \check{\sigma}^\epsilon, \hat{\sigma}^\epsilon$ назовем j -ым верхним $\omega_{\bar{j}}(a)$ и нижним $\omega_j(a)$ регуляризованные по Миллионщиковой значениями соответствующей частоты уравнения $(a, f) \in \mathcal{C}^n \times Q$ величины, задаваемые равенствами

$$\omega_{\bar{j}}(a, f) \equiv \inf_{L \in \mathcal{A}_j(a)} \sup_{y \in L} \omega(y), \quad \omega_j(a, f) \equiv \sup_{L \in \mathcal{A}_{n-j}(a)} \inf_{y \in L} \omega(y),$$

где $j = 0, 1, 2, \dots, n$, $\mathcal{A}_j(a)$ – множество j -мерных подпространств аффинного пространства $\mathcal{S}(a, f)$ всех решений этого уравнения.

Определение 4. Спектром $\text{Sp}_\kappa(a, f)$ частоты κ неоднородного уравнения $(a, f) \in \mathcal{C}^n \times Q$ назовем множество всех значений частоты $\kappa(y)$ его решений $y \in \mathcal{S}(a, f)$.

Теорема 1. Для любого решения $y \in \mathcal{S}(a, f)$ любого неоднородного уравнения $(a, f) \in \mathcal{C}^n \times Q$ справедливы равенства

$$\sigma^-(y) = \zeta^-(y) = 0,$$

$$\sigma^\sim(y) = \zeta^\sim(y) = \sigma^0(y) = \zeta^0(y) = \sigma^+(y) = \zeta^+(y) = \sigma^*(y) = \zeta^*(y).$$

Из второй цепочки равенств с учетом результатов работы [2] имеем

Следствие. Для любого неоднородного уравнения $(a, f) \in \mathcal{C}^n \times Q$ при любом

$$\omega = \zeta^\sim, \zeta^0, \zeta^+, \zeta^*, \sigma^\sim, \sigma^0, \sigma^+, \sigma^*$$

выполнены равенства

$$\omega_{\bar{j}}(a, f) = \omega_{\underline{j}}(a, f) = \min\{|Im\lambda_j|, \beta_1\}, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

где $|Im\lambda_0| = +\infty$, а $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ - корни характеристического многочлена соответствующего однородного уравнения $(a, 0)$, упорядоченные по нестрогому возрастанию модулей их мнимых частей.

Теорема 2. Спектры полных и векторных частот нестрогих знаков, нулей, корней и гиперкратных корней неоднородного уравнения (a, f) состоят из набора регуляризованных частот.

Литература

1. Сергеев И.Н. Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения // Труды Семинара им. И.Г. Петровского. 2006. Вып. 25. С. 249–294.
2. Сергеев И.Н. Полные частоты линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 11. С. 1670.
3. Сергеев И.Н. Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Мат. сб. 2013. Т. 204, № 1. С. 119–138.
4. Сергеев И.Н. Определение полных частот решений линейного уравнения // Дифференц. уравн. 2008. 44. № 11. С. 1577.
5. Бурлаков Д.С., Цой С.В. Равенство полной и векторной частот решений линейной автономной системы // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 11. С. 1662–1663.

6. Сташ А.Х. Свойства полных и векторных частот знака решений линейных автономных дифференциальных уравнений// Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 10. С. 1418–1422.
7. Сташ А.Х. Полные и векторные частоты нестрогих знаков решений линейных автономных дифференциальных уравнений// Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 6. С. 829–830.
8. Сташ А.Х. Свойства полных и векторных частот нестрогих знаков и корней решений линейных однородных автономных дифференциальных уравнений// Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. Естественно-математические и технические науки. 2015. Вып. 3 (166). С. 18–22.

УДК 517.9

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ОБРАТИМЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

© Субботин А.В., Вирченко Ю.П.

Белгородский государственный национальный исследовательский университет (Россия, Белгород)
e-mail: virch@bsu.edu.ru

Автономная динамическая система $\dot{X} = F(X)$ на \mathbb{R}^d , $d \in \mathbb{N}$, порождаемая дифференцируемой инъекцией $F : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$, называется обратимой, если существует такой дiffeоморфизм $V : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$, который представляет собой инволюцию пространства \mathbb{R}^d , $V^2 = id$, что замена времени $t \Rightarrow -t$ в дифференциальном уравнении для вектор-функции $X(t)$ со значениями в \mathbb{R}^d эквивалентна замене переменных $X \Rightarrow V(X)$ в этом уравнении. Эквивалентным образом это означает, что отображение F для любого $X \in \mathbb{R}^d$ удовлетворяет уравнению

$$-\mathcal{W}(X)F(X) = F(V(X)), \quad (1)$$

где матрица-функция $\mathcal{W} : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, определяемая как

$$\mathcal{W}(X) = \frac{\partial V(X)}{\partial X}, \quad (2)$$

в каждой точке $X \in \mathbb{R}^d$ обладает свойством $\mathcal{W}(X) \cdot \mathcal{W}(V(X)) = 1$ на \mathbb{R}^d . Следовательно, в каждой точке $X \in \mathbb{R}^d$ имеет место $\det \mathcal{W}(X) \neq 0$.

Важной характеристикой любой автономной системы и, в частности, обратимой системы является значение генератора $\mathcal{G}(X)$ касательной по отношению к ней системы в точке $X \in \mathbb{R}^d$. Здесь матрица-функция $\mathcal{G} : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ определяется равенством

$$\mathcal{G}(X) = \frac{\partial \mathsf{F}(X)}{\partial X}.$$

Из (1) и (2) следует, что генератор удовлетворяет в каждой точке $X \in \mathbb{R}^d$ уравнению

$$\frac{\partial \mathcal{W}_{ij}(X)}{\partial X_k} \mathsf{F}_j(X) + \mathcal{W}_{ij}(X) \mathcal{G}_{jk}(X) = -\mathcal{G}_{ij}(\mathsf{V}(X)) \mathcal{W}_{jk}(\mathsf{V}(X)).$$

Автономную систему будем называть аналитической, если F – аналитическое отображение, то есть в любой точке $X \in \mathbb{R}^d$ это отображение представляется абсолютно сходящимся рядом

$$F_i(X) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} \left(\frac{\partial F_i(X)}{\partial X_{k_1} \dots \partial X_{k_s}} \right)_{X=0} X_{k_1} \dots X_{k_s}.$$

Обратимую систему будем называть аналитической, если отображение F аналитическое, и связанная с системой инволюция V также является аналитической. Для аналитических инволюций пространства \mathbb{R}^d имеет место

Теорема 1. *Любая аналитическая инволюция пространства \mathbb{R}^d в себя определяется формулой*

$$\mathsf{V}(X) = \mathcal{W}X + A$$

для любого $X \in \mathbb{R}^d$, где \mathcal{W} – фиксированная $d \times d$ – матрица, удовлетворяющая условию $\mathcal{W}^2 = \mathbf{1}$ и A – фиксированный вектор из \mathbb{R}^d .

Тогда для аналитических обратимых систем функциональное уравнение (1) превращается в

$$\mathcal{W}\mathsf{F}(X) = -\mathsf{F}(\mathcal{W}X + A), \quad (3)$$

а уравнение для генератора $\mathcal{G}(X)$, связанного с этой системой, – в уравнение

$$\mathcal{W}\mathcal{G}(X) + \mathcal{G}(\mathcal{W}X + A)\mathcal{W} = 0. \quad (4)$$

Отображение F посредством сдвига координат можно переопределить так, чтобы вектор A обратить в нуль и при этом $\mathsf{F}(0) = 0$.

В этом случае уравнения (3) и (8), переходят соответственно в $\mathcal{W}\mathsf{F}(X) = -\mathsf{F}(\mathcal{W}X)$, $\mathcal{W}\mathcal{G}(X) + \mathcal{G}(\mathcal{W}X)\mathcal{W} = 0$. При этом матрица \mathcal{W} определена не однозначно.

Матрица \mathcal{W} обладает полным набором собственных векторов в \mathbb{R}^d и все ее собственные числа равны ± 1 . Тогда для каждой аналитической обратимой системы определено понятие сигнатуры – пары чисел $\langle n_+, n_- \rangle$, $n_{\pm} = \dim \mathbb{E}_{\pm}$, где \mathbb{E}_{\pm} – собственные подпространства матрицы \mathcal{W} с собственными числами ± 1 соответственно. Тогда $n_+ + n_- = d$ и при этом $n_- > 0$. Аналитические обратимые системы классифицируются согласно их сигнатуре согласно следующему утверждению.

Теорема 2. Для любой аналитической обратимой системы с сигнатурой $\langle n_+, n_- \rangle$ существует линейная замена переменных с помощью матрицы \mathcal{S} , посредством которой система переходит в обратимую систему, определяемую отображением

$$\mathsf{F}(X) = \langle \mathsf{A}(P, Q), \mathsf{B}(P, Q) \rangle, \quad X = \langle P, Q \rangle, \quad (5)$$

где $\dim P = n_-$, $\dim Q = n_+$, $\mathcal{W} = \text{diag}\{-\mathbf{1}_{n_-}, \mathbf{1}_{n_+}\}$, отображения A и B обладают свойством

$$\mathsf{A}(-P, Q) = \mathsf{A}(P, Q), \quad \mathsf{B}(-P, Q) = -\mathsf{B}(P, Q).$$

Представление (5) называется каноническим. Автономную систему $\dot{X} = \mathsf{F}(X)$ будем называть невырожденной, если F является биекцией, то есть существует обратное отображение. Это означает, что во всех точках $X \in \mathbb{R}^d$, за исключением может быть точек не общего положения в \mathbb{R}^d (точек составляющих дифференцируемое многообразие, в которых размерность этого многообразия меньше d), имеет место $\det \mathcal{G}(X) \neq 0$. Невырожденные аналитические динамические системы обладают свойствами.

Теорема 3. Для невырожденных аналитических систем размерность $d = 2n$ четная. Если матрица $\mathcal{G} \equiv \mathcal{G}(0)$ обладает полным набором собственных векторов $Z^{(j)}$, $j = 1 \div 2n$, то она обладает обратимым спектральным разложением, то есть их совокупность разбивается на пары $\{Z^{(k)}, Z^{(k+n)}\}$ таким образом, что соответствующие им собственные числа $\{\lambda_j; j = 1 \div 2n\}$ связаны соотношением $\lambda_k = -\lambda_{k+n}$.

**ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ РЕШЕНИЯ
ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ ЗАДАЧИ К РЕШЕНИЮ
НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ТРАНСПОРТА НАНОСОВ**

© Сухинов А.И.¹, Сидорякина В.В.²

¹Донской государственный технический университет (ДГТУ)

(Россия, Ростов-на-Дону)

e-mail: sukhinov@gmail.com

²Таганрогский институт имени А.П. Чехова (филиал), Ростовский
государственный экономический университет (РИНХ) (Россия, Таганрог)

e-mail: cvv9@mail.ru

В работе определены условия сходимости решения линеаризованной задачи к решению исходной нелинейной начально-краевой задачи транспорта наносов в норме гильбертова пространства L_1 при стремлении параметра — шага временной сетки, на которой осуществлялась линеаризация, к нулю.

Следуя [1, 2], рассматривается уравнение транспорта наносов, которое в дивергентном виде можно записать:

$$(1 - \varepsilon) \cdot \frac{\partial H}{\partial t} + \operatorname{div}(k \cdot \vec{\tau}_b) = \operatorname{div} \left(k \cdot \frac{\tau_{bc}}{\sin \varphi_0} \cdot \operatorname{grad} H \right), \quad (1)$$

где $H = H(x, y, t)$ — глубина водоема; ε — пористость донных материалов; $\vec{\tau}_b$ — вектор касательного тангенциального напряжения на дне водоема; τ_{bc} — критическое значение тангенциального напряжения; $\tau_{bc} = a \sin \varphi_0$, φ_0 — угол естественного откоса грунта в водоеме; $k = k(H, x, y, t)$ — коэффициент, нелинейным образом зависящий от частных производных по пространственным переменным функции $H = H(x, y, t)$ и определяемый соотношением:

$$k \equiv \frac{A \tilde{\omega} d}{((\rho_1 - \rho_0) g d)^\beta} \left| \vec{\tau}_b - \frac{\tau_{bc}}{\sin \varphi_0} \cdot \operatorname{grad} H \right|^{\beta-1},$$

(ρ_1, ρ_0 — плотности частиц донного материала и водной среды соответственно; g — ускорение силы тяжести; $\tilde{\omega}$ — частота волн; A и β — безразмерные постоянные; d — характерные размеры частиц грунта).

Уравнение (1) для простоты будет рассматриваться в прямоугольной области $D(x, y) = \{0 < x < L_x, 0 < y < L_y\}$.

Пусть

$$H(x, y, t) \geq c_0, \quad c_0 = \text{const} > 0, \quad (x, y) \in \bar{D}, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2)$$

Дополним уравнение (1) начальным условием предполагая, что функция начальных условий принадлежит соответствующему классу гладкости:

$$\begin{aligned} H(x, y, 0) &= H_0(x, y), \quad H_0(x, y) \in C^2(D) \cap C(\bar{D}), \\ \text{grad}_{(x,y)} H_0 &\in C(\bar{D}), \quad (x, y) \in \bar{D}. \end{aligned} \quad (3)$$

Сформулируем граничные условия, которые задаются, исходя из физических соображений:

$$H(0, y, t) = H_1(y, t), \quad 0 \leq y \leq L_y, \quad (4)$$

$$H(L_x, y, t) = H_2(y, t), \quad 0 \leq y \leq L_y. \quad (5)$$

$$|\vec{\tau}_b|_{y=0} = 0, \quad (6)$$

$$H(x, 0, t) = H_3(x), \quad 0 \leq x \leq L_x. \quad (7)$$

$$H(x, L'_y, t) = H_4(x, t) \geq c_0 \equiv \text{const} > 0, \quad 0 \leq x \leq L_x, \quad L'_y < L_y. \quad (8)$$

Дополнительно к граничным условиям предполагаем выполнение условий их гладкости — $\text{grad}_{(x,y)} H \in C(\bar{\Gamma}_T) \cap C^1(\bar{\Gamma}_T)$.

Считаем согласованными граничные и начальные условия, а также выполненным условие невырожденности оператора диффузии

$$k \geq k_0 = \text{const} > 0, \quad \forall (x, y) \in \bar{D}, \quad 0 < t \leq T. \quad (9)$$

Осуществим линеаризацию начально-краевой задачи (1)–(9), используя равномерную временную сетку $\omega_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots, N, N\tau = T\}$. Линеаризацию члена $\text{div}(k \cdot \vec{\tau}_b)$ и коэффициента k выполним путем выбора их значений в момент времени $t = t_n$, $n = 0, 1, \dots, N$ и рассмотрения уравнения (1) на временном промежутке $t_{n-1} < t \leq t_n$, $n = 1, 2, \dots, N$. Предполагается, что функция $H^{(n)}(x, y, t_{n-1}) = H^{(n-1)}(x, y, t_{n-1})$ и ее частные производные по пространственным переменным — известны. В качестве $H^{(1)}(x, y, t_0)$ достаточно взять функцию начального условия, т.е. $H^{(1)}(x, y, t_0) = H_0(x, y)$.

После линеаризации уравнение (1) запишем в виде:

$$(1 - \varepsilon) \frac{\partial H^{(n)}}{\partial t} = \text{div} \left(k^{(n-1)} \frac{\tau_{bc}}{\sin \varphi_0} \text{grad } H^{(n)} \right) - \text{div}(k^{(n-1)} \vec{\tau}_b), \quad (10)$$

$$k^{(n-1)} = (H^{(n-1)}, x, y, t_{n-1}), \quad t_{n-1} < t \leq t_n, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Начальные условия примут вид:

$$H^{(1)}(x, y, t_0) = H_0(x, y), \quad H^{(n)}(x, y, t_{n-1}) = H^{(n-1)}(x, y, t_{n-1}), \quad (11)$$

$$(x, y) \in \bar{D}, \quad n = 2, \dots, N.$$

Авторами ранее было доказано, что решение построенной линеаризованной задачи существует, единственно и принадлежит классу функций $C^2(\bar{\Pi}_T) \cap C(\bar{\Pi}_T)$.

Пусть функция $\tilde{H}(x, y, t)$ является решением нелинейной задачи (1)–(9), а функция $\tilde{\tilde{H}}(x, y, t)$ является решением линеаризованной задачи (10), (11), (2), (4)–(9). Предположим, что существуют и непрерывны смешанные частные производные до третьего порядка включительно по пространственной и временной переменной t от функций $\tilde{H}(x, y, t)$, $\tilde{\tilde{H}}(x, y, t)$ для $(x, y) \in D$, $0 < t \leq T$.

Будем считать, что

$$\tilde{H}(x, y, t) \geq c_0, \quad \tilde{\tilde{H}}(x, y, t) \geq c_0, \quad c_0 = \text{const} > 0, \quad (x, y) \in \bar{D}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Установлено, что при сделанных предположениях относительно решений $\tilde{H}(x, y, t)$ и $\tilde{\tilde{H}}(x, y, t)$, имеет место оценка:

$$\left\| \tilde{\tilde{H}}(t) - \tilde{H}(t) \right\|_{L_1(D)} \leq \frac{1}{2c_0(1-\tau)} \tau \cdot L_x \cdot L_y \cdot C \cdot T,$$

где C – постоянная величина, большая нуля, т. е. решение линеаризованной задачи $\tilde{H}(x, y, t)$ стремится к решению $\tilde{H}(x, y, t)$ нелинейной задачи в норме гильбертова пространства $L_1(D)$ [3] при $\tau \rightarrow 0$, $0 < t \leq T$, $N \cdot \tau = T$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты 15-01-08619 и 15-07-08626) и при частичной финансовой поддержке по проекту № 00-16-13 в рамках Программы фундаментальных исследований Президиума РАН № I.33П.

Литература

1. Леонтьев И. О. Прибрежная динамика: волны, течения потоки наносов. М.: ГЕОС, 2001. 272 с.
2. Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Проценко Е. А. Математическое моделирование транспорта наносов в прибрежной зоне мелководных водоемов // Математическое моделирование. 2013. Т. 25, № 12. С. 65–82.

3. Садовничий В. А. Теория операторов. Учеб. для вузов по направлениям и специальностям физ.-мат. профиля. М.: Дрофа, 2001. 381 с.

УДК 517.95

АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ТРАНСПОРТА НАСОСОВ

© Сухинов А.И.¹, Сидорякина В.В.², Сухинов А.А.³

¹Донской государственный технический университет (ДГТУ)
(Россия, Ростов-на-Дону)

²Таганрогский институт имени А.П. Чехова (филиал), Ростовский государственный экономический университет (РИНХ) (Россия, Таганрог)

³Южный федеральный университет, (Россия, Ростов-на-Дону)

¹e-mail: sukhinov@gmail.com,

²e-mail: cvv9@mail.ru,

³e-mail: andreysukhinov@gmail.com

На протяжении последних двадцати лет количество работ, посвященных рассмотрению краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными, заметно возросло. Появляются новые методы исследования указанных задач. Это связано, в частности, с появлением новых приложений в гидрофизике.

В настоящей работе рассматриваются некоторые аналитические методы исследования качественных свойств решений определенного класса нелинейных краевых задач для уравнений с частными производными на основе гидродинамической нелинейной пространственно-двумерной модели транспорта наносов мелководных водоемов. На стадии изучения указанной модели осуществлена ее линеаризация. Ранее авторским коллективом доказано существование и единственность решения линеаризованной 2D начально-краевой задачи транспорта наносов. В настоящей работе получена априорная оценка решения начально-краевой задачи в норме гильбертова пространства L_1 .

Следуя [1, 2], рассматривается уравнение транспорта наносов:

$$(1 - \varepsilon) \cdot \frac{\partial H}{\partial t} + \operatorname{div}(k \cdot \vec{\tau}_b) = \operatorname{div} \left(k \cdot \frac{\tau_{bc}}{\sin \varphi_0} \cdot \operatorname{grad} H \right), \quad (1)$$

где $H = H(x, y, t)$ — глубина водоема; ε — пористость донных материалов; $\vec{\tau}_b$ — вектор касательного тангенциального напряжения на

дне водоема; τ_{bc} — критическое значение тангенциального напряжения; $\tau_{bc} = a \sin \varphi_0$, φ_0 — угол естественного откоса грунта в водоеме; $k = k(H, x, y, t)$ — коэффициент, нелинейным образом зависящий от частных производных по пространственным переменным функции $H = H(x, y, t)$ и определяемый соотношением:

$$k \equiv \frac{A \tilde{\omega} d}{((\rho_1 - \rho_0) g d)^\beta} \left| \vec{\tau}_b - \frac{\tau_{bc}}{\sin \varphi_0} \cdot \operatorname{grad} H \right|^{\beta-1},$$

(ρ_1, ρ_0 — плотности частиц донного материала и водной среды соответственно; g — ускорение силы тяжести; $\tilde{\omega}$ — частота волны; A и β — безразмерные постоянные; d — характерные размеры частиц грунта).

Уравнение (1) для простоты рассматривается в прямоугольной области $D(x, y) = \{0 < x < L_x, 0 < y < L_y\}$, CD совпадает с береговой линией, AB — горизонтальная граница области, расположенная в зоне глубокой воды, AD и BC — боковые границы, $ABCD$ — прямоугольник.

Дополним уравнение (1) начальным условием предполагая, что функция начальных условий принадлежит соответствующему классу гладкости:

$$\begin{aligned} H(x, y, 0) &= H_0(x, y), \quad H_0(x, y) \in C^2(D) \cap C(\bar{D}), \\ \operatorname{grad}_{(x,y)} H_0 &\in C(\bar{D}), \quad (x, y) \in \bar{D}. \end{aligned} \quad (2)$$

Границные условия задаем, исходя из физических соображений. На участке AB границы расчетной области \bar{D} вблизи дна влиянием ветрового волнения можно пренебречь, поэтому

$$|\vec{\tau}_b| = 0. \quad (3)$$

На участке границы CD рассматриваем условие, которое задаем, отступив от береговой линии вглубь водоема, так, что

$$H(x, L'_y, t) = H_1(x, t) \geq c_0 = \text{const} > 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad L'_y < L_y. \quad (4)$$

На граничных линиях AD и BC будем считать пренебрежимо малыми величины уклона дна в направлении оси OX

$$\frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{x=L_x} = 0, \quad 0 \leq y \leq L_y. \quad (5)$$

На участке AB имеем:

$$H(x, 0, t) = H_2(x), \quad 0 \leq x \leq L_x. \quad (6)$$

Дополнительно к граничным условиям предполагаем выполнение условий их гладкости — $\text{grad}_{(x,y)} H \in C(\bar{\Pi}_T) \cap C^1(\Pi_T)$.

Считаем согласованными граничные и начальные условия, а также выполненным условие невырожденности оператора диффузии

$$k \geq k_0 = \text{const} > 0, \quad \forall (x, y) \in \bar{D}, \quad 0 < t \leq T. \quad (7)$$

Методами, изложенными в работе [3], создадим линеаризованную модель на временном отрезке $0 \leq t \leq T$, построив равномерную сетку ω_τ с шагом τ , т.е. множество точек $\omega_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots, N, N\tau = T\}$ и осуществим линеаризацию начально-краевой задачи (1)–(7).

Авторами доказано в предположении положительности функций граничных и начального условия и функции решения в области D для $0 < t \leq T$, что, если $k^{(n-1)} \geq k_0 > 0$, $k_0 = \text{const}$, $k^{(n-1)} \in C^1(\bar{D})$, $n = 1, 2, \dots, N$, $\sin \varphi_0 \leq 2\tau_{bc}$, то имеет место оценка

$$\begin{aligned} \iint_D H(T) dx dy &\leq \iint_D H(0) dx dy + \frac{M}{c_0(1 - \varepsilon)} \left(\frac{1}{2} \int_0^T \left(\iint_D (\tau_{bx}^2 + \tau_{by}^2) dx dy \right) dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^T \left(\int_{AB} H_2 dx + \int_{BC} H dy + \int_{AD} H dy + \int_{CD} H_1 dx \right) dt \right), \end{aligned}$$

где M — некоторая постоянная функция.

Полученная оценка гарантирует непрерывную зависимость нормы решения линеаризованной задачи от входных данных — граничных условий и функции правой части в интегральном смысле, а также от нормы функции начального условия.

Отметим, что эта оценка справедлива и для рассматриваемой задачи, в которой граничные условия (5) заменить условиями:

$$H(0, y, t) = H_1(y, t), \quad H(L_x, y, t) = H_2(y, t), \quad 0 \leq y \leq L_y.$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты 15-01-08619 и 15-07-08626) и при частичной финансовой поддержке по проекту № 00-16-13 в рамках Программы фундаментальных исследований Президиума РАН № I.33П.

Литература

1. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А. Математическое моделирование транспорта наносов в прибрежной зоне мелководных водоемов// Математическое моделирование. 2013. Т. 25, № 12. С. 65–82.
2. Леонтьев И.О. Прибрежная динамика: волны, течения потоки наносов. М.: ГЕОС, 2001. 272 с.
3. Сухинов А.И., Сидорякина В.В. О единственности решения линеаризованной двумерной начально-краевой задачи транспорта наносов// Вестник Таганрогского института имени А.П. Чехова. 2016. № 2. С. 270–274.

УДК 517.955

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ

© Тедеев Ал.Ф.

Северо-Осетинский государственный университет имени К.Л. Хетагурова
(Россия, Владикавказ)
e-mail: tedeev92@bk.ru

В данной работе рассматривается задача Коши-Дирихле для нелинейного неоднородного уравнения диффузии $\partial u / \partial t - \operatorname{div}(a(|x|)D(u^m)) = 0$ на $(0, \infty) \times R_l^N$, $u(x, t) = 0$, $(x, t) \in (0, \infty) \times \partial R_l^N$, $u(x, 0) = u_0(x)$, когда $m > 1$, и R_l^N — октантообразная область. В качестве основного инструмента при выводе оценок для таких решений является весовое неравенство Гальярдо-Ниренберга, которое характеризует геометрическое свойство области R_l^N . На этой основе изучается свойство конечной скорости распространения возмущений решения.

Пусть $x = (x_1, \dots, x_N) \in R^N$, $N \geq 1$, $R_l^N = R^N \cap \{x_1, \dots, x_l > 0\}$, $l \leq N$. $Du = (u_{x_1}, \dots, u_{x_N})$. $X_l = x_1 \cdot \dots \cdot x_l$, $X_0 = 1$.

Рассмотрим в области $Q = R_l^N \times \{t > 0\}$ начально-краевую задачу Дирихле

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(a(|x|)D(u^m)), \quad m > 1, \quad (1)$$

$$u = 0, \quad (x, t) \in \partial R_l^N \times (t > 0), \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in R_l^N. \quad (3)$$

Здесь $a(s) : R^+ \rightarrow R^+$ — неотрицательная непрерывно-дифференцируемая функция при $s > 0$, удовлетворяющая условию

$$a(s) \sim s^\alpha, \quad a'(s) \leq 0, \quad \alpha \leq 0,$$

знак \sim имеет смысл двусторонней оценки.

Начальная функция удовлетворяет условиям:

$$\text{support } u_0(x) \subset B_{\rho_0}^l, \quad u_0(x) \in L^2(R_l^N), \quad u_0(x) \geq 0,$$

где $B_\rho^l = B_\rho \cap R_l^N$, B_ρ — шар с центром в начале координат и радиусом ρ .

Неотрицательную измеримую функцию $u(x, t)$ назовем слабым решением начально-краевой задачи (1)–(3) в $Q = ((0, \infty) \times R_l^N)$, если

$$u(x, \tau) \in L^\infty(0, t; L^2(R_l^N)),$$

$$u^m, u^{\frac{m+1}{2}} \in L^2\left(0, t; \overset{\circ}{W}_{2,\alpha,\omega}^1(R_l^N)\right), \quad \text{при любом } t > 0,$$

и имеет место тождество

$$\int_0^t \int_{R_l^N} \{-u\xi_\tau + a(|x|)D(u^m) \cdot D\xi\} dx d\tau = 0$$

для любой функции $\xi(x, \tau) \in C_0^1([0, t); C_0^\infty(R_l^N))$.

Здесь $C_0^\infty(R_l^N)$ — пространство бесконечно-дифференцируемых финитных в R_l^N функций.

$\overset{\circ}{W}_{2,\alpha,\omega}^1(R_l^N)$ — пополнение пространства $C_0^\infty(R_l^N)$ по норме

$$\|v\|_{\overset{\circ}{W}_{2,\alpha,\omega}^1(R_l^N)} = \left(\int_{R_l^N} |x|^\alpha |Dv|^2 dx + c_0^2 \int_{R_l^N} \omega(x) v^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \alpha \leq 0,$$

где c_0^2 — произвольно-малая константа (которая будет подбираться позже).

Весовая функция $\omega(x)$ определяется как

$$\omega(x) = \begin{cases} 2|x|^{\alpha-2}, & \text{при } |x| \leq 1, \\ 2|x|^{\alpha \frac{m+1}{m}}, & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

Соответственно пространство $L^2(0, t; \overset{\circ}{W}_{2,\alpha,\omega}^1(R_l^N))$ определяется как пополнение пространства $C_0^1([0, t); C_0^\infty(R_l^N))$ по норме

$$\|u(t)\|_{L^2(0, t; \overset{\circ}{W}_{2,\alpha,\omega}^1(R_l^N))} = \left(\int_0^t \|u(x, \tau)\|_{\overset{\circ}{W}_{2,\alpha,\omega}^1(R_l^N)}^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Основными результатами настоящей работы являются следующие утверждения:

Теорема 1. Пусть $u(x, t)$ — сильное решение задачи Дирихле (1)–(3), где $u_0(x)$ и $a(s)$ удовлетворяют условиям $a(s) \sim s^\alpha$, $a'(s) \leq 0$, $\alpha \leq 0$ и $L^2(R_l^N)$, $u_0(x) \geq 0$. Тогда при всех $\alpha \leq 0$ функция $u(x, t)$ обладает свойством конечной скорости распространения возмущений, и для радиуса носителя $\zeta(t)$ функции $u(x, t)$ имеем место оценка

$$\zeta(t) \leq C \left(\rho_0 + \left(\int_{R_l^N} X_l u_0(x) dx \right)^{\frac{m-1}{\beta_l-1}} \cdot t^{\frac{1}{\beta_l-\alpha}} \right),$$

где $\beta_l = (N+l)(m-1)+2$ — постоянная Баренблатта, соответствующая области R_l^N , $C = C(m, N, l)$.

Теорема 2. Если $u(x, t)$ — сильное решение задачи Дирихле (1)–(3) дифференциального уравнения однородной диффузии ($\alpha = 0$), и кроме того выполнены условия $L^2(R_l^N)$, $u_0(x) \geq 0$, то имеет место двусторонняя оценка

$$\sup_{x \in R_l^N} u(x, t) \sim t^{-\frac{N+l}{\beta_l}} \left(\int_{R_l^N} u_0(x) dx \right)^{\frac{2}{\beta_l}}.$$

В доказательстве теорем 1 и 2 используется итеративный метод, примененный в работах [1] и [2], а также обобщается результат работы [3].

Литература

- Антонцев С. Н. О характере возмущений, описываемых решениями многомерных вырожденных параболических уравнений// Динамика сплошной среды. 1979. Вып. 40. С. 114–122.
- Баев А.Д., Тедеев А.Л.Ф.Оценка задачи Коши–Дирихле для дифференциального уравнения быстрой диффузии в областях типа октанта// Вестник Воронежского государственного университета. Серия физика, математика. 2010. № 3. С. 67–70.

3. Тедеев А.л.Ф. Финитность носителя решения задачи в области типа октанта// Вестник ВГУ. Серия Физика. Математика. 2014. № 4. С. 1–14.

УДК 517.956.6

О НОВОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

© Тенгаева А.А.¹, Садыбеков М.А.²

¹Институт математики и математического моделирования

(Казахстан, Алматы)

e-mail: tengaeva@math.kz

²Казахский национальный аграрный университет (Казахстан, Алматы)

e-mail: sadubekov@math.kz

В газовой динамике Ф.И. Франкль [1, 2] для уравнения Чаплыгина: $k(y)u_{xx} - u_{yy} = 0$, где $k(0) = 0$, $k'(y) > 0$, впервые поставил краевую задачу, в которой носителем нелокального краевого условия ("скакка уплотнения") $u(0, y) - u(0, -y) = f(y)$ является часть $-a < y < a$ границы $x = 0$ области, состоящей из частей границ под областей эллиптичности и гиперболичности уравнения. Поэтому нелокальные краевые условия такого типа – связывающие значения функций на границах областей разного типа уравнения, называют условиями типа Франкля.

Пусть $\Omega \subset R^2$ - конечная область, ограниченная при $y > 0$ отрезками AA_0 , A_0B_0 , B_0B , $A = (0, 1)$, $B_0 = (1, 1)$, $B = (1, 0)$, а при $y < 0$ - характеристиками AC : $x + y = 0$ и BC : $x - y = 1$ уравнения смешанного параболо-гиперболического типа

$$Lu = \begin{cases} u_x - u_{yy}, & y > 0 \\ u_{xx} - u_{yy}, & y < 0 \end{cases} = f(x, y). \quad (1)$$

В Ω рассмотрим новую нелокальную краевую задачу, являющуюся обобщением аналога задачи Франкля для параболо - гиперболического уравнения (1).

Задача F. Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее классическим краевым условиям

$$u|_{AA_0} = 0, \quad u_y|_{A_0B_0} = 0 \quad (2)$$

и нелокальному краевому условию

$$u(\theta(t)) = (1 + \alpha)u(\theta_0(t)) + (1 - \alpha)u(\theta_1(t)), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (3)$$

где $\theta(t) = (t, 1)$, $\theta_0(t) = \left(\frac{t}{2}, -\frac{t}{2}\right)$, $\theta_1(t) = \left(\frac{t+1}{2}, \frac{t-1}{2}\right)$, α – произвольное число.

Легко видеть, что $\theta(t) \in A_0B_0$, $\theta_0(t) \in AC$, $\theta_1(t) \in BC$. Поэтому новое нелокальное краевое условие (3) связывает между собой значения искомого решения на параболической части границы A_0B_0 и на гиперболических частях границы области – на характеристиках AC и BC . Обозначим $\Omega_1 = \Omega \cap \{y > 0\}$, $\Omega_2 = \Omega \cap \{y < 0\}$.

Теорема. Для любой функции $f \in L_2(\Omega)$ существует единственное сильное решение $u(x, y)$ задачи F . Это решение принадлежит классу $H^1(\Omega) \cap H_{x,y}^{1,2}(\Omega_1) \cap C(\overline{\Omega})$, и удовлетворяет неравенству

$$\|u\|_1 \leq C \|f\|_0. \quad (1)$$

При доказательстве основных результатов работы были использованы идеи из работы [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Республики Казахстан, грант 0825/ГФ4.

Литература

1. Франкл Ф. И. О задачах Чаплыгина для смешанных до- и сверхзвуковых течений // Изв. АН СССР. Серия математика. 1945. Т. 9, № 2. С. 121-142.
2. Франкл Ф. И. Обтекание профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уклона // Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20, № 2. С. 196-202.
3. Kalmenov T.Sh., and Sadybekov M. On a problem of the Frankl type for an equation of the mixed parabolic-hyperbolic type // AIP Conf. Proc. 2016. V. 1759. P. 020001. <http://dx.doi.org/10.1063/1.4959615>.

УДК 519.6

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В ПРИБРЕЖНОЙ ЗОНЕ НА ОСНОВЕ НЕЯВНЫХ И ЯВНЫХ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ СХЕМ

© Тимофеева Е.Ф¹, Сухинов А.И.², Чистяков А.Е.²,
Григорян Л.А.¹, Обласова И.Н.¹, Винокурский Д.Л.¹

¹ Северо-Кавказский федеральный университет (Россия, Ставрополь)

² Донской государственный технический университет (Россия, Ростов-на-Дону)

e-mail: appinform@ncfu.ru, sukhinov@gmail.ru

В данной работе поставлена и численно решена модель двумерной задачи движения и выхода на берег волны вязкой несжимаемой жидкости. Такого типа задачи возникают при исследовании волновых процессов в прибрежных районах водоемов, при проектировании и строительстве сооружений на береговой линии. В качестве объекта моделирования были выбраны мелководные водоемы – Азовское море и Таганрогский залив. Для повышения запаса устойчивости явных схем Б.Н. Четверушкиным предложено использовать регуляризированные схемы. Математическая модель в этом случае строится на основе системы уравнений Навье - Стокса и описывает движения водной среды в мелководных водоемах, при этом учитывается сложный рельеф дна и береговой линии, ветровое напряжение и трение о дно, микротурбулентный обмен, сила тяжести [1,2]:

– уравнение Навье - Стокса:

$$u'_t + \tau^* u''_{tt} + uu'_x + vu'_y = -\frac{P'_x}{\rho} + (\mu u'_x)_x + (\eta u'_y)_y, \quad (1)$$

$$v'_t + \tau^* v''_{tt} + uv'_x + vv'_y = -\frac{P'_y}{\rho} + (\mu v'_x)_x + (\eta v'_y)_y + g; \quad (2)$$

– уравнение неразрывности с учетом регуляризирующих слагаемых примет вид [3]:

$$\rho'_t + \tau^* \rho''_{tt} + (\rho u)'_x + (\rho v)'_y = (ch_x \rho'_x)_x + (ch_y \rho'_y)_y. \quad (3)$$

Уравнения (1) – (3) рассматриваются при следующих граничных условиях:

– на дне области:

$$V_n(x, y, t) = 0, \quad \rho \eta u'_y(x, y, t) = -\tau_x(t), \quad \rho \mu v'_x(x, y, t) = -\tau_y(t), \quad (4)$$

– на поверхности жидкости:

$$u'_n(x, y, t) = 0, \quad v(x, y, t) = \frac{P'_t}{g\rho}, \quad (5)$$

– на боковой границе:

$$u'_n(x, y, t) = 0, \quad v'_n(x, y, t) = 0, \quad P'_n(x, y, t) = \rho \Pi / \tau L; \quad (6)$$

где $V = (u, v)$ – вектор скорости движения водной среды; c – скорость звука; τ^* – время столкновения между молекулами; P – давление; μ, η – коэффициенты турбулентного обмена по горизонтальному и вертикальному направлениям соответственно; g – ускорение свободного падения; ρ – плотность жидкости; τ_x, τ_y – составляющие тангенциального напряжения на дне жидкости; Π – поток вектора скорости через боковую поверхность; L – расстояние от поверхности жидкости до дна (глубина жидкости с учетом возвышения уровня) на боковой границе. Система координат выбрана таким образом, что ось Ox совмещена с поверхностью невозмущенной жидкости и направлена в сторону берега, ось Oy – вертикально вниз.

Тангенциальное напряжение, вызванное донным трением, согласно закону Ван-Дорна, рассчитывается по формулам:

$$\tau_x = \rho C_p (|V|) u |V|, \quad \tau_y = \rho C_p (|V|) v |V|, \quad (7)$$

где $C_p (|V|) = \begin{cases} 0.0088, & |V| < 6,6 \text{ м / с}, \\ 0.0026, & |V| \geq 6,6 \text{ м / с} \end{cases}$ – безразмерный коэффициент.

Численное решение задачи основывается на градиентном методе вариационного типа – методе минимальных поправок. Аппроксимация задачи диффузии-конвекции выполнялась на основе схем повышенного порядка точности.

Рассмотренный численный алгоритм был реализован в виде комплекса программ “Waves”. Было выполнено тестирование этого комплекса, которое показало удовлетворительное совпадение с имеющимися численными и экспериментальными результатами.

Результаты численных экспериментов расчета движения водной среды в прибрежной акватории представляют изменение профиля волны, набегающей на берег, в различный период времени, при этом программа отображает векторы поля скорости, палитрой показано поле давления, в том числе в случае наличия искусственного препятствия (волнореза). В результате видно, что в прибрежной акватории при накате волны на берег происходит ее обрушение, образуется зона заплеска. Первая волна при откате назад “встречается” со следующей волной и “сбивает” ее. Полученные численные результаты процесса наката волн на берег дают возможность провести оценки силового воздействия волн на береговые объекты с целью предопределения строительства сооружений и использования конкретного участка береговой линии.

Для повышения скорости счета были построены параллельные версии алгоритмов. Что позволило сократить время счета 48,6 раз для задачи размерностью 400×400 расчетных узлов, при этом были использованы 64 вычислительных ядра.

Следует отметить, что параллельные алгоритмы решения задач вычислительной математики, использующие явные схемы, имеют более высокие значения ускорения и эффективности по сравнению с алгоритмами, использующими не явные схемы [4].

Литература

1. Шокин Ю.И. Вычислительный эксперимент в проблеме цунами / Ю.И. Шокин, Л.Б. Чубаров, Ан.Г. Марчук, К.В. Симонов. Новосибирск : Наука. Сиб. отд-ние, 1989. 168 с.
2. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Алексеенко Е.В. Численная реализация трехмерной модели гидродинамики для мелководных водоемов на супервычислительной системе // Математическое моделирование. 2011. Т. 23, № 3. С. 3–21.
3. Четверушкин Б.Н. Пределы детализации и формулировка моделей уравнений сплошных сред // Математическое моделирование, 24:11 (2012). С. 33–52.
4. Сухинов А.И., Чистяков А.Е. Адаптивный модифицированный попаременно-треугольный итерационный метод для решения сеточных уравнений с несамосопряженным оператором // Математическое моделирование, 24:1 (2012). С. 3–20.

УДК 517.925

НЕКОТОРЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ МОДЕЛИ ФИТЦХЬЮ-НАГУМО

© Тлячев В.Б.¹, Ушхо А.Д., Ушхо Д.С.²

Адыгейский государственный университет (Россия, Майкоп)

¹e-mail: tlyachev@adygnet.ru

²e-mail: damirubych@mail.ru

Одной из базовых математических моделей в нейрофизиологии является модель ФитцХью-Нагумо [1], которая хорошо изучена и особенно с помощью компьютерной симуляции [2-4]. Однако почти нет работ, посвященных достаточно строгим математическим обоснованиям. Поэтому в рамках качественной теории дифференциальных уравнений рассмотрим узловые вопросы поведения модели ФитцХью-Нагумо.

Модель ФитцХью-Нагумо можно представить следующей системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = J_a - av - \omega + (a+1)v^2 - v^3 \equiv P(v, \omega), \\ \frac{d\omega}{dt} = bv - \gamma\omega \equiv Q(v, \omega), \end{cases} \quad (1)$$

где $J_a > 0$, $\gamma > 0$, $b > 0$, $0 < a < 1$.

Изоклина бесконечности системы (1) имеет вид:

$$\omega = -v^3 + (a+1)v^2 - av + J_a \equiv f(v).$$

Функция $f(v)$ имеет точки экстремума

$$v = \frac{a+1 - \sqrt{a^2 - a + 1}}{3} \equiv \alpha, \quad v = \frac{a+1 + \sqrt{a^2 - a + 1}}{3} \equiv \beta. \quad (2)$$

Из (2) следует, что

$$a(\alpha) = \frac{\alpha(3\alpha - 2)}{2\alpha - 1}, \quad \beta(\alpha) = \frac{3\alpha - 2}{3(2\alpha - 1)}. \quad (3)$$

Так как $0 < a < 1$, то $\alpha \in (0; 1/3)$.

Наряду с (3) справедливы следующие соотношения:

$$f(\alpha) = \frac{\alpha^2(\alpha - 1)^2}{2\alpha - 1} + J_a, \quad f(\beta) = \frac{[(3\alpha - 2)(3\alpha - 1)]^2}{27(1 - 2\alpha)^3} + J_a. \quad (4)$$

Из (4) следует, что для всех из $\alpha \in (0; 1/3)$ выполняются неравенства $J_a - 4/27 < f(\alpha) < J_a$ и $J_a < f(\beta) < J_a + 4/27$.

В зависимости от наклона прямой изоклины нуля $\omega = bv/\gamma$ система (1) может иметь в ограниченной части плоскости либо одно, либо два, либо три состояния равновесия.

Пусть $J_a = b/\gamma$, $a^2 - 4b/\gamma$. Тогда система (1) имеет три состояния равновесия $A(v_1; bv_1/\gamma)$, $B(v_2; bv_2/\gamma)$, $C(1; b/\gamma)$, где

$$v_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b/\gamma}}{2}, \quad v_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b/\gamma}}{2}.$$

Характер указанных состояний равновесия устанавливается следующей теоремой.

Теорема 1. Если $0 < a < 2\sqrt{\gamma}$, $0 < b < a^2\gamma/4$, $\gamma > 0$, $J_a = b/\gamma$, то система (1) имеет в ограниченной части фазовой плоскости три простых состояния равновесия, в том числе: $A(v_1; bv_1/\gamma)$, $C(1; b/\gamma)$ – устойчивые узлы или фокусы, $B(v_2; bv_2/\gamma)$ – седло.

Доказательство теоремы основано на утверждениях из [5, 6].

Так как узлы и фокусы кубической системы могут быть окружены предельными циклами [7], то естественно возникает вопрос об их существовании.

Дивергенция векторного поля системы (1) задается формулой:

$$P'_v(v; \omega) + Q'_\omega(v; \omega) = -3v^2 + 2(a+1)v - a - \gamma. \quad (5)$$

Если $0 < \gamma < 1/4$, то дискриминант квадратного трехчлена (5) является отрицательным. Следовательно, выражение (5) отрицательно, и по признаку Бендиексона [5] система (1) не имеет ни замкнутых траекторий, ни замкнутых контуров, образованных состояниями равновесия и сепаратрисами. Таким образом, справедлива

Теорема 2. Если $0 < a < 2\sqrt{\gamma}$, $0 < b < a^2\gamma/4$, $0 < \gamma < 1/4$, $J_a = b/\gamma$, то система (1) ациклична.

Установить картину поведения траекторий системы (1) на всей фазовой плоскости можно, выяснив характер расположения траекторий в бесконечно удаленных частях фазовой плоскости. Для этого применим к системе (1) последовательно преобразования Пуанкаре [5], сначала $v = 1/z$, $\omega = u/z$, а затем $v = \mu/z$, $\omega = 1/z$. При первом преобразовании получим систему, имеющую на экваторе сферы Пуанкаре $z = 0$ единственное состояние равновесия $W_1(0; 0)$ – простой неустойчивый узел. При втором – имеем систему, у которой на экваторе сферы Пуанкаре $z = 0$ также будет единственное сложное (кратное) состояние равновесия $W_2(0; 0)$.

Далее приведем без доказательства некоторые результаты исследования системы (1).

Теорема 3. Если $\gamma \geq 1/3$, $\gamma/3 \leq b \leq \gamma^2$, то система (1) ациклична, а единственное ее состояние равновесия $D(v_0, f(v_0))$, где $0 < v_0 < \alpha$, является простым устойчивым узлом или фокусом.

Заметим, что в условиях теоремы 3 система (1) абсолютно устойчива, то есть любая траектория системы (1) при $t \rightarrow +\infty$ накручивается на состояние равновесия D .

Теорема 4. Пусть $a = 1/2$, $J_a = b/(2\gamma)$, $0 < \gamma < 1/4$, $b = (2\gamma^2 + \gamma)/6$. Тогда система (1) имеет в ограниченной части фазовой плоскости три состояния равновесия: $W_3(1/2; b/(2\gamma))$ – про-

стое седло, $W_4(m; (bm)/\gamma)$ и $W_5(n; (bn)/\gamma)$ — сложные однократные неустойчивые фокусы.

Теорема 5. Пусть $a \in (1/2 - \varepsilon; 1/2)$, $J_a = (ab)/\gamma$, $0 < \gamma < 1/4$, $b = (2\gamma^2 + \gamma)/6$, где ε — сколь угодно малое число. Тогда система (1) имеет в ограниченной части фазовой плоскости три состояния равновесия: $W_6(a; (ab)/\gamma)$ — простое седло, $W_4(m; (bm)/\gamma)$ — простой неустойчивый фокус, $W_5(n; (bn)/\gamma)$ — простой устойчивый фокус, окруженный неустойчивым предельным циклом.

Литература

1. Müller J., Kuttler C. Methods and Models in Mathematical Biology: Deterministic and Stochastic Approaches. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 2015. 728 p.
2. Jaeger D., Ranu J. Encyclopedia of Computational Neuroscience / Editors: D. Jaeger , J. Ranu. Springer, 2015. 3180 p.
3. Mohammadi M. Simulation of Hodgkin Huxley and FitzHugh Nagumo Models in order to Generation and Propagation of Action Potential inside of Axon Respectively by MATLAB and Comsol Multiphysics// International Journal of Computer and Electronics Research. 2015. V. 4. Issue 4. P. 74–77.
4. Krupa M., Touboul J.D. Complex Oscillations in the Delayed FitzHugh–Nagumo Equation// Journal of Nonlinear Science. 2016. V. 26. Issue 1. P. 43–81.
5. Андronов А.А. Качественная теория динамических систем второго порядка / А.А. Андronов и др. М.: Наука, 1966. 568 с.
6. Андronov А.А. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А.А. Андronов, Е.А. Леонович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. М.: Наука, 1967. 488 с.
7. Амелькин В.В. Нелинейные колебания в системах второго порядка / В.В. Амелькин, Н.А. Лукашевич, А.П. Садовский. Минск : Изд-во Белорус. ун-та, 1982. 208 с.

УДК 517.956.6

ЗАДАЧА СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕКЛАССИЧЕСКИМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

© Тураев Р.Н.

Институт Математики при НУУз (Узбекистан, Ташкент)
e-mail: rasul.turaev@mail.ru

Актуальные математические модели разнообразных явлений и процессов в механике, физике, биологии, экологии, социологии и др. проводят к изучению квазилинейных параболических уравнений второго порядка [3, 4].

Решению классической задачи для квазилинейных параболических уравнений второго порядка посвящено значительное количество работ, в которых разработаны методы получения априорных оценок, изучены разрешимость задач и проблемы, связанные с гладкостью решений. Для квазилинейных параболических уравнений рассмотрен ряд задач со свободной границей с классическими граничными условиями [3, 4].

Требования современной науки и техники приводят к необходимости рассматривать неклассические задачи (уравнение или граничное условие дается в неклассической форме) [1, 2].

Неклассические задачи представляют собой одно из динамично развивающихся направлений современной теории дифференциальных уравнений. Задачи с нелокальными граничными условиями (неклассическими) используются для математического моделирования процессов загрязнения в реках, морях, вызываемого сточными водами [4, 5].

В настоящей работе исследуется неклассическая задача со свободной границей для квазилинейных параболических уравнений.

1. Постановка задачи. Требуется найти в некотором отрезке $0 < t \leq T$ непрерывно дифференцируемую функцию $s(t)$, такую, что $s(0) = s_0 > 0$, $0 < \dot{s}(t) \leq N$, $s(t)$ – удовлетворяет условию Гельдера, а функция $u(t, x)$ в области $D = \{(t, x) : 0 < t \leq T, 0 < x < s(t)\}$ удовлетворяет уравнению

$$u_t = a(t, x, u_x)u_{xx} + b(t, x, u_x), \quad (t, x) \in D, \quad (1)$$

и следующим начальным и граничным условиям

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq s_0, \quad (2)$$

$$u_x(t, 0) = F(t, u(t, 0)), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$\alpha u(t, 0) = u(t, s(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

$$u_x(t, s(t)) = \psi(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (5)$$

Условие (5) обеспечивает наличие потока через подвижную границу, а нелокальное условие (4) обеспечивает согласованность граничного режима.

Всюду в работе предполагаем, что для заданных функций выполнены следующие основные условия:

1. Функции a и b определены для

$$(t, x) \in \Omega = \{(t, x) : 0 \leq t \leq T, 0 \leq x < \infty\}, |u_x| < \infty.$$

2. Для $(t, x) \in \Omega$ и любых p , $a(t, x, p) \geq a_0 > 0$,

$$\frac{|b(t, x, p)|}{a(t, x, p)} \leq K(p^2 + 1).$$

3. Для $(t, x) \in \Omega$, $|p| < \infty$ функции a и b имеют непрерывные и ограниченные производные первого порядка по x и по p , а по t удовлетворяют условию Гельдера, причем b_{xp} также ограничена.

4. $F(t, \xi)$ – определена и непрерывна при $t \geq 0, |\xi| < \infty$, она ограничена вместе с производными в замкнутом множестве своих аргументов.

5. Функции $\varphi(x)$ – трижды, $\psi(t)$ – один раз непрерывно дифференцируемы, $\varphi'''(x), \psi'(t)$ – удовлетворяют условию Гельдера, причем

$$\varphi'(0) = F(0, \varphi(0)), \alpha\varphi(0) = \varphi(s_0), \varphi'(s_0) = \psi(0).$$

Исследование проводится по следующей схеме. Сначала устанавливаются некоторые априорные оценки. Чтобы оценить $u_x(t, x)$, а также исследовать характер и гладкость свободной границы $s(t)$, мы перейдем к задаче типа Стефана. Для этого нужно будет дифференцировать уравнение (1) по x в области D . Поэтому всюду дальше будем предполагать, что функции $a(\dots)$ и $b(\dots)$ и их производные по x и p ограничены и удовлетворяют условию Гельдера на любом замкнутом множестве своих аргументов.

Продифференцировав уравнение (1) в D по x , для $u_x(t, x) = v(t, x)$ получим следующую задачу

$$v_t = av_{xx} + A_1v_x + A_2v_x^2 + A_3v + A_4(t, x), \quad (t, x) \in D, \quad (6)$$

$$v(0, x) = \varphi'(x), \quad 0 \leq x \leq s_0, \quad (7)$$

$$v(t, 0) = F(t, u(t, 0)), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (8)$$

$$v(t, s(t)) = \psi(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \psi(t) \cdot \dot{s}(t) &= \alpha a(t, 0, v(t, 0))v_x(t, 0) - a(t, s(t), \psi(t))v_x(t, s(t)) + \\ &+ \alpha b(t, 0, v(t, 0)) - b(t, s(t), \psi(t)), \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$A_1(t, x, v) = a_x(t, x, v) + b_p(t, x, v), \quad A_2(t, x, v) = a_p(t, x, v),$$

$$A_3(t, x, v) = \int_0^1 b_{xp}(t, x, \tau v) d\tau, \quad A_4(t, x) = b_x(t, x, 0).$$

Далее, доказывается эквивалентность задач (1)-(5) и (6)-(10). Для решения задачи типа Стефана устанавливаются априорные оценки старших производных. На основе установленных оценок исследуется поведение свободной границы в рассматриваемом промежутке времени, доказывается единственность решения первоначальной задачи. И в итоге доказывается существование решения полученной и первоначальной задачи [5, 6].

Литература

1. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математические моделирование Идеи. Методы. Примеры. М.: Наука. Физматлит. 1997. 320 с.
2. Круэсков С.Н. Нелинейные параболические уравнения с двумя независимыми переменными. Труды Моск. Матем. Общ-ва. 1967. Т. 16. С. 329–346.
3. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. Москва.: Высшая школа. 1995. 301 с.
4. Рубинштейн Л.И. Проблема Стефана. Рига: Звайгзне. 1967. 468 с.
5. Мейрманов А.М. Задача Стефана. Новосибирск. "Наука", 1986, 239 с.
6. Тахиров Ж.О., Тураев Р.Н. Нелокальная задача Стефана для квазилинейного параболического уравнения Вест. Самарского гос. тех. унив. Сер. "Физ.-мат. науки", 2012. 3(28). С. 8–16.

УДК 517.95

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

© Турметов Б.Х.

Международный казахско-турецкий университет имени А. Ясави
(Казахстан, Туркестан)
e-mail:turmetovbh@mail.ru

Пусть $a_j \neq 0, j = 1, \dots, n, \Omega = \{x \in R^n : a_1^{-2}x_1^2 + \dots + a_n^{-2}x_n^2 < 1\}$ – эллипсоид, $\partial\Omega$ – граница области. Обозначим $\tilde{x} = (x_2, \dots, x_n)$, $x =$

$(x_1, \tilde{x}) \in R^n$. Любой точке $x = (x_1, \tilde{x}) \in \Omega$ сопоставим "противоположную" ей точку $x* = (-x_1, \alpha\tilde{x}) \in \Omega$, где $\alpha = (\alpha_2, \dots, \alpha_n)$, и $\alpha_j, j = 2, \dots, n$ принимают одно из значений ± 1 .

Введем обозначения $\partial\Omega_+ = \partial\Omega \cap \{x \in R^n : x_1 \geq 0\}$, $\partial\Omega_- = \partial\Omega \cap \{x \in R^n : x_1 \leq 0\}$, $I = \partial\Omega \cap \{x \in R^n : x_1 = 0\}$. Рассмотрим в области Ω следующую задачу

$$-\Delta u(x) = f(x), x \in \Omega, \quad (1)$$

$$u(x) - (-1)^k u(x*) = g_1(x), x \in \partial\Omega_+, \quad (2)$$

$$\Gamma_b[u](x) + (-1)^k \Gamma_b[u](x*) = g_2(x), x \in \partial\Omega_+, \quad (3)$$

где $\Gamma_b[u](x) = \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} + bu(x)$, $b \geq 0$, ν – вектор нормали к границе области Ω .

Решением задачи (1)-(3) назовем функцию $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, удовлетворяющую условиям (1)-(3) в классическом смысле. Очевидно, что необходимым условием существования решения из класса $C^1(\bar{\Omega})$ является выполнение условий согласования:

$$g_1(0, \tilde{x}) + (-1)^k g_1(0, \alpha\tilde{x}) = 0, (0, \tilde{x}) \in I, \quad (4)$$

$$\frac{\partial g_1(0, \tilde{x})}{\partial x_j} + (-1)^k \frac{\partial g_1(0, \alpha\tilde{x})}{\partial x_j} = 0, j = 1, 2, \dots, n, (0, \tilde{x}) \in I, \quad (5)$$

и

$$g_2(0, \tilde{x}) - (-1)^k g_2(0, \alpha\tilde{x}) = 0, (0, \tilde{x}) \in I. \quad (6)$$

Отметим, что задача (1)-(3), когда Ω – шар, $b = 0$ исследована в работах [1,2].

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть $k = 1, 0 < \lambda < 1$, $f(x) \in C^\lambda(\bar{\Omega})$, $g_1(x) \in C^{2+\lambda}(\partial\Omega_+)$, $g_2(x) \in C^{1+\lambda}(\partial\Omega_+)$, и выполнены условия (4)-(6). Тогда для любого $b \geq 0$ решение задачи (1)-(3) существует, единственно и принадлежит классу $C^{2+\lambda}(\bar{\Omega})$.

Теорема 2. Пусть $k = 2, 0 < \lambda < 1$, $f(x) \in C^\lambda(\bar{\Omega})$, $g_1(x) \in C^{2+\lambda}(\partial\Omega_+)$, $g_2(x) \in C^{1+\lambda}(\partial\Omega_+)$ и выполнены условия согласования (4)-(6). Тогда

1) если $b > 0$, то решение задачи (1)-(3) существует единственно и принадлежит классу $C^{2+\lambda}(\bar{\Omega})$.

2) если $b = 0$, то для разрешимости задачи (1)-(3) необходимо и достаточно выполнение условия

$$\int_{\Omega} f(y) ds_y = \int_{\partial\Omega_+} g_2(y) ds_y.$$

Если решение существует, то оно единствено с точностью до постоянного слагаемого и принадлежит классу $C^{2+\lambda}(\bar{\Omega})$.

Работа выполнена при финансовой поддержке финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК (проект 0819/ГФ4).

Литература

1. Sadybekov M.A., Turmetov B.Kh. On analogues of periodic boundary value problems for the Laplace operator in ball// Eurasian Mathematical Journal. 2012. V. 3, № 1. P. 143–146.
2. Садыбеков М.А., Турметов Б.Х. Об одном аналоге периодических краевых задач для уравнения Пуассона в круге// Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50, №2. С. 264–268.

УДК 517.982, 517.983

ОПЕРАТОРЫ ХАРДИ В ГРАНД-ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА

© Умархаджиев С.М.

Академия наук Чеченской Республики (Россия, Грозный)

e-mail: umsalaudin@gmail.com

В 1992 году T. Iwaniec и C. Sbordone [1] ввели гранд-пространства Лебега $L^{p)}(\Omega)$ по ограниченному множеству $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, определяемые нормой

$$\|f\|_{L^{p)}(\Omega)} := \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|f\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega)}, \quad 1 < p < \infty.$$

На (не ограниченном) множестве $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ такие пространства введены и изучены в работах [2, 3]:

$$\|f\|_{L_a^{p)}(\Omega)} := \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \left\{ \varepsilon \int_{\Omega} |f(x)|^{p-\varepsilon} [a(x)]^{\frac{\varepsilon}{p}} dx \right\}^{\frac{1}{p-\varepsilon}}, \quad 1 < p < \infty.$$

где a – некоторая весовая функция, называемая грандизатором.

Гранд-пространство $L_a^{p^{\ast}}(\Omega)$ является расширением классического пространства Лебега $L^p(\Omega)$ тогда и только тогда, когда $a \in L^1(\Omega)$.

Рассматриваются операторы Харди:

$$H^\alpha f(x) := x^{\alpha-1} \int_0^x \frac{f(t)}{t^\alpha} dt,$$

$$\mathcal{H}^\beta f(x) := x^\beta \int_x^\infty \frac{f(t)}{t^{1+\beta}} dt, \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Введем обозначения

$$c_{p,\alpha}(a) := \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \int_1^\infty t^{\alpha - \frac{1}{p'} - 1} [ta_*(t)]^{\frac{\varepsilon}{p(p-\varepsilon)}} dt,$$

$$d_{p,\beta}(a) := \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \int_0^1 t^{\beta + \frac{1}{p} - 1} [ta_*(t)]^{\frac{\varepsilon}{p(p-\varepsilon)}} dt,$$

где a_* – растяжение функции a :

$$a_*(t) = \sup_{x>0} \frac{a(xt)}{a(x)}.$$

Теорема. Пусть $1 < p < \infty$ и a – вес на \mathbb{R}_+ . Условия $c_{p,\alpha}(a) < \infty$ и $d_{p,\beta}(a) < \infty$ достаточны для ограниченности операторов H^α и \mathcal{H}^β соответственно в гранд-пространстве $L_a^{p^{\ast}}(\mathbb{R}_+)$. Если $a \in L^s(0, \delta)$ для некоторых $s > 1$ и $\delta > 0$, в случае оператора H^α , и $a \in L^s(N, \infty)$ для некоторых $s > 1$ и $N > 0$, в случае оператора \mathcal{H}^β , то условия $\alpha < \frac{1}{p'}$ и $\beta > -\frac{1}{p}$ необходимы для такой ограниченности. При указанных условиях

$$\frac{1}{\frac{1}{p'} - \alpha} \leq \|H^\alpha\| \leq c_{p,\alpha}(a),$$

$$\frac{1}{\frac{1}{p} + \beta} \leq \|\mathcal{H}^\beta\| \leq d_{p,\beta}(a).$$

Если, кроме того, $x^\gamma a(x)$ убывает в случае оператора H^α и $x^\lambda a(x)$ возрастает в случае оператора \mathcal{H}^β при некоторых $\gamma > \alpha p'$ и $\lambda < (\beta + 1)p'$, то

$$\frac{1}{\frac{1}{p'} - \alpha} \leq \|H^\alpha\| \leq \frac{1}{\frac{\min\{\gamma, 1\}}{p'} - \alpha},$$

$$\frac{1}{\frac{1}{p} + \beta} \leq \|\mathcal{H}^\beta\| \leq \frac{1}{\beta + 1 - \frac{\max\{\lambda, 1\}}{p'}}.$$

В частности,

$$\|H^\alpha\| = \frac{1}{\frac{1}{p'} - \alpha}, \quad \|\mathcal{H}^\beta\| = \frac{1}{\frac{1}{p} + \beta},$$

в случае $\gamma \geq 1$ и $\lambda \leq 1$.

Аналогичные утверждения получены и для многомерных операторов Харди ($n \geq 2$):

$$H_n^\alpha f(x) := |x|^{\alpha-n} \int_{|y|<|x|} \frac{f(y)}{|y|^\alpha} dy,$$

$$\mathcal{H}_n^\beta f(x) := |x|^\beta \int_{|y|>|x|} \frac{f(y)}{|y|^{n+\beta}} dy, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Литература

1. Iwaniec T., Sbordone C. On the integrability of the Jacobian under minimal hypotheses // Arch. Rational Mech. Anal. 1992. № 119. С. 129-143.
2. Samko S. G., Umarkhadzhiev S. M. On Iwaniec-Sbordone spaces on sets which may have infinite measure // Azerb. J. Math. 2011. Т. 1, № 1. С. 67-84.
3. Умархаджисев С. М. Обобщение понятия гранд-пространства Лебега // Известия вузов. Математика. 2014. № 4. С. 42-51.

УДК 539.313:517.968.72

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПОЛЗУЧЕСТИ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ НАСЛЕДСТВЕННО УПРУГОГО ТЕЛА, ПОРЯДОК КОТОРЫХ БОЛЬШЕ ЕДИНИЦЫ

© Унгарова Л. Г.

Самарский государственный технический университет (Россия, Самара)
e-mail: algluiza@gmail.com

В работе [1], отталкиваясь от структурных механических моделей вязкоупругого тела и гипотезы В. Вольтерры о наследственной упругости были рассмотрены некоторые частные случаи одномерной обобщённой дробной реологической модели [2], а именно, модель Скотт Блэра и дробные аналоги моделей Фойхта, Максвелла, Кельвина и Зенера. Было указано, что если в определяющем соотношении В. Вольтерры, связывающим напряжение и деформацию тела, присутствует интегральный оператор с началом в нуле и абелевым ядром, то выше перечисленные реологические модели будут содержать дробные производные Римана—Лиувилля на отрезке временной оси. Показана корректность классической однородной задачи Коши относительно определённых линейных комбинаций функций напряжения и деформации в задаче о ползучести. Найдены и исследованы явные решения данной задачи в стадиях нагружения и разгрузки для всех перечисленных дробных математических моделей. Они были использованы для решения задачи идентификации параметров при аппроксимации результатов экспериментальных данных по растяжению поливинилхлоридного пластика.

Одним из путей достижения более точной аппроксимации является усложнение структурных моделей, что приведёт к появлению дополнительных свободных параметров в математических моделях.

Отталкиваясь от структурных моделей вязкоупругого тела, можно указать всего две нетривиальные трёхэлементные модели. Первая представляет собой последовательное соединение дробного аналога модели Фойхта с элементом Скотт Блэра. Определяющее соотношение для этой модели в дифференциальной форме имеет вид

$$\eta_1 \eta_2 D_{0t}^{\alpha_1} D_{0t}^{\alpha_2} \varepsilon + \eta_2 E_1 D_{0t}^{\alpha_2} \varepsilon = E_1 \sigma + (\eta_1 D_{0t}^{\alpha_1} + \eta_2 D_{0t}^{\alpha_2}) \sigma. \quad (1)$$

Вторая,— суть параллельное соединение дробного аналога модели Максвелла с элементом Скотт Блэра. Определяющее соотношение для этой модели записывается в виде

$$\eta_1 \eta_2 D_{0t}^{\alpha_1} D_{0t}^{\alpha_2} \varepsilon + E_1 (\eta_1 D_{0t}^{\alpha_1} + \eta_2 D_{0t}^{\alpha_2}) \varepsilon = E_1 \sigma + \eta_1 D_{0t}^{\alpha_1} \sigma. \quad (2)$$

В равенствах (1) и (2) $\varepsilon = \varepsilon(t)$ — деформация, $\sigma = \sigma(t)$ — напряжение; E_1, η_1, η_2 — некоторые неотрицательные постоянные величины; D_{0t}^α — оператор дробного дифференцирования Римана—Лиувилля с началом в нуле [3], $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1)$.

В работе обоснована корректность постановки задачи Коши для уравнения (1) с условиями $\varepsilon(0) = 0$, $\dot{\varepsilon}(0+) = \sigma_0/\eta_2$, где $\sigma_0 = \sigma(0+) = \lim_{t \rightarrow 0+} \sigma(t)$. Решения задачи о ползучести в стадии нагружения по закону $\sigma(t) = \sigma_0 H(t)$, где $H(t)$ — функция Хевисайда, соответственно записываются в виде

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_1} (\beta_0 t^{\alpha_2} + (1 - \text{Exp}(\alpha_1, 1; -\beta_1; t))), \quad (3)$$

где $\beta_0 = E_1/\eta_2$, $\beta_1 = E_1/\eta_1$. Решение задачи о ползучести для модели (2) удается найти при дополнительном предположении, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. Оно имеет вид

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{\eta_1 + \eta_2} \left(\frac{\eta_1^2}{E_1(\eta_1 + \eta_2)} (1 - \text{Exp}(\alpha, 1; -\beta_0; t)) + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right),$$

где $\beta_0 = E_1/\eta_0$, $\eta_0 = \eta_1 \eta_2 / (\eta_1 + \eta_2)$. В обоих решениях $\text{Exp}(\alpha, \mu; \lambda; t) = t^{\mu-1} E_\alpha(\lambda t^\alpha; \mu)$ — обобщённая (двупараметрическая) дробная экспоненциальная функция [1], $E_\alpha(z; \mu)$ — функция типа Миттаг—Леффлера [3].

Уже сейчас можно сказать, что любые возможные комбинации идеальных упругих элементов с двумя элементами Скотт Блэра будут приводить к определяющим соотношениям в дифференциальной форме, порядок которых не больше двух. В настоящей работе рассмотрены ещё четыре математические модели, структурно образованные из двух последовательных дробных аналогов моделей Фойхта, двух параллельных дробных аналогов моделей Максвелла и их последовательной и параллельной комбинаций,— суть дробные аналоги модели Бюргерса и модели Бранкова. Для всех перечисленных моделей выписаны определяющие соотношения в форме дробных дифференциальных уравнений, поставлены и решены задачи Коши относительно искомой деформации, доказаны теоремы о корректности этих постановок, теоремы о непрерывной зависимости решений от параметров моделей, изучена асимптотика решений в стадии нагружения.

Особенности решения задачи параметрической идентификации обсудим на примере решения задачи о ползучести при постоянной нагрузке с использованием модельного решения (3).

Пусть $\tilde{\varepsilon}_i$ — экспериментальные значения деформации в моменты времени t_i , $i = 1, \dots, n$, $t_0 = 0$. В соответствии с (3) идентификации

подлежат пять параметров: $\alpha_1, \alpha_2, E_1, \eta_1, \eta_2$. В первом приближении задача успешно решается в предположении, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ и $\eta_1 = \eta_2 = \eta$, методом наименьших квадратов. Для этого разложим в ряд функцию

$$Exp(\alpha, 1; -\beta_1; t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\beta_1)^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k+1\alpha)} = 1 + \frac{-\beta_1 t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\beta_1^2 t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \dots$$

и ограничимся первыми двумя членами. Тогда

$$\tilde{\varepsilon}_i = \varepsilon(t_i) = \frac{\sigma_0}{\eta} \left(1 + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \right) t_i^\alpha.$$

Обозначая $u_i = \ln \tilde{\varepsilon}_i - \ln \sigma_0$, $\tau_i = \ln t_i$, $c = \ln(1 + 1/\Gamma(\alpha+1)) - \ln \eta$, найдём, что $u_i = \alpha \tau_i + c$. Параметры α и c легко определяются из условия минимизации функционала $\sum_{i=1}^n (u_i - \alpha \tau_i - c)^2$. Найденные таким образом значения параметров α , E_1 по первой экспериментальной точке и $\eta = e^{-c}(1 + 1/\Gamma(\alpha+1))$ затем используются в качестве первого приближения для дальнейшего уточнения исходных пяти параметров $\alpha_1, \alpha_2, E_1, \eta_1, \eta_2$ методом покоординатного спуска.

Литература

1. Огородников Е. Н., Радченко В. П., Унгарова Л. Г. Математическое моделирование наследственно упругого деформируемого тела на основе структурных моделей и аппарата дробного интегро-дифференцирования Римана—Лиувилля// Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2016, №1 (20). С.167–194
2. Bagley R. L., Torvik P. J. Fractional calculus — A different approach to the analysis of viscoelastically damped structures // AIAA J. 1984 Vol. 21, no. 5. P. 741–748.
3. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 272 с.

УДК 517.956.6

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

© Уринов А.К.¹, Маманазаров А.О.²

Ферганский государственный университет (Узбекистан, Фергана)

¹e-mail: urinovak@mail.ru

²e-mail: mega.mamanazarov@mail.ru

В докладе в области $Q = \bigcup_{j=0}^2 Q_j$ рассматривается следующее уравнение

$$(\partial^2 u / \partial x^2) - (\partial^{2-H(x)} u / \partial t^{2-H(x)}) + (k/x) (\partial u / \partial x) - \lambda^2 u = 0, \quad (1)$$

где $H(x)$ - функция Хевисайда, $Q_0 = \{(x, t) : x = 0, 0 < t < T\}$, $Q_1 = \{(x, t) : x > 0, 0 < t \leq T\}$, $Q_2 = \{(x, t) : x < t < T + x, x \in (-T/2, 0)\}$; $k, \lambda, T \in R$, причем $k \in (0, 1)$, $T > 0$, и исследуется следующая нелокальная

Задача. Найти функцию $u(x, t) \in \bigcap_{j=1}^2 [C(\bar{Q}_j) \cap C_{x,t}^{2,j}(Q_j)]$, удовлетворяющую уравнению (1) в $Q_1 \cup Q_2$, условиям склеивания

$$u(-0, t) = u(+0, t), \quad \lim_{x \rightarrow -0} (-x)^k u_x(x, t) = \lim_{x \rightarrow +0} x^k u_x(x, t)$$

на отрезке Q_0 и следующим краевым условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, +\infty); \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, t) = 0, \quad t \in [0, T];$$

$$(T-t)^{1-k/2} A_{Tt}^{1,\lambda} D_{tT}^{k/2} \left[(T-t)^{k-1} u \left(\frac{t-T}{2}, \frac{t+T}{2} \right) \right] + c u(0, t) = \delta(t),$$

$t \in (0, T)$, где $\varphi(x)$, $\delta(t)$ - заданные функции, c - заданное число;

$$D_{tT}^{k/2} [f(t)] \equiv -\frac{1}{\Gamma(1-k/2)} \frac{d}{dt} \int_t^T (z-t)^{-k/2} f(z) dz,$$

$$A_{Tt}^{1,\lambda} [g(t)] \equiv g(t) + \int_t^T g(z) \frac{T-z}{T-t} \frac{\partial}{\partial z} J_0 \left[\lambda \sqrt{(T-t)(z-t)} \right] dz,$$

$J_0(z)$ - функция Бесселя первого рода, $\Gamma(z)$ - гамма-функция.

Отметим что, определение нелокальных задач для уравнений с частными производными приведен в [1].

Литература

1. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. 301 с.

КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ С ОБЫЧНЫМИ И КРАТНЫМИ УЗЛАМИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

© Хазириши Э.О.

Абхазский государственный университет (Абхазия, Сухум)
e-mail: susannapapazyan@mail.ru

Во многих задачах механики и математической физики приходится иметь дело с вычислением сингулярных интегралов. За последние годы методы приближенного вычисления сингулярных интегралов, имеющие важное прикладное значение, стали интенсивно развиваться. Это, в первую очередь, относится к разработке квадратурных формул для сингулярных интегралов.

I. Итак, рассмотрим сингулярный интеграл вида:

$$\phi(x) = \phi(\varphi; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t}, \quad t \in (-1, 1) \quad (1)$$

понимаемый в смысле главного значения по Коши, где плотность $\varphi(t)$ определенная на $[-1, 1]$, принадлежит классу Гельдера $H_\alpha^{(r)}$, то есть

$$\varphi(t) \in H_\alpha^{(r)}, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad r \geq 0.$$

В этой заметке предлагается интерполяционная квадратурная формула для сингулярного интеграла (1). Аппроксимируя плотность $\varphi(t)$ интерполяционными сплайнами Эрмита, совпадающие с функцией $\varphi(t)$ и ее производными $\varphi^{(\nu)}(t)$ до порядка r включительно на заданной системе узлов $t_k = 2\frac{k}{n} - 1$, $k = \overline{0, n}$, взятых из отрезка $[-1, 1]$. Интерполирующую функцию $S_n(t)$ строим исходя из условия

$$S_n^{(\nu)}(t_k) = \varphi^{(\nu)}(t_k), \quad \nu = \overline{0, r}, \quad k = \overline{0, n}, \quad \varphi(t) \in H_\alpha^r.$$

В качестве $S_n(t)$ можно взять функцию $S_n(t) = (t - t_k)^{r+1} \times \sum_{\nu=0}^r \varphi^\nu(t_k) \frac{(t-t_k)^\nu}{\nu!}$.

Даются оценки $|\varphi(t) - S_n(t)| = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right)$, $|\varphi^r(t) - S_n^{(r)}(t)| = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$.

II. Рассмотрим сингулярный интеграл вида:

$$I(f) = I(f, x) = \int_a^b \rho(t) \frac{f(t)}{t - x} dt, \quad x \in (a, b), \quad (2)$$

где $f(x)$ – данная плотность, $\rho(x)$ – некоторая функция на (a, b) , причем интеграл (2) понимается в смысле главного значения по Коши [3].

Обозначаем через $H_{2n-1}f = H_{2n-1}(f; x)$ полином степени $2n - 1$, удовлетворяющий условиям:

$$H_{2n-1}^{(\nu)}(x_k) = f(x_k), \quad H'_{2n-1} = f'(x_k), \quad x_k \in [-1, 1], \quad k = \overline{1, n}.$$

Известно, что на отрезке $[1, 2]$, полином $H_{2n-1}(f; x)$ существует, единственен и его можно записать в виде

$$H_{2n-1}(f; x) = \sum_{k=1}^n A_k(x) f(x_k) + \sum_{k=1}^n B_k(x) f'(x_k), \quad (3)$$

где

$$A_k(x) = \left\{ 1 - \frac{\omega_n''(x_k)(x - x_k)}{\omega_n'(x_k)} \right\} l_k^2(x), \quad B_k(x) = (x - x_k) l_k^2(x) \quad (4)$$

$$l_k(x) = \frac{\omega_n(x)}{(x - x_k)\omega_n'(x_k)}, \quad \omega_n(x) = \prod_{k=1}^n (x - x_k).$$

Пусть в (2)-(4) $\omega_n(x)$ означает ортогональную на $[a, b]$ систему многочленов по весу $\rho(x)$. Подставляя вместо плотности $f(x)$ полином $H_{2n-1}(f; x)$, получим следующую интерполяционную квадратурную формулу для сингулярного интеграла (2):

$$I(f) \approx \sum_{k=1}^n A_k^*(x) f(x_k) + \sum_{k=1}^n B_k^*(x) f'(x_k). \quad (5)$$

Дается способ вычисления коэффициентов $A_k^*(x)$ и $B_k^*(x)$.

В частности, если $\varphi_n^{(\mu, \nu)}(t)$, $b = 1$, то подробно рассматривается сингулярный интеграл

$$I(f) = I(f; x) = \int_{-1}^1 \rho(t) \frac{f(t)}{t - x} dt,$$

со специальным весом $\rho(t) = |t|^\mu(1-t^2)^\nu$, $\mu > -1, \nu > -1$.

Дается построение и исследование сходимости квадратурных формул для сингулярного интеграла (6), когда узлами являются нули многочленов $\varphi_n^{(\mu,\nu)}(t)$, ортогональных на отрезке $[-1, 1]$ относительно веса указанного выше [см.4].

Литература

1. Натансон И.П. Конструктивная теория функции. М-Л., Гостехиздат, 1949.
2. Габдулхаев Б.Г. Квадратурные формулы с квадратными узлами для сингулярных интегралов// ДАН СССР, 1976. Т. 227, №3, С. 531–534.
3. Солиев Ю. Об интерполяционных квадратурных формулах с квадратными узлами для сингулярных интегралов// Изв. вузов мат. 1977. № 9.
4. Хазириши Э.О. О некоторых ортогональных системах функций// Изв. Вуз. мат. 1981. № 6.

УДК 517.95 + 51-7

ОБ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ УРАВНЕНИЯ АЛЛЕРА

© Хубиев К.У.

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
"Институт прикладной математики и автоматизации"(Россия, Нальчик)
e-mail: khubiev_math@mail.ru

Уравнение Аллера

$$u_t = (au_x + bu_{xt})_x, \quad (1)$$

является уравнением гиперболического типа, хотя его принято называть уравнением псевдопараболического типа. Уравнение (1) находит многочисленные применения при математическом моделировании различных физических и биологических процессов [1, с. 261].

В работе [2] А.М. Нахушев предложил метод приближенного решения краевых задач для дифференциальных уравнений, основанный на редукции к нагруженным уравнениям (см. [3]).

В уравнении (1) выражение $\Pi(x, t) = au_x + bu_{xt}$, как правило, интерпретируется как поток процесса, протекающего в одномерной среде $0 \leq x \leq l$ во все моменты времени t от начального $t = 0$ до расчетного $t = T$. Если известен поток $\Pi(0, t) = f(t)$ в точке

$x = 0$ для любого момента времени $t \in [0, T]$, то уравнение (1) представимо в виде [1, с. 262]:

$$bu_{xt} + au_x = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^x u(\xi, t) d\xi + f(t). \quad (2)$$

Локальные и нелокальные краевые задачи для уравнений вида (2) были рассмотрены в работах [4-6].

В работах [7,8] рассмотрены математические модели нагруженного уравнения смешанного гиперболо-параболического типа как с характеристическим, так и с нехарактеристическим изменением типа, исследована смешанная краевая задача для уравнения плоской волны в прямоугольной плоскости. Для предложенных в качестве моделей уравнений смешанного были исследованы краевые задачи, выписаны решения задач в явном виде.

В данной работе для уравнения (2), взятого в качестве математической модели уравнения Аллера, исследуется краевая задача.

Литература

1. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. М.: Высш. школа, 1995. 301 с.
2. *Нахушев А.М.* Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 1. С. 72-81.
3. *Нахушев А.М.* О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 1. С. 103-108.
4. *Ilhan Ozturk.* Boundary value problem for the loaded differential equation of fractional order // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук, 1995. Т. 1, № 2. С. 12-17.
5. *Токова А.А.* О первой краевой задаче для одного нагруженного дифференциального уравнения второго порядка // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук, 2005. Т. 8, № 1. С. 87-91.
6. *Токова А.А.* Об одной нелокальной краевой задаче для нагруженного дифференциального уравнения со знакопеременной характеристической формой// Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2011. № 2. С. 40-45.
7. *Хубиев К.У.* Об одной модели нагруженного гиперболо-параболического уравнения в частных производных второго порядка с характеристическим изменением типа // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук, 2015. Т. 17, № 2. С. 48-51.

8. Хубиев К.У. О модели нагруженного гиперболо–параболического уравнения в частных производных второго порядка // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2015. № 2(11). С. 27–38.

УДК 517.95

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ И ЧАСТНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

© Хуштова Ф.Г.

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
"Институт прикладной математики и автоматизации"(Россия, Нальчик)
e-mail: khushtova@ya.ru

В области $\Omega = \{(x, y) : -\infty < x < \infty, 0 < y < T\}$ рассмотрим уравнение

$$B_x u(x, y) - D_{0y}^\alpha u(x, y) = 0, \quad (1)$$

где $B_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{b}{x} \frac{\partial}{\partial x}$ – оператор Бесселя, $|b| < 1$; D_{0y}^α – оператор дробного дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля порядка $0 < \alpha \leq 1$ [1, с. 9], [2, с. 14].

Пусть $\Omega^+ = \Omega \cap \{x > 0\}$, $\Omega^- = \Omega \cap \{x < 0\}$, $\bar{\Omega}$ – замыкание области Ω .

Регулярным решением уравнения (1) в области Ω будем называть функцию $u = u(x, y)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области $\Omega^+ \cup \Omega^-$, и такую, что $y^{1-\alpha}u \in C(\bar{\Omega})$, $|x|^b u_x \in C(\Omega)$, u_{xx} , $D_{0y}^\alpha u \in C(\Omega^+ \cup \Omega^-)$.

Задача 1. Найти регулярное в области Ω решение уравнения (1), удовлетворяющее условию

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-1} u(x, y) = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty,$$

где $\varphi(x)$ – заданная функция.

Обозначим через $\beta = (1 - b)/2$,

$$\Gamma^{\alpha, \beta}(x, \xi, y) = A_y^\alpha g(x, \xi, y),$$

$$g(x, \xi, y) = \frac{x^\beta \xi^\beta}{4y} e^{-\frac{x^2 + \xi^2}{4y}} \left[I_\beta \left(\frac{x\xi}{2y} \right) + I_{-\beta} \left(\frac{x\xi}{2y} \right) \right],$$

где A_y^α – интегральное преобразование с функцией Райта в ядре, действующее по переменной y [2, с. 72], $I_\nu(z)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода порядка ν [3, с. 122].

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть $\varphi(x) \in C(-\infty, \infty)$ и выполняется условие

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \varphi(x) \exp\left(-\rho|x|^{\frac{2}{2-\alpha}}\right) = 0, \quad \rho < (2 - \alpha) 2^{-\frac{2}{2-\alpha}} (\alpha / T)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}.$$

Тогда функция

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} |\xi|^{1-2\beta} \Gamma^{\alpha, \beta}(x, \xi, y) \varphi(\xi) d\xi$$

является регулярным решением задачи 1.

Теорема 2. Решение задачи 1 единствено в классе функций, удовлетворяющих при некотором положительном k условию

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} y^{1-\alpha} u(x, y) \exp\left(-k|x|^{\frac{2}{2-\alpha}}\right) = 0, \quad (2)$$

причем сходимость в (2) является равномерной на множестве $\{y \in (0, T)\}$.

Литература

1. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
2. Псеху А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.
3. Кузнецов Д. С. Специальные функции. М.: Высшая школа. 1965. 424 с.

УДК 517.9

ЗАДАЧА РИМАНА– ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ВЕЩЕСТВЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

© Чернова О.В.

Белгородский государственный национальный
исследовательский университет (Россия, Белгород)
e-mail: soldatov@bsu.edu.ru

Пусть конечная область D на плоскости \mathbb{C} ограничена составным гладким контуром $\Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_m$. В этой области рассмотрим эллиптическую систему

$$A_1 \frac{\partial U}{\partial x} + A_2 \frac{\partial U}{\partial y} + A_0 U = F, \quad (1)$$

где матрицы $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{2l \times 2l}$ обратимы и корни характеристического уравнения $\det(A_1 + zA_2)$ не лежат на вещественной оси. Матрица A_0 и вектор $F = (F_1, \dots, F_{2l})$ в правой части принадлежат классу $C^\mu(\overline{D})$, $0 < \mu < 1$, а решение U ищется в классе $C^{1,\mu}(\overline{D})$. Из условия эллиптичности следует существование таких прямоугольной матрицы $B \in C^{2l \times l}$ и обратимой матрицы $J \in C^{l \times l}$, что $A_1 B + A_2 B J = 0$ и собственные значения матрицы J совпадают с корнями характеристического уравнения в верхней полуплоскости.

Для системы (1) рассмотрим краевую задачу

$$GU|_\Gamma = f, \quad (2)$$

где прямоугольная $(l \times 2l)$ -матрица G принадлежит $C^{1,\nu}(\Gamma)$, $\mu < \nu < 1$, и вектор $f = (f_1, \dots, f_l) \in C^{1,\mu}(\Gamma)$.

В данной работе показано, что в предположении обратимости $l \times l$ -матрицы GB задача (1), (2) фредгольмова и ее индекс дается формулой $\alpha = -2\text{Ind}(GB) + l(2 - m)$, где m есть число связных компонент контура Γ и индекс Коши Ind определяется по отношению к ориентации этого контура, оставляющей область D слева. Фредгольмовость и индекс задачи понимаются по отношению к соответствующему оператору $C^{1,\mu}(\overline{D}) \rightarrow C^\mu(\overline{D}) \times C^{1,\mu}(\Gamma)$.

УДК 004.652.2:512.583

К МЕТОДОЛОГИИ СОЗДАНИЯ АКТИВНЫХ БАЗ ДАННЫХ ИЕРАРХИЧЕСКОГО ТИПА

© Чернышев Г.В.

ФГБУН Институт информатики и проблем регионального управления
КБНЦ РАН (Россия, Нальчик)
e-mail: chern_gen@mail333.com

Под активной базой данных понимают совокупность хранимых в ней данных и правил, задающих вычисления над этими данными. Сами вычисления активируются системой управления базами данных, использующей для этого хранимые правила. Основная проблема системы управления активными базами данных — построение эффективного механизма реакции на возникающие в системе события. В докладе будет представлены методологические основы подхода к построению системы организации и функционирования активных баз данных, базирующихся на одной иерархической модели [1].

Формальное описание базируем на языке теории категорий. Для этого определяем категорию путей $\mathbb{C}_{\mathbb{P}}$, содержащую: класс объектов $O = \{v_1, v_2, \dots, v_i, \dots\}$; множество морфизмов $M(v_i, v_j) = \langle v_i, v_{i_1}, \dots, v_j \rangle$ для любых $v_i, v_j \in O$ со свойством $|M(v_i, v_j)| = 1$; композицию морфизмов (\circ), определяемую правилом конкатенации последовательностей; единичные морфизмы $1_v = \langle v \rangle$ для $v \in O$.

В [1] показано, что характеризующие морфизмы $\chi_{v_t} = M(v_R, v_t)$ (терминальные пути), где v_R — фиксированный объект, а v_t — терминальный объект, являются образующими для категории $\mathbb{C}_{\mathbb{P}}$. Понятие вычислимости в $\mathbb{C}_{\mathbb{P}}$ будем базировать на использовании декартово замкнутой категории.

Следуя [2], *декартово замкнутой категорией* является категория, в которой для любых объектов a и b существует объект b^a , называемый *экспоненциалом*, и морфизм значения $ev : b^a \times a \rightarrow b$, называемый *применением*, такие, что любого объекта c и любого морфизма $g : c \times a \rightarrow b$ существует единственный морфизм $\hat{g} : c \rightarrow b^a$, называемый *каррингом* g , для которого $ev \circ (\hat{g} \times 1_a) = g$ (произведение объектов и морфизмов категории определяется известным образом).

Важным свойством декартово замкнутых категорий является возможность их описания только в виде равенств, что, в свою очередь, позволяет использовать их для определения правил переписывания для редукции выражений в терминах категорийной комбинаторной логики по аналогии с классической логикой.

Утверждение. *Категория $\mathbb{C}_{\mathbb{P}}$ является декартово замкнутой.*

При этом в $\mathbb{C}_{\mathbb{P}}$ экспоненциалом является фиксированный объект v_R , применение $ev : v_R \times a \rightarrow b$ совпадает с характеризующим морфизмом $\chi_b = M(v_R, b)$, т.к. $v_R \times a = v_R$ для любых a , и следующая

диаграмма является коммутативной:

$$\begin{array}{ccc}
 v_R & \xleftarrow{\hat{g} \times 1_a} & c \times a \\
 & \searrow \chi_b & \swarrow g \\
 & b &
 \end{array}$$

Модель активной базы данных будем базировать на понятиях декартово замкнутой категории и абстрактных типов данных.

Абстрактный тип данных (АТД) – это тройка

$$\mathcal{A} = \langle N, \Sigma, E \rangle,$$

где N – имя абстрактного типа данных, $\Sigma = \langle S, O \rangle$ – сигнатура типа (множества имен типов и имен операций), $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ — множество равенств (определяющих соотношений) e_i вида $L_i = R_i$ для $i = 1, \dots, m$.

Реализация $I(\mathcal{A})$ абстрактного типа данных \mathcal{A} называется инициальной, если для любой другой его реализации A существует единственный гомоморфизм $j : I(\mathcal{A}) \rightarrow A$. Элементы инициальной реализации – алгебры – представляют собой классы эквивалентных термов, равенство которых следует из системы определяющих соотношений. Вычисление значения терма в инициальной модели – нахождение канонического терма, эквивалентного исходному терму. Теоретическую основу инициальной реализации АТД составляют алгебраические типы данных [3].

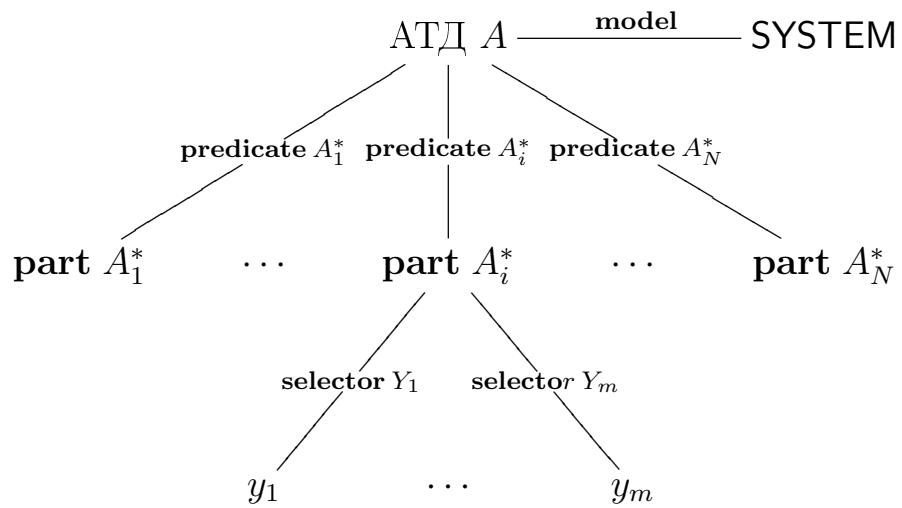
Алгебраический тип данных есть размеченное объединение декартовых произведений множеств (или размеченная сумма прямых произведений множеств):

$$\bigsqcup_{i \in I} A_i = \{(x, i) \mid x \in A_i\}, \text{ где } A_i = A_{i1} \times A_{i2} \times \cdots \times A_{in}$$

Декартово произведение, размеченное объединение и понятия теории типов – основа синтаксически-ориентированного проектирования типов [4], включающее элементы: конструкторы (constructors) – функции, создающие декартовы произведения из состава АТД; селекторы (selectors) – функции для получения значений из декартовых произведений; части (parts) – отдельные множества

размеченного объединения; предикаты (predicates) – функции, позволяющие идентифицировать принадлежность заданного значения конкретному множеству из состава размеченного объединения.

Расширяя метод синтаксически ориентированного проектирования спецификацией вычислений – равенств (model), основанных на понятиях декартово замкнутых категорий, приходим к следующему информационному представлению модели активной базы данных иерархической структуры:



где $A_i^* = \{(x, i) \mid x \in A_i\}$, $i = 1, \dots, N$.

Литература

1. Чернышев Г.В. К созданию информационных инструментальных средств поддержки представления знаний // XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014. Труды. [Электронный ресурс]. М.: ИПУ РАН, 2014. С. 8762-8772.
2. Голдблумт Р. Топосы. Категорный анализ логики. М: Мир, 1983. 488 с.
3. Душкин Р. Алgebraические типы данных и их использование в программировании // Практика функционального программирования. 2009. № 2. С. 85-105.
4. Даl У., Дейкстра Э., Хоор K. Структурное программирование. М.: Мир, 1975. 245. с.

**УСТОЙЧИВЫЙ МЕТОД ИДЕНТИФИКАЦИИ
ИНТЕНСИВНОСТИ ИСТОЧНИКА ЗАГРЯЗНЕНИЯ
АТМОСФЕРЫ НА ОСНОВЕ РАСПШИРЕННЫХ
НОРМАЛЬНЫХ СИСТЕМ**

© Чубатов А.А.¹, Кармазин В.Н.²

¹Армавирский государственный педагогический университет
(Россия, Армавир)
e-mail: chaa@inbox.ru

²Кубанский государственный университет (Россия, Краснодар)
e-mail: karmazin@kubsu.ru

В работах [1, 2] рассмотрена задача идентификации интенсивности источника загрязнения атмосферы $g(t)$ при известных коэффициентах чувствительности и замерах концентрации c_{ji} , $j = 1, \dots, J$, $i = 1, \dots, N$. Задача идентификации с помощью теоремы Дюамеля сводилась к решению приближенной СЛАУ

$$A_h \cdot g = f_\delta, \quad \|A_h - A\| \leq h, \quad \|f_\delta - f\| \leq \delta, \quad (1)$$

где $A_h \in \mathbb{R}^{N \cdot J \times N}$ — матрица импульсных коэффициентов чувствительности, $f_\delta \in \mathbb{R}^{N \cdot J}$ — вектор, зависящий от замеров концентрации, $g \in \mathbb{R}^N$ — вектор интенсивностей, J — число датчиков, N — число шагов по времени, h и δ — погрешности матрицы и правой части.

Погрешности исходных данных h , δ приводят к практической несовместности системы (1). Решение системы будем находить в обобщенном смысле — в виде псевдорешения.

Задача (1) некорректна по Адамару (решение неустойчиво к погрешностям исходных данных), что приводит к необходимости использовать метод регуляризации [3]. Решение системы (1) будем искать в виде регуляризованного по А. Н. Тихонову псевдорешения

$$(A_h^T \cdot A_h + \alpha \cdot E) \cdot g(\alpha) = A_h \cdot f_\delta, \quad (2)$$

где $g(\alpha)$ — регуляризованное решение, E — единичная матрица.

Использование расширенных систем (РС) [4,5] позволяет совместно с решением находить невязку. Запишем систему (1) в виде

$$A_h \cdot g + r = f_\delta, \quad (3)$$

где $r = f_\delta - A_h \cdot g$ — вектор невязки.

Если решение g и невязка r ищутся одновременно, то система (3) будет недоопределенной. Для единственности решения системы (3) дополняется нормальной системой

$$A_h^T \cdot A_h \cdot g = A_h^T \cdot f_\delta. \quad (4)$$

Системы (3) и (4) образуют расширенную нормальную систему

$$R_\omega \cdot x = b, R_\omega = \begin{pmatrix} \omega \cdot E & A_h \\ A_h^T & O \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} \omega^{-1} \cdot \hat{r} \\ \hat{g} \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} f_\delta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где \hat{r} — оценка вектора невязки, \hat{g} — оценка решения g системы (1), ω — скалярный масштабирующий параметр, O — нулевая матрица.

Выполним регуляризацию расширенной нормальной системы (5). Для этого применим метод регуляризации А. Н. Тихонова

$$T_{\omega,\alpha} \cdot x(\alpha) = R_\omega \cdot d, \quad T_{\omega,\alpha} = (R_\omega^2 + \alpha \cdot E), \quad E \in \mathbb{R}^{(m+N) \times (m+N)}. \quad (6)$$

Гауссова симметризация приводит к ухудшению числа обусловленности $\text{cond}(T_{\omega,\alpha}) = \text{cond}^2(R_\omega)$. Учитывая симметричность матрицы R_ω , применим к (5) метод мнимого сдвига спектра Фадеевой

$$F_{\omega,\alpha} \cdot \begin{pmatrix} x(\alpha) \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F_{\omega,\alpha} = \begin{pmatrix} R_\omega & -\sqrt{\alpha} \cdot E \\ \sqrt{\alpha} \cdot E & R_\omega \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Существует два пути выбора регуляризующего параметра α : априорный и апостериорный [6]. Априорный выбор гарантирует лишь асимптотическую сходимость к точному решению $g(\alpha) \xrightarrow[h,\delta \rightarrow 0]{} g^*$. В случае конечных фиксированных погрешностей h и δ , параметр α выбирается апостериорно по принципу обобщенной невязки:

$$\alpha_{\text{apost}} \text{ — корень уравнения } \varphi_\omega(\alpha) - \psi_\omega(\alpha) = 0,$$

где (для РНС) $\varphi_\omega(\alpha) = \sqrt{\|f - A \cdot g(\alpha) - r\|^2 + \|\omega^{-1} \cdot A^T \cdot r\|^2}$,

$$\psi_\omega(\alpha) = \delta + \sqrt{2} \cdot h \cdot \sqrt{\|g(\alpha)\|^2 + \|\omega^{-1} \cdot r\|^2}.$$

Для оценки качества выбора α конкретным методом используем коэффициент эффективности $\eta_{\text{eff}}(\alpha_{\text{meth}}) \in [0; 1]$

$$\eta_{\text{eff}}(\alpha_{\text{meth}}) = \|g(\alpha_{\text{best}}) - \bar{g}\| / \|g(\alpha_{\text{meth}}) - \bar{g}\|,$$

где $\alpha_{best} = \arg \min_{\alpha} \|g(\alpha) - \bar{g}\|$ — лучшее α , \bar{g} — точное решение.

Апостериорный выбор α носит итерационный характер: нужно многократно решать регуляризованную РНС. Решение задачи можно ускорить, если выполнить сингулярное разложение (SVD) [7]

$$A = U \cdot S \cdot V^T,$$

где U, V — унитарные матрицы, $S = diag(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N)$ — диагональная матрица сингулярных чисел $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_N \geq 0$.

Хотя, процедура сингулярного разложения является трудоемкой задачей, оно выполняется один раз. Применяя SVD разложение, получим системы (5) и (6), (7), имеющие 3 и 5 ненулевых диагоналей и распадающиеся на независимые подсистемы порядка 2 и 5, что делает их решение элементарным.

Проведен ряд вычислительных экспериментов. Получены устойчивые решения (оценки интенсивности) при наличии погрешностей в операторе (матрице системы). Произведен анализ решений, полученных методом регуляризации на основе РНС с использованием SVD разложения. Произведено сравнение априорного и апостериорного способов выбора параметра регуляризации. Для априорного выбора α коэффициент $\eta_{eff} \leq 0,5$, для апостериорного — $\eta_{eff} \leq 0,8$.

Литература

1. Чубатов А.А., Кармазин В.Н. Экспресс-контроль за источником загрязнения атмосферы на основе метода последовательной функциональной аппроксимации // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2008. № 2. С. 210–214.
2. Чубатов А.А., Кармазин В.Н. Устойчивая оценка интенсивности источника загрязнения атмосферы на основе метода последовательной функциональной аппроксимации // Компьютерные исследования и моделирование. Модели в физике и технологиях. 2009. Т. 1, № 4. С. 391–403.
3. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М: Наука, 1986.
4. Bjorck A. Numerical stability of methods for solving augmented systems// Contemporary Math. 1997. Vol. 204. P. 51–60.
5. Жданов А.И. Регуляризация неустойчивых конечномерных линейных задач на основе расширенных систем // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2005. Т. 45, № 11. С. 1918–1926.
6. Морозов В.А. Алгоритмические основы методов решения некорректных задач// Вычисл. методы и программирование. 2003. Т. 45. С. 130–141.
7. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. М: Мир, 1999.

**МНОЖЕСТВЕННОСТЬ ОБЩИХ РЕШЕНИЙ
УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С
ПРОСТРАНСТВЕННЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ
РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБНЫХ ПОРЯДКОВ В
D-АНАЛИЗЕ**

© Чуриков В.А.

Томский государственный университет систем управления и

радиоэлектроники (Россия, Томск)

e-mail: vachurikov@list.ru

Рассмотрим уравнение теплопроводности с дробными производными рационального порядка в пространстве дробной размерности p/q по координате x

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t, x) = K \tau_{p/q} \frac{\partial^{p/q}}{\partial x^{p/q}} \frac{\partial^{p/q}}{\partial x^{p/q}} f(t, x). \quad (1)$$

Здесь $\frac{\partial}{\partial t}$ и $\frac{\partial^{p/q}}{\partial x^{p/q}} \frac{\partial^{p/q}}{\partial x^{p/q}}$ – операторы дифференцирования по времени t первого порядка и по пространственной координате x степени 2 порядка p/q ($p, q \in \mathbb{N}$); дробь p/q неократима и $p > 1$; оператор понимается как d -оператор – оператор дробного интегродифференцирования [1]; K – коэффициент теплопроводности вещества в пространстве размерности p/q ($K = \text{const}$); $\tau_{p/q}(x)$ – топологический коэффициент ($0 \leq \tau_{p/q} \leq 1$) в пространстве дробной размерности p/q определяемый топологическими свойствами пространства и проходящего в нём физического процесса. Далее предполагаем, что $\tau_{p/q} = \text{const}$.

Решая уравнение с разделением переменных, представим $f(t, x) = T(t)X(x)$. Тогда уравнение легко преобразовать

$$\frac{1}{K \tau_{p/q}} \frac{1}{T(t)} \frac{\partial}{\partial t} T(t) = \frac{1}{X(x)} \frac{\partial^{p/q}}{\partial x^{p/q}} \frac{\partial^{p/q}}{\partial x^{p/q}} X(x) = -\lambda.$$

Здесь λ – неизвестная константа, не имеющая физической размерности.

Получим уравнение для $T(t)$: $\frac{\partial}{\partial t} T(t) = -\lambda K \tau_{p/q} T(t)$.

Решение для $T(t)$ будет: $T(t) = T_0 \exp(-\lambda K \tau_{p/q} t)$, где $T_0 = \text{const}$ – начальная температура.

Уравнение для $X(t)$ будет: $\frac{\partial^{p/q}}{\partial x^{p/q}} \frac{\partial^{p/q}}{\partial x^{p/q}} X(x) - \lambda X(x) = 0$, которое имеет несколько общих решений, которые различаются индексами k_1, k_2, l_1, l_2

$$X_{p/q:k_1k_2}^{l_1l_2}(x) = \tilde{C}_1 \exp_{p/q}(r_{1: p/q\{k_1\}} \alpha_{p/q}^{\{l_1\}} x) + \\ + \tilde{C}_2 \exp_{p/q}(r_{2: p/q\{k_2\}} \alpha_{p/q}^{\{l_2\}} x),$$

где индексы пробегают значения $k_1, k_2, l_1, l_2 = 0, 1, 2, \dots, p-1$; \tilde{C}_1, \tilde{C}_2 – константы интегрирования; константы $r_{1: p/q\{k_1\}}$ и $r_{2: p/q\{k_2\}}$ являются решениями *характеристического уравнения* $(r^{p/q})^2 - \lambda = 0$ и равны: $r_{1: p/q\{k_1\}} = \sqrt{\lambda^{p/q}}$ и $r_{2: p/q\{k_2\}} = -\sqrt{\lambda^{p/q}}$; $\alpha_{p/q}^{\{l\}}$ – корни *инвариантности* порядка p/q , удовлетворяют *уравнению инвариантности*: $(\alpha_{p/q}^{\{l\}})^{p/q} = 1$, решения которого $\alpha_{p/q}^{\{l\}} = 1^{q/p} = \exp(i2\pi lq/p)$; $\exp_{p/q}^{\{l\}}(rx)$ – экспоненты рациональных порядков p/q , которых будет $1 < p < \infty$ (*экспоненциальное выражение*).

$$\exp_{p/q}^{\{l\}}(rx) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha_{p/q}^{\{l\}} rx)^{-1+np/q}}{\Gamma(np/q)}; \quad r \in \mathbb{C}; \quad r = \text{const.}$$

Здесь $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера.

Общие решения уравнения (1) $f_{p/q:k_1k_2}^{l_1l_2}(t, x)$ запишем, обозначив константы $C_1 = T_0 \tilde{C}_1, C_2 = T_0 \tilde{C}_2$

$$f_{p/q:k_1k_2}^{l_1l_2}(t, x) = T_0 \exp(-\lambda K \tau_{p/q} t) X_{p/q:k_1k_2}^{l_1l_2}(x) = \\ = \exp(-\lambda K \tau_{p/q} t) [C_1 \exp_{p/q}(r_{1: p/q\{k_1\}} \alpha_{p/q}^{\{l_1\}} x) + \\ + C_2 \exp_{p/q}(r_{2: p/q\{k_2\}} \alpha_{p/q}^{\{l_2\}} x)]. \quad (2)$$

Всего общих решений будет p^4 , по числу возможных сочетаний констант и экспонент в двух слагаемых. Среди общих решений можно выделить разные типы решений.

Главное общее решение, когда все индексы равны нулю $l_1 = l_2 = k_1 = k_2 = 0$, которое является вещественным.

Диагональные общие решения, это решения у которых все индексы равны между собой $l_1 = l_2 = k_1 = k_2 = 0, 1, 2, \dots, p-1$. Всего будет p диагональных общих решений, первое из которых будет главным общим решением.

Недиагональные общие решения, это решения, которые не являются диагональными, которых будет $p^4 - p$.

Для общих решений справедливы утверждения, которое легко доказываются.

Теорема. *Любая линейная суперпозиция общих решений (2) уравнения (1) также является общим решением уравнения (1).*

Теорема. *Множество общих решений (2) относительно операций сложения и умножения на число образует линейное пространство, размерность которого не больше мощности множества решений.*

Перечисленные решения всегда обращаются в ноль в точке $x=0$, так как экспоненты дробных порядков в данной точке равны нулю, если дробь p/q ($p, q \in N$) несократима и $p>1$.

Какие из общих решений (2), или их суперпозиций, описывают реальные физические процессы, т. е. являются физическими? Уверенно можно сказать, что физическими являются частные решения полученные из главного общего решения.

Литература

1. Чуриков В.А. Локальный d -оператор дробного дифференцирования и дробного интегрирования комплексных порядков вещественной переменной// Современ. состояние и проблемы естествознания: сборник трудов всероссийской научно-практич. конф. молодых учёных, аспирантов и студентов, г. Юрга, Юргинский технологич. ин-т, 17–18 апр. 2014. Томск: Изд-во Томского политех. ун-та, 2014. С. 283–289.

УДК 517.2

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ НАМАГНИЧИВАЮЩИХСЯ МИКРОКАПЕЛЬ В ПЕРЕМЕННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ С УЧЕТОМ ИХ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК

(c) Шагрова Г.В., Дроздова В.И., Романенко М.Г.,
Лойторенко Е.Н.

Северо-Кавказский федеральный университет (Россия, Ставрополь)
e-mail: appinform@ncfu.ru

Математическое и имитационное моделирование стало эффективным инструментом исследования сложных многокомпонентных дисперсных систем не только благодаря развитию аппаратных средств вычислительной техники, но также благодаря разработке

новых алгоритмов и пакетов прикладных программ, в частности, компьютерной математики.

Моделирование статических и динамических свойств деформированных капель опирается на два подхода. В одном из них форма капель, деформированных под действием внешних полей или течений, считается заранее неизвестной и определяется в процессе решения задачи численными методами [1,2]. Другой подход основан на предположении о том, что в любой момент времени форма деформируемых капель известна и может быть представлена вытянутым вдоль поля эллипсоидом вращения. Для взвешенных капель и микрокапель магнитных жидкостей такое предположение опирается на большое количество экспериментальных данных и позволяет делать успешные прогнозы как для статических, так и для динамических задач. При использовании такого подхода существенно упрощаются расчеты, что очень важно при решении практических задач управления магнитожидкими наносистемами в режиме реального времени. Магнитные жидкости, содержащие микрокапельные агрегаты [3-4], представляют собой гетерогенные системы, в которых дисперсная фаза является магнитной жидкостью высокой концентрации, а дисперсионная среда – слабоконцентрированной магнитной жидкостью.

В данной работе исследована возможность моделирования колебаний намагничающихся микрокапель с учетом их теплофизических характеристик в слабом магнитном поле на основе предположений о линейном характере намагничивания и эллипсоидальности формы микрокапель.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2q(t)}{dt^2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{q(t)^2+2}{q(t) \cdot (2q(t)^2+1)} \left(\frac{dq(t)}{dt} \right)^2 + \\ + \frac{45 \cdot \sigma \cdot}{4R^3(\rho_1 + \frac{\rho_2}{2})} \cdot \frac{q(t)^3}{(2q(t)^2+1) \cdot (q(t)^2-1)} \left(\frac{q(t)^2-4}{\sqrt{q(t)^2-1}} \arcsin \left(\frac{\sqrt{q(t)^2-1}}{q(t)} \right) + \frac{2}{q(t)^2} + 1 \right) - \\ - \frac{45\mu_0(\mu_i-\mu_e)^2 H(t)^2 (q(t)^2-1)^2}{2R^2(\rho_1 + \frac{\rho_2}{2})(q(t)^{-8/3}+2q(t)^{-2/3})} \times \\ \times \frac{\left[(\ln(2q(t)^2+2q(t)\sqrt{q(t)^2-1}-1) - 2\sqrt{1-q(t)^{-2}}) \cdot (2q(t)^2+1)(q(t)^2-1)^{-3/2} - 2q(t)^{-1} \right]}{(q(t)(\mu_i/\mu_e-1)(\ln(2q(t)^2+2q(t)\sqrt{q(t)^2-1}-1) - 2\sqrt{1-q(t)^{-2}}) + 2(q(t)^2-1)^{3/2})^2} + \\ + \frac{60\cdot\eta}{(\rho_1 + \frac{\rho_2}{2}) \cdot R^2} \cdot \frac{q(t)^{2/3}}{(2q(t)^2+1)} \cdot \frac{dq(t)}{dt} = 0. \\ \eta(T) = 4,841 \cdot \exp^{-0,113(T-273)} + 0,063; \\ \sigma(T) = (0,563 \cdot \exp^{-0,028(T-273)} + 0,117) \cdot 10^{-6}; \\ H(t) = H_0 + H_a \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t + \varphi). \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dq(t)}{dt} = V_q(t); \\ \frac{dV_q(t)}{dt} = \frac{2}{3} \cdot \frac{q(t)^2+2}{q(t) \cdot (q(t)^2+1)} (V_q(t))^2 - \frac{60 \cdot \eta}{(\rho_1 + \frac{\rho_2}{2}) \cdot R^2} \cdot \frac{q(t)^{2/3}}{(2q(t)^2+1)} \cdot V_q(t) \cdot \\ \quad - \frac{45 \cdot \sigma}{4R^3 (\rho_1 + \frac{\rho_2}{2})} \cdot \frac{q(t)^3}{(2q(t)^2+1) \cdot (q(t)^2-1)} \times \\ \quad \times \left(\frac{q(t)^2-4}{\sqrt{q(t)^2-1}} \arcsin \left(\frac{\sqrt{q(t)^2-1}}{q(t)} \right) + \frac{2}{\lambda q(t)^2} + 1 \right) \cdot \\ \quad - \frac{45 \mu_0 (\mu_i - \mu_e)^2 H(t)^2 (q(t)^2-1)^2}{2R^2 (\rho_1 + \frac{\rho_2}{2}) (q(t)^{-8/3} + 2q(t)^{-2/3})} \times \\ \quad \left[\left(\ln(2q(t)^2 + 2q(t)\sqrt{q(t)^2-1}-1) - 2\sqrt{1-q(t)^{-2}} \right) \cdot (2q(t)^2+1) (q(t)^2-1)^{-3/2} - 2q(t)^{-1} \right] \\ \quad \left(q(t)(\mu_i/\mu_e - 1) \left(\ln(2q(t)^2 + 2q(t)\sqrt{q(t)^2-1}-1) - 2\sqrt{1-q(t)^{-2}} \right) + 2(q(t)^2-1)^{3/2} \right)^2 \end{array} \right. \quad (2)$$

Первое уравнение в системе (1), полученное в [5], соответствует равновесной форме микрокапли. Отношение полуосей эллипсоида вращения $q(t) = a/ba > b$ характеризует форму микрокапли в переменном магнитном поле (t) . Вне поля форма микрокапель сферическая, радиус R . Магнитная проницаемость капель μ_i , плотность ρ_1 , плотность окружающей среды ρ_2 , поверхностное натяжение на границе раздела σ , вязкость микрокапли η , температура T . Второе и третье уравнения системы (1) получены на основе аппроксимации экспериментальных данных [5].

Для численного решения системы (1) разработана система компьютерного моделирования в среде Matlab. Для этого выполнено преобразование дифференциального уравнения системы (1) к виду (2). Структурная схема разработанной системы компьютерного моделирования представлена на рисунке 1. Система компьютерного моделирования колебаний намагничивающихся капель реализована средствами пакета Simulink, обеспечивающими имитационное блочное моделирование различных систем и устройств с применением современной технологии визуально-ориентированного программирования. Она содержит три подсистемы: Вязкость, Поверхностное натяжение и Subsystem. Подсистема «Subsystem» позволяет определять влияние сил различной природы (инерционных, вязких, поверхностных и магнитных) на характер колебаний. Подсистемы «Вязкость» и «Поверхностное натяжение» по зависимостям $\eta(T)$ и $\sigma(T)$ позволяют определять значения η и σ при определенной температуре.

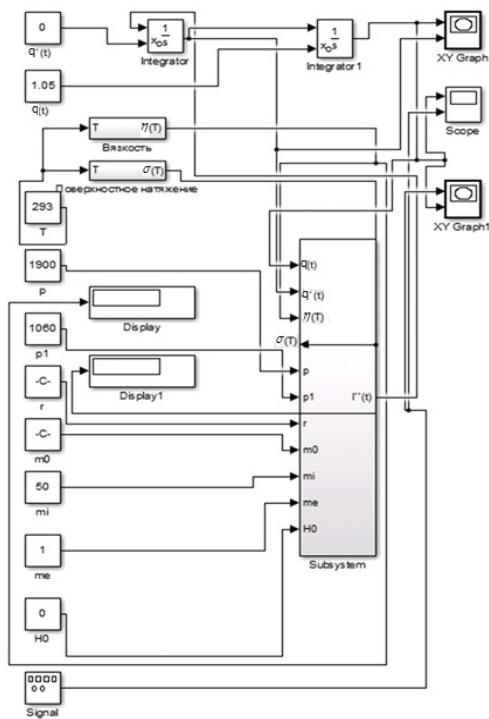


Рис. 1. Схема системы компьютерного моделирования.

Литература

1. Smetanin S.V., Shrager G.R., Yakutnenok V.A. Numerical investigation of the coalescence of viscous-liquid drops// Fluid Dynamics. 2000. V.35, №6. P. 813–819.
2. Тарапов И.Е. Некоторые вопросы гидростатики намагничивающихся и поларизующихся сред// Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1974. №5. С. 141–144.
3. Bacri J.C. Dynamics of the shape transition of a magnetic ferrofluid drop. / J.C. Bacri, D. Salin// J. Physique-lettres. 1983. Vol. 44. P. 415–420.
4. Drozdova V.I. Dynamics of optical scattering on ferrofluid agglomerate magnetic drops/ V.I. Drozdova, G.V. Shagrova// J. MagnetismMagn. Materials. 1990. V. 85. P. 93–96.
5. Романенко М.Г. Математическое моделирование динамики намагничивающихся капель. Дисс. Канд.тех.наук. Ставрополь. 2011. 161 с.

**ОБ ОДНОЙ ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ
ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМЕ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО
ПОРЯДКА СО СВЕРХСИНГУЛЯРНОЙ ТОЧКОЙ**

© Шамсудинов Ф.М.

Курган-Тюбинский государственный университет им. Носира Хусрава
(Таджикистан, Курган-Тюбе)
e-mail: faizullo100@yahoo.com

Пусть D прямоугольник $D = \{(x, y) : 0 < x < \delta_1, 0 < y < \delta_2\}$.
Далее обозначим

$$\Gamma_1 = \{y = 0, 0 < x < \delta_1\}, \quad \Gamma_2 = \{x = 0, 0 < y < \delta_2\}.$$

В области D рассмотрим систему следующего вида

$$\left\{ \begin{array}{l} r^{\alpha+\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + r^\beta a_1(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + r^\alpha b_1(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c_1(x, y)u = f_1(x, y), \\ r^\gamma \frac{\partial u}{\partial x} + a_2(x, y)u = f_2(x, y), \\ r^\delta \frac{\partial u}{\partial y} + b_2(x, y)u = f_3(x, y), \end{array} \right. \quad (1)$$

где $r^2 = x^2 + y^2$, $a_j(x, y)$, $b_j(x, y)$, $c_1(x, y)$, $f_k(x, y)$, $j = \overline{1, 2}$, $k = \overline{1, 3}$ – заданные функции области D , $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 2$.

Проблеме исследования вырождающихся уравнений и переопределенных систем дифференциальных уравнений с сингулярными и сверхсингулярными коэффициентами посвящены работы [1]–[7].

По способу разработанной в [3] и [4] для переопределенной системы уравнений (1) получены представления многообразия решений при помощи одной произвольной постоянной.

В дальнейшем обозначим $C_2(D)$ – класс функций, которые имеют непрерывные производные первого порядка в D и такие, что $U_{xy} \in C(D)$.

Пусть второе уравнение системы (1) является исходным. В этом случае получим следующее утверждение

Теорема 1. Пусть в системе уравнений (1) коэффициенты и правые части удовлетворяют следующим условиям:

1) $a_1(x, y), b_2(x, y) \in C_x^1(\bar{D}), a_2(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y) \in C_y^1(\bar{D}), b_1(x, y), c_1(x, y), f_1(x, y) \in C(\bar{D});$

$$2) c_2(x, y) = -c_1(x, y) + r^4 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a_1(x, y)}{r^2} \right) + a_1(x, y)b_1(x, y);$$

$$3) |a_2(x, y) - a_2(0, 0)| \leq H_1 r^{\delta_1}, \quad H_1 = \text{const}, \quad \delta_1 > 1,$$

$$|a_2(0, y) - a_2(0, 0)| \leq H_2 y^{\gamma_1}, \quad H_2 = \text{const}, \quad \gamma_1 > 1;$$

$$4) a_2(0, 0) < 0, \quad b_2(0, 0) > 0;$$

$$5) \text{a) } \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a_2(x, y)}{r^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a_1(x, y)}{r^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{b_2(x, y)}{r^2} \right) \text{ в } D,$$

$$\text{б) } a_1(x, y)f_2(x, y) + r^4 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_2(x, y)}{r^2} \right) = f_1(x, y) + c_1(x, y)u(x, y),$$

при $a_2(x, y) = b_1(x, y)$ в D ,

$$\text{в) } a_2(x, y)f_3(x, y) + r^4 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_3(x, y)}{r^2} \right) = b_2(x, y)f_2(x, y) + \\ + r^4 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_2(x, y)}{r^2} \right) \text{ в } D;$$

$$6) f_2(x, y) = o(r^{\delta_2}), \quad \delta_2 > 1, \quad f_2(0, y) = o(y^{\delta_3}), \quad \delta_3 > 1.$$

Тогда любое решение системы уравнений (1) из класса $C_2(D)$ представимо в виде

$$u(x, y) = \exp \left[-\omega_{a_2}^2(x, y) - \frac{a_2(0, 0)}{y} \arctg \frac{x}{y} \right] \times \\ \times \left(\psi_1(y) + \int_0^x \frac{f_2(t, y)}{t^2 + y^2} \exp \left[\omega_{a_2}^2(t, y) + \frac{a_2(0, 0)}{y} \arctg \frac{t}{y} \right] dt \right) \equiv \\ \equiv T_1(\psi_1(y), f_2(x, y)), \quad (2)$$

тогда

$$\psi_1(y) = \exp[-\omega_{b_2}^2(0, y) + b_2(0, 0)w_1(y)] \\ \left(c_1 + \int_0^y \frac{f_3(0, s)}{s^2} \exp[\omega_{b_2}^2(0, s) - b_2(0, 0)w_1(s)] ds \right) \equiv N_1(c_1, f_3(0, y)), \quad (3)$$

$$\omega_{a_2}^2(x, y) = \int_0^x \frac{a_2(t, y) - a_2(0, 0)}{t^2 + y^2} dt, \quad \omega_{b_2}^2(0, y) = \int_0^y \frac{b_2(0, s) - b_2(0, 0)}{s^2} ds,$$

$$w_1(y) = \frac{1}{y}, \quad c_1 - \text{произвольная постоянная.}$$

При этом

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = O(\exp[b_2(0, 0)w_1(y)]),$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \exp[-b_2(0, 0)w_1(y)] \lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = c_1,$$

$$u(x, y) = O \left(\exp \left[-\frac{a_2(0, 0)}{y} \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \right] \right) \text{ при } y \rightarrow 0 \text{ и } x \neq 0.$$

Замечание 1. Утверждение теоремы 1 остается в силе при выполнении условий

- 1) $a_2(0, 0) > 0, b_2(0, 0) < 0;$
- 2) $f_2(x, y) = o(\exp[-\frac{a_2(0, 0)}{y} \operatorname{arctg} \frac{x}{y}] r^{\mu_1}), \mu_1 > 1,$
 $f_3(0, y) = o(\exp[b_2(0, 0) \omega_1(y)] y^{\mu_2}), \mu_2 > 1.$

Замечание 2. Решение вида (1), (2) при выполнении условий замечаний (1) имеет поведение

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = 0,$$

$$u(x, y) = 0 \quad \text{при } y \rightarrow 0 \text{ и } x \neq 0.$$

Задача A₁. Требуется найти решение системы уравнений (1) из класса $C_2(D)$ по начальному условию

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \exp[-b_2(0, 0) w_1(y)] \lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = m_1,$$

где m_1 – заданная известная постоянная.

О разрешимости задачи A_1 получено следующее утверждение

Теорема 2. Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда единственное решение задачи A_1 дается формулами (2), (3) при $c_1 = m_1$.

Литература

1. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.
2. Михайлова Л.Г. Некоторые переопределенные системы уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями. Душанбе: Дониш, 1986. 115 с.
3. Раджабов Н. Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами. Душанбе: Изд. ТГУ, 1992. 236 с.
4. Раджабов Н., Мухамед Эльсаид Абдель Аал. Переопределенная линейная система второго порядка с сингулярными и сверхсингулярными линиями. Lap lambert Academic Publishing, Germany, 2011. 234 с.
5. Шамсудинов Ф.М. Интегральные представления решений для одной переопределенной системы дифференциальных уравнений второго порядка с сингулярными коэффициентами // Материалы Международной конференции "Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики". Нальчик: КБНЦ РАН, 2013. С. 282–286.

6. Тасмамбетов Ж.Н. О развитии исследований специальных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка // Материалы международной научно-практической конференции "Информационные технологии: инновации в науке и образовании". Актобе 20-21 февраля 2015. С. 6–17.
7. Шамсуддинов Ф.М. Об исследовании одной переопределенной системы дифференциальных уравнений второго порядка с сингулярной точкой// Материалы международной научно-практической конференции "Информационные технологии: инновации в науке и образовании". Актобе 20-21 февраля 2015. С. 247-250.

УДК 519.71

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ БЕЙЛИ

© Шогенова Е.М.

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
"Институт прикладной математики и автоматизации" (Россия, Нальчик)
e-mail: shogenovae@inbox.ru

В области $D = \{(x, y) : 1 < x < l, 1 < y < r\}$ рассмотрим стационарное уравнение Бейли [1, с. 128]:

$$(y^2 - xy)u_{xy} + \rho(1 - y)u_y = 0. \quad (1)$$

Исследуется следующая

Задача А. Найти решение $u = u(x, y)$ в области $\bar{D} \setminus \{(x, y) : y - x = 0\}$ уравнения (1) из класса $C^2(D)$, удовлетворяющее следующим условиям

$$\begin{aligned} u(1, y) + \beta \int_1^\alpha u(x, y) dx &= \varphi_1(y), \quad 1 < y \leq r, \\ u(x, 1) &= \varphi_2(x), \quad 1 \leq x \leq l, \end{aligned}$$

где $\varphi_1(y) \in C^1[1, r]$, $\varphi_2(x) \in C[1, l]$ – заданные функции, β - const, $1 < \alpha < l$.

Относительно однозначной разрешимости задачи А для уравнения (1) доказана следующая

Теорема. Пусть

$$\beta \neq \frac{(y-1)^{\rho \frac{1-y}{y}} (y - \rho(1-y))}{y \left[(y-1)^{\rho \frac{1-y}{y} + 1} - (y-\alpha) |y-\alpha|^{\rho \frac{1-y}{y}} \right]},$$

тогда существует единственное решение задачи A, представимое в виде

$$u(x, y) = \varphi_2(x) + \\ + \int_1^y \frac{\varphi'_1(t) |t-x|^{\rho \frac{1-t}{t}} (\rho(1-t) + t)}{(\rho(1-t) + t) (t-1)^{\rho \frac{1-t}{t}} + \beta t \left[(t-1)^{\rho \frac{1-t}{t} + 1} - (t-\alpha) |t-\alpha|^{\rho \frac{1-t}{t}} \right]} dt.$$

Нелокальным задачам с инегральными условиями посвящены работы [2]-[4].

Литература

1. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. 301 с.
2. Нахушева З.А. Об одной нелокальной задаче для уравнений в частных производных// Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 1. С. 171-174.
3. Пулькина Л.С. Смешанная задача с интегральным условием для гиперболического уравнения// Матем. заметки. 2003. Т. 74, Вып. 3. С. 435-445.
4. Пулькина Л.С. Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями 1 и 2 рода// Изв. вузов. Матем. 2012. № 4. С. 74-83.

УДК 519.8

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭНДОКРИННЫХ ЗАБОЛЕВАНИЙ ЩИТОВИДНОЙ ЖЕЛЕЗЫ НА ОСНОВЕ МАТРИЧНЫХ МОДЕЛЕЙ ЛЕСЛИ

© Шогенова З.А.

Институт информатики электроники и компьютерных технологий
Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова
(Россия, Нальчик)
e-mail: shogenova.88@mail.ru

На сегодняшний день в области медицины достигнуты большие успехи, но проблема эндокринных заболеваний щитовидной железы

является актуальной для большинства стран мира, и Кабардино–Балкарская республика не исключение. Северный Кавказ по своим природным особенностям является зоной распространения эндемичных заболеваний щитовидной железы.

По данным министерства здравоохранения Кабардино–Балкарской республики анализ динамики общей заболеваемости взрослого населения КБР выявил тенденцию к росту показателей с темпом прироста в 2010 г. в 7,7 %. Наиболее заметный рост показателей произошел в классе болезней эндокринной системы (на 33,5 %), новообразований (на 33,6 %).

“Классическим” заболеванием эндокринной системы являются заболевания щитовидной железы. За последние 5–10 лет количество заболеваний щитовидной железы в КБР резко увеличилось, даже не смотря на успехи современной медицины.

Гипотиреоз – наиболее распространенная форма функциональных нарушений щитовидной железы [1]. Распространенность гипотиреоза составляет около 1%, среди женщин репродуктивного возраста – 2%, в пожилом возрасте возрастает до 10%.

Начало математическому моделированию положил Томас Роберт Мальтус еще в 1798 году, рассмотрев простейшую популяцию, однородную по всем признакам, и положив скорость ее роста пропорциональной ее текущей численности [2]. Согласно этому численность такой популяции будет неограниченно расти по экспоненциальному закону:

$$\frac{dN}{dt} = rN \Rightarrow N(t) = N_0 \exp(rt). \quad (1)$$

Качественный переход к математическому описанию популяции, распределенных по какому – то биологическому параметру, был сделан П. Лесли, который с позиции матричной алгебры рассмотрел возрастное распределение особей [3].

Модель динамики популяции, разделённой на n возрастных классов, служит линейное разностное уравнение:

$$x(t+1) = Lx(t), t = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где вектор – столбец $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$ описывает структуру популяции ($x_j(t)$ – численность j -го возрастного класса, $j = 1, \dots, n, \geq n/2$), а $(n \times n)$ - матрица L имеет вид:

$$L = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ s_1 & 0 & & & \\ & s_2 & \ddots & 0 & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & s_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

с неотрицательной первой строкой из коэффициентов рождаемости $b_j \geq 0 (j = 1, \dots, n)$ и положительными коэффициентами дожития на первой по диагонали $0 < s_i \leq 1 (i = 1, \dots, n - 1)$.

Уравнение (2) проецирует заданное начальное состояние популяции $x(0)$ в будущее:

$$x(t) = L^t x(0), t = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

и потому матрица L называется *проекционной матрицей* [3].

Так как вероятность возникновения заболевания щитовидной железы в отдельных возрастных группах разная для мужчин и для женщин, то необходимо учитывать половозрастную структуру населения, в этом случае адекватной моделью служит матричное описание (модели Лесли) [4,5].

По возрастам динамика вектора возрастной структуры населения описывается с помощью следующего матричного соотношения:

$$n(t+1) = L n(t). \quad (5)$$

Здесь $n(t)$ – вектор, компоненты которого есть численность отдельных возрастных групп, а L – матрица ”передвижки по возрастам” (матрица Лесли):

$$n(t) = \begin{pmatrix} n_0(t) \\ n_1(t) \\ \cdots \\ n_X(t) \end{pmatrix}; L = \begin{pmatrix} F_0 & F_1 & \cdots & F_{X-1} & F_X \\ P_0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & P_1 & & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & P_{X-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где $n_x(t)$ – численность x -й возрастной группы (обычно – возраста от x до $x + 1$ лет) в момент времени t ; индекс ”0” соответствует младшей, а ” X ” – старшей возрастным группам; P_x , $x = 0, X$ – коэффициенты передвижки [6], равные вероятности перехода (дожития) из x -й возрастной группы в $x + 1$ -ю группу к следующему

моменту времени $(t+1)$; Fx , $x = 0$, X – возрастные коэффициенты рождаемости, скорректированные с учетом младенческой смертности.

Получение математической модели динамики риска эндокринных заболеваний имеет неоспоримое преимущество по сравнению с данными численных расчетов. Затруднен общий анализ полученных данных вычислительного эксперимента, велика зависимость конечного результата от величины шага расчетов, сложен процесс выявления влияния отдельных факторов на заболеваемость. Вместе с этим для построения математической модели и определения параметров необходима статистическая информация о заболеваемости [7].

Литература

1. Балаболкин М.И., Гаврилюк Л.И. Диагностический справочник эндокринолога. Кишинев: Карта молдавеняска, 1984. 204 с.
2. Романовский Ю.М., Степанова Н.В. Математическая биофизика. М.: Наука, 1988. 304 с.
3. Leslie P.H. On the use of matrices in certain population mathematics // Biometrika. 1945. XXXV. P. 183–212.
4. Полуэтюдов Р.А. Динамическая теория биологических популяций. Изд-во: "Наука". Главная редакция Физико-математической литературы, Москва 1974. 452 с.
5. Ризниченко Г. Ю. Лекции по математическим моделям в биологии Изд-во РХД, М-Ижевск, 2011. 33 с.
6. Кваша А.Я., Ионцева В.А. Современная демография. М., 1995. С. 159–163.
7. Пастарнак В.Н., Афашокова К.М., Маремкулов И.А. и др. Кабардино-Балкария в цифрах 2010, К12 Стат.сб. Нальчик: Кабардино-Балкарстат, 2010. 270 с.

УДК 519.7

АЛГОРИТМ СТОХАСТИЧЕСКИ УСРЕДНЕННОГО ГРАДИЕНТА НА БАЗЕ АГРЕГИРУЮЩЕЙ ФУНКЦИИ

© Шибзухов З.М.¹, Казаков М.А.²

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
"Институт прикладной математики и автоматизации" (Россия, Нальчик)

¹e-mail: szport@gmail.ru

²e-mail: f_wolfgang@mail.ru

Метод минимизации эмпирического риска [1] является признанным методом решения задач параметрической регрессии. Это позволяет при настройке параметров при помощи медианы не терять полезную часть распределения потерь, которая расположена выше значения медианы, разделяющей упорядоченный по возрастанию набор потерь на две равные части.

Поскольку градиент

$$grad\mathbb{M}_p\{\ell_1(\mathbf{w}), \dots, \ell_N(\mathbf{w})\} = \frac{\sum_{k=1}^N -p''_{uz}(\bar{z}, \ell_k(\mathbf{w})) grad\ell_k(\mathbf{w})}{\sum_{k=1}^N p''_{uu}(\bar{z}, \ell_k(\mathbf{w}))},$$

где $\bar{z} = \mathbb{M}_p\{\ell_1(\mathbf{w}), \dots, \ell_N(\mathbf{w})\}$ является взвешенной суммой градиентов от соответствующих потерь, то можно применить метод, который лежит в основе алгоритма SAG (Stochastic Average Gradient) [2,3]. Построим на основе этого метода алгоритм PBSAG – Penalty Based Stochastic Average Gradient – стохастически усредненного градиента на базе усредняющей верной агрегирующей функции. Схема адаптации параметров \mathbf{w} и u имеет вид:

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_{t+1} &= \mathbf{w}_t - h_t \bar{\mathbf{g}}_t, \\ u_{t+1} &= u_t - \tau_t \bar{q}_t,\end{aligned}$$

где

$$\bar{\mathbf{g}}_t = \frac{\sum_{k=1}^N \mathbf{g}_{k,t}}{\sum_{k=1}^N g_{k,t}}.$$

Значение \bar{q}_t для поиска значения усредняющей агрегирующей функции может обновляться в соответствии с одним из следующих пра-

вил $\bar{q}_t = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N q_{k,t}$ или $\bar{q}_t = \frac{\sum_{k=1}^N q_{k,t}}{\sum_{k=1}^N g_{k,t}}$ в зависимости от того использу-

ется метод градиентного спуска или метод Ньютона для поиска минимального значения усредняющей агрегирующей функции \mathbb{M}_p . Векторы из набора $\{\mathbf{g}_{k,t}: k = \overline{1, N}\}$ обновляются по следующему правилу:

$$\mathbf{g}_{k,t+1} = \begin{cases} -p''_{uz}(u_t, \ell_k(\mathbf{w}_t)) \text{grad} \ell_k(\mathbf{w}_t), & \text{если } k = k(t) \\ \mathbf{g}_{k,t}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Значения из наборов $\{g_{k,t}: k = \overline{1, N}\}$ и $\{q_{k,t}: k = \overline{1, N}\}$ обновляются по следующим правилам:

$$g_{k,t+1} = \begin{cases} p''_{uu}(u_t, \ell_k(\mathbf{w}_t)), & \text{если } k = k(t) \\ g_{k,t}, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$q_{k,t+1} = \begin{cases} p'_u(u_t, \ell_k(\mathbf{w}_t)), & \text{если } k = k(t) \\ q_{k,t}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Алгоритму PBSAG на каждом шаге необходимо хранить по одному градиентному вектору и два значения на каждый пример из обучающего набора данных, т.е. $N(m + 2)$ вещественных чисел, где m – ранг вектора параметров \mathbf{w} . Поэтому его следует применять, если есть память для хранения такого объема данных.

Нетрудно заметить, что если $p(u, z) = (u - z)^2/2$, то схема алгоритма PBSAG редуцируется к схеме алгоритма SAG:

$$\mathbf{w}_{t+1} = \mathbf{w}_t - h_t \mathbf{g}_t,$$

где

$$\mathbf{g}_t = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{g}_{k,t},$$

$$\mathbf{g}_{k,t+1} = \begin{cases} \text{grad} \ell_k(\mathbf{w}_t), & \text{если } k = k(t) \\ \mathbf{g}_{k,t}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Таким образом схема алгоритма PBSAG является естественным обобщением схемы алгоритма SAG [2,3], когда для вычисления средних потерь используется усредняющая агрегирующая функция, основанная на штрафной, вместо среднего арифметического.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 15-01-03381 и гранта ОНИТ РАН.

Литература

1. Vapnik V. The Nature of Statistical Learning Theory. Information Science and Statistics. 2000. Springer-Verlag.

2. *Le Roux N., Schmidt M., Bach F.* A Stochastic Gradient Method with an Exponential Convergence Rate for Finite Training Sets. nips.org, 2012. <http://arxiv.org/abs/1202.6258>
3. *Schmidt M., Le Roux N., Bach F.* Minimizing Finite Sums with the Stochastic Average Gradient. arXiv.org, 2013. <http://arxiv.org/abs/1309.2388>

UDC 519.21

ON THE CONSTRUCTION OF LYAPUNOV FUNCTIONS FOR THE SECOND ORDER LINEAR STOCHASTIC SYSTEMS AND STABILITY CONDITIONS

© Shumafov M.M.¹, Tlyachev V.B.²

Adyge State University (Russia, Maykop)

¹e-mail: magomet_shumaf@mail.ru

²e-mail: tlyachev@adygnet.ru

Introduction. In 1982 A.M. Lyapunov published his famous doctoral dissertation [1], where he introduced what he called his direct (or second) method, which later became known as method of Lyapunov functions, as a method of investigation stability of solutions of ordinary deterministic differential equations.

The method of Lyapunov functions has been developed to deal with stability of stochastic systems by many authors. The first suggestion of Lyapunov-like theory appeared in the papers by Bertran and Sarachik [2], and Kats and Krasovskii [3]. After that the stability of stochastic differential systems was widely investigated with the help of Lyapunov functions method in a sequence of papers by Kushner and Khasminskii. Their results can be found in books [4] and [5] which are the first monographs in world literature, where stability of stochastic dynamical systems is studied by using stochastic Lyapunov functions. In [6] the stochastic Lyapunov functions are constructed for some second order special linear and nonlinear (nonlinearities of exponential function type) stationary stochastic systems. In several sections of monographs [4] and [5] a sequence of stochastic functions constructed for some one- and two-dimensional stochastic systems are presented. In [7] the results of note [6] were generalized and stochastic functions were constructed for second order nonlinear autonomous stochastic differential equations.

The object of this article is to present stochastic functions and on these base to obtain the stochastic stability conditions for second order linear stationary stochastic systems. These results can be used

when constructing stochastic functions for nonlinear two-dimensional stochastic systems, and also under linear stability analysis of nonlinear stochastic systems in the neighborhood of the origin.

Main results. Consider a second order linear stochastic system

$$\begin{cases} dx(t) = (ax(t) + by(t))dt + (px(t) + qy(t))d\xi(t), \\ dy(t) = (cx(t) + dy(t))dt + (rx(t) + sy(t))d\xi(t), \end{cases} \quad (1)$$

where $x(t) = x(t, \omega)$, $y(t) = y(t, \omega)$ are scalar stochastic processes on $t \geq 0$, $\xi(t) = \xi(t, \omega)$ is a Wiener process, $dx(t)$, $dy(t)$ and $d\xi(t)$ are stochastic differentials in the sense of Ito, respectively; $a, b, c, d; p, q, r, s$ are real constants.

The system (1) can be interpreted as a deterministic linear system, the coefficients of which a, b, c and d are perturbed by Gaussian «white» noise $\dot{\xi}(t)$ with intensity p^2, q^2, r^2 and s^2 , respectively.

For the system (1) we construct stochastic Lyapunov functions in the quadratic forms in x and y , and on the basis of functions constructed we give necessary and sufficient conditions of the mean square exponential stability (from this it follows asymptotic stability on the whole). In the case of lack of «fluctuation» members ($p = q = r = s = 0$) in (1) these conditions reduced to well-known Routh-Hurwitz stability conditions.

Below one of our results is presented. We formulate theorem on stochastic stability of trivial solution $(x(t) \equiv 0), y(t) \equiv 0$ of the system (1). For simplicity we assume that only one of the coefficients p, q, r, s is different from zero.

Theorem. *Let in system (1) $p \neq 0, q = r = s = 0$. Then for mean square exponential stability of trivial solution $(x(t) \equiv 0), y(t) \equiv 0$ of the system (1) it is necessary and sufficient that*

- 1) $a + d < 0, ad - bc > 0,$
- 2a) $p^2 < \min \left\{ \frac{2(a+d)(bc-ad)}{d^2+(ad-bc)}, \frac{u+\sqrt{u^2+c^2v}}{c^2} \right\},$
if $c \neq 0$, where
 $u = (a+d)(c^2 + d^2 + ad - bc) - 2c(ac + bd),$
 $v = 4(ad - bc)[(a+d)^2 + (b - c)^2];$
- 2b) $p^2 < -2a$, if $c = 0$ ($a < 0$).

In addition, for every solution $(x(t), y(t))$ of the system (1) the following relation holds:

$$x(t) \rightarrow 0, y(t) \rightarrow 0 \text{ as } t \rightarrow +\infty$$

with probability 1.

The theorem is proved by construction the stochastic Lyapunov function

$$V(x, y) = (c^2 + d^2 + ad - bc)x^2 + 2(ac + bd + cp^2/2)xy + \\ + (a^2 + b^2 + ad - bc + p^2(a + d)/2)y^2.$$

Example. Consider the equation of damped harmonic oscillator, perturbed by «white» noise

$$\ddot{x}(t) + (k + \sigma_2 \dot{\xi}(t))\dot{x}(t) + (\omega^2 + \sigma_1 \dot{\xi}(t))x(t) = 0, \quad (2)$$

where $\dot{\xi}(t)$ is Gaussian white noise.

The equation (2) is regarded as Ito's stochastic system of differential equations of the form (1).

Proposition. *The trivial solution $(x(t) \equiv 0), y(t) \equiv 0$ ($y(t) = \dot{x}(t)$) of the stochastic system, corresponding to equation (2), is mean square exponentially stable if and only if the following inequalities is true:*

$$a) \sigma_1^2 < 2k\omega^2 \text{ in the case } \sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = 0;$$

$$b) \sigma_2^2 < 2k \text{ in the case } \sigma_1 = 0, \sigma_2 \neq 0;$$

$$c) \sigma^2(\omega^2 + 1) < 2k\omega^2 \text{ in the case } \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma.$$

The Proposition is established by construction of corresponding stochastic Lyapunov functions.

References

1. *Lyapunov A.M.* The general problem of the stability of motion. London: CRC Press, 1992. 270 p.
2. *Bertram J.E., Sarachik P.E.* On the stability of systems with random parameters// Trans. IRE-PG-CT. 1959. V. 5. P. 260–270.
3. *Kats I.I., Krasovskii N.N.* On the stability of systems with random parameters// Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1960. V. 24. Issue 5. P. 1225–1246.
4. *Kushner H.J.* Stochastic stability and control. New-York-London: Academic Press, 1967. 160 p.
5. *Khasminskii R.Z.* Stochastic stability of differential equations. Norwell: Kluwer Academic. Publishers, 1980. 342 p.
6. *Kushner H.J.* On the construction of stochastic Liapunov functions// IEEE Transactions on Automatic Control. 1965. V. 10. Issue 4. P. 477–478.

7. Shumafov M.M. On the construction of Lyapunov functions for some nonlinear second order stochastic differential equations and problems of stability// Differential Equations. 1981. V. 17. Issue 6. P. 1143–1145.

УДК 517.954

**АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ
ЗАДАЧИ КАТТАБРИГА ДЛЯ ОБОЩЕННОГО
УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ
ХАРАКТЕРИСТИКАМИ**

© Шхагапсоев А.М.

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
"Институт прикладной математики и автоматизации" (Россия, Нальчик)
e-mail: shkhagapsevamur@yandex.ru

Уравнение третьего порядка с кратными характеристиками содержащее производную первого порядка по времени

$$u_y = u_{xxx} + f(x, y),$$

впервые было рассмотрено в работах [1-3]. Полученные в них результаты были обобщены для уравнения $(2n - 1)$ –го порядка в работе [4]. В [5] построены фундаментальные решения с применением преобразования Лапласа, теории потенциалов и получены оценки этих решений.

Для уравнения

$$u_y = u_{xxx} + a_1(x, y)u_x + a_2(x, y)u + f(x, y),$$

в работе [6, с. 154] доказана единственность решения и построена функция Грина краевой задачи Каттабрига.

В настоящей работе методом энергетических неравенств получена априорная оценка решения краевой задачи Каттабрига для уравнения с кратными характеристиками с дробной производной Капуто по времени.

Задача Каттабрига.

В прямоугольной области $D = \{(x, y) : 0 < x < r, 0 < y < h\}$ рассмотрим уравнение

$$\partial_{0y}^\alpha u = \lambda_1 u_{xxx} + \lambda_2 u_x + \lambda_3 u + f(x, y), \quad (1)$$

с граничными условиями

$$u(0, y) = 0, u(r, y) = 0, u_x(0, y) = 0, 0 < y < h, \quad (2)$$

и начальными условиям

$$u(x, 0) = \tau(x), 0 < x < r, \quad (3)$$

где

$$\partial_{0y}^\alpha u(x, y) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^y \frac{u_\tau(x, \tau)}{(y-\tau)^\alpha} d\tau$$

– дробная производная Капуто порядка α , $0 < \alpha < 1$ [7].

В дальнейшем будем предполагать существование решения $u(x, y) \in C^{3,1}(D)$ задачи (1)–(3), где $C^{3,1}(D)$ – класс функций, непрерывных вместе со своими частными производными третьего порядка по x и первого порядка по y на D .

Введем следующие обозначения:

$$\|u(x, y)\|_0^2 = \int_0^r u^2(x, y) dx, \quad D_{0y}^{-\alpha} u(x, y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^y \frac{u(x, \tau)}{(y-\tau)^{1-\alpha}} d\tau$$

– дробный интеграл Римана-Лиувилля порядка α [7].

Справедлива следующая

Теорема. *Если $\lambda_1 > 0$ и $f(x, y) \in C(D)$, то для решения $u(x, y)$ задачи (1)–(3) справедлива априорная оценка*

$$\|u(x, y)\|_0^2 + D_{0y}^{-\alpha} \|u_x(x, y)\|_0^2 \leq M \left(D_{0y}^{-\alpha} \|f(x, y)\|_0^2 + \|\tau(x)\|_0^2 \right), \quad (4)$$

$$\text{где } M = \max \left\{ 1, \frac{1}{4\varepsilon} \right\} / \min \left\{ -\frac{(\varepsilon+\lambda_3)r^2}{2}, 1 \right\}.$$

Из априорной оценки (4) следует единственность и непрерывная зависимость решения задачи (1)–(3) от входных данных.

Литература

1. Block H. Sur les équations linéaires aux dérivées partielles à caractéristiques multiples // Ark. mat., astron., fys. 1912. Vol. 7, No. 13. P. 1–34.
2. Del Vecchio E. Sulle equazioni $Z_{xxx} - Z_y + \phi_1(x, y) = 0$, $Z_{xxx} - Z_{yy} + \phi_2(x, y) = 0$ // Mem. Real acad. cienc. Torino. Ser.2. 1915. Vol. 66. P. 1–41.
3. Del Vecchio E. Sulle deux problèmes d'intégration pour les équations paraboliques $Z_{xxx} - Z_y = 0$, $Z_{xxx} - Z_{yy} = 0$ // Ark. mat., astron., fys. 1916. Vol. 11. P. 32 – 43.

4. Cattabriga L. Potenziali di linea e di dominio per equazioni non paraboliche in due variabili a caratteristiche multiple // Rend. Semin. mat. Univ. Padova. 1961. №31. P. 1–45.
5. Cattabriga L. Un problema al contorno per una equazione di ordine dispary // Analli della scuola normale superior di pisa fis e mat. 1959. Vol. 13, №. 2. P. 163–169.
6. Джусураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: ФАН. 1979. 236 с.
7. Алиханов А.А. Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка // Дифференц уравнения. 2010. Т. 46, №5. С. 658–664.

УДК 517.927

ОЦЕНКА ПЕРВОГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С РАЗЛИЧНЫМИ НАЧАЛАМИ

© Энеева Л.М.

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
"Институт прикладной математики и автоматизации" (Россия, Нальчик)
e-mail: eneeva72@list.ru

Рассмотрим спектральную задачу

$$D_{0x}^\alpha \partial_{1x}^\alpha u(x) - \lambda u(x) = 0, \quad u(0) = u(1) = 0,$$

где D_{0x}^α и ∂_{1x}^α — операторы дробного дифференцирования Римана-Лиувилля и Капуто порядка α ($0 < \alpha < 1$) с началами в точке $x = 0$ и $x = 1$, соответственно; λ — спектральный параметр; $x \in]0, 1[$.

Ранее, в работе [1] показано, что рассматриваемая задача имеет бесконечное число собственных значений (вещественных и положительных) и собственных функций, образующих полную ортогональную систему в $L_2(0, 1)$. В настоящей работе найдена нижняя оценка для первого собственного значения.

Литература

1. Энеева Л.М. Краевая задача для дифференциального уравнения с производными дробного порядка с различными начальными. // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки, 2015. Т. 3, № 2(11). С. 39–44.

ФОРМУЛА ЛАГРАНЖА ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© Эфендиев Б.И.

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
"Институт прикладной математики и автоматизации" (Россия, Нальчик)
e-mail: beslan_efendiev@mail.ru

В интервале $0 < x < l$ рассмотрим два уравнения

$$L_1 u[x] \equiv u''(x) + aD_{0x}^{[\alpha, \beta]} u(x) + bu'(x) + cD_{0x}^{[\gamma, \delta]} u(x) + du(x) = f(x), \quad (1)$$

$$L_2 v[x] \equiv v''(x) + a\partial_{0x}^{[\alpha, \beta]} v(x) + bv'(x) + c\partial_{0x}^{[\gamma, \delta]} v(x) + dv(x) = g(x), \quad (2)$$

где (см. [1; 2, с. 33]),

$$D_{0x}^{[\alpha, \beta]} u(x) = \int_{\alpha}^{\beta} D_{0x}^s u(x) ds, \quad \partial_{0x}^{[\alpha, \beta]} u(x) = \int_{\alpha}^{\beta} \partial_{0x}^s u(x) ds$$

– оператор интегродифференцирования сегментного порядка $[\alpha, \beta]$ и регуляризованный оператор дифференцирования сегментного порядка $[\alpha, \beta]$ соответственно,

$$D_{0x}^s u(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-s)} \int_0^x \frac{u(t)dt}{(x-t)^{s+1}}, & s < 0, \\ u(x), & s = 0, \\ \frac{d^n}{dx^n} D_{0x}^{s-n} u(x), & n-1 < s \leq n, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

– оператор дробного интегродифференцирования Римана-Лиувилля порядка s [1; 2, с. 9], $\Gamma(s)$ – гамма-функция Эйлера,

$$\partial_{0x}^s u(x) = D_{0x}^{s-n} u^{(n)}(x), \quad n-1 < s \leq n, \quad n \in \mathbb{N}$$

– регуляризованный оператор дробного дифференцирования порядка s [2, с. 11], $1 < \alpha < \beta < 2$, $0 < \gamma < \delta < 1$, a, b, c, d – const.

Регулярным решением уравнения (1) в области $]0, l[$ назовем функцию $u = u(x)$, принадлежащую классу $L[0, l] \cap C^2[0, l[$ и удовлетворяющую уравнению (1) в области $]0, l[$.

Регулярным решением уравнения (2) в области $]0, l[$ назовем функцию $v = v(x)$, имеющую абсолютно непрерывную на $[0, l]$ производную первого порядка и удовлетворяющую уравнению (2) в области $]0, l[$.

Обозначим через $(h_1 * h_2)(x) = \int_0^x h_1(x-t)h_2(t)dt$ свертку Лапласа функций $h_1(x)$ и $h_2(x)$.

Теорема. Пусть $u(x), v(x)$ – регулярные решения уравнений (1), (2) $u, L_1 u \in L[0, l]$. Тогда, справедлива формула

$$(v * L_1 u)(x) = (u * L_2 v)(x) + F(x), \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} F(x) = & v(0) \left[u'(x) + aD_{0x}^{[\alpha-1, \beta-1]} u(x) + bu(x) + cD_{0x}^{[\gamma-1, \delta-1]} u(x) \right] + \\ & + v'(0) \left[u(x) + aD_{0x}^{[\alpha-2, \beta-2]} u(x) \right] - u(0) \left[v'(x) + bv(x) \right] - \\ & - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[u'(\varepsilon) + aD_{0\varepsilon}^{[\alpha-1, \beta-1]} u(\varepsilon) \right] v(x). \end{aligned}$$

Соотношение (3) есть формула Лагранжа для дифференциальных операторов L_1 и L_2 .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №16-01-00462-а).

Литература

1. Нахушев А. М. О положительности операторов непрерывного и дискретного дифференцирования и интегрирования весьма важных в дробном исчислении и в теории уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 1. С. 101-109.
2. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

УДК 517.929.7, 517.954

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТНОГО ПОРЯДКА

© Юлдашева А.В.

Национальный университет Узбекистана (Узбекистан, Ташкент)
e-mail: yuasv86@mail.ru

Рассмотрим следующую задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} = f(t, x, u, u_t), \quad (t, x) \in D \{ 0 < t < T, 0 < x < \pi \}, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$u(0, x) = \varphi(x), u_t(T, x) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

$$\frac{\partial^i u}{\partial x^i} |_{x=0} = \frac{\partial^i u}{\partial x^i} |_{x=\pi}, \quad i = 0, 1, \dots, 2k-1, \quad 0 \leq t \leq T,$$

здесь $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(t, x, u, u_t)$ – заданные функции, определенные на $[0, \pi]$ и $\overline{D} \times R^2$ соответственно и $u(t, x)$ – решение задачи.

Определение 1. Функцию $v(t, x) \in C(\overline{D})$ будем называть test function (тест функцией), если она имеет непрерывные производные участвующие в уравнении, а также удовлетворяет краевым и следующим условиям

$$v(0, x) = v_t(T, x) = 0.$$

Определение 2. Функцию $u(t, x) \in C(\overline{D})$, удовлетворяющую интегральному равенству

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^\pi \left\{ u \left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^{2k} v}{\partial x^{2k}} \right] - f(t, x, u, u_t) v \right\} dx dt + \\ & + \int_0^\pi \psi(x) v(T, x) dx + \int_0^\pi \varphi(x) v_t(0, x) dx = 0 \end{aligned}$$

для произвольной функции $v(t, x)$ назовем слабым обобщенным решением рассматриваемой задачи.

В работе доказывается единственность, существование, а так же непрерывная зависимость слабого обобщенного решения от данных. Сначала находится тест функция для поставленной задачи, а потом обобщенное решение определяется с помощью этой функции. Слабое решение ищется в виде ряда Фурье с неизвестными коэффициентами, которые определяются как решение системы интегральных уравнений. Решение найдено в банаховом пространстве B_T .

Литература

1. Chandrov H.I. On mixed problem for a class of quasilinear hyperbolic equation, Tbilisi, 1970.
2. Halilov H. On mixed problem for a class of quasilinear pseudo-parabolic equations, Applicable Analysis, 2000. 75, №1-2. P. 61-71.

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, ОПИСЫВАЕМОЙ ДРОБНЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

© Якубов Р.А.

Дагестанский государственный университет (Россия, Махачкала)
e-mail: yakubovaz@mail.ru

Несмотря на то, что качественная теория дифференциальных уравнений оказалась адекватным математическим аппаратом для моделирования влений в целом ряде областей, и, несмотря на значительные усилия по развитию теории нелинейных колебательных процессов, наши знания в этой области далеки от своей полноты и необходимо развитие принципиально новых подходов. Математический аппарат дифференциальных уравнений в производных дробного порядка может стать основой для такого подхода, что позволяет учитывать эффекты памяти при исследовании колебательных процессов в динамических системах.

В работах [1,2] вопросы, связанные с синхронизацией импульсов в системе с трехмерным фазовым пространством на примере системы Ресслера. В данной работе исследована фазовая плоскость динамической системы, описываемой системой дифференциальных уравнений Ресслера с производными дробного порядка.

Рассмотрим автономную систему Ресслера, описываемую системой дифференциальных уравнений с производными дробного порядка:

$$\begin{aligned}\partial_{0t}^\alpha x &= -y - z, \\ \partial_{0t}^\alpha y &= x + py, \\ \partial_{0t}^\alpha z &= q + z(x - r),\end{aligned}\tag{1}$$

где $\partial_{0t}^\alpha x = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{x'(s)}{(t-s)^\alpha} ds$ – дробная производная Caputo, p, q, r , $0 < \alpha \leq 1$ – параметры системы, x, y, z – динамические переменные.

Система (1) – автоколебательная система с трехмерным фазовым пространством.

Будем полагать, что $r^2 - 4pq \geq 0$. В этом случае состояниями равновесия системы будут точки $x_\pm = \frac{r \pm \sqrt{r^2 - 4pq}}{2}$, $y_\pm = -\frac{r \pm \sqrt{r^2 - 4pq}}{2p}$,

$$z_\pm = \frac{r \pm \sqrt{r^2 - 4pq}}{2p}.$$

Система (1) исследована численным методом. Для численного решения задачи (1) введем по переменной t равномерную сетку с шагом $\tau > 0$:

$$\omega_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, 2, \dots\}.$$

Пользуясь аппроксимацией дробной производной [3] получим следующие расчетные формулы

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau} \sum_{k=0}^n (x_{k+1} - x_k)(t_{n-k+1}^{1-\alpha} - t_{n-k}^{1-\alpha}) &= -y_n - z_n, \\ \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau} \sum_{k=0}^n (y_{k+1} - y_k)(t_{n-k+1}^{1-\alpha} - t_{n-k}^{1-\alpha}) &= x_n + py_n, \\ \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau} \sum_{k=0}^n (z_{k+1} - z_k)(t_{n-k+1}^{1-\alpha} - t_{n-k}^{1-\alpha}) &= q + z_n(x_n - r), \\ x_0 = a, \quad y_0 = b, \quad z_0 = c. \end{aligned} \quad (2)$$

Установлено, что при переходе к дробным производным в фазовой плоскости происходят топологические изменения. При этом в системе происходит бифуркация рождения устойчивой и неустойчивой положений равновесия вокруг особых точек. Далее из устойчивого положения в результате бифуркации Андронова–Хопфа переходит в устойчивый предельный цикл с каскадом бифуркаций.

Литература

1. Кузнецов А.П., Станкевич Н.В., Тюрюкина Л.В. Особенности синхронизации импульсами в системе с трехмерным фазовым пространством на примере системы Ресслера// Изв. вузов. ПНД. 2006. Т. 14, №6. С. 43–52.
2. Кузнецов А.П., Станкевич Н.В., Тюрюкина Л.В. Стабилизации внешними импульсами системы Ресслера в режиме "убегающей траектории"// Письма в ЖТФ. 2008. Т. 34, вып. 14. С. 68-79.
3. Бейбалаев В.Д., Абдуллаев И. А., Наврузова К.А., Гаджисеева Т.Ю. О разностных методах решения задачи Коши для ОДУ с оператором дробного дифференцирования// Вестник ДГУ, 2014. Вып. 6. С. 53–61.

УДК 519.1

ПОСТРОЧНАЯ ДЕФРАГМЕНТАЦИЯ МАТРИЦЫ РАСПИСАНИЯ

© Якубов А.З., Джамирзаев А.С., Якубов Р.А.

Дагестанский государственный университет (Россия, Махачкала)
e-mail: yakubovaz@mail.ru

Пусть M – матрица $k \times m$, каждый столбец которой содержит $k - n$ нулей и перестановку чисел $1, 2, \dots, n$. Рассматриваются

условия существования матрицы $M^*_{k \times m}$ такой что: а) в каждой строке M^* все ненулевые числа расположены последовательно и не повторяются; б) множество элементов в каждой линии (строке и столбце) M^* - такое же, что в соответствующей линии матрицы M . Такую матрицу будем называть дефрагментированной.

В статье приводится решение для случая $m=7$, когда количество ненулевых элементов в строке M принадлежит множеству $\{1, 6, 7\}$.

Для решения задачи по матрице M строим транспортную сеть $T(M)$, где ограничения потоков по дугам будут следующими: от источника s к каждой из вершин x_p проведена дуга с потоковыми ограничениями $[5, 5]$, от вершины x_p к вершине y_t дуга проведена тогда и только тогда, когда строка множества $M^{(6)}$ или $M^{(7)}$ соответствующая вершине y_t содержит число p , $p = 1, 2, \dots, n$, причем такая дуга имеет потоковые ограничения $[0, 1]$; остальные дуги имеют потоковые ограничения $[0, \infty]$. M^q – множество строк матрицы M , содержащих в точности q ненулевых элементов.

Теорема. Для дефрагментации матрицы M необходимо и достаточно существование допустимого потока в транспортной сети $T(M)$.

Необходимость. Пусть существует матрица M^* , необходимо доказать существование допустимого потока в транспортной сети $T(M)$. В матрице M^* начиная со 2-го по 6-ой столбца находятся ненулевые элементы строк множеств $M^{(6)}$ и $M^{(7)}$. Тогда выберем q -ую строку, входящую либо во множество $M^{(6)}$, либо в $M^{(7)}$, дефрагментированного варианта M^* матрицы M , через m_2, m_3, m_4, m_5 и m_6 обозначим соответственно ненулевые представители 2-его, 3-го, 4-го, 5-го и 6-го столбца данной строки. Пусть данной строке соответствует вершина y_t транспортной сети $T(M)$. Тогда положим поток по дугам $(x_{m_2}, y_t), (x_{m_3}, y_t), (x_{m_4}, y_t), (x_{m_5}, y_t), (x_{m_6}, y_t)$ равным единице. По завершении подобных операций для всех строк, принадлежащих множеству $M^{(6)}$ или $M^{(7)}$ матрицы M^* , положим поток по каждой дуге, выходящей из источника, равный 5, и продолжим по всем дугам, инцидентным вершинам y_t по непрерывности. Получили допустимый поток в транспортной сети $T(M)$.

Достаточность. Пусть теперь в транспортной сети $T(M)$ существует допустимый поток. Тогда, каждая вершина x_p двудольного графа $G(X \cup Y, E)$, образованного вершинами x_p , и y_t и дугами (x_p, y_t) , вдоль которых поток равен 1, имеет степень 5. Известно, что однородный двудольный граф степени n является прямой сум-

мой по ребрам и совершенных паросочетаний [3]. Обозначим через $N^{(2)}, N^{(3)}, N^{(4)}, N^{(5)}$ и $N^{(6)}$ множества, образованные концами ребер, принадлежащих множеству X из соответствующих паросочетаний.

Обнулим матрицу M^* . Поместим множества $N^{(2)}, N^{(3)}, N^{(4)}, N^{(5)}$ и $N^{(6)}$ в 2-ой, 3-ий, 4-ый, 5-ый и 6-ой столбцы матрицы M^* соответственно, следя за тем, чтобы число r из $N^{(d)}$ располагалось в строке с тем же номером, что и у строки из M , откуда выбрано число r . И удалим множества $N^{(d)}$ из соответствующих строк матрицы M .

Расположение элементов в крайних ячейках матрицы M^* , таким образом, чтобы все ненулевые элементы как в 1-ом столбце, так и в 7 столбце были попарно различны, не представляет труда. Теорема доказана.

Литература

1. *Магомедов А.М.* Дефрагментация таблицы перестановок из 4 столбцов// Дискретная математика. Т. 21:4, 2009, С. 95–104.
2. *Якубов А.З.* Моделирование задачи оптимизации расписания потоковыми методами// Сб. трудов международного Российско-болгарского симпозиума "Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики". КБР, Нальчик-Хабез 2010г. С. 271–273.
3. *Оре О.* Теория графов. М., 1978.