Институт математики и математического моделирования МОН РК
Алматы, Казахстан
Институт математики им. В.И. Романовского АН РУз
Ташкент, Узбекистан
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН
Новосибирск, Россия
Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова
Нальчик, Россия
Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН
Нальчик, Россия

B & N A K

VI

INTERNATIONAL CONFERENCE

Non-local boundary value problems and related problems of mathematical biology, informatics and physics

PROCEEDINGS

December 5 – 9, 2021
Nalchik

VI

МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики

МАТЕРИАЛЫ

5 – 9 декабря 2021 г.
Нальчик

УДК 51

М 49

М 49 Материалы VI Международной научной конференции «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики». Нальчик, 2021. 261 с.

В сборнике представлены материалы VI Международной научной конференции «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики» (5–9 декабря 2021 г., Нальчик, Кабардино-Балкарская Республика, Россия).

Мероприятие проводится в рамках Года науки и технологий и инициативы «Навстречу 300-летию РАН», а также приурочено к проведению Международного математического конгресса в г. Санкт-Петербурге в 2022 году.

Оглавление

О некоторых краевых задачах для многомерного аналога системы А.В. Бицадзе

Абдрахманов А.М., Абдрахманова Р.П.

УГАТУ, Уфа, Россия; abdrai@mail.ru

Для многомерного аналога системы А.В. Бицадзе доказывается разрешимость задачи Дирихле и видоизмененной задачи Дирихле. Рассмотрены также системы с переменными коэффициентами и доказаны разрешимость задачи Дирихле и некоторых видоизмененных краевых задач.

Об одной задаче управления, приводящей к нагруженным уравнениям с запаздыванием

Абдуллаев В.М.

ИСУ НАНА, АГУНП, Баку, Азербайджан; vaqif_ ab@rambler.ru

В работе на примере задачи управления с обратной связью нагревом стержня в печи предлагается подход к синтезу управляющих воздействий, использующий результаты замера состояния процесса в заданных точках контроля не только в текущий момент времени t, но и в момент $t-\tau$, где τ – некоторый заданный параметр. Предложена формула линейной зависимости текущего значения управляющего воздействия от замеренных значений в точках замера, включающая неизвестные постоянные параметры обратной связи. В результате задача синтеза управления редуцируется в задачу параметрического оптимального управления нагруженной системой с запаздывающим аргументом по определению оптимальных значений параметров обратной связи, участвующих в формуле зависимости значений управлений от замеренных значений состояния в текущий и предыдущий моменты времени [1-4].

В качестве формулы предлагается использовать линейную зависимость управляющих воздействий от значений состояния в точках замера как в текущий, так и в предыдущий моменты времени. Неизвестные коэффициенты, участвующие в этой формуле, являются параметрами обратной связи. Они определяются минимизацией целевого функционала с использованием численных методов оптимизации первого порядка. Для этого получены формулы градиента целевого функционала по параметрам обратной связи. Приводятся результаты численных экспериментов.

Литература

1. *Нахушев А.М.* Нагруженные уравнения и их применение. М.: Наука, 2012. 232 с.

2. *Ray W.H.* Advanced Process Control. McGraw-Hill Book Company. 1981, 376 p.

3. *Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М.* Об одном подходе к синтезу управления процессами с распределенными параметрами // АиТ. 2012. № 9. С. 3–19.

4. *Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М.* Синтез управления процессом поддержания температуры в одной задаче теплоснабжения // Кибернетика и системный анализ. 2020. Т. 56, № 3. С. 47–59.

О задаче с интегральным условием склеивания для одного класса уравнений третьего порядка

Абдуллаев О.Х.[1,a], **Матчанова А.А.**[2,b]

[1]*ИМ АН РУз,* [2]*ТУИТ, Ташкент, Узбекистан;*

[a]*obidjon.mth@gmail.com,* [b]*oygul87-87@mail.ru*

Пусть Ω – односвязная область, ограниченная отрезками BB_0, B_0A_0, A_0A прямых $x=1$, $y=h$, $x=0$ и характеристиками $AC:\ x+y=0$, $BC:\ x-y=1$ уравнения колебания струны, пересекающимися в точке $C\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$. Введем обозначение $\Omega_1=\Omega\cap\{y>0\}$, $\Omega_2=\Omega\cap\{y<0\}$. Рассмотрим в области Ω уравнение

$$\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+c\right)Lu=0 \tag{1}$$

где

$$Lu\equiv u_{xx}-\frac{1-\operatorname{sign} y}{2}u_{yy}-\frac{1+\operatorname{sign} y}{2}{}_cD_{0y}^{\alpha}u$$

и ${}_cD_{ay}^{\alpha}$ – известный оператор Капуто порядка α $(0<\alpha<1)$ (см [1]); a, b и c – заданные постоянные числа, причем $a\neq 0$, $0<\frac{b}{a}\leq 1$.

Определение. Функция $u(x,y)$ называется *регулярным решением* уравнения (1), если она имеет непрерывные производные входящие в оператор Lu, также $Lu\in C^1(\Omega)$.

Задача. *Найти в области Ω регулярное решение $u(x,y)$ уравнения (1) со следующими свойствами: 1) $u(x,y)\in C(\overline{\Omega})$, $u_x\in C(\overline{\Omega_1}\setminus\overline{A_0B_0})$, $u_{xx}\in C(\Omega_1\cup AA_0)$; 2) удовлетворяет группе граничных условий*

$$\alpha_1u(0,y)+\alpha_2u_x(0,y)=\varphi_1(y),\ \ \beta_1u(1,y)+\beta_2u_x(1,y)=\varphi_2(y),\ \ 0\leqslant y<h;$$

$$u_{xx}(0,y)=\varphi_3(y),\quad 0\leqslant y<h;$$

$$u\left|_{AC}\right.=\psi_1(x),\ 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2};\ \ \frac{\partial u}{\partial n}\left|_{AC}\right.=\psi_2(x),\ 0<x<\frac{1}{2};$$

3) на интервале AB выполняется условие склеивания:

$$\lim_{y\to+0}{}_cD_{0y}^{\alpha}u(x,y)=\lambda_1(x)u_y(x,-0)+\lambda_2(x)u_x(x,-0)+$$

$$+\lambda_3(x)u(x,0)+\lambda_4(x)\int_0^y r(t)u(t,-0)dt+\lambda_5(x),\quad x\in[0,1],$$

здесь n – внутренняя нормаль и $\varphi_i(y)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ $\lambda_k(x)$ – заданные функции α_j,β_j $(i=\overline{1,3},j=\overline{1,2},k=\overline{1,5})$ – заданные константы.

При определенных условиях на заданные функции доказывается однозначная разрешимость поставленной задачи.

Литература

1. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and applications of fractional differential equations. In: North-Holland Mathematics Studies, vol. 204, Elsevier Science B.V., Amsterdam. 2006.

Использование информационных технологий в образовании

Абдурахманов А.Г.

ЧГПИТО, Чирчик, Узбекистан; abdushukur1969@mail.ru

Экономические, научные, технические и культурные изменения, происходящие в нашей независимой республике, также отражаются в системе народного образования. Улучшение системы непрерывного образования в Узбекистане на основе доведения качества образования до уровня мировых стандартов является важнейшей задачей системы образования. Это также требует повышения качества обучения по всем специальностям. Для успешного обучения математике необходимы многофункциональные средства обучения, позволяющие решать основные задачи профильного курса обучения, реализовывать межпредметные связи и при этом обладающие хорошими демонстрационными возможностями. Такими многофункциональными средствами обучения, одновременно являющимися средой программирования и математического моделирования, а также средством организации информационной среды, создания и обработки информационных объектов, могут служить компьютерные математические пакеты. К таким пакетам относятся: MathCAD, MATLAB, Mathematica, Maple и др. Одним из лидеров системы компьютерной математики (СКМ) является Maple.

С помощью данной системы можно совершать различные действия с алгебраическими выражениями, решать уравнения, выполнять дифференцирование и интегрирование и т. д.; строить графики функций одной и двух переменных, строить изображения кривых и поверхностей; графически представлять результаты экспериментов; программировать. Отмечаются уникальные возможности системы Maple в научно методическом обеспечении образовательного процесса и в научных исследованиях [1]. В последнее время очень много статей посвященных использованию компьютерных математических пакетов в образовательном процессе. В частности, в статье [2] было показано решение нестандартных, а в статье [3], приложение определенных интегралов с помощью программы Maple.

Использование в учебной деятельности различных компьютерных пакетов позволяет индивидуализировать учебную деятельность студентов, с первого курса почувствовать опыт научной работы и творческих изысканий при решении задач по высшей математике различными способами. Что немаловажно в условиях, когда большой объем часов отводится самостоятельным занятиям. Многообразие возможностей достижения цели формирует более целостное видение постановки учебной проблемы, а также формирует возможность широкого спектра самостоятельной деятельности студента в научной сфере. Внедрение СКМ в учебный процесс дало положительную динамику в изучении студентами многих направлений математики. Возможности данных математических программ можно использовать и при изучении других предметов, таких как физика, химия и др.

Литература

1. *Мазуренко Е.В.* Аспекты применения компьютерных программ при преподавании высшей математики в вузе // Вестник Самарского государственного технического университета. 2017. Т. 14, № 1. С. 48–56.

2. *Abdurahmanov A.G.* The use of modern information technology in solving non-standard problems // European Journal of Research and Reflection in Educational Sciences. 2020, vol. 8, no. 12.

3. *Абдурахмонов А.Г.* Применение математических пакетов в образовании на примере математического пакета Maple // Экономика и социум. 2021. Т. 82, № 3–2. С. 761–768.

Обратная краевая задача для уравнения четвертого порядка с сингулярным коэффициентом

Азизов М.С.

ФерГУ, Фергана, Узбекистан; muzaffar.azizov.1988@mail.ru

В области $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < p,\ 0 < t < T\}$ рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{tt} + u_{xxxx} + \frac{2\gamma}{t} u_t = f(x), \tag{1}$$

где p, T, $\gamma \in R$, причем $p > 0$, $T > 0$, $-1/2 < \gamma < 1/2$, $u = u(x,t)$ и $f(x)$ неизвестные функции. Исследуем следующую задачу:

Обратная задача. *В области $\bar{\Omega}$ найти функции $u(x,t)$ и $f(x)$, которые*

1) $u(x,t) \in C^{3,0}_{x,t}(\bar{\Omega}) \cap C^{4,2}_{x,t}(\Omega)$, $f(x) \in C(0,p) \cap L(0,p)$;

2) $u(x,t)$ *и* $f(x)$ *удовлетворяют уравнению (1) в области* Ω;

3) $u(x,t)$ *удовлетворяет начальным условиям*

$$u(x,0) = \varphi_1(x), \quad \lim_{t\to 0} t^{2\gamma} u_t(x,t) = \varphi_2(x), \quad 0 \le x \le p$$

и краевым условиям

$$u(0,t) = 0, \quad u(p,t) = 0, \quad u_{xx}(0,t) = 0, \quad u_{xx}(p,t) = 0, \quad 0 \le t \le T,$$

$$u(x,T) = \varphi_3(x), \quad 0 \le x \le p,$$

где $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ и $\varphi_3(x)$ – заданные непрерывные функции.

Теорема. *Если* $\varphi_j(x) \in C^4[0,p] \cap C^5(0,p)$, $\varphi_j{}^{(5)}(x) \in L(0,p)$, $\varphi_j^{(2i)}(0) = \varphi_j^{(2i)}(p) = 0$, $j = \overline{0,3}$, $i = \overline{0,2}$, *то решение обратной задачи существует.*

Литература

1. *Лаврентьев М.М.* Об одной обратной задаче для волнового уравнения // Доклады Академии наук СССР. 1964. Т. 157, № 3. С. 520–521.

2. *Urinov A.K., Azizov M.S.* Boundary value problems for a fourth order partial differential equation with an unknown right-hand part // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021, vol. 42, no. 3, pp. 632–640.

Оптимизация мест размещения и значений источников в системе ОДУ и краевых условиях

Айда-заде К.Р.[1,a], **Ашрафова Е.Р.**[1,2,b]

[1]*ИСУ НАНА*, [2]*БГУ, Баку, Азербайджан;* [a]*kamil_ aydazade@rambler.ru*, [b]*ashrafova.yegana@gmail.com*

Исследуемая задача оптимизации описывается большой системой дифференциальных уравнений. Система уравнений имеет блочную структуру, сами блоки связаны между собой в произвольном порядке лишь неразделенными начальными и/или конечными значениями фазовых переменных. На отдельные точки подсистем (блоков) и на точки соединения блоков воздействуют источники, влияющие на функционирование как отдельных блоков, так и всей системы в целом. Точки воздействия источников и их параметры требуется оптимизировать, исходя из заданного целевого функционала задачи.

Исследованы выпуклость функционала, его дифференцируемость, получены необходимые условия оптимальности как по параметрам, так и местам сосредоточения источников в каждом блоке. Предложена двухуровневая схема численного решения задачи. На верхнем уровне используются методы оптимизации [1] первого порядка с применением полученных формул для градиента целевого функционала по оптимизируемым местам воздействия и параметрам источников. На нижнем уровне решаются прямая и сопряженная системы дифференциальных уравнений большой размерности блочной структуры с краевыми условиями, включающими неразделенные начальные и конечные значения фазовых переменных смежных блоков, и значения параметров внешних источников. Для решения этих краевых задач применяется предложенный в [2] подход, позволяющий проводить процедуру прогонки для каждого условия каждого блока отдельно, т.е. распараллелить этапы решения прямой и сопряженной краевых задач, к которому приходится многократно обращаться в процессе решения основной задачи оптимизации.

Литература

1. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. 3-е изд. М.: Наука, 2019.

2. *Aida-zade K.R., Ashrafova Y.R.* Solving Systems of Diferential Equations of Block Structure with Nonseparated Boundary Conditions // J. of Applied and Industrial Mathem., 2015, vol. 9, no. 1, pp. 1–10.

Задача управления движущимися источниками и ее связь с нагруженными системами

Айда-заде К.Р.[a], **Гашимов В.А.**[b]

ИСУ НАНА, Баку, Азербайджан; [a]*kamil_aydazade@rambler.ru,* [b]*vugarhashimov@gmail.com*

Рассматривается задача синтеза управления нагревом стержня, описываемая уравнением

$$u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) - \lambda\left[u(x,t) - \theta\right] + \sum_{i=1}^{N_1} q_i(t)\delta(x - z_i(t)) \tag{1}$$

с множеством возможных начальных и граничных условий

$$u\left(x,0\right) = b \in B, \quad u_x\left(0,t\right) = u_x\left(l,t\right) = 0, \quad x \in \left[0,l\right], \quad t \in \left(0,T\right].$$

Здесь: a, λ – заданные параметры; $\theta \in \Theta$ – температура внешней среды; допустимые множества значений B, Θ – заданы. Управлениями являются $q_i(t)$ – мощность источника и функция $\vartheta_i(t)$, воздействующая на движение по стержню i-го источника, определяемое уравнением:

$$\ddot{z}_i(t) = a^i \dot{z}_i(t) + b_i z_i(t) + \vartheta_i(t), \quad z_i(0) = z_i^0, \quad \dot{z}_i(0) = 0, \quad t \in [0,T], \tag{2}$$

$i = \overline{1, N_1}$. В заданных точках $\xi_j \in [0,l]$, $j = \overline{1, N_2}$, ведутся замеры температуры $u(\xi_j, t)$, которые используются для назначения текущих значений управлений:

$$q_i(t) = \sum_{j=1}^{N_2} \alpha_i^j \left[u(\xi_j,t) - \gamma_i^j\right], \ \vartheta_i(t) = \sum_{j=1}^{N_2} \beta_i^j \left[u(\xi_j,t) - \gamma_i^j\right], \ i = \overline{1, N_1}. \tag{3}$$

Подставляя (3) в (1) и (2), получим следующие нагруженные уравнения:

$$u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) - \lambda_0\left[u(x,t) - \theta\right] + \sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2} \alpha_i^j \left[u(\xi_j,t) - \gamma_i^j\right]\delta(x - z_i(t)),$$

$$\ddot{z}_i(t) = a_i \dot{z}_i(t) + b_i z_i(t) + \sum_{j=1}^{N_2} \beta_i^j \left[u(\xi_j,t) - \gamma_i^j\right].$$

Задача синтеза управления процессом нагрева приводится к параметрической задаче оптимального управления с некоторым заданным целевым функционалом относительно оптимизируемых параметров α_i^j, β_i^j, γ_i^j, ξ_j, $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_2}$. Для решения задачи применены численные методы оптимизации первого порядка.

Подход к решению одной коэффициентной обратной задачи с интегральным условием переопределения для параболического уравнения

Айда-заде К.Р.[a], **Рагимов А.Б.**[b]

ИСУ НАНА, Баку, Азербайджан; [a]*kamil_aydazade@rambler.ru,* [b]*anar_r@yahoo.com*

В докладе предлагается подход к численному решению следующей обратной задачи относительно линейного параболического уравнения:

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = a_0(x)\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} + a_1(x)\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} + a_2(x)\,v(x,t) + \\ + f(x,t) + B_0(x,t)\,C_0(x), \qquad (1)$$

$$(x,t) \in \Omega = \{(x,t) : 0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T\},$$

при следующих условиях:

$$k_1 v(x,0) + \int_0^T e^{k\tau} v(x,\tau)\,d\tau = \phi_0(x), \quad x \in [0,\ l], \qquad (2)$$

$$v(0,t) = \psi_0(t), \quad v(l,t) = \psi_1(t), \quad t \in [0,\ T], \qquad (3)$$

$$v(x,T) = \phi_T(x), \quad x \in [0,\ l]. \qquad (4)$$

Здесь заданные функции и параметры удовлетворяют условиям: $a_0(x) \in C^1([0,l])$, $a_0(x) > 0$; функции $a_1(x)$, $a_2(x) \le 0$ и $\phi_0(x)$, $\phi_T(x) \in C^2([0,l])$, $\phi_T(x) > 0$, $f(x,t)$, $B_0(x,t)$, $\psi_0(t)$, $\psi_1(t)$ непрерывны по x и t; $k,\ k_1 \ne 0$; $B_0(x,t)$ дифференцируема по t, $B_0(x,t) \ge 0$, $\frac{\partial B_0(x,t)}{\partial t} \ge 0$ и

$$\left| k_1 B_0(x,0) + \int_0^T e^{k\tau} B_0(x,\tau)\,d\tau \right| \ge \delta > 0, \qquad x \in [0,\ l].$$

Задача заключается в определении неизвестной непрерывной функции $C_0(x)$, $x \in (0,\ l)$ и соответствующего решения краевой задачи $v(x,t) \in C^{2,1}(\Omega) \cap C^{1,0}(\bar{\Omega})$, удовлетворяющих условиям (1)–(4).

Важно отметить, что предлагаемый численный метод решения задачи (1)–(4) не является итерационным и основан на использовании метода прямых. Задача приводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с неизвестными параметрами, для решения которой используется специальный вид представления для решения, предложенный ранее авторами. Приводятся результаты проведенных численных экспериментов, подтверждающие эффективность предлагаемого подхода.

О применении аппарата дробного дифференцирования к задаче фильтрации

Аливердиев А.А.[1,2,a], **Мейланов Р.Р.**[1,2], **Бейбалаев В.Д.**[1,2,3,b], **Якубов А.З.**[2]

[1]*ИПГВЭ ОИВТ РАН*, [2]*ДГУ*, [3]*ДГУНХ, Махачкала, Россия;*
[a]*aliverdi@mail.ru*, [b]*kaspij_03@mail.ru*

Математическое описание явлений тепло- и массопереноса в многофазных пористых структурах обычно затруднено из-за нелокальных эффектов памяти, сильных пространственных корреляций и самоорганизации. Дробное исчисление открывает новое направление в теории нелокальных дифференциальных уравнений и дает возможность принципиально иной интерпретации экспериментальных данных. Использование различных значений параметров показателей дробного порядка приводит к появлению множества решений, из которых можно выбрать точно соответствующее реальным процессам фильтрации.

Нами была разработана разностная схема для численного решения краевой задачи для системы уравнений неизотермической фильтрации с производной дробного порядка Caputo по времени. Доказана устойчивость разностной схемы. Проведен вычислительный эксперимент по анализу полученных решений. Вычислены значения давления и температуры в зависимости от координаты радиуса пласта и времени и построены графики динамики изменения давления и температуры по радиусу пласта и в зависимости от времени. Установлено замедление процессов со временем в решениях с дробными производными [1].

Литература

1. *Beybalaev V.D., Abduragimov E.I., Yakubov A.Z., Meilanov R.R., Aliverdiev A.A.* Numerical research of non-isothermal filtration process in fractal medium with non-locality in time // Thermal Science, 2021, vol. 25, no. 1, Part B, pp. 465–475.

Работа частично поддержана РФФИ, № 20-08-00319а.

Об определении длины дуги лемнискаты Бернулли

Анахаев К.Н.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; anaha13@mail.ru

Лемниската Бернулли («восьмёрка») – симметричная алгебраическая кривая 4 порядка, в которой произведение радиус-векторов от двух фокусов до кривой равно постоянной величине – квадрату фокусного расстояния «a^2», и описывается уравнениями:

– в декартовых координатах xOy : $\left(x^2+y^2\right)^2 - 2a^2\left(x^2-y^2\right) = 0$;

– в полярных координатах: $r = a\sqrt{2cos(2\theta)}$,

где a – фокусное расстояние; r – радиус-вектор при полярном угле θ.

Кривая рассматриваемой лемнискаты может быть использована в прикладных исследованиях очертаний скольжения и форм геофизических массивов и природных объектов.

При этом лемниската Бернулли характеризуется следующими свойствами: – радиус описанной окружности $\sqrt{2}a$; – радиус кривизны в заданной точке $2a^2/(3r)$; – площадь полярного сектора $S(\theta) = sin(2\theta)a^2/2$; – площадь каждой петли $S = a^2$. Лемниската имеет две взаимно перпендикулярные касательные: $x + y = 0$ и $x - y = 0$, пересекающиеся в узловой точке O.

Длины «полупетли» лемнискаты $L(\pi/4)$ и дуги лемнискаты $L(\theta)$ от оси Ox в I квадранте, соответственно, равны [1]: $L(\pi/4) = aK(\lambda)$ и $L(\theta) = aF(\varphi,\lambda)$, в которых $K(\lambda)$ и $F(\varphi,\lambda)$ – полный и неполный эллиптические интегралы 1 рода при модуле $\lambda = 1/\sqrt{2}$ и амплитуде $\varphi = arcsin\left(\sqrt{2}sin\theta\right)$, причём величина $K(\lambda) = K\left(1/\sqrt{2}\right) = 1.854$.

В тоже время, в связи со сложностью оперирования при аналитических преобразованиях и решениях практических прикладных задач значением (неберущегося) неполного эллиптического интеграла $\mathrm{F}\left(\varphi, 1/\sqrt{2}\right)$ ниже предлагается упрощённая расчётная зависимость для прямого нахождения его значений (с погрешностью $< 1 - 2$ %) в виде

$$F\left(\varphi, 1/\sqrt{2}\right) = 0.31\pi\varphi\left(1 + 0.125\varphi\right).$$

Тогда, длина дуги лемнискаты равна: $L(\theta) = 0.31\pi a\varphi(1 + 0.125\varphi)$, а длина «полупетли» – $L(\pi/4) = 1.854a$.

Длина дуги между двумя произвольно расположенными точками лемнискаты находится как разность между значениями длин дуг для каждой из этих точек в отдельности.

Литература

1. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: Наука. 1969. 800 с.

К задаче нелинейного изгиба консоли

Анахаев К.Н., Кумыков Т.С.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; anaha13@mail.ru

В связи со сложностью аналитического решения прикладной задачи нелинейного изгиба консоли тонкого упругого горизонтального стержня длиной L вертикальной силой P [1, 2], представленного эллиптическими функциями и интегралами при модуле $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \lambda < 1$ и амплитуде $\phi = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2\lambda}\right)$, приводятся расчётные формулы в элементарных функциях [3] по прямому определению таких основных характеристик стержня, как координаты изгибаемой консоли, изгибаемые углы, изгибающие моменты сил и др. При этом используется нижеследующая аналитическая взаимосвязь ($< 1\%$) между силовым коэффициентом подобия β и модулем $\lambda = \mathrm{f}(\alpha_0)$, соответственно, для значений модулярного угла α_0, равного $45^0 < \alpha_0 \leq 60^0$ и $60^0 \leq \alpha_0 < 90^0$, в виде $\lambda = 0.015\pi\beta\,(1+2\beta) + 0.704$; $\lambda = \sin\left\{1 + 0.01\,(\beta-1)^3 + 0.425\,(\beta-1)\,[1 - 0.266\,(\beta-1)]\right\}$, где коэффициент β находится в зависимости от нагрузки P по формуле $\beta = \sqrt{\frac{PL^2}{EJ}}$, E – модуль упругости (модуль Юнга) материала стержня; J – момент инерции поперечного сечения стержня; EJ – изгибная жесткость стержня.

Сравнение значений предложенных расчетных зависимостей с графическими и табличными данными известных численных (точных) решений [1, 2] дало достаточно близкое совпадение результатов (<1 – 2 %), приведены примеры расчета. Полученные результаты могут быть использованы также для определения (обратным методом) жесткости стержней произвольного сечения, либо модуля упругости материала стержня при известных сечениях, в том числе – в защитных сооружениях от опасных геофизических процессов и др.

Литература

1. *Попов Е.П.* Теория и расчет гибких упругих стержней. М.: Наука, 1986. 294 с.

2. *Захаров Ю.В., Охоткин К.Г.* Нелинейный изгиб тонких упругих стержней // Прикладная механика и техническая физика. 2002. Т. 43, № 5. С. 124–131.

3. *Анахаев К.Н.* Об определении эллиптических функций Якоби // Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика. 2009. № 2. С. 90–95.

Решение задачи Коши и ее аналогов для системы уравнений Эйлера – Пуассона – Дарбу

Андреев А.А.[a]**, Максимова Е.А.**[b]

МТУСИ, Москва, Россия; [a]*andre01071948@yandex.ru,* [b]*ekamaks@bk.ru*

Рассмотрена система n дифференциальных уравнений в частных производных в матричной записи (система уравнений Эйлера – Пуассона – Дарбу)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{G}{\eta-\xi}\frac{\partial U}{\partial\xi}-\frac{G}{\eta-\xi}\frac{\partial U}{\partial\eta}=0, \tag{1}$$

где $U=(u_1,...,u_n)^T, u_k\in C^2(D), D=\{(\xi,\eta)|0<\xi<\eta<1\}$, G – действительная $n\times n$ матрица.

Постановка задачи Коши и вид решений существенно зависят от спектра матрицы G. Решение задачи Коши для действительных и комплексно-сопряженных собственных значений λ_k матрицы G с действительной частью из интервала $(-\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ опубликованы авторами ранее [1], [2].

В работе исследованы постановка и решение задачи Коши для случая собственных значений $Re(\lambda_k)\geqslant\frac{1}{2}$. Матрица-коэффициент приведена к жордановой форме, что позволило разделить систему на r независимых систем уравнений, по одной для каждого собственного значения.

В полученных системах матричный коэффициент имеет одно собственное значение из рассматриваемого интервала, а коэффициент представляет собой жорданову клетку. Для всех r систем уравнений в частных производных сформулирована задача Коши и методом Римана построено ее решение. Решение задачи Коши для системы (1) записано в виде прямой суммы решений систем для жордановых клеток. Сформулирована теорема корректности полученных классических решений.

При $n=1$ найденные решения согласуются с результатами, полученными методом общих решений [3].

Литература

1. *Андреев А.А.* О методе Римана для одной системы уравнений гиперболического типа с кратными характеристиками // Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. 1981. С. 13–16.

2. *Максимова Е.А.* Решение задачи Коши для системы уравнений Эйлера – Пуассона – Дарбу // Вест. Сам. гос. тех. ун-та. Серия Физ.-мат. науки. 2011. Т. 24, № 3. С. 167–170.

3. *Хайруллин Р.С.* Задача Коши для уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу. Казань: Казанский университет, 2014. 275 с.

Краевая задача для уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками

Апаков Ю.П.,[1,2,a] **Мамажонов С.М.**[1,b]

[1] ИМ АН РУз, Ташкент, [2] НамИСИ, Наманган, Узбекистан;

[a] yusupjonapakov@gmail.com, [b] sanjarbekmamajonov@gmail.com

В области $\Omega = \{(x,y): 0 < x < p,\, 0 < y < q\}$ рассмотрим уравнение

$$L[u] \equiv u_{xxxx} + a_1 u_{xx} + a_2 u_x + a_3 u - u_{yy} = f(x,y), \tag{1}$$

здесь $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ и $f(x,y)$ – заданная достаточна гладкая функция.

Задача A_3. *Найти функцию* $u(x,y)$ *из класса* $C_{x,y}^{4,2}(\Omega) \cap C_{x,y}^{3,1}(\bar{\Omega})$, *удовлетворяющую в области* Ω *уравнению (1) и следующим краевым условиям:*

$$u_y(x,0) = 0, u_y(x,q) = 0,$$

$$u(0,y) = \psi_1(y), u(p,y) = \psi_2(y), u_{xx}(0,y) = \psi_3(y), u_{xx}(p,y) = \psi_4(y),$$

где $\psi_i(y) \in C^3[0,q], i = \overline{1,4}$, *– заданные функции, причем*

$$\psi_i(0) = \psi_i(q) = \psi_i''(0) = \psi_i''(q) = 0, i = \overline{1,4}, f(x,0) = f(x,q) = 0.$$

В статье [1] рассмотрен случай $a_1 = a_2 = 0$, $a_3 = -c(x,t)$, а в работах [2, 3] $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. В [1–3] рассмотрен случай $\psi_i(x) = 0$ и с начальным условием отличным от нуля.

Теорема единственности. *Если задача* A_3 *имеет решение, то при выполнении условий* $a_1 \le 0$ *и* $a_3 \ge 0$, *оно единственно.*

Теорема существования. *Если выполняется неравенство*

$$p\left(\pi\sqrt{2q} + q\sqrt{\pi}\left(1 + e^{-4\sqrt{\frac{\pi}{2q}}p}\right) + q\sqrt{2q}\right)C < \frac{\pi\sqrt{\pi}}{2}\left(1 - e^{-2\sqrt{\frac{\pi}{2q}}p}\right)^2,$$

то решение задачи A_3 *существует. Здесь* $C = \max\left\{|a_i|, i = \overline{1,3}\right\}$.

Единственность решения поставленной задачи доказана методом интегралов энергии. Решение выписано через построенную функцию Грина.

Литература

1. *Аманов Д., Мурзамбетова М.Б.* Краевая задача для уравнения четвертого порядка с младшим членом // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Комп. науки. 2013. Вып. 1. С. 3–10.

2. *Сабитов К.Б.* Колебания балки с заделанными концами // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2015. Т. 19, № 2. С. 311–324.

3. *Urinov A.K., Azizov M.S.* Boundary value problems for a fourth order partial equation with an unknown right-hand part // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021, vol. 42, no. 3, pp. 632–640.

Новый подход к анализу уравнения дробной диффузии с обратным направлением времени

Артюшин А.Н.

ИМ СО РАН, Новосибирск, Россия; alexsp3@yandex.ru

Пусть $0 < \nu < 1$, $T > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ — ограниченная область с гладкой границей, $S = \partial\Omega \times (0,T)$, $Q_T = \Omega \times (0,T)$. В цилиндре Q_T рассматривается задача (с дробной производной Герасимова – Капуто)

$$\partial_t^\nu u(x,t) - \Delta u(x,t) = 0, \tag{1}$$

$$u(x,t)|_S = 0, \tag{2}$$

$$u(x,T) = u_1(x) \in W_2^2(\Omega). \tag{3}$$

С помощью метода разделения переменных можно показать корректность такой задачи (см [1]). Однако в случае переменных коэффициентов такой подход сталкивается с трудностями. В настоящем докладе обсуждается новый подход для случая $\nu = 1/2$, не использующий разделение переменных.

Пусть $\nu = 1/2$. Рассмотрим задачу (1)–(3) с неизвестной функцией $u_0(x) = u(x,0)$. Можно показать, что при $t > 0$

$$u_t(x,t) - \Delta^2 u(x,t) = A\frac{\Delta u_0(x)}{t^{1/2}}. \tag{4}$$

Тогда задачу (2)–(4) можно трактовать как обратную задачу определения источника (при $t > T$). Для нее можно получить оценку для u_0 через подходящую норму u_1.

Литература

1. *Sakamoto K., Yamamoto M.* Initial value boundary value problems for fractional diffusion-wave equations and applications to some inverse problems // J. Math. Anal. Appl., 2011, vol. 382, no. 1, pp. 426–447.

Об одной краевой задаче для нагруженных гиперболических уравнений

Асанова А.Т.[1,a], **Жоламанкызы А.**[1,2]

[1] ИМММ, [2] КазНУ им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан; [a] assanova@math.kz

В области $\Omega = [0,T] \times [0,\omega]$ рассматривается система нагруженных гиперболических уравнений

$$u_{xt}(t,x) = A(t,x)u_x(t,x) + B(t,x)u_t(t,x) + C(t,x)u(t,x)+$$

$$+A_0(t,x)u_x(t,x_0) + B_0(t,x)u_t(t,x_0) + C_0(t,x)u(t,x_0) + f(t,x), \qquad (1)$$

с граничными условиями

$$P_2(x)u_x(0,x) + P_1(x)u_t(0,x) + P_0(x)u(0,x) + S_2(x)u_x(T,x)+$$

$$+S_1(x)u_t(T,x) + S_0(x)u(T,x) = \varphi(x), \quad x \in [0,\omega], \qquad (2)$$

$$u(t,0) = \psi(t), \qquad t \in [0,T], \qquad (3)$$

где $u(t,x) =: (u_1(t,x), ..., u_n(t,x))$ – искомая вектор-функция, $(n \times n)$ – матрицы $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$, $A_0(t,x)$, $B_0(t,x)$, $C_0(t,x)$, $P_i(x)$, $S_i(x)$, $i = 0,1,2$, n-вектор-функции $f(t,x)$, $\varphi(x)$ непрерывны на Ω, $[0,\omega]$, соответственно, $0 < x_0 < \omega$, n-вектор-функция $\psi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0,T]$.

Нагруженные гиперболические уравнения находят широкое применение в задачах приложения и исследовались многими авторами [1-3].

В настоящем сообщении предлагается метод исследования и решения на основе введения новых функций [4] и установлены условия однозначной разрешимости задачи (1)–(3).

Литература

1. *Нахушев А.М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006. 287 с.
2. *Нахушев А.М.* Нагруженные уравнения и их приложения. М.: Наука, 2012. 231 с.
3. *Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И.* Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений. Алматы: Гылым, 2010. 324 с.
4. *Асанова А.Т., Жоламанкызы А.* Задача с данными на характеристиках для нагруженной системы гиперболических уравнений // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31, № 3. С. 353–364.

Работа выполнена при поддержке Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан, проект № AP 09258829.

Об одном нелинейном интегро-дифференциальном уравнении второго порядка с разностными ядрами

Асхабов С.Н.

ЧГПУ, ЧГУ имени А.А. Кадырова, Грозный, Россия; askhabov@yandex.ru

В классе $Q_0^2 = \{u : u \in C[0,\infty) \cap C^2(0,\infty),\ u(0) = u'(0) = 0$ и $u(x) > 0$ при $x > 0\}$ изучается уравнение

$$u^{\alpha}(x) = \int_0^x h(x-t)u'(t)\,dt + \int_0^x k(x-t)u''(t)\,dt,\ x > 0,\ \alpha > 1, \tag{1}$$

в предположении, что выполнены условия:

$$h \in C^2[0,\infty),\ h''(x) \text{ не убывает на } [0,\infty),\ h(0) = h'(0) = 0 \text{ и } h''(0) \geq 0, \tag{2}$$

$$k \in C^3[0,\infty),\ k'''(x) \text{ не убывает на } [0,\infty),$$
$$k(0) = k'(0) = k''(0) = 0 \text{ и } k'''(0) > 0. \tag{3}$$

При условиях (2) и (3) получены двусторонние априорные оценки для любого решения уравнения (1) из класса Q_0^2. Используя эти оценки, построен конусный отрезок, инвариантный относительно нелинейного интегрального оператора свертки, порожденного уравнением (1), что позволило при дополнительном условии на функцию $K(x) = h'(x) + k''(x)$ методом весовых метрик (см., например, [1, глава IV]) доказать глобальную теорему о существовании и единственности решения уравнения (1) во всём классе Q_0^2. Изучен также вопрос о приближенном решении уравнения (1). Показано, что в случае отрезка $[0, b]$, где $b > 0$ есть любое число, решение уравнения (1) может быть найдено методом последовательных приближений пикаровского типа и установлена оценка скорости их сходимости к точному решению по метрике некоторого полного весового метрического пространства. В частном случае, при $h(x) \equiv 0$, аналогичные результаты были получены в [2].

Литература

1. *Асхабов С.Н.* Нелинейные уравнения типа свертки. М.: Физматлит, 2009. 304 с.
2. *Асхабов С.Н.* Интегро-дифференциальное уравнение второго порядка со степенной нелинейностью и разностным ядром // Вестник АН Чеченской Республики. 2020. Т. 48, № 1. С. 5–13.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках реализации государственного задания в соответствии с Соглашением № 075–03–2021–071 от 29.12.2020.

Задача граничного управления для нагруженного вдоль одной из своих характеристик гиперболического уравнения

Аттаев А.Х.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; attaev.anatoly@yandex.ru

Для уравнения

$$u_{xx} - u_{tt} = \lambda u\left(\frac{x+t}{2}, \frac{x+t}{2}\right) \tag{1}$$

со следующими начальными и граничными условиями

$$u(x,0) = \varphi_0(x), \quad u_t(x,0) = \psi_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \tag{2}$$

$$u(0,t) = \mu(t), \quad u(l,t) = \nu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{3}$$

где λ – произвольное действительное число, исследована задача отыскания таких граничных управлений $\mu(t)$ и $\nu(t)$, которые за минимальный промежуток времени приводят колебательную систему из начального состояния (2) в наперед заданное финальное состояние

$$u(x,T) = \varphi_1(x), \quad u_t(x,T) = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq l. \tag{4}$$

В работе:

1. Установлены необходимые и достаточные условия на функции $\varphi_0(x)$, $\psi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$, обеспечивающие существование искомых граничных управлений.

2. При выполнении этих условий найден явный аналитический вид искомых граничных управлений.

3. Установлено, что минимальное время, в течении которого задача граничного управления (1)–(4) для уравнения (1) имеет единственное решение, равно l.

Локально-одномерная схема для параболического уравнения общего вида, описывающего микрофизические процессы в конвективных облаках

Ашабоков Б.А.[1], **Хибиев А.Х.**[2,a], **Шхануков-Лафишев М.Х.**[2]

[1]*ИИПРУ КБНЦ РАН,* [2]*ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия;*
[a]*akkhibiev@gmail.com*

В цилиндре $Q_T = G \times [0 < t \leq T]$, основанием которого служит прямоугольный параллелепипед $G = \{x = (x_1, x_2, ..., x_p) : 0 < x_\alpha < l_\alpha$, $\alpha = 1, 2, ..., p\}$ с границей Γ рассматривается задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x,m,t), (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$u \mid_\Gamma = 0, u(x,m,0) = u_0(x,m), \tag{2}$$

где

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}) + r_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{p} q(x,m,t)u(x,m,t) +$$

$$+\frac{1}{p}\int_0^{m_1} Q(m,m')P(m')u(x,m',t)dm' - \frac{1}{p}u(x,m,t)\int_0^{m_1}\beta_1(m,m')u(x,m',t)dm' +$$

$$+\frac{1}{p}\int_0^{m_1} u(x,m-m',t)\beta_1(m,m-m')u(x,m',t)dm', \tag{3}$$

где $\beta_1(m,m') = \pi(r(m)+r(m'))^2 \cdot |V_1(m) - V_1(m')| E(m,m')$, $r(m), r(m')$ – радиусы сталкивающихся частиц; $V_1(m), V_1(m')$ – их скорости падения; $E(m,m')$ – коэффициент захвата для капель, $\pi(r)$ – безразмерное давление, $q(x,m,t) = P(m) + R(x,m)$, $P(m)$ – вероятность распада в единицу времени капли массой m, $R(x,m)$ – вероятность замерзания в единицу времени капли массой m, $Q(m,m')$ – вероятность образования капли массой m при распаде капли массой m', $T_m(m)$ – медианная температура замерзания капель массой m, $T_b(x)$ – температура воздуха в указанной точке, $r_\alpha(x,t)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ – компоненты вектора скорости воздушных потоков, m_1 – максимальная масса (0.13 г.) капель в облаке.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 19-31-90094.

О разрешимости некоторых классов переопределенных систем уравнений с частными производными в неограниченных областях

Байзаев С.[a], **Джумаев Б.М.**[b]

ТГУПБП, ХГУ, Худжанд, Таджикистан; [a]*sattor_ bayzoev@rambler.ru,*
[b]*buston.jumaev.94@mail.ru*

Рассмотрим переопределённую систему вида

$$w_{\overline{z}_j} + a_j w = 0, \qquad j = \overline{1,\ n}, \tag{1}$$

$z = (z_1, \dots, z_n)$, с коэффициентами из $C_{2\pi}-$ пространство непрерывных двоякопериодических функций по каждой переменной с основными периодами 2π и $2\pi i$. Если $a_j \in C_1$, то необходимым и достаточным условием полной разрешимости (см. [1], стр. 86) системы (1) будут равенства:

$$\partial_{\overline{z}_k} a_j = \partial_{\overline{z}_j} a_k, \qquad j \neq k. \tag{2}$$

Введем операторы, определённые в $C_{2\pi}$: $S_j f = -2i \sum\limits_{k \neq 0} k^{-1} f_k^j e^{i(k,\ z_j)}$, где $k = k_1 + ik_2 \in Z^2-$ целочисленная решетка в $C^1, (k, z_j) = k_1 x_j + k_2 y_j$, f_k^j- коэффициенты Фурье функции f по переменной z_j. Для $a_k \in C_{2\pi}$ определим следующие средние значения: $a_{k,j} = (2\pi)^{-2j} \int_{K^j} a_k(z) d\omega_j$, где $d\omega_j = dz_1 \cdots dz_j, K-$ основной квадрат периодов. Положим $a_{k,0} = a_k(z)$.

Теорема. *Пусть коэффициенты системы (1) принадлежат $C_{2\pi}$ и выполнены условия (2). Тогда общее решение этой системы представляется в виде*

$$w(z) = e^{-\Omega(z)} \varphi(z),$$

где $\Omega(z) = \sum\limits_{j=1}^{n} (S_j a_{j,j-1} + f_0^j \overline{z}_j)$, $\varphi(z)-$ *произвольная аналитическая по* z *функция.*

Литература

1. *Михайлов Л.Г.* Некоторые переопределенные системы уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями. Душанбе: Дониш, 1986. 116 с.

Внутренне-краевая задача со смещением для двух сопрягающихся уравнений гиперболического типа

Балкизов Ж.А.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; Giraslan@yandex.ru

В области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup I$ евклидовой плоскости точек (x, y), где $\Omega_1 = \Big\{(x,y):\, 2(-y)^{(m+2)/2} < (m+2)x < (m+2)r - 2(-y)^{(m+2)/2},$ $-\left[r(m+2)/4\right]^{2/(m+2)} < y < 0\Big\}$, $\Omega_2 = \{(x,y)\colon y < x < r-y,\ 0 < y < r/2\}$, $I = \{(x,0):\, 0 < x < r\}$, рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} (-y)^m u_{xx} - u_{yy} + \lambda(-y)^{\frac{m-2}{2}} u_x, & y < 0, \\ u_{xx} - u_{yy} + f(x,y), & y > 0, \end{cases} \tag{1}$$

где m, λ – заданные числа, причем $m > 0$, $|\lambda| \leq \frac{m}{2}$, $f = f\,(x,y)$ – заданная функция, $u = u\,(x,y)$ – искомая функция.

Регулярным в области Ω *решением* уравнения (1) назовем функцию $u = u\,(x,\, y)$ из класса $u\,(x,y) \in C\left(\bar{\Omega}\right) \cap C^1\left(\Omega\right) \cap C^2\left(\Omega_1 \cup \Omega_2\right)$, при подстановке которой уравнение (1) обращается в тождество.

В рамках данной работы исследована одна внутренне-краевая задача со смещением [1] для уравнения вида (1). Найдены достаточные условия на заданные функции, при котором существует единственное регулярное в области Ω решение исследуемой задачи.

Литература

1. *Нахушев А.М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006. 287 с.

Частично интегральные операторы в пространствах Соболева

Барышева И.В.

ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского, Липецк, Россия; barysheva_iv@mail.ru

В данной работе рассматривается оператор с частными интегралами

$$(K_1 u)(x_1, x_2) = \int\limits_{a_1}^{b_1} k_1(x_1, x_2, t_1) u(t_1, x_2)\, dt_1,$$

где функция $u(x_1, x_2)$ определена на конечном прямоугольнике $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \in \mathbb{R}_2$, а интегралы понимаются в смысле Лебега.

Через $W_p^l(D)$ обозначается пространство Соболева, состоящее из функций $u(x_1, x_2) \in L^p(D)$, имеющих обобщённые производные заданного порядка l из $L^p(D)$. При $1 \leq p \leq \infty$ пространства $W_p^l(D)$ являются банаховыми пространствами, а при $p = 2$ – гильбертовыми пространствами и обозначаются $H^l(D) = W_2^l(D)$. Норма в пространстве $W_p^l(D)$ порядка l вводится по следующей формуле:

$$\|u\|_{W_p^l(D)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq l} \int\limits_D |D^\alpha u|^p dx \right)^{1/p}.$$

Теорема. *Пусть ядро $k_1 \in W_4^l(D \times [a_1, b_1])$, а функция $u \in W_4^l(D)$. Тогда выполняется неравенство*

$$||(K_1 u)||_{H^l(D)} \leq C_1 \cdot \|u\|_{W_4^l(D)}, \quad \textit{где} \quad C_1 - \textit{ константа}.$$

Литература

1. *Appell J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P.* Partial integral operators and integro-differential equations. New York-Basel: Marcel Dekker, 2000. 560 p.

2. *Барышева И.В.* Об обратимости уравнений с частными интегралами в пространстве частично дифференцируемых функций // Научные ведомости БелГУ. Физика. Математика. 2011. Вып. 24, № 17(112). С. 46–59.

Численное решение краевой задачи для уравнения теплопроводности с дробной производной Рисса по пространственной координате

Бейбалаев В.Д.[1,2,3,a], **Аливердиев А.А.**[1,2,b]

[1]*ИПГВЭ ОИВТ РАН,* [2]*ДГУ,* [3]*ДГУНХ, Махачкала, Россия;*
[a]*kaspij_ 03@mail.ru,* [b]*aliverdi@mail.ru*

В области $D=\{(x,t)\colon -\infty<x<+\infty,\ 0<t\le T\}$ исследована начально-краевая задача для уравнения теплопроводности с производными дробного порядка Рисса.

Задача. *Найти решение* $u(x,t)\in C^2(D)$ *уравнения:*

$$u_t(x,t)=C(x,t)^R D^\beta u(x,t)+f(x,t), \tag{1}$$

удовлетворяющее начальному условию $u(x,0)=\phi(x)$ *и граничным условиям* $u(-L,t)=\mu_1(t)$ *и* $u(L,t)=\mu_2(t)$.

Здесь ${}^R D^\beta u(x,t)=\frac{1}{2\Gamma(\beta)\cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u(s,t)}{|s-x|^{1-\beta}}\mathrm{d}s$ – частная дробная производная Рисса [1], $1<\beta\le 2,\ C(x,t)\ge 0$. Используя выражение

$$ {}^R D^\beta u(x,t)=\frac{1}{2\Gamma(\beta)\cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)}\left({}^{RL}D^\beta_{0-}u(x,t)+{}^{RL}D^\beta_{0+}u(x,t)\right), \tag{2}$$

уравнение (1) примет вид:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{C(x,t)}{2\Gamma(\beta)\cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)}\left({}^{RL}D^\beta_{0+}u(x,t)+{}^{RL}D^\beta_{0-}u(x,t)\right)+f(x,t).$$

Для численного решения задачи (1) построена неявная разностная схема с опережением на шаблоне [2]:

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\tau}=\frac{C_i^{n+1}}{2\Gamma(\beta)\cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)h^\beta}\left[\sum_{k=0}^{i+1}q_k u_{i-k+1}^{n+1}+\sum_{k=0}^{K-i+1}q_k u_{i+k-1}^{n+1}\right]+f_i^{n+1}, \tag{3}$$

$u_i^0=\phi(x_i)$, $u_0^n=\mu_1(t_n)$, $u_K^n=\mu_2(t_n)$. Доказана теорема.

Теорема. *Разностная схема (3) безусловно устойчива.*

Литература

1. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. М.: Наука и Техника, 1987. 688 с.

2. *Бейбалаев В.Д., Назаралиев М.А., Шабанова М.Р., Ахмедов Т.З.* Численный метод решения краевой задачи для нелокального уравнения теплопроводности с производными дробного порядка Рисса // Вестник ДГУ. 2011. Вып. 1. С. 31–35.

Леммы Ван дер Корпута с функциями Бесселя

Бейсенбай А.А.

ИМММ, Алматы, Казахстан; beisenbay@math.kz

Одной из наиболее важных оценок в гармоническом анализе является лемма Ван дер Корпута, которая представляет собой оценку осциллирующих интегралов. Работа посвящена изучению аналогов лемм Ван дер Корпута [1], содержащих функции Бесселя. Обобщение состоит в том, что мы заменяем экспоненциальную функцию функциями Бесселя для изучения осциллирующих интегралов, появляющихся при анализе [1] волнового уравнения с сингулярным затуханием. В частности, мы изучаем интеграл вида

$$J(\lambda) = \int\limits_{\Omega} J_1(\lambda\phi(x))\psi(x)dx,$$

где $J_1(\lambda\phi(x))$ – функция Бесселя [2]

$$J_1(\lambda\phi(x)) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+1)!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2m+1} \phi^{2m+1}(x).$$

Литература

1. *Stein E.M.* Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals. Princeton Univ. Press, Princeton, 1993.
2. *Лебедев Н.Н.* Специальные функции и их приложения. Москва: Гос. изд-во физико-математической литературы, 1963.

Работа выполнена при финансовой поддержке МОН РК, проект № AP08052046.

Разрешимость краевой задачи для уравнения четвертого порядка

Бекиев А.Б., Шыхыев Р.М.

КГУ, Нукус, Узбекистан; ashir1976@mail.ru

Многие научно-практические исследования приводят к краевым задачам для уравнений в частных производных четвертого порядка. Краевые задачи для уравнения четвертого порядка рассматривались в работах [1-5].

В области $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < p,\ \ -\alpha < t < \beta\}$ рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{xxxx}\left(x,t\right) + b^2 u\left(x,t\right) + \mathrm{sgn}t \cdot \left[u_t\left(x,t\right) - u_{tt}\left(x,t\right)\right] = 0. \qquad (1)$$

Задача. *Найти функцию $u\left(x,t\right)$, удовлетворяющую следующим условиям:*

$$u\left(x,t\right) \in C^{2,\,0}_{x,\,t}\left(\bar{\Omega}\right) \cap C^{4,2}_{x,t}\left(\Omega_+ \cup \Omega_-\right), Lu\left(x,t\right) \equiv 0,\ \left(x,t\right) \in \Omega_+ \cup \Omega_-, \qquad (2)$$

$$u\left(0,t\right) = 0,\ \ u\left(p,t\right) = 0,\ \ u_{xx}\left(0,t\right) = 0,\ \ u_{xx}\left(p,t\right) = 0,\ \ -\alpha \le t \le \beta, \qquad (3)$$

$$u\left(x,\ \beta\right) = \varphi\left(x\right),\ u\left(x,\ -\alpha\right) = \psi\left(x\right),\ \ 0 \le x \le p, \qquad (4)$$

где $\Omega_+ = \Omega \cap \{t > 0\}$, $\Omega_- = \Omega \cap \{t < 0\}$ и $\varphi\left(x\right)$, $\psi\left(x\right)$ – заданные достаточно гладкие функции, причем $\varphi^{(2i)}\left(0\right) = \varphi^{(2i)}\left(p\right) = 0,\ \psi^{(2i)}\left(0\right) = \psi^{(2i)}\left(p\right) = 0,\ i = 0,1; \alpha, \beta > 0, p > 0.$

Частные решения задачи (1)–(4) можно найти методом разделения переменных. Доказано существование, единственность и устойчивость решения задачи (1)–(4).

Литература

1. *Аманов Д.* Разрешимость и спектральные свойства краевых задач для уравнений четного порядка. Автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук. Ташкент: АН РУз, 2019. 64 с.

2. *Джураев Т.Д., Сопуев А.* К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. Ташкент: Фан, 2000. 144 с.

3. *Мегралиев Я.* Обратная краевая задача для уравнения изгиба тонких пластинок с дополнительным интегральным условием // Дальневосточный математический журнал. 2013. Т. 13, № 1. С. 83–101.

4. *Smirnov M.M.* Mixed type model equation of the fourth order. Leningrad: Publishing house of Leningrad State University, 1972. 123 p. (Russian).

5. *Юлдашев Т.К.* Об одном смешанном дифференциальном уравнении четвертого порядка // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2016. Вып. 1, № 47. С. 119–128.

Разностные методы решения нелокальных краевых задач для дифференциальных уравнений конвекции-диффузии дробного порядка с эффектом памяти

Бештоков М.Х.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; beshtokov-murat@yandex.ru

В прямоугольной области изучаются нелокальные краевые задачи для одномерных по пространству дифференциальных уравнений конвекции-диффузии дробного порядка с эффектом памяти, в которых неизвестная функция входит в дифференциальное выражение и вместе с тем фигурирует под знаком интеграла. Возникновение интегрального слагаемого в уравнении связано с необходимостью учитывать зависимость мгновенных значений характеристик описываемого объекта от их предыдущих значений, т. е. влияние на текущее состояние системы ее предыстории.

Для численного решения нелокальных краевых задач построены двухслойные монотонные разностные схемы, аппроксимирующие эти задачи на равномерной сетке. Методом энергетических неравенств выведены оценки решений задач в дифференциальной и разностной трактовках. Из полученных априорных оценок следуют единственность, а также непрерывная и равномерная зависимость решения от входных данных рассматриваемых задач и в силу линейности рассматриваемой задачи сходимость решения разностной задачи к решению соответствующей дифференциальной задачи со скоростью сходимости $O(h^2 + \tau^2)$.

Литература

1. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. Москва: Наука, 1977. 656 с.

2. *Бештоков М.Х., Эржибова Ф.А.* К краевым задачам для интегро-дифференциальных уравнений дробного порядка // Математические труды. 2020. Т. 23, № 1. С. 16–36.

Первая начально-краевая задача для нагруженного многомерного уравнения конвекции-диффузии

Бештокова З.В.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; zarabaeva@yandex.ru

Постановка задачи. *В цилиндре* $\overline{Q}_T = \overline{G} \times [0, T]$, *основанием которого является* p*-мерный прямоугольный параллелепипед* $\overline{G} = \{x = (x_1, x_2, ..., x_p) : 0 \le x_\alpha \le l_\alpha, \alpha = 1, 2, ..., p\}$ *с границей* Γ, $\overline{G} = G \cup \Gamma$, *рассматривается задача*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T,$$

$$u\Big|_{\Gamma} = 0, \ 0 \le t \le T,$$

$$u(x,0) = u_0(x), \ x \in \overline{G},$$

где

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + r_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}(x^0,t) - q_\alpha(x,t)u,$$

$$0 < c_0 \le k_\alpha(x,t) \le c_1, \ |k_{x_\alpha}(x,t)|, \ |r_\alpha(x,t)|, \ |r_{x_\alpha}(x,t)|, \ |q_\alpha(x,t)| \le c_2,$$

$$k_\alpha(x,t) \in C^{3,1}(Q_T), \ r_\alpha(x,t), \ q_\alpha(x,t) \in C^{2,1}(Q_T), \alpha = 1, 2, ..., p,$$

$x^0 = (x_1, x_2, ..., x_{\alpha-1}, x^0_\alpha, x_{\alpha+1}, .., x_p)$,
x^0_α – *фиксированная точка интервала* $(0, l_\alpha)$,
$Q_T = G \times (0 < t \le T]$, c_0, c_1, c_2 – *положительные постоянные.*

Рассматривается первая краевая задача для нагруженного многомерного уравнения параболического типа общего вида. Для приближенного решения поставленной задачи строится локально-одномерная разностная схема. Методом энергетических неравенств получена априорная оценка для решения локально-одномерной разностной схемы, откуда следуют ее устойчивость и сходимость. Для двумерной задачи построен алгоритм приближенного решения. Проведены численные расчеты тестовых примеров, иллюстрирующие полученные в работе теоретические выкладки.

Литература

1. *Шхануков-Лафишев М.Х.* Локально-одномерная схема для нагруженного уравнения теплопроводности с краевыми условиями III рода // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2009. Т. 49, № 7. С. 1223–1231.

2. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. Москва: Наука, 1977. 656 с.

О разрешимости краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка с инволютивным отклонением в цилиндрической области

Бжеумихова О.И.

КБГУ, Нальчик, Россия; bzhoksana@gmail.com

Настоящая работа посвящена исследованию разрешимости краевых задач для линейного эллиптического уравнения с инволюцией по временной переменной в младших членах в цилиндрической области.

Пусть Ω – ограниченная область из пространства $\mathbb{R}^n$ переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ с гладкой границей Γ. В цилиндрической области $Q = \Omega \times (0, T)$, $0 < T < +\infty$, рассмотрим дифференциальное уравнение

$$u_{tt}(x,t) + \Delta u(x,t) + a(x,t)u(x,t) + b(x,t)u(x,\varphi(t)) = f(x,t), \qquad (1)$$

где $a(x,t)$, $b(x,t)$ и $f(x,t)$ – заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0,T]$, $\varphi(t)$ – заданная на отрезке $[0,T]$ инволюция, Δ – оператор Лапласа, действующий по переменным $x_1, x_2, ..., x_n$.

Задача 1. *Найти решение $u(x,t)$ уравнения (1) в области Q удовлетворяющее следующим условиям:*

$$u(x,t)\,|_S = 0, \qquad (2)$$

$$u(x,0) = 0, \quad u(x,T) = 0, \quad x \in \Omega,$$

где $S = \Gamma \times (0,T)$.

Задача 2. *Найти решение $u(x,t)$ уравнения (1) в области Q удовлетворяющее (2), а также следующим условиям:*

$$u_t(x,0) = 0, \qquad u_t(x,T) = 0, \quad x \in \Omega.$$

В данной работе методом продолжения по параметру и априорных оценок [1, 2] доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений исследуемых задач. Также в случае $a(x,t) = a_0$, $b(x,t) = b_0$ изучаются свойства собственных функций и собственных чисел краевых задач для уравнения (1).

Литература

1. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 576 с.

2. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 495 с.

Нелокальный подход к исследованию продольных колебаний стержня

Богатов А.В.[a], Пулькина Л.С.

Самарский университет, Самара, Россия; [a] andrebogato@mail.ru

Теоретические исследования продольных колебаний относительно толстого и короткого стержня базируются на математической модели, содержащей уравнение четвертого порядка. Присутствие в уравнении смешанной производной четвертого порядка, как установлено еще Рэлеем, отражает эффекты деформации стержня в поперечном направлении.

В том случае, когда изучаются колебания толстого короткого стержня, следует предположить, и не без оснований [1, 2], что краевые условия, заданные на разных участках границы, могут оказаться связанными между собой некоторым соотношением. В таком случае говорят, что условия нелокальны. К настоящему времени разработаны некоторые методы методы доказательства разрешимости нелокальных задач для уравнений четвертого порядка [3].

В докладе рассматривается задача с нелокальными условиями для уравнения четвертого порядка

$$\sigma(x)u_{tt} - (a(x)u_x)_x - (b(x)u_{ttx})_x = f(x,t), \tag{1}$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \tag{2}$$

$$u_x(0,t) = 0, \quad u(0,t) + \int_0^l K(x)u(x,t)dx = 0. \tag{3}$$

Удалось найти условия на входные данные, обеспечивающие существование единственного обобщенного решения поставленной задачи.

Литература

1. *Стеклов В.А.* Основные задачи математической физики. М.: Наука, 1983.
2. *Bažant Z.P., Jirásek M.* Nonlocal integral formulation of plasticity and damage: survey of progress // J. of Engineering Mechanics, 2002, pp. 1119–1149.
3. *Pulkina L.S., Beylin A.B.* Nonlocal approach to problems on longitudinal vibration in a short bar // Electronic Journal of Differential Equations, 2019, vol. 2019, no. 29, pp. 1–9.

О разрешимости уравнения дробной диффузии с операторами Джрбашяна – Нерсесяна

Богатырева Ф.Т.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; fatima_ bogatyreva@bk.ru

В области $D = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}, 0 < y < T\}$ рассмотрим уравнение

$$aD_{0y}^{\{\alpha,\beta\}}u(x,y) + bD_{0y}^{\{\gamma,\delta\}}u(x,y) - u_{xx}(x,y) = f(x,y), \tag{1}$$

где $D_{0y}^{\{\alpha,\beta\}}, D_{0y}^{\{\gamma,\delta\}}$ – операторы дробного дифференцирования Джрбашяна – Нерсесяна порядков $\mu = \alpha + \beta - 1 > 0$, $\nu = \gamma + \delta - 1 > 0$, соответственно, $\mu > \nu$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in]0,1]$, a, b – const, $f(x,y)$ – заданная действительная функция.

Оператор дробного дифференцирования Джрбашяна – Нерсесяна (секвенциальная дробная производная) ассоциированный с упорядоченной парой $\{\xi, \eta\}$, порядка $\sigma = \xi + \eta - 1$, определяется соотношением [1]

$$D_{0y}^{\{\xi,\eta\}} = D_{0y}^{\eta-1} D_{0y}^{\xi}, \tag{2}$$

где $D_{0y}^{\eta-1}$ и D_{0y}^{ξ} – дробный интеграл и дробная производная Римана – Лиувилля, соответственно [2].

В работе исследован вопрос разрешимости начальных задач для уравнения (1) в зависимости от распределения параметров $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Литература

1. *Джрбашян М.М., Нерсесян А.Б.* Дробные производные и задачи Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка // Изв. АН АрмССР. Математика. 1968. С. 3–28.

2. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

Решение параболического уравнения с рациональной степенью нелинейности в интегральной нагрузке

Бозиев О.Л.

ИИПРУ КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; boziev@yandex.ru

Рассматривается задача

$$u_t - u_{xx} - \frac{a}{l}\int_{\Omega} u^p dx = f(x,t), \tag{1}$$

$$u(x,0) = \phi(x), 0 \le x \le l, \tag{2}$$

$$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = \psi(t),\ 0 \le t \le T, \tag{3}$$

где рациональное $p \in (0,1)$, $f(x,t) \in L_2(Q)$, $\varphi(x) \in C^1[0,l]$, $\psi(t) \in C^1[0,T]$.

Интегральный член в (1) будем называть интегральной нагрузкой.

Для приближенного решения задачи (1)–(3) используется приближенно-аналитический метод, ранее применявшийся для решения нагруженных уравнений с натуральной степенью в интегральной нагрузке [1].

При условии, что функция $u \in H^1(\Omega)$, функции $\psi_t(t) \in L_1[0,T]$, $\phi(x)$, $\phi_x(x) \in L_2(\Omega)$, $f(x,t) \in L_2(Q)$ не убывают, $3\sqrt{l} > a$, установлена априорная оценка

$$\left(\int_{\Omega} |u|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \le K(t). \tag{4}$$

Соответствующий подбор $K(t)$ приводит к равенству в (4), что позволяет использовать эту функцию для линеаризации (1), т.е. для перехода к уравнению

$$u_t - u_{xx} = \frac{a}{l}K(t) + f(x,t).$$

Его интегрирование при условиях (2), (3) дает функцию $u^{(0)}$, принимаемую за начальное приближение в последовательной аппроксимации точного решения уравнения (1) решениями уравнений вида

$$u_t^{(k)} - u_{xx}^{(k)} - \frac{a}{l}\int_{\Omega}\left(u^{(k-1)}\right)^p dx = f(x,t),$$

при соответствующих условиях вида (2), (3).

Используемый приближенно-аналитический метод может быть применен к уравнениям различного типа и порядка с рациональной степенью в интегральной нагрузке.

Литература

1. *Бозиев О.Л.* Решение нелинейного гиперболического уравнения приближенно-аналитическим методом // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 51. С. 5–14.

Линейное уравнение с вырожденным оператором при старшей производной Герасимова – Капуто

Бойко К.В.

ЧелГУ, Челябинск, Россия; kvboyko@mail.ru

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение дробного порядка

$$D_t^{\alpha} Lx(t) = \sum_{k=1}^{n} D_t^{\alpha_k} M_k x(t) + g(t) \tag{1}$$

в случае $\ker L \neq \{0\}$, где $L, M_k \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ (линейные ограниченные операторы), $k = 1, 2, \ldots, n-1$, $M_n \in \mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ (линейный замкнутый оператор), $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \alpha$, $m = \lceil \alpha \rceil$, $m_k = \lceil \alpha_k \rceil$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $g \in ([0,T];\mathcal{Y})$.

Если M_n $(L, 0)$ – ограничен, существуют проекторы

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\mu|=R} (\mu L - M_n)^{-1} L d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{X}),$$

$$Q = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\mu|=R} L(\mu L - M_n)^{-1} d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}),$$

при таком $R > 0$, что $\sigma^L(M_n) \subset \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| \leq R\}$ [1]. Решением задачи

$$x^{(l)}(0) = x_l,\ l = 0, 1, \ldots, m_n - 1,\ (Px)^{(l)}(0) = x_l,\ l = m_n, m_n + 1, \ldots, m-1, \tag{2}$$

для уравнения (1) будем называть функцию $x : [0,T] \to \mathcal{X}$, для которой $x \in C^{m_n-1}([0,T];\mathcal{X})$, $D_t^{\alpha} Lx, D_t^{\alpha_k} M_k x \in C([0,T];\mathcal{Y})$, $k = 1, 2 \ldots, n$, выполняются равенства (1) при всех $t \in [0,T]$ и (2).

Теорема [2]. *Пусть* $L, M_k \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$*,* $k = 1, 2, \ldots, n-1$*,* $M_n \in \mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ $(L, 0)$ *– ограничен,* $M_k P = Q M_k$*,* $k = 1, 2, \ldots, n-1$*,* $g \in C([0,T];\mathcal{Y})$*,* $x_l \in \mathcal{X}$ *при* $l = 0, 1, \ldots, m_n - 1$*,* $x_l \in \mathcal{X}^1$*,* $l = m_n, m_n + 1, \ldots, m-1$*. Тогда существует единственное решение задачи* (1), (2).

Литература

1. *Sviridyuk G.A., Fedorov V.E.* Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators. Utrecht, Boston: VSP, 2003.

2. *Федоров В.Е., Бойко К.В., Фуонг Т.Д.* Начальные задачи для некоторых классов линейных эволюционных уравнений с несколькими дробными производными // Мат. заметки СВФУ. 2021. Т. 8, № 3. С. 85–104.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 21-51-54003.

Математическое моделирование бислойного графена, заполненного молекулами фуллерена C_{60}

Бухурова М.М.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; mareta.bukhurova@mail.ru

В настоящей работе предлагается аналитический метод расчета сэндвич-структуры на основе бислойного графена и молекул фуллерена C_{60}. Метод основан на континуальном приближении для потенциалов межатомного взаимодействия. Суть заключается в усреднении парного межатомного потенциала по поверхностям и объемам взаимодействующих компонентов. Такое усреднение представляется вполне оправданным, т.к. молекулы C_{60} в межплоскостном пространстве могут быть ориентированы случайным образом по вращательным степеням свободы (см. [1]). Данный метод использовался в работах [2, 3] для расчета систем, содержащих углеродные нанотрубки, фуллерены и нанолуковицы.

Рассчитаны толщина и удельная энергия когезии сэндвич-структуры в виде бислойного графена с плотноупакованными молекулами C_{60} внутри. Полученные значения параметров ($1.32nm$ и $0.358J/m^2$) согласуются с известными экспериментальными данными по гибридным углеродным наноструктурам и графиту.

Литература

1. *Ishikawa M., Kamiya S., Yoshimoto S., Suzuki M., Kuwahara D., Sasaki N., Miura K.* Nanocomposite materials of alternately stacked monolayer and graphene // Journal of Nanomaterials. 2010, vol. 2010, 891514.

2. *Рехвиашвили С.Ш., Бухурова М.М.* Равновесные параметры взаимодействия молекулы фуллерена C_{60} с однослойной углеродной нанотрубкой // Письма в журнал технической физики. 2018. Т. 44, № 23. С. 24–29.

3. *Рехвиашвили С.Ш., Бухурова М.М.* Устойчивость углеродной нанолуковицы в контакте с графитовой подложкой // Письма в журнал технической физики. 2019. Т. 45, № 12. С. 9–11.

Об эллиптических уравнениях и краевых задачах в конусах

Васильев В.Б.

НИУ «БелГУ», Белгород, Россия; vbv57@inbox.ru

В работе методом волновой факторизации [1] рассматривается модельное эллиптическое псевдодифференциальное уравнение в некоторых конических областях евклидова пространства. Для получения единственного решения в пространстве Соболева – Слободецкого к уравнению добавляется некоторое интегральное условие. Исследуется поведение решения, когда некоторые параметры конуса стремятся к нулю.

Так, в частности, при исследовании псевдодифференциального уравнения

$$(Au)(x) = 0 \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus C_+^{ab}$$

в пространстве $H^s(C_+^{ab})$, где

$$C_+^{ab} = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = (x_1, x_2, x_3), x_3 < a|x_1| + b|x_2|, a, b > 0\},$$

с интегральным условием [2]

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x_1, x_2, x_3) dx_3 \equiv g(x_1, x_2),$$

при переходе к пределу, когда один из параметров a, b стремится к ∞, возникает дополнительное условие на функцию g

$$h\left(\xi_1, \frac{t_3 + t_2}{2}\right) = \frac{h(\xi_1, t_2) + h(\xi_1, t_3)}{2} - (S_2 h)(\xi_1, t_2) + (S_2 h)(\xi_1, t_3), \quad \xi_1 \in \mathbb{R};$$

здесь функция h выписывается как умножение функции g на элемент волновой факторизации символа $A(\xi)$, S_1, S_2 – одномерные сингулярные интегральные операторы по первой и второй переменной.

Литература

1. *Васильев В.Б.* Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи. М.: КомКнига, 2010. 135 с.
2. *Vasilyev V., Kutaiba Sh.* Elliptic equations in domains with cuts: certain examples // Int. J. Appl. Math., 2021, vol. 31, no. 2, pp. 339–351.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ, проект № FZWG-2020-0029.

Математическое моделирование динамических процессов в системе «трубопровод – датчик давления»

Вельмисов П.А., Тамарова Ю.А., Алексанин Н.Д.

УлГТУ, Ульяновск, Россия; velmisov@ulstu.ru, kazakovaua@mail.ru, nickx73@yandex.ru

Рассматривается начально-краевая задача, соответствующая модели механической системы «трубопровод-датчик давления»

$$\varphi_{tt} = a_0^2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}), \quad x \in (0, l), \quad y \in (0, h), \tag{1}$$

$$\varphi_y(x, 0, t) = \varphi_y(x, h, t) = 0, \quad x \in (0, l), \tag{2}$$

$$\varphi_x(l, y, t) = w_t(y, t), \quad y \in (0, h), \tag{3}$$

$$-\rho_0\varphi_t(0, y, t) = P(y, t), \quad y \in (0, h), \tag{4}$$

$$P_0 - \rho_0\varphi_t(l, y, t) - P_* = L(w(y, t)), \quad y \in (0, h). \tag{5}$$

В (1)–(5) $\varphi(x, y, t)$ – потенциал скорости, описывающий движение сжимаемой рабочей среды в трубопроводе с прямолинейными стенками $y = 0$, $y = h$; $w(y, t)$ – деформация упругого элемента датчика, расположенного в конце трубопровода $x = l$; ρ_0, P_0, a_0 – плотность, давление, скорость звука, соответствующие состоянию покоя рабочей среды; $P(y, t)$ – заданный закон изменения давления рабочей среды на входе в трубопровод $x = 0$; P_* – внешнее воздействие на упругий элемент; индексы x, y, t снизу обозначают частные производные по координатам x, y и времени t. Дифференциальный (или интегро-дифференциальный) оператор $L(w(y, t))$ в уравнении (5) может быть задан по разному в зависимости от выбранной модели твердого деформируемого тела.

Система уравнений (1)–(5) дополняется начальными условиями для искомых функций $\varphi(x, y, t)$ и $w(y, t)$, а также граничными условиями для $w(y, t)$ при $y = 0$, $y = h$, соответствующими типу закрепления упругого элемента.

Разработано несколько способов решения задачи, основой которых являются методы: конечных разностей, Галеркина, усреднения. Представлен также способ, приводящий к исследованию дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом. Проведено сравнение результатов, полученных разными способами.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты №18-41-730015, №19-41-730006.

Оптимальное построение траектории квадрокоптера с помощью MPC управления

Винокурский Д.Л.[a]**, Ганьшин К.Ю., Мезенцева О.С., Самойлов Ф.В.**

СКФУ, Ставрополь, Россия; [a] *dlvinokursky@gmail.com*

В этой работе представлен алгоритм построения траектории беспилотного летательного аппарата при помощи MPC управления, который по сути представляет собой нелинейную систему управления построения трехмерной траектории беспилотного летательного аппарата. В частности, наш подход был направлен на преодоление разрыва между временем отслеживания и вычислительными затратами на построение оптимальной траектории.

В работе была использована модель MPC управления квадрокоптера. Уравнение движения запишем в виде:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} x_2 \\ \left(\frac{\sin\psi\tan u_2}{\cos\theta} + \cos\psi\tan u_3\right)(u_1+g) \\ x_4 \\ \left(-\frac{\cos\psi\tan u_2}{\cos\theta} + \sin\psi\tan u_3\right)(u_1+g) \\ x_6 \\ u_1 \\ u_4 \end{pmatrix}.$$

Здесь вектор управляющих воздействий $u(t) = [u_1\ u_2\ u_3\ u_4]' = [\ddot{z}\ \varphi\ \theta\ \dot{\psi}]'$ и вектор $x(t) = [x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6\ x_7]' = [x\ \dot{x}\ y\ \dot{y}\ z\ \dot{z}\ \psi]'$. Здесь штрих означает операцию транспонирования вектор-строки.

Эффективность нашего подхода была проверена с помощью серии модельных экспериментов с мини квадрокоптерами CRAZYFLY - 2.

Использование кривых Безье и годографа Пифагора при построении пути беспилотного летательного аппарата

Винокурский Д.Л., Кононова Н.В., Кононов М.Н., Кононова М.Н., Кононов Н.Б.

СКФУ, Ставрополь, Россия; dlvinokursky@gmail.com, knv_fm@mail.ru

В настоящее время построение высокоэффективных моделей управления группами БПЛА является сложной задачей в связи с необходимостью постоянной коррекции траектории движения и учёта массогабаритных показателей отдельных агентов; ограничениями по различным параметрам используемых бортовых вычислительных средств. Помимо прочего, модель, реализующая эффективное следование группой по линейным траекториям, строящимся параметрически, оказывается сложной на этапах её разработки в виду наличия внешних воздействий как на всю систему (включающую в себя группу БПЛА) в целом, так и на её элементы, инертности агентов, ошибок и неточностей в системах управления отдельными агентами. При решении задач синтеза и практического использования моделей траекторного управления отмечаются следующие проблемы: необходимость задания большого числа промежуточных точек при построении траекторий; представление сегментов траекторий в виде ломаных; высокая вычислительная сложность при динамическом перестроении траекторий. Для решения указанных проблем необходимы совершенно новые подходы к синтезу и реализации управления группой БПЛА, позволяющие достигать высокую эффективность управления и возможность многократного и повторного выполнения целевой задачи. Внедрение методов построения траекторий на основе разложения годографа Пифагора по многочленам Бернштейна и получаемых кривых Безье в траекторное управление агентами позволяет снизить проявление указанных проблем. Важным преимуществом предлагаемого подхода является снижение объёмов передаваемых данных, необходимых отдельному агенту для построения гладкой и/или динамически изменяющейся траектории: траектория задаётся передачей малого числа узлов годографа Пифагора вместо генерации множества точек, являющихся узлами ломаных линий.

Размерность пространства ковариантных тензоров в $\mathbb{R}^n$, инвариантных относительно группы $\mathbb{O}_n$

Вирченко Ю.П.

НИУ «БелГУ», Белгород, Россия; virch@bsu.edu.ru

Рассматриваются линейные пространства $\mathfrak{L}_r^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ вещественнозначных ковариантных тензоров $\mathfrak{A}$ ранга $r \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ на пространствах $\mathbb{R}^n$, инвариантные относительно преобразований группы $\mathbb{O}_n$ [1]. Ставится вопрос о размерности $d(r,n) \equiv \dim\, \mathfrak{L}_r^{(n)}$. Несмотря на то, что легко устанавливается равенство $d(r,n) = (r-1)!!$ при r четном и $2n \geq r$ (при r нечетном $\mathfrak{L}_r^{(n)} = 0$), оно не может выполняться в противоположном случае при достаточно большой разности $r - 2n$. В работе установлено, что это равенство имеет место при $r - 2n = 2$, найдена верхняя оценка $d(r,n) < \bar{d}(r,n)$ при $r > 2n$, которая позволяет установить такое значение ранга, которое является достаточным для того, чтобы $d(r,n) < (r-1)!!$. Так, в простейших случаях, при $n = 2$ неравенство имеет место при $r \geq 8$ и при $n = 3$, когда $r \geq 14$. Вопрос о размерности пространств тензоров, инвариантных относительно различных классических групп Ли, по-видимому, ранее не изучался [2]. В рассматриваемом случае, по-видимому, должно иметь место равенство $d(r,n) = \bar{d}(r,n)$.

Определение. *Ковариантный тензор ранга r в $\mathbb{R}^n$ называется инвариантным, если его координатное представление $A_{j_1,...,j_r}$, $\langle j_1,...,j_r\rangle \in I_n^r$ не изменяется при действии любой матрицы $\mathsf{U} \in \mathbb{O}_n$*

$$U_{j_1,k_1}...U_{j_r,k_r}A_{k_1,...,k_r} = A_{j_1,...,j_r}\,, \quad \langle j_1,...,j_r\rangle \in I_n^r\,.$$

Теорема. *Оценка $\bar{d}(r,n)$ является решением разностного уравнения*

$$\bar{d}(r,n+1) = (r-1)\bar{d}(r-2,n) + \mathrm{C}_{r-1}^3\bar{d}(r-4,n) + \mathrm{C}_{r-1}^5\bar{d}(r-6,n) + ...$$

$$+\ \mathrm{C}_{r-1}^{2[(r-n)/2]-1}\bar{d}(2[(n+1)/2],n)$$

при $r = 2m, m \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq n \leq r$, удовлетворяющим условию

$$\bar{d}(r,2) = \mathrm{C}_{r-1}^2 + \mathrm{C}_{r-1}^4 + ... + \mathrm{C}_{r-1}^{r-2} = 2^{r-2} - 1\,.$$

Литература

1. *Cramlet C.M.* A determination of all invariant tensors // Tôhoku Mathematical Journal, 1927, pp. 242–256.

2. *Appleby P.G., Duffy B.R., Ogden R.W.* On the classification of isotropic tensors // Glasgow Mathematical Journal, 2009, pp. 185–196.

Математическое моделирование функционирования системы биомаркеров дегенеративных заболеваний

Воропаева О.Ф.[a]***, Сенотрусова С.Д.***[b]

ФИЦ ИВТ, Новосибирск, Россия; [a]*vorop@ict.nsc.ru,* [b]*senotrusova.s@mail.ru*

Белок p53 является центральным элементом сигнального пути, контролирующего множество генетических программ. Регуляция p53 осуществляется через сложную систему положительных и отрицательных циклов обратной и прямой связи, через которые с p53 взаимодействуют, в частности, его белки-ингибиторы и многочисленные семейства микроРНК (miR). Нарушение функционирования белка p53 может привести к развитию дегенеративных заболеваний, характеризующихся чрезмерным накоплением в организме дефектных клеток (например, рак) или, наоборот, патологической массовой гибелью клеток (например, болезнь Альцгеймера). Белок p53 и связанные с ним микроРНК относят к перспективным, но пока недостаточно изученным биомаркерам дегенеративных заболеваний, которые способны прогнозировать появление заболевания на ранней стадии и могут служить в качестве возможных мишеней при разработке новых терапевтических стратегий.

В данной работе представлена базовая математическая модель динамики системы p53–белок-ингибитор–микроРНК (положительная прямая или обратная связь p53–микроРНК), основанная на использовании биокинетической модели Гольдбетера–Кошланда и дифференциальных уравнений с запаздывающими аргументами. С применением базовой модели разработана иерархия более полных математических моделей [1] и выполнено комплексное исследование функционирования системы p53. Показано, что предложенные модели адекватно описывают широкий круг экспериментальных данных, направленных на анализ связанных с активацией p53 противораковых терапевтических стратегий и исследование функционирования сигнального пути p53 в патологических процессах, связанных с массовой гибелью клеток (в эпителиальных клетках дыхательных путей при ХОБЛ, при фиброзе печени у крыс и у мышей с фенотипическими проявлениями синдрома Дауна у человека). В рамках принятых математических моделей продемонстрированы основные механизмы и особые режимы функционирования сигнального пути p53 в условиях, приближенных к условиям конкретных лабораторных экспериментов in vitro и in vivo.

Литература

1. *Воропаева О.Ф., Сенотрусова С.Д., Шокин Ю.И.* Применение минимальных математических моделей динамики сигнального пути белка p53–микроРНК к анализу лабораторных данных // Вычислительные технологии. 2020. Т. 25, № 6. С. 4–49.

Математическое моделирование воспалительной фазы инфаркта миокарда

Воропаева О.Ф.[a], **Цгоев Ч.А.**[b]

ФИЦ ИВТ, НГУ, Новосибирск, Россия; [a]*vorop@ict.nsc.ru*, [b]*c.tsgoev@g.nsu.ru*

В работе представлены новые математические модели, описывающие сложное динамическое поведение про- и противовоспалительных факторов, участвующих в процессе некротической гибели клеток сердечной мышцы при остром инфаркте миокарда. Локальная модель, способная описывать течение биохимического процесса гибели клеток миокарда как в центральной зоне повреждения, так и на ее периферии, представляет собой нелинейную систему ОДУ. Для решения задачи структурной и параметрической идентификации модели используется основанная на идее метода динамического программирования экономичная вычислительная технология. Технология предполагает последовательную идентификацию отдельных сегментов модели, в которых влияние внешних (по отношению к данному сегменту) факторов учитывается через систему динамических параметров. Алгоритм решения прямой и обратной коэффициентной задачи опирается на методы типа предиктор-корректор решения задачи Коши и генетический алгоритм BGA. Показана слабая чувствительность решения к малому изменению экспериментальных и входных данных. Проведенные исследования позволили сформулировать модель в пространственно-распределенной постановке, которая наследует качественные свойства решений локальной модели.

Адекватность разработанных моделей подтверждается количественным согласием с известными экспериментальными данными о динамике острого инфаркта в левом желудочке сердца мыши (см. [1, 2]). С использованием принятых моделей описан триггерный механизм перехода от благоприятного сценария развития острого инфаркта миокарда к сценарию, характеризующемуся стремительным увеличением повреждения миокарда на 3-5 сутки инфаркта. Для этих сценариев развития инфаркта исследованы особенности формирования «валика» демаркационного воспаления на периферии зоны некротического повреждения миокарда. Результаты численных экспериментов, включая оценки эффективности цитокиновых противовоспалительных терапевтических стратегий, качественно согласуются с известными данными лабораторных исследований.

Литература

1. *Воропаева О.Ф., Цгоев Ч.А.* Численная модель динамики факторов воспаления в ядре инфаркта миокарда // Сибирский журнал индустриальной математики. 2019. Т. 22, № 2(78). С. 13–26.

2. *Voropaeva O.F., Tsgoev CH. A., Shokin YU. I.* Numerical simulation inflammatory phase of myocardial infarction // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 2021, vol. 62, pp. 441–450.

Обобщенная краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с производной Капуто

Гадзова Л.Х.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; macaneeva@mail.ru

В области $0 < x < 1$ рассмотрим уравнение

$$\partial_{0x}^{\alpha} u(x) + \lambda u(x) = f(x), \qquad (1)$$

где $\alpha \in (1, 2]$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\partial_{0x}^{\alpha} u(x)$ – регуляризованная дробная производная (производная Капуто) [1, с. 11].

В работе для обыкновенного дифференциального уравнения (1) исследуется обобщенная краевая задача (по терминологии Наймарка М.А.) [2, с. 16]. Построено явное представление решения исследуемой задачи, найдено условие однозначной разрешимости и доказана теорема единственности решения. Краевые условия задаются в форме линейных функционалов, что позволяет охватить достаточно широкий класс линейных локальных и нелокальных условий.

Литература

1. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
2. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 528 с.

Формула сокращенного дифференцирования для функции Горна H_3

Газизов Р.Р.

КФУ, Казань, Россия; rainurrrr2000@mail.ru,

В теории обобщенного волнового уравнения и осисеммитрического уравнения Гельмгольца важную роль играет конфлюэнтная функция Горна [1].

Для гипергеометрической функции Гаусса известна формула сокращенного дифференцирования [2]:

$$\frac{d^3}{dz^3}\left[(1-z)^{\alpha+2}F(\alpha,\beta;\delta;z)\right]=$$

$$=\frac{(-1)^3(\alpha)_3(\delta-\beta)_3}{(\delta)_3}(1-z)^{\alpha-1}F(\alpha+3,\beta;\delta+3;z). \qquad (1)$$

Используя формулу [3], доказана формула:

$$\frac{\partial^3}{\partial z^3}\left[(1-z)^{\alpha+2}H_3(\alpha,\beta,\delta;z,t)\right]=$$

$$=(1-z)^{\alpha-1}\left[3!\sum_{k=1}^{2}\frac{(-1)^{k+1}t^k}{(1-\alpha)_k}H_3(\alpha-k,\beta,\delta;z,t)-\right.$$

$$-3!\frac{t(\delta-\beta)}{\delta}H_3(\alpha,\beta,\delta+1;z,t)+3\left(\frac{t^2(\delta-\beta)}{(1-\alpha)\delta}H_3(\alpha-1,\beta,\delta+1;z,t)-\right.$$

$$\left.-\frac{t\alpha(\delta-\beta)_2}{(\delta)_2}H_3(\alpha+1,\beta,\delta+2;z,t)\right)+\frac{t^3}{(1-\alpha)_3}H_3(\alpha-3,\beta,\delta;z;t)+$$

$$\left.+\frac{(-1)^3(\alpha)_3(\delta-\beta)_3}{(\delta)_3}H_3(\alpha+3,\beta,\delta+3;z,t)\right]. \qquad (2)$$

Из формулы (2) при $t=0$ следует формула (1).

Литература

1. *Капилевич М.Б.* О конфлюэнтных функциях Горна // Дифференциальные уравнения. 1966. Т. 2, № 9. С. 1239–1254.

2. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Том 1. Гипергеометрическая функция, функции Лежандра (2-е изд.). М.: Наука, 1973.

3. *Мавлявиев Р.М., Гарипов И.Б., Газизов Р.Р.* // Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения: сборник тезисов Международной научной конференции (оз. Банное, 15-19 марта 2021 г.) / отв. ред. Р.Н. Гарифуллин. Уфа: Аэтерна, 2021. С. 49.

К оценкам спектра Лапласиана почти полного графа

Гаркавенко Г.В.[1], **Ускова Н.Б.**[2]

[1]*ВГПУ,* [2]*ВГТУ, Воронеж, Россия;*

g.garkavenko@mail.ru, nat-uskova@mail.ru

Рассмотрим матрицу Лапласиана полного графа без петель с n вершинами (число n достаточно большое)

$$L_0 = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ -1 & -1 & -1 & \dots & n-1 \end{pmatrix}.$$

Ее спектральные свойства хорошо известны, она имеет простое собственное значение $\lambda_1 = 0$, соответствующий (нормированный) собственный вектор $e_1 = \{1/\sqrt{n}, \dots, 1/\sqrt{n}\}$ и полупростое собственное значение $\lambda_2 = n$ кратности $n-1$, соответствующие собственные векторы

$e_2 = \{1, -1, 0, \dots, 0\}$, $e_3 = \{1, 0, -1, 0, \dots, 0\}$, $\dots$, $e_n = \{1, 0, \dots, 0, -1\}$.
Далее через L_k обозначим матрицу Лапласиана почти полного графа, полученного из L_0 удалением k ребер.

Теорема. *Пусть выполнено условие $k < n^2/64$. Тогда спектр $\sigma(L_k)$ представим в виде*

$$\sigma(L_k) = \{0\} \cup \sigma_1, \quad \sigma_1 \subset \{\mu \in \mathbb{R} : |\mu - n| < 8\sqrt{k}\}.$$

Отметим, что результат теоремы сформулирован в самом общем виде и его можно существенно улучшить, если, например, удалять ребра инцидентные разным вершинам, или в других частных случаях. Доказательство производится с помощью теории расщепления метода подобных операторов [1–2].

Литература

1. *Baskakov A.G., Krishtal I.A., Uskova N.B.* Similarity techniques in the spectral analysis of perturbed operator matrices // J. Math. Anal. Appl., 2019, pp. 930–960.

2. *Uskova N.B., Garkavenko G.V.* Decomposition of linear operators and asymptotic behavior of eigenvalues of difference operators with growing potential // J. Math. Sci., 2020, pp. 812–827.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 19-01-00732-а.

Анализ методов численной аппроксимации функции Дирака в задачах оптимизации мест расположения источников

Гашимов В.А.

ИСУ НАНА, Баку, Азербайджан; vugarhashimov@gmail.com

Большой класс задач математической физики, математического моделирования, оптимизации и оптимального управления описывается дифференциальными уравнениями как с обыкновенными, так частными производными, в которых участвует δ-функция Дирака. Участие этой функции в уравнениях обусловлено влиянием на изучаемые процессы сосредоточенных источников, характеризуемых мощностью и их месторасположением.

В данной работе исследованы вопросы конечноразностной аппроксимации дифференциальных уравнений с участием точечных источников как в задачах, в которых месторасположения источников задано, так в задачах оптимизации и оптимального управления, в которых требуется оптимизировать их месторасположение или управлять траекторий их движения.

В зависимости от поставленной задачи используемые схемы аппроксимации точечных источников существенного различаются.

Для численного решения задач оптимизации месторасположения источников или траектории их движения используются, как правило, численные методы оптимизации первого или второго порядка. Это требует, чтобы аппроксимация δ-функции, аргументом которой является месторасположение сосредоточенного источника, было достаточно гладкой.

Учитывая сказанное выше, проведен анализ применения прямоугольной, трапециодальной, гауссаподобной [1, 2] и предложенной нами синусоидальной [3] схем конечномерной аппроксимации как для одномерной, так и многомерной δ-функции.

Приводятся примеры численных экспериментов по использованию различных схем аппроксимации.

Литература

1. *Бутковский А.Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. Москва: Наука, 1975. 568 с.
2. *Айда-заде К.Р., Багиров А.Г.* О задаче размещения нефтяных скважин и управления их дебитами // АиТ. 2006. № 1. С. 52–61.
3. *Aida-zade K.R., Hashimov V.A.* Synthesis of locally lumped controls for membrane stabilization with optimization of sensor and vibration suppressor locations // Comput. Math. Math. Phys., 2020, vol. 60, no. 7, pp. 1092–1107.

Задача Гурса для нагруженного уравнения

Гилёв А.В.

Самарский университет, Самара, Россия; toshqaaa@gmail.com

В докладе рассматривается задача Гурса с нелокальными интегральными условиями для гиперболического уравнения

$$u_{xy} + Au_x + Bu_y + Cu = f(x,y), (x,y) \in (0,a) \times (0,b), \tag{1}$$

$$u(x,0) + \int\limits_0^b K_2(x,y)u(x,y)dy = \varphi(x), x \in [0,a], \tag{2}$$

$$u(0,y) + \int\limits_0^a K_1(x,y)u(x,y)dx = \psi(y), y \in [0,b]. \tag{3}$$

При выборе какого-либо конкретного метода необходимо обращать внимание на вид интегрального условия. Разрешимость нелокальной задачи Гурса с интегральными условиями первого рода для общего уравнения с доминирующей смешанной производной второго порядка была исследована в [1], в частном случае – в [2]. Условия нашей задачи – условия второго рода, поэтому мы предлагаем другой метод исследования разрешимости задачи (1)–(3).

С помощью введения новой неизвестной функции

$$v(x,y) = u(x,y) + \int\limits_0^a K_1(\xi,y)u(\xi,y)d\xi + \int\limits_0^b K_2(x,\eta)u(x,\eta)d\eta, \tag{4}$$

задачу (1)–(3) можно свести к классической задаче Гурса, но для нагруженного уравнения [3]. В работе получены условия, при которых существует единственное решение задачи (1)–(3). Основным инструментом доказательства являются априорные оценки, полученные в работе.

Литература

1. _Пулькина Л.С._ О разрешимости в L_2 нелокальной задачи с интегральными условиями для гиперболического уравнения // Дифференц. уравн. 2000. Т. 36, № 2. С. 279–280.

2. _Нахушева З.А._ Об одной нелокальной задаче для уравнений в частных производных // Дифференц. уравн. 1986. Т. 22, № 1. С. 171–174.

3. _Нахушев А.М._ Нагруженные уравнения и их применение. М.: Наука, 2012. 232 с.

Минимаксные и вязкостные решения уравнений Гамильтона – Якоби – Беллмана для систем с дробными производными Капуто

Гомоюнов М.И.

ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия; m.i.gomoyunov@gmail.com

Пусть $\alpha \in (0,1)$, $T > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим множество AC^α функций $x : [0,T] \to \mathbb{R}^n$, представимых в виде $x(\tau) = x(0) + (I^\alpha_{0+}h)(\tau)$, $\tau \in [0,T]$, для некоторой измеримой и ограниченной функции $h : [0,T] \to \mathbb{R}^n$, где I^α_{0+} — оператор интегрирования Римана – Лиувилля.

Рассмотрим задачу оптимального управления системой

$$\begin{cases} ({}^C D^\alpha_{0+}y)(\tau) = f(\tau, y(\tau), u(\tau)) \text{ при п.в. } \tau \in [t,T], \\ y(\tau) = x(\tau),\ \tau \in [0,t], \end{cases} \tag{1}$$

на минимум показателя качества

$$J = \sigma(y(\cdot)) + \int_t^T \chi(\tau, y(\tau), u(\tau)) d\tau. \tag{2}$$

Здесь $y(\tau) \in \mathbb{R}^n$ и $u(\tau) \in P$ – состояние системы и управление в момент времени $\tau \in [0,T]$; $P \subset \mathbb{R}^r$ – компакт, $r \in \mathbb{N}$; ${}^C D^\alpha_{0+}$ – оператор дифференцирования Капуто; $t \in [0,T]$ и $x(\cdot) \in AC^\alpha$ – начальные данные.

Задаче оптимального управления (1), (2) поставим в соответствие [1] задачу Коши для уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана:

$$\begin{cases} \partial^\alpha_t \varphi(t, x(\cdot)) + H(t, x(t), \nabla^\alpha \varphi(t, x(\cdot))) = 0,\ (t, x(\cdot)) \in [0,T) \times AC^\alpha, \\ \varphi(T, x(\cdot)) = \sigma(x(\cdot)),\ x(\cdot) \in AC^\alpha, \end{cases} \tag{3}$$

где искомым является неупреждающий функционал $\varphi : [0,T] \times AC^\alpha \to \mathbb{R}$; $\partial^\alpha_t \varphi$ и $\nabla^\alpha \varphi$ – дробные коинвариантные производные функционала φ; гамильтониан H определяется равенством

$$H(t,x,s) = \min_{u \in P}(\langle s, f(t,x,u)\rangle + \chi(t,x,u)),\ t \in [0,T],\ x, s \in \mathbb{R}^n.$$

Работа посвящена изучению обобщенных решений задачи Коши (3). Вводятся понятия минимаксного и вязкостного решений этой задачи. Устанавливаются основные свойства данных решений. Исследуется их связь с функционалом цены в задаче оптимального управления (1), (2).

Литература

1. *Gomoyunov M.I.* Dynamic programming principle and Hamilton – Jacobi – Bellman equations for fractional-order systems // SIAM J. Control Optim. 2020, vol. 58, no. 6, pp. 3185–3211.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 21-71-10070.

О решении граничной задачи теплопроводности в конусе

Гульманов Н.К., Рамазанов М.И., Искаков С.А.

КарУ имени Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан;
gulmanov.nurtay@gmail.com

В работе рассматривается следующая граничная задача теплопроводности в нецилиндрической области $G = \{(r,t) : \ 0 < r < t, \ t > 0\}$, представляющей собой перевернутый конус:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \cdot \frac{1}{r^{2\nu-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{2\nu-1} \frac{\partial u}{\partial r} \right) = 0, \tag{1}$$

$$\left. \left(2 \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right|_{r=t} = g\left(t\right), \tag{2}$$

$$\left. r^{2\nu-1} \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=0} = q\left(t\right), \tag{3}$$

где $0 < \nu < 1$. К этому типу задач в общем случае не применимы методы разделения переменных и интегральных преобразований. Одномерные по пространственной переменной краевые задачи в вырождающихся областях исследованы, например, в работах [1, 2].

Исследованы вопросы разрешимости сингулярного интегрального уравнения Вольтерра второго рода, к которому редуцирована исходная задача. Для решения полученного сингулярного интегрального уравнения Вольтерра применяется метод равносильной регуляризации Карлемана – Векуа.

Доказана следующая теорема о разрешимости краевой задачи в весовых пространствах существенно ограниченных функций.

Теорема. _Если выполнены условия_ $t^{\nu-\frac{1}{2}} g\left(t\right) \in L_\infty\left(0,\infty\right)$, $t^{1-\nu} q\left(t\right) \in L_\infty\left(0,\infty\right)$ _то граничная задача (1)–(3) имеет решение_ $u\left(r,t\right) = \tilde{u}\left(r,t\right) + C$, $\tilde{u}\left(r,t\right) \in L_\infty\left(G\right), \ C = const.$

Литература

1. _Kavokin A.A., Kulakhmetova A.T., Shpadi Y.R._ Application of thermal potentials to the solution of the problem of heat conduction in a region degenerates at the initial moment // Filomat. 2018, pp. 825–836.

2. _Jenaliyev M.T., Ramazanov M.I._ On a homogeneous parabolic problem in an infinite corner domain // Filomat. 2018, pp. 965–974.

Работа выполнена по гранту Министерства образования и науки Республики Казахстан: AP09259780, 2021-2023.

Модель влияния процесса цифровизации на объем регионального дохода

Гурфова Р.В.[a], **Ширитов А.А.**[b]

КБГУ, Нальчик, Россия;

[a] *guruinform1961@yandex.ru*[a], [b] *astemir.shiritov.01@bk.ru*[b]

Обратимся к теории экономических циклов Кондратьева. Как известно, К-циклы – циклы экономического развития, повторяющиеся каждые 45-60 лет. Если учитывать соотношение К-циклов с технологическими укладами, то можно сказать, что на современном этапе идет 6-ой цикл (2018-2050 гг.), который соотносится с NBIC-конвергенцией – интенсивным взаимопроникновением и взаимовлиянием NBIC-технологий. Обобщенные инновационные (нано-, био-, информационные и когнитивные технологии) становятся ядром современного развития. Вполне естественно, что к таким же по роли технологиям, относятся и технологии процесса цифровизации. Полагаем, что их взаимосвязь с NBIC-технологиями можно описать синергетическим эффектом взаимодействия.

Рассмотрим функцию, описывающую неоклассическую модель экономического роста, предложенную Г. Мэнкью, Д. Ромером и Д.Уэйлем [1]. Пусть $Y(t)$ – функция текущего объема регионального дохода (ВРП), зависящая от времени t; $K(t)$ – физический капитал; $H(t)$ – человеческий капитал; $L(t)$ – численность занятых в региональной экономике рабочих и служащих; $A(t)$ – технический прогресс; α и β определенные константы, устанавливаемые эмпирическим путем в случае нашего региона $\alpha = 0,31$, $\beta = 0,28$. Тогда производственная функция имеет вид:

$$Y(t) = K^{\alpha}(t)H^{\beta}(t)\left[A(t)L(t)\right]^{1-\alpha-\beta}. \tag{1}$$

Учитывая, что технический прогресс прямо пропорционален процессу цифровизации и синергетически взаимодействует с ним, функцию $A(t)$ представим как произведение технического прогресса на цифровизацию:

$$A(t) = A_T Dig(t), \tag{2}$$

где $Dig = Dig(t)$ – функция цифровизации, которую можно построить с помощью метода наименьших квадратов из существующих эмпирических данных.

Уравнение (1) перепишется в виде:

$$Y(t) = K^{0,31}(t)H^{0,28}(t)\left[A_T(t)Dig(t)L(t)\right]^{0,41}. \tag{3}$$

Запишем уравнение (3) в темповой форме:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = 0,31\frac{\dot{K}}{K} + 0,28\frac{\dot{H}}{H} + 0,41\left(\frac{\dot{A_T}}{A_T} + \frac{\dot{Dig}}{Dig} + \frac{\dot{L}}{L}\right). \tag{4}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда РФФИ, проект №20-010-00297 и в рамках программы Пиоритет-2030.

По аналогии с [2] выпишем формулу темпа роста синергетических эффектов, которая отражает влияние цифровизации на региональную социально экономическую экосистему:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = 0,41 \left(\frac{\dot{A_T}}{A_T} + \frac{\dot{Dig}}{Dig} \right). \tag{5}$$

Учитывая (5), получаем, что темпы экономического развития напрямую связаны с технологическим прогрессом, в том числе NBIC- конвергенцией и цифровизацией.

Литература

1. *Mankiw G., Romer D., Weil D.* A contribution to the empirics of economic growth // Quart. J. Econ., 1992, vol. 107, no. 2, pp. 407–437.

2. *Акаев А.А., Руцкой А.И.* Об одной математической модели для прогнозных расчетов синергетического эффекта NBIC-технологий и оценки его влияния на экономический рост в первой половине XXI века // Доклады Академии наук. 2015. Т. 461, № 4. С. 383–386.

Анализ сети романа М.А. Булгакова «Мастер и Маргарита»

Данилова А.

АГУ, Астрахань, Россия; anna-danilova-01@mail.ru*

Проведен сетевой анализ структуры социальных связейв одном из наиболее популярных романов на русском языке советской эпохи М.А. Булгакова «Мастер и Маргарита». Особенностью романа является его сложная структура: роман в романе. Внутри повествования о жизни Москвы конца 20–30-х годов XX века в романе присутствует история Понтия Пилата. В романе действуют как реальные люди, так и потусторонние персонажи. Сложная структура романа и соединение вполне реалистичного описания отношений между людьми советской эпохи с заведомо вымышленным потусторонним миром позволяют ожидать необычной и «многослойной» структуры социальных связей в романе.

Поскольку для выявления связей между персонажами принципиален контекст литературного произведения, было решено проводить обработку текста вручную. На основе матрицы взаимодействия персонажей строился граф, вершинами которого являются герои романа, а ребрами – связи между ними. В данном исследовании рассматривается только явное взаимодействие персонажей на сцене. Взаимодействие, то есть двунаправленное действие, автоматически предполагает, что социальная сеть описывается обычным, а не ориентированным графом. В ходе исследования учитывались связи только между явно присутствующими и действующими персонажами; упоминаемые персонажи и ожидаемые связи в рассмотрение не принимались. Исследована наибольшая связанная компонента графа, состоящая из 153 персонажей. Были исследованы основные характеристики полученной сети: валентность вершин, степень посредничества, степень близости, степень влиятельности, коэффициент ассортативности.

Сеть имеет коэффициент ассортативности равный -0.1765367, что говорит о её искусственности. С помощью алгоритма Гирвана – Ньюмана проанализирована структура сообществ в сети. Помимо очевидных крупных сообществ – персонажи евангельской части романа, персонажи московской части романа, персонажи потустороннего мира – алгоритм выявил и более тонкую структуру в московской части романа: сообщества литераторов, больница, театр. Анализ центральностей позволил выделить группу главных персонажей. Неожиданным оказалось то, что в евангельской части романа центральным персонажем является Афраний, а не Понтий Пилат.

Об одной линейной обратной задаче для трехмерного уравнения Чаплыгина с нелокальной краевой условие в призматической неограниченной области

***Джамалов С.З.*[a], *Ашуров Р.Р.*[b], *Туракулов Х.Ш.*[c]**

ИМ АН РУз, Ташкент, Узбекистан; [a]*siroj63@mail.ru;* [b]*ashurovr@gmail.com;* [c]*hamidtsh87@gmail.com*

В области

$$Q = (-\alpha, \beta) \times (0, T) \times \mathbb{R} =$$

$$= Q_1 \times \mathbb{R} = \{(x, t, z); x \in (-\alpha, \beta), 0 < t < T < +\infty, z \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)\},$$

рассмотрим уравнение Чаплыгина:

$$Lu = K(x)u_{tt} - \Delta u + a\,(x,t)\,u_t + c\,(x,t)\,u = f\,(x,t,z), \tag{1}$$

где $xK(x) > 0$, при $x \neq 0$, $-\alpha < x < \beta$, $\Delta u = u_{xx} + u_{zz}$ – оператор Лапласа. Здесь $f(x,t,z) = g(x,t,z) + h(x,t)\psi(x,t,z)$; $g(x,t,z)$ и $\psi(x,t,z)$ – заданные функции, а функция $h(x,t)$ подлежит определению. Пусть все коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие функции в области Q.

Линейная обратная задача. *Найти функции $(u(x,t,z); h(x,t))$ удовлетворяющие уравнению (1) в области Q, такие что, функция $u(x,t,z)$ удовлетворяет следующим полунелокальным краевым условиям*

$$\gamma D_t^p\, u|_{t=0} = D_t^p\, u|_{t=T}\,, \tag{2}$$

$$u|_{x=-\alpha} = u|_{x=\beta} = 0, \tag{3}$$

при $p = 0, 1$, *где* $D_t^p u = \frac{\partial^p u}{\partial t^p}$, $D_t^0 u = u$, γ *– некоторое постоянное число, отличное от нуля, величина которого будет уточнена ниже, дополнительному условию*

$$u(x,t,\ell_0) = \phi_0\,(x,t), \quad \ell_0 \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

и функция $h(x,t)$ принадлежит классу

$$U = \{\,(u,h)|\, u \in W_2^{2,s}(Q); h \in W_2^2(Q_1); s \geq 3\}.$$

Здесь через $W_2^{2,s}(Q)$, обозначено гильбертово пространство с нормой

$$\|u\|^2_{W_2^{2,s}(Q)} = (2\pi)^{-1/2}\ \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1 + |\lambda|^2)^s \cdot \|\hat{u}(x,t,\lambda)\|^2_{W_2^2(Q_1)}\, d\lambda,$$

где $W_2^2(Q_1)$ пространства Соболева, $3 \leq s$ – любое конечное положительное целое число, а норма в пространстве Соболева $W_2^2(Q_1)$, определяется следующим образом

$$\|\vartheta\|^2_{W_2^2(Q_1)} = \sum_{|\alpha|\leq 2} \int_{Q_1} |D^\alpha \vartheta|^2 \, dxdt,$$

α – это мультииндекс, D^α – есть обобщенная производная по переменным x и t, а через

$$\hat{u}(x,t,\lambda) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t,z)\, e^{-i\lambda z} dz$$

обозначено преобразование Фурье по переменным z, функции $u(x,t,z)$.

Замечание. Результат справедлив для многомерного уравнения Чаплыгина.

Литература

1. *Джамалов С.З., Ашуров Р.Р.* Об одной линейной обратной задаче для многомерного уравнения смешанного типа первого рода, второго порядка // Известия вузов. Математика. 2019. № 6. С. 1–12.

2. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Васильев В.Г.* Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1969. 67 с.

3. *Сабитов К.Б., Мартемьянова Н.В.* Нелокальная обратная задача для уравнения смешанного типа // Известия вузов. Математика. 2011. № 2. С. 71–85.

4. *Нахушев А.М.* Нагруженные уравнения и их приложения // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19, № 1. С. 86–94.

О методе обучения логических нейронных сетей с обратными связями

Димитриченко Д.П.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; dimdp@rambler.ru

Пусть задана система продукционных правил, образующих обучающую выборку заданной предметной области. При помощи операции конъюнкции эти правила объединяются в одно сложное высказывание так, чтобы при вычислении его значения в результате остались правила, соответствующие текущему запросу X.

В логической форме такая система правил продукции запишется в следующем виде [4]:

$$\begin{cases} \text{Конъюнкция\_признаков\_1} \to \text{Объект 1} \\ \text{Конъюнкция\_признаков\_2} \to \ \text{Объект 2} \\ \ldots \\ \text{Конъюнкция\_признаков\_m} \to \text{Объект}\, m. \end{cases}$$

При помощи применения операции обобщенного отрицания [1] к каждому из m правил продукции, его преобразования из импликативной в дизъюнктивную форму и выполнения логического перемножения производится минимизация исходной системы правил. Таким образом результирующая переменнозначная логическая функция $F(X, W)$ представляет собой минимизированную базу знаний исходной предметной области с разбиением объектов W на все возможные классы [1].

Переменнозначные логические функции могут быть реализованы при помощи логических нейронных сетей [2].

Доказана следующая теорема [3]:

Теорема. *Всякая переменнозначная логическая функция $F(X, W)$ представима в виде логической нейронной сети, совокупность логических связей в которой взаимно однозначно определяется структурой продукционных дизъюнктов и дизъюнктов свободных знаний.*

Так как все нейроны функционируют независимо друг от друга, то окончательный результат их совместной работы представляет собой эффект применения процедуры частотного анализа к ответу исходной переменнозначной логической функции [3, 4].

Наличие пустых подклассов в ответе сообщает о его неполноте. Индикация количества свободных знаний позволяет эксперту (или заданной процедуре) начать процесс добавления новых продукционных правил [4].

Знание о степени значимости переменных X, характеризующих объекты W позволит проводить процесс дообучения логической нейронной сети более эффективно.

Предложен метод обучения логической нейронной сети, построенной на основе переменнозначной логической функции при помощи обратных связей. Метод состоит в определении коэффициентов значимости при переменных, определяющих свойства объектов распознавания и коэффициентов присутствия самих объектов в выделяемых классах. В процессе дообучения логической нейронной сети полученный результат сравнивается с требуемым, при необходимости производится корректировка весов присутствия объектов в результирующем ответе при помощи указанных коэффициентов значимости.

Такое свойство ассоциативности по значимым переменным позволит находить ассоциативно близкие подклассы объектов распознавания, производить диагностику сходных ситуаций, ранжировать их по степени близости.

Литература

1. *Лютикова Л.А.* Моделирование и минимизация баз знаний в терминах многозначной логики предикатов. Нальчик. Препринт, 2006. 33 с.

2. *Барский А.Б.* Логические нейронные сети. Москва: ИНТУИТ, Бином. Лаборатория знаний, 2007. 352 с.

3. *Димитриченко Д.П.* Применение переменнозначных логических функций и нейронных сетей в системах принятия решений // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2016. Т. 16, № 4-1. С. 93–100.

4. *Димитриченко Д.П., Жилов Р.А.* Применение нейросетевого подхода к задачам логической обработки данных и построение интеллектуальных систем принятия решений // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. 2018. Т. 6. № 2. С. 249–261.

Алгоритм облета препятствий на пути группы БПЛА

Дроздова В.И., Шагрова Г.В., Винокурский Д.Л.*[a], *Ганьшин К.Ю., Самойлов Ф.В.

СКФУ, Ставрополь, Россия; [a] dlvinokursky@gmail.com

В работе построен алгоритм облета препятствий группой беспилотных летательных аппаратов. Определение траектории облета препятствий на пути группы БПЛА будет осуществлено при помощи алгоритма потенциального искусственного поля (APF). Планирование траектории движения и облета препятствий имеет первостепенное значение и высокую сложность для описания движения и правления группы БПЛА. Алгоритм APF планирования путей протестирован с учетом существующих общих потенциальных полевых методов для различных сценариев (статичное препятствие и динамическое препятствие). Через полученные точки будет прокладываться оптимальная траектория группы БПЛА построенная с помощью годографа Пифагора и расширенных многочленов Бернштейна. Построение алгоритма разложения годографа Пифагора по расширенным многочленам Бернштейна пятой степени в трёхмерном пространстве; траекторий в виде ломаных; высокая вычислительная сложность при динамическом перестроении траекторий.

О разрешимости интегральных аналогов первой и второй начально-краевых задач для параболических уравнений

Дюжева А.В.

СамГТУ, Самара, Россия; aduzheva@rambler.ru

В докладе представлены новые результаты о разрешимости в классе регулярных решений аналогов первой и второй начально-краевых задач для параболических уравнений, а также для некоторых уравнений соболевского типа. Метод, используемый в работе, позволил отказаться от обратимости ранее используемого оператора Фредгольма, порождённого интегральными граничными условиями, а также от условий малости.

Работа выполнена по плану госзадания «Программа фундаментальных исследований СамГТУ в области химических наук и материаловедения», тема № FSSE-2020-0005.

Об оценке средней временной выгоды для вероятностной модели динамики популяции

Егорова А.В.[a], **Родина Л.И.**[b]

ВлГУ, Владимир, Россия; [a]*nastik.e@bk.ru,* [b]*LRodina67@mail.ru*

В работе исследуется модель динамики популяции, заданная разностными уравнениями, зависящими от случайных параметров. Показано, что оценки средней временной выгоды существенно зависят от свойств функции $f(x)$, определяющей динамику популяции.

Предположим, что в моменты времени $k = 1, 2, \ldots$ имеется количество ресурса $X(k)$ и в эти моменты времени извлекается некоторая случайная доля ресурса $\omega(k) \in \Omega \subseteq [0, 1]$. Допускается влиять на процесс сбора так, чтобы остановить его, если доля собранного ресурса окажется достаточно большой (больше некоторого значения $u(k) \in [0, 1)$) для сохранения как можно большей части популяции. Доля добытого ресурса равна $\ell(k) = \ell(\omega(k), u(k)) = \min\big\{\omega(k), u(k)\big\} \in \mathbb{N}$. Тогда модель эксплуатируемой однородной популяции имеет вид $X(k+1) = f\big((1 - \ell(k))X(k)\big) \in \mathbb{N}$, где $X(1) = f\big(x(0)\big)$, $X(k) = X\big(\ell(1), \ldots, \ell(k-1), x(0)\big)$, $k = 2, 3, \ldots$, $x(0)$ – начальная численность популяции, $f(x)$ – вещественная дифференцируемая функция, заданная на $I = [0, a]$, такая, что $f(I) \subseteq I$.

Рассмотрим функцию $H_* = H_*\big(\ell, x(0)\big) \doteq \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X(k)\ell(k)$, которую назовем средней временной выгодой от извлечения ресурса. Пусть $\Sigma \doteq \{\sigma : \sigma = (\omega(1), \ldots, \omega(k), \ldots)\}$, $U \doteq \{\overline{u} : \overline{u} = (u(1), \ldots, u(k), \ldots)\}$. Исследуем задачу выбора управления $\overline{u} = (u(1), \ldots, u(k), \ldots) \in U$, при котором значение функции H_* можно оценить снизу с вероятностью единица по возможности наибольшим числом.

Пусть задана ограниченная функция $u : I \mapsto [0, 1]$. Для каждого $x \in I$ функция $\ell(\omega, u(x)) \doteq \min(\omega, u(x))$ является случайной величиной на множестве Ω; обозначим через $M\ell(\omega, u(x))$ ее математическое ожидание. Пусть $\widetilde{x} \in I$ и $\widetilde{x} < \max\limits_{x\in I} f(x)$; рассмотрим отрезок $P(\widetilde{x}) \doteq [\widetilde{x}, \max\limits_{x\in I} f(x)]$.

Теорема. *Пусть точка $\widetilde{x} \in I$ такова, что $\widetilde{x} \leqslant f(\widetilde{x}) \leqslant f(x)$ для всех $x \in P(\widetilde{x})$. Тогда для любого $x(0) \in P(\widetilde{x})$ существует управление $\overline{u} \in U$ такое, что для почти всех $\sigma \in \Sigma$ выполнены неравенства $f(\widetilde{x})M\ell(\omega, u(\widetilde{x})) \leqslant H_*(\ell, x(0)) \leqslant \max\limits_{x\in I} f(x) \cdot M\ell(\omega, u(\widetilde{x}))$, где $u(\widetilde{x}) = 1 - \frac{\widetilde{x}}{f(\widetilde{x})}$.*

Литература

1. *Мастерков Ю.В., Родина Л.И.* Оценка средней временной выгоды для стохастической структурированной популяции // Изв. ИМИ УдГУ. 2020. Т. 56. С. 41–49.

Исследования второго автора выполнены при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 20-01-00293.

Математическая модель горной реки

Езаова А.Г.[a], **Желдашева А.О.**[b], **Бжеумихова О.И.**[c]

КБГУ, Нальчик, Россия; [a]*alena_ ezaova@mail.ru,* [b]*anna.zheldasheva@mail.ru,* [c]*bzhoksana@gmail.com*

Территорию Кабардино-Балкарии можно охарактеризовать как территорию с высоко интенсивными и повторяющимися опасными гидрологическими процессами. Учитывая географический характер региона, в котором имеется в наличии три геоморфологические зоны: горная, предгорная и степная, практически все реки территории имеют как равнинную, так и предгорную и горную части. Одной из самых длинных стратегически важных рек, протекающих по региону, является Терек (длина более 623 км.). Рельеф речного бассейна – сложная система разновысотных хребтов и котловин с широким диапазоном высот: от -28 м вблизи моря до 5642 м (г. Эльбрус). Продольный профиль русла Терека характеризуется: 1. Падением – 5065 м., разностью двух точек высоты истока – 5037 м и высоты устья – минус 28 м. 2. Безразмерной величиной уклоном – отношением падения к длине участка, умноженному на 100%. Для Терека уклон - $4,77\%$.

Обозначим через h – глубину потока в точке x в момент времени y. Пусть $S = c_j F^2$ – уклон русла, где c_j – коэффициент трения, q – дебит воды на единицу ширины канала, $F = \dfrac{q_0}{h_0\sqrt{gh_0}}$ – число Фруда для однородного потока, g – гравитационная константа, $\dfrac{Sq^2}{h^3} = j$ – связь между уклоном русла и коэффициентом трения c_j, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Моделирование открытых речных русел хорошо описывается системой двух линейных уравнений с частными производными первого порядка [1]:

$$a_{11}\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{1}{a_0}\left(\frac{3}{2}h - q\right), \tag{1}$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial y} = 0, \tag{2}$$

где $h = h(x, y)$ и $q = q(x, y)$ – действительные функции независимых переменных $x \geq 0$ и $y \geq 0$, $a_{11} = 1/F^2 - 1 = const$, $a_0 = F^2/(2S)$, $S = const \neq 0$, $F < 3$. Систему (1)–(2) называют LSVEs (линеаризованная система Сен-Венана).

В моделируемых значениях получаем [2]:

$$T_0(x)\frac{\partial h^*}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial q}{\partial y} + 2V_0(x)\frac{\partial q}{\partial x} - \beta_0(x)q + \left[C_0^2(x) - V_0^2(x)\right]T_0(x)\frac{\partial h^*}{\partial x} - \gamma_0(x)h^* = 0, \tag{4}$$

при

$$h = T_0(x)h^*(x, y), \quad V_0 = 1, \quad C_0^2 = 1 + a_{11}, \quad \beta_0 = -1/a_0,$$

Работа выполнена в рамках проекта «Приоритет 2030».

$$\gamma_0 = \frac{1}{2T_0}\left(\frac{3}{a_0} - 2a_{11}\frac{d}{dx}\log T_0\right),$$

здесь T_0 – зеркальная ширина для равновесного режима; $h^* = Y - Y_0$; Y_0 – глубина воды; V_0 – средняя скорость воды; C_0 – скорость волны; γ_0, β_0 – известные параметры.

Если (h, q) – регулярное решение системы (1)–(2) или системы (3)–(4), то в области Ω_r ее задания, h и q будут регулярными решениями уравнения с частными производными второго порядка

$$a_1 a_2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{1}{a_0}\left(\frac{3}{2}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y}\right) = 0, \tag{5}$$

где $a_1 = 1 + 1/F$, $a_2 = 1 - 1/F$.

Обозначим через $A_rB_r = \{(x, 0) : 0 \leq x \leq r\}$ речное дно, длиною r. Предположим, что границы речного русла $A_rC_r : a_1y = x$ и $B_rC_r : a_2y = x - r$. Тогда для (5) можно поставить задачу Дарбу в области D_r, ограниченной отрезком A_rB_r прямой $y = 0$ и характеристиками A_rC_r, B_rC_r, расположенными в полуплоскости $y \geq 0$.

Постановка, существование и единственность решения этой задачи рассматривается в [3].

На основании выписанного в явном виде решения, авторами создана математическая модель горной реки Терек. Модель достаточно устойчива и хорошо коррелирует с эмпирическими данными.

Литература

1. *Litrico X., Fromion V.* Frequency modeling of open chanel ow // J. Hydraul. Eng., 2004, vol. 130, no. 8, pp. 806–815.

2. *Ridol L., Porporato A., Revelli R.* Green's function of the linearized de Saint-Venant equations // J. of Engineering Mechanics, 2006, vol. 132, no. 2, pp. 125–132.

3. *Нахушева З.А.* Нелокальные краевые задачи для основных и смешанного типов дифференциальных уравнений. Нальчик: Кабардино-Балкарский научный центр РАН, 2011. 196 с.

Применение нейронной сети при настройке ПИД-регулятора

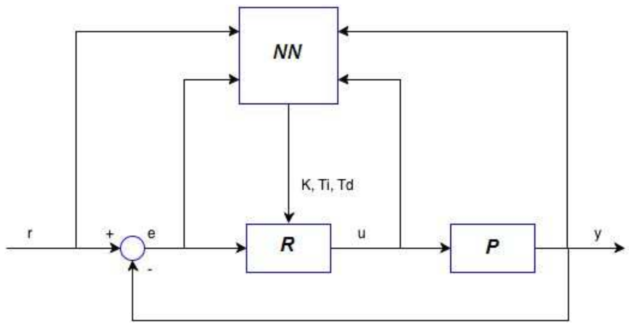
Жилов Р.А.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; zhilov91@gmail.com

Нейронные сети используются в ПИД регуляторах двумя путями: для построения самого регулятора и для построения блока настройки его коэффициентов. Особенностью нейронной сети является способность к «обучению», что позволяет передать нейронной сети опыт эксперта. Регулятор с нейронной сетью похож на регулятор с табличным управлением, однако отличается специальными методами настройки («обучения»), разработанными для нейронных сетей, и методами интерполяции данных.

Управляющий сигнал ПИД-регулятора получается в результате сложения трех составляющих: первая пропорциональна величине сигнала рассогласования, вторая – интегралу сигнала рассогласования, третья – его производной. Если какой-то из этих трех компонентов не включен в процесс сложения, то регулятор будет уже не ПИД, а просто пропорциональным, пропорционально-дифференцирующим или пропорционально-интегрирующим.

Структура системы автоматического регулирования с ПИД-регулятором и нейронной сетью в качестве блока автонастройки коэффициентов изображена на рис. 1.



На рисунке можно увидеть: нейронную сеть NN, которая играет роль функционального преобразователя, который для каждого набора сигналов r, e, u, y вырабатывает коэффициенты ПИД-регулятора (K, T_i, T_d).

Одной из главных частей в проектировании регуляторов с нейросетью является процедура обучения.

В нахождении неизвестных параметров w_i, d, a и заключается обучение. Для обучения нейросети обычно используют алгоритмы градиентного поиска минимума критериальной функции $\varepsilon = (u^* - u)^2$, зависящей от параметров нейронов.

О гидродинамическом моделировании на тороидальной сетке в задачах оптимизации систем разработки

Жонин А.В., Мартынова Ю.В.

ООО «РН-БашНИПИнефть», Уфа, Россия; busa1987@mail.ru.ru

В работе предложен подход к гидродинамическому моделированию с использованием тороидальной сетки для задач выбора систем разработки. Традиционно данная задача решается путем реплицирования элемента разработки в гидродинамической модели. Недостатками такого метода являются кратный рост количества ячеек в модели, соответствующее увеличение времени счета, необходимость контроля точности решения на центральном элементе путем изменения количества репликаций. Отметим, что для получения точного решения необходимо бесконечное количество репликаций элемента разработки в модели.

Для устранения указанных недостатков предлагается подход, идея которого состоит в том, что тороидальная топология гидродинамической сетки, полученная путем склейки противоположных граней, с точки зрения решения эквивалентна модели с бесконечным количеством репликаций на плоскости. Это обеспечивает максимальную точность решения. Одновременно с этим количество ячеек в такой модели, учитывая способ построения, всегда будет меньше традиционной модели с репликациями.

В работе показаны примеры моделирования систем разработки. Сравнение расчетов показало хорошую сходимость нового подхода с использованием тороидальной сетки и традиционного с использованием реплицирования. Показаны преимущества подхода: точность, существенное ускорение времени расчетов, корректная работа экономических опций.

В работе также обсуждается постановка задачи в случае, когда необходимо учитывать латерально-неоднородную геологию, модель должна быть также тороидально замкнута. Такая геологическая модель может быть естественным образом получена спектральным моделированием. Вопрос согласования размеров геологической и гидродинамической моделей решается путем вложения нескольких элементов разработки в один геологический сектор.

Литература

1. *Галеев Р.Р., Зорин А.М., Колонских А.В., Хабибуллин Г.И., Мусабиров Т.Р., Судеев И.В.* Выбор оптимальной системы разработки низкопроницаемых пластов с применением горизонтальных скважин с множественными трещинами гидроразрыва // Нефтяное хозяйство. 2013. №10. С. 62–65.

Исследование линейных краевых задач с условием многопериодичности решений для систем с матричными операторами дифференцирования

Жумагазиев А.Х., Сартабанов Ж.А.

АРУ имени К. Жубанова, Актобе, Казахстан; charmeda@mail.ru

Искомая вектор-функция $x(\tau, t) = (x_1(\tau, t), ..., x_n(\tau, t))$ переменной $\tau \in \mathbb{R}$ и вектор-переменной $t = (t_1, ..., t_m) \in \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^m$ определяется многопериодической по (τ, t) периодов (θ, ω) системой

$$D[x] = B(\tau, t)x + f(\tau, t), \tag{1}$$

$$D = \frac{\partial}{\partial \tau} + \sum_{j=1}^{m} A_j \frac{\partial}{\partial t_j}, \tag{1'}$$

и граничными условиями

$$\Gamma_0(t)x(0, t) - \Gamma_\theta(t)x(\theta, t) = 0, \tag{2}$$

где 1) каждая из постоянных матричных коэффициентов A_j оператора $(1')$ имеет только действительные собственные значения $\lambda_{jk} = \lambda(A_j)$ с простыми элементарными делителями; 2) $n \times n$-матрицы $B(\tau, t)$, $\Gamma_0(t)$, $\Gamma_\theta(t)$ и n-вектор-функция $f(\tau, t)$ являются периодическими по τ периода θ по t периода $\omega = (\omega_1, ..., \omega_m)$ с рационально несоизмеримыми коэффициентами $\omega_0 = \theta, \omega_1, ..., \omega_m$, а также, обладают свойствами гладкости по $(\tau, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ порядка $(0, e)$, $e = (1, ..., 1)$ – m-вектор; 3) однородная система, полученная при $f \equiv 0$ из системы (1) не имеет решения, удовлетворяющего условию (2), кроме нулевого.

Заметим, что соотношение (2) при $\Gamma_0 = \Gamma_\theta = E$ – единичной матрице представляет собой условие многопериодичности решения $x(\tau, t)$ системы периодов (θ, ω) с начальным условием $x(0, t) = x_0(t) = x_0(t + \omega)$.

В работе доказывается существование единственного решения краевой задачи (1)–(2) при условиях 1)-3).

Доказательство проводится методом, разработанным авторами. Согласно этому методу вводятся операторы $\Pi_k t_j = t_{jk}$ и $P_r t_{jk} = t_{jr}$ с помощью которых управляются mn характеристиками оператора D и для решения задачи реализуется известный метод характеристик.

Литература

1. *Sartabanov Zh.A., Zhumagaziyev A.Kh., Abdikalikova G.A.* Multiperiodic solution of linear hyperbolic in the narrow sense system with constant coefficients // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series, 2020, vol. 98, no. 2, pp. 125–140.

Новый подход к исследованию уравнения класса Фукса и получение явных решений 21 проблемы Римана – Гильберта

Зарифзода С.К.

ТНУ, Душанбе, Таджикистан; sarvar8383@list.ru

В начале XX-го столетия великий немецкий учёный Д. Гильберт предложил 23 математические проблемы, которые нужно было решить на пороге нового столетия.

Одна из этих проблем под 21 номером была сформулирована следующим образом: *Показать, что всегда существует линейное дифференциальное уравнение фуксова типа с заданными особыми точками и заданной группой монодромия.* Эта проблема в литературных источниках часто называется *проблемой Римана – Гильберта.*

Риман предполагал, что задание группы монодромия достаточно для полного восстановления дифференциального уравнения Фуксова типа с заданным числом особых точек.

В работе предлагается новая методика исследования этой проблемы. Эта методика позволяет выделить из уравнений класса Фукса с произвольным числом особых точек те уравнения этого класса, которые решаются явным образом с помощью элементарных функций.

Показывается, что полученные элементарные функции действительно являются P-функциями Римана и они удовлетворяют всем перечисленным Риманом условиям для функции из этого класса. Это приводит нас к явному решению проблемы Римана – Гильберта с помощью элементарных функций без привлечения элементы теория группы монодромия.

Литература

1. *Риман Б.* Сочинения. Москва, ГИТТЛ, 1948.
2. *Гильберт Д.* Проблемы математики. Москва: Наука, 1969.
3. *Пуанкаре А.* О группах линейных уравнений. Избранные труды в 3-х томах. Т. 3. Москва: Наука, 1974. 772 с.
4. *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии. Москва: Наука, 1937,
5. *Fuchs L.* Zur theorie der linearen diffrentialgleichungen mit veränderlichen coeffiienten // J. Reine Angew. Math., 1868, vol. 68, pp. 354–385.

Моделирование разделения частиц по размеру в испаряющихся бидисперсных коллоидных каплях на гидрофильных подложках методом Монте – Карло

Золотарев П.А.[1], **Колегов К.С.**[1,2,3,a]

[1]*АГУ**, [2]*ИФТТ РАН*, [3]*КИМРТ (филиал ВГУВТ);*
[a]*konstantin.kolegov@asu.edu.ru*

Испарительная самосборка коллоидных частиц в каплях и пленках является гибким и простым методом получения структурированных осадков. В некоторых приложениях интерес представляют растворы содержащие смеси частиц разных размеров, например, испарительная литография, диагностика в медицине, разработка биосенсоров, создание фотонных кристаллов и струйная печать [1]. Цель настоящей работы заключается в объяснении эффекта разделения частиц по размеру вблизи периферии капли, размещенной на гидрофильной подложке. Модель [2] является полудискретной, так как гидродинамика моделируется в рамках континуального подхода, но при этом рассматривается движение каждой коллоидной частицы явным образом. Здесь эта модель адаптирована для случая смеси частиц двух размеров. Диффузионное смещение частиц моделируется методом Монте – Карло. Также учитывается конвективный перенос частиц. Результаты расчетов показали, что на небольшом расстоянии от трехфазной границы, располагаются мелкие частицы, и немного дальше наблюдается смесь крупных и мелких частиц. Наша простая модель, позволила получить численные результаты, которые качественно согласуются с экспериментальными результатами [3].

Литература

1. *Kolegov K.S., Barash L.Y.* Applying droplets and films in evaporative lithography // Advances in Colloid and Interface Science. 2020, vol. 285, p. 102271.
2. *Kolegov K.S., Barash L.Y.* Joint effect of advection, diffusion, and capillary attraction on the spatial structure of particle depositions from evapo-rating droplets // Physical Review E., 2019, vol. 100, no. 3.
3. *Wong T.-S., Chen T.-H., Shen X., Ho C.-M.* Nanochromatography driven by the coffee ring effect // Analytical Chemistry, 2011, vol. 83, pp. 1871–1873.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, проект 18-12-00108 (ККС).

Задача со смещением для модельного уравнения смешанного типа второго рода в неограниченной области

Зуннунов Р.Т.[a], **Эргашев А.А.**[b]

ИМ АН РУз, Ташкент, КГПИ, Коканд, Узбекистан;

[a]*zunnunov@mail.ru*, [b]*akromkonergashev@gmail.com*

Рассмотрим уравнение

$$u_{xx} + \mathrm{sign}y|y|^m u_{yy} = 0,\ 0 < m < 1 \tag{1}$$

в неограниченной смешанной области $\Omega = \Omega_1 \cup J \cup \Omega_2$, где $\Omega_1 = \{(x,y) : -\infty < x < +\infty,\ 0 < y < 1\}$, а $\Omega_2 -$ область полуплоскости $y < 0$ ограниченная характеристиками уравнения (1) $AC : x - [2/(2-m)](-y)^{(2-m)/2} = 0, BC : x + [2/(2-m)](-y)^{(2-m)/2} = 1$ и отрезком $\overline{J} = AB$ оси абцисс. Примем следующие обозначения: $\beta = m/(2m-4)$, $J_1 = \{(x,y) : -\infty < x < 0, y = 0\}$, $J_2 = \{(x,y) : 1 < x < +\infty, y = 0\}$, $\theta_0(x) = (\frac{x}{2}, -[\frac{2-m}{2} \cdot \frac{x}{2}]^{\frac{2}{2-m}})$, $\theta_1(x) = (\frac{1+x}{2}, -[\frac{2-m}{2} \cdot \frac{1-x}{2}]^{\frac{2}{2-m}})$.

Задача S^∞. *Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую следующим условиям: $u(x,y) \in C(\Omega \cup J_1 \cup AC \cup BC \cup J_2) \cap C^1(\Omega_1 \cup J) \cap C^1(\Omega_2 \cup J) \cap C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2)$, удовлетворяет уравнению (1) в областях Ω_1, Ω_2 и обладает тем свойством, что $u_y(x,+0) = \nu(x) \in C^1(J)$ и на концах интервала может обращаться в бесконечность порядка -2β при $x = 0$ и порядка $1/2 - \beta$ при $x = 1$ со следующими краевыми условиями:*

$$u(x,1) = \varphi(x),\ -\infty < x < +\infty,$$

$$u_y(x,0) = \varphi_i(x), \forall x \in J_i,\ i = 1,2,$$

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x,y) = 0, \textit{равномерно по } y \in [0,1],$$

$$a(x) D_{0x}^{1-\beta} u[\theta_0(x)] + b(x) D_{x1}^{1-\beta} u[\theta_1(x)] = c(x), \forall x \in J,$$

$$u(x,-0) = u(x,+0),\ u_y(x,-0) = -u_y(x,+0).$$

Здесь $a^2(x) + b^2(x) \neq 0,\ \forall x \in \overline{J}$; $a(x)x^{-\beta} + b(x)(1-x)^{-\beta} \neq 0,\ \forall x \in \overline{J}$; $-1 \leqslant \dfrac{b(x)(1-x)^{-\beta}}{a(x)x^{-\beta} + b(x)(1-x)^{-\beta}} \leqslant 0$; $a(x) = a_1(x)x^p, p < \beta$; $a_1(x), b(x),\ c(x) \in C(\overline{J}) \cap C^3(J)$; $\varphi(x) \in C(J_i)$ и могут обращаться в бесконечность порядка -2β при $x = 0$ и порядка $1/2-\beta$ при $x = 1$, а при достаточно больших $|x|$ удовлетворяют неравенству $|\varphi_i(x)| \leqslant M|x|^{-1-\delta}$, $M, \delta = const, \delta > 0$; $D_{sx}^\alpha[f(x)]$ – оператор дробного в смысле Римана – Лиувилля интегродифференцирования.

Единственность решения поставленной задачи доказывается методом принципа экстремума. Существование решения поставленной задачи доказывается методом функций Грина и интегральных уравнений.

Об априорной оценке для дифференциального уравнения с дробной производной

Ибавов Т.И.

ДГУ, Махачкала, Россия; ibavov94@mail.ru

В области $\sigma = (0,T) \times R^n$, $T > 0$ рассмотрим следующее дифференциальное уравнение

$$\partial_{0t}^{\alpha} u(x,t) = \triangle^{\alpha/2}(\mid u(x,t) \mid^m u(x,t)) + f(x,t), \qquad (1)$$

где $f(x,t) \in L^2[0,T]$ и $m > 0$, $\triangle$ – оператор Лапласа, $\alpha \in (1,2)$, ∂_{0t}^{α} – дробная производная в смысле Капуто [1].

Теорема. *Пусть $u(x,t)$ – решение уравнения (1) при $m = 0$. Тогда существует постоянная $C > 0$ такая, что для любой непрерывной и ограниченной функции $\phi(x) \in C^2(R)$ справедлива оценка*

$$\int\limits_R \mid u(x,T) \mid^2 \phi^2(x) dx + \int\limits_0^T \int\limits_R \mid \triangle^{\alpha/4}(\phi(x) u(x,t)) \mid^2 dxdt \leq$$

$$\leq C \parallel u \parallel_{L^2(\sigma)} \parallel u\chi(\phi) \parallel_{L^1[0,T];L^2(R)} \parallel \hat{\triangle\phi} \parallel_{L^1(R)} + \parallel f\phi \parallel_{L^2(\sigma)} \parallel u\phi \parallel_{L^2(\sigma)} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \alpha \parallel \phi u \parallel_{H^{\alpha-1}(R)} \parallel u \triangle^{1/2} \phi \parallel_{\sigma}, \qquad (2)$$

где $\chi(\phi)$ – характеристическая функция.

Литература

1. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

Анализ методов управления интеллектуальными роботами

Ибрагим А.

КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; asibragim@gmail.com

Среди интеллектуальных методов настройки ПИД-регуляторов наиболее популярными являются использование: нечеткой логики, экспертных систем (ЭС), нейронных сетей (НС). Рассмотрим эти методы подробнее.

Экспертные системы предлагают рекомендации, указывающие, какой из настраиваемых параметров регулятора необходимо изменить для получения оптимального процесса. Недостатком этого метода является отсутствие механизма обучения, т.к. необходимо будет вносить изменения в правила ЭС в процессе работы [1].

Нечеткая логика используется в тех случаях, когда недостаточно знаний об объекте управления, однако, есть опыт управления объектом в нелинейных системах, идентифицировать которые слишком сложно. Основным недостатком данного метода является отсутствие метода подстройки нечеткой системы под классический контур управления, под каждый новый объект управления необходимо заново устанавливать нечеткую надстройку.

Нейронные сети (НС), ввиду обладания свойствами нелинейности и способности к оперативному обучению, также нашли широкое применение. Преимуществом данного решения является гибкая система адаптации настройки коэффициентов ПИД-регулятора. Основные недостатки НС – длительность процесса обучения, отсутствие критериев выбора количества нейронов в сети, невозможность предсказания погрешности регулирования для входных воздействий, которые не входили в набор обучающих сигналов [2].

Поэтому для минимизации недостатков описанных методов, наилучшим вариантом будет комбинация этих методов. Экспертные системы помогут принять во внимание особенности работы объекта, а нейронные системы оперативно реагировать на актуальное состояние и изменение характеристик системы.

Литература

1. *Денисенко В.В.* ПИД-регуляторы: принципы построения и модификации. Часть 1. СТА. 2006. № 4. С. 45–50. Часть 2. 2007. № 1. С. 78–88.

2. *Усков А.А., Кузьмин А.В.* Интеллектуальные технологии управления. Искусственные нейронные сети и нечеткая логика. М.: Горячая линия-Телеком, 2004. 143 с.

Нелокальная задача для одного уравнения с дробной производной

Иргашев Б.Ю.

НамИСИ, ИМ АН РУз, Наманган, Узбекистан; bahromirgasev@gmail.com

В области $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y$, $\Omega_x = \{x : 0 < x < \pi\}$, $\Omega_y = \{y : -a < y < b\}$, $a, b > 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, рассмотрим уравнение в частных производных

$$L[u] \equiv \begin{cases} l(u(x,y)) + {}_C D_{0y}^{\alpha} u(x,y) = 0, & y > 0, \quad 0 < \alpha < 1, \\ l(u(x,y)) + {}_C D_{0y}^{\beta} u(x,y) = 0, & y < 0, \quad 1 < \beta < 2, \end{cases} \tag{1}$$

где

$$l(u(x,y)) = (-1)^s \frac{\partial^{2s} u(x,y)}{\partial x^{2s}} + \frac{\partial^{s-1}}{\partial x^{s-1}} \left(p_{s-1}(x) \frac{\partial^{s-1} u(x,y)}{\partial x^{s-1}} \right) + ...$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} \left(p_1(x) \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \right) + p_0(x) u(x,y),$$

$$p_j(x) \in C^j\left(\overline{\Omega_x}\right), \; j = 0, 1, ..., s-1, \; s \in N,$$

$${}_C D_{0y}^{\alpha} u(x,y) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^y \frac{u_z(x,z)}{(y-z)^{\alpha}} dz,$$

$${}_C D_{0y}^{\beta} u(x,y) = \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \int\limits_y^0 \frac{u_{zz}(x,z)}{|y-z|^{\beta-1}} dz$$

– дробные производные в смысле Капуто.

Пусть $\Omega_+ = \Omega \cap (y > 0)$, $\Omega_- = \Omega \cap (y < 0)$. Для уравнения (1) рассмотрим следующую задачу с условиями сопряжения.

Задача D. Найти функцию $u = u(x,y)$ с условиями

$$Lu(x,y) \equiv 0, \;\; (x,y) \in \Omega_+ \cup \Omega_-,$$

$$\frac{\partial^{2s} u}{\partial x^{2s}} \in C(\Omega), \frac{\partial^{2s-1} u}{\partial x^{2s-1}} \in C\left(\bar{\Omega}\right), \quad {}_C D_{0y}^{\alpha} u \in C(\Omega_+), {}_C D_{0y}^{\beta} u \in C(\Omega_-),$$

$$\frac{\partial^{2j} u}{\partial x^{2j}}(0,y) = \frac{\partial^{2j} u}{\partial x^{2j}}(\pi,y) = 0, \; j = 0, 1, ..., s-1; -a \leqslant y \leqslant b,$$

$${}_C D_{0y}^{\alpha} u(x,+0) = u_y(x,-0), 0 \leqslant x \leqslant \pi,$$

$$u(x,b) - u(x,-a) = \varphi(x), \; 0 \leqslant x \leqslant \pi,$$

где $\varphi(x)$ достаточно гладкая функция.

Найдены достаточные условия однозначной разрешимости поставленной задачи.

Об одной нелокальной краевой задаче типа Франкля

***Исломов Б.*[1,a], *Абдуллаев А.А.*[2,b]**

[1]*НУУз,* [2]*ТИИИМСХ, Ташкент, Узбекстан;* [a]*islomovbozor@yandex.com,*
[b]*akmal09.07.85@mail.ru*

Рассмотрим уравнение

$$sgn\ y\,|y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad -1 < m < 0. \tag{1}$$

Пусть D – конечная односвязная область плоскости независимых переменных x, y, ограниченная при $y > 0$ кривой σ с концами в точках $A(0,0)$, $B(1,0)$ и отрезком $AB\,(y = 0)$, а при $y < 0$ характеристиками AC и BC уравнения (1).

Пусть далее $D_1 = D \cap \{y > 0\}$, $D_2 = D \cap \{y < 0\}$, $D = D_1 \cup D_2 \cup J$, $J = \{(x,y) : 0 < x < 1,\ y = 0\}$, $J_1 = \{(x,y) : 0 < x < c,\ y = 0\}$, $J_2 = \{(x,y) : c < x < 1,\ y = 0\}$, здесь $2\beta = m/m(m+2)$, причем $-1 < 2\beta < 0$, обозначим через C_0 точку пересечения характеристики AC с характеристикой, исходящей из точки $E(c,0)$, где $c \in J = (0,1)$ – интервал оси $y = 0$.

Задача NF. *Требуется найти функцию $u(x,y)$, обладающую следующими свойствами:*

1) $u(x,y) \in C\left(\bar{D}\right), u(x,y) \in C^{1,\alpha}(J)$;

2) $u(x,y)$ *– является регулярным решением уравнения (1) в области D_1, а в области D_2 – обобщенным решением из класса R_2 [1];*

3) *выполняется условие склеивание*

$$\lim_{y\to+0} u_y(x,y) = -\lim_{y\to-0} u_y(x,y);$$

4) *удовлетворяет следующим граничным условиям*

$$\{q(s)A_s[u] + \rho(s)u\}|_\sigma = \varphi(s), \qquad 0 < s < l,$$

$$D_{0x}^{1-\beta} u\left[\theta_0(x)\right] = c(x)u(x,0) + g(x), \qquad x \in (0,c),$$

$$u(p(x),0) = \mu u(x,0) + f(x), \quad (x,0) \in \bar{J}_1,$$

где $\mu = const > 0$, $p\,(x) = \delta - kx$, $p'\,(x) < 0$, $p(c) = c$, $p(1) = 0$, $k = c/(1-c)$, $\delta = c/\,(1-c)$, $c \in J$; l *– длина всей кривой* σ, s *– длина дуги* σ, *отсчитываемой от точки* $B(1,0)$.

При наложении определённых условий на заданные функции, доказывается однозначная разрешимость задачи NF.

Литература

1. *Кароль И.Л.* Об одной краевой задаче для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа // Докл. АН СССР. 1953. Т. 88, № 2. С. 197–200.

Задача Дарбу для неоднородного уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу

Исмоилов А.И.

ФерГУ, Фергана, Узбекистан; ismoilovaxrorjon@yandex.com

В области Δ плоскости $\xi O\eta$, ограниченной отрезками $\overline{OA}=\{(\xi,\eta):\eta=\xi, 0\leq\xi\leq 1\}$, $\overline{CA}=\{(\xi,1):0\leq\xi\leq 1,\}$, $\overline{OC}=\{(0,\eta):0\leq\eta\leq 1\}$, рассмотрим уравнение Эйлера – Пуассона – Дарбу

$$L\left(u\right)=u_{\xi\eta}-\frac{\beta}{\xi-\eta}u_{\xi}+\frac{\alpha}{\xi-\eta}u_{\eta}=f\left(\xi,\eta\right), \tag{1}$$

где $f(\xi,\eta)$ – заданная функция, а α и β – заданные действительные числа $0<\alpha,\beta,\alpha+\beta<1$.

Задача Дарбу. *Найти решение $u\left(\xi,\eta\right)\in C\left(\overline{\Delta}\right)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям*

$$\lim_{\eta\to\xi}u\left(\xi,\eta\right)=\tau\left(\xi\right),\quad 0\leq\xi\leq 1;\qquad u\left(0,\eta\right)=\psi_1\left(\eta\right),\quad 0\leq\eta\leq 1, \tag{2}$$

где $\tau\left(\xi\right)$, $\psi_1\left(\eta\right)$ – заданные непрерывные функции, причем $\psi_1\left(0\right)=\tau\left(0\right)$.

Решаем эту задачу методом Римана. Для этой задачи функция Римана – Адамара строится, когда $f(\xi,\eta)=0$ [1]. Решение задачи Дарбу следующее:

$$F(\xi_0,\eta_0)=\frac{\gamma_1}{(\eta_0-\xi_0)^{\alpha+\beta-1}}\int\limits_0^{\xi_0}\frac{(\eta_0-\xi)^{\alpha-1}\tau(\xi)}{(\xi_0-\xi)^{1-\beta}}d\xi+$$

$$+\int\limits_0^{\eta_0}\left[\psi_1'(\eta)+\frac{\beta}{\eta}\psi_1(\eta)\right]H\left(0,\eta;\xi_0,\eta_0\right)d\eta+\int\limits_0^{\xi_0}d\xi\int\limits_{\xi}^{\eta_0}f\left(\xi,\eta\right)H\left(\xi_0,\eta_0;\xi,\eta\right)d\eta, \tag{3}$$

где $\gamma_1=\Gamma\left(1-\alpha\right)/\Gamma\left(\beta\right)\Gamma\left(1-\alpha-\beta\right)$.

Теорема. *Если функция $f\left(\xi,\eta\right)$ представима в виде $f(\xi,\eta)=(\eta-\xi)^{\varepsilon-1}\times$ $\times f_1(\xi,\eta)$, $\varepsilon>0$, $f_1(\xi,\eta)\in C(\bar{\Delta})$, то функция $F\left(\xi_0,\eta_0\right)$ в области Δ удовлетворяет уравнению (1) и краевым условиям*

$$\lim_{\eta_0\to\xi_0}F\left(\xi_0,\eta_0\right)=0,\qquad F|_{\xi_0=0}=0.$$

Литература

1. *Уринов А. К., Исмоилов А. И.* Задачи Дарбу и принцип абсолютного экстремума для уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу // Доклады Академии наук Республики Узбекистан. 2011. № 5. С. 20–23.

Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа четвёртого порядка с дробной производной

Кадиркулов Б.Ж.[1,a], **Жалилов М.А.**[2,b]

[1] *ТГУВ, Ташкент,* [2] *ФерГУ, Фергана, Узбекистан;*

[a] *kadirkulovbj@gmail.com,* [a] *alimuhammad9978@mail.ru*

Пусть $\Omega = \{(x,t) : -1 < x < 1,\ -a < t < b\}$, $\Omega_1 = \Omega \cap (t > 0)$, $\Omega_2 = \Omega \cap\ (t < 0)$, где a, b – положительные действительные числа. В области Ω рассмотрим следующую нелокальную задачу.

Задача А. *Требуется найти функцию $u(x,t)$ из класса*

$$t^{-\beta}{}_C D_{0+}^{\alpha} u, u_{xxx} \in C(\bar{\Omega}_1), u_{xxxx} \in C(\Omega_1), u \in C^1(\bar{\Omega}_2) \cap C_{x,t}^{4,2}(\Omega_2),$$

удовлетворяющую в области $\Omega_1 \cup \Omega_2$ уравнению

$$0 = \begin{cases} t^{-\beta}{}_C D_{0t}^{\alpha} u(x,t) + u_{xxxx}(x,t) - \varepsilon u_{xxxx}(-x,t) + d^2 u(x,t), t > 0, \\ u_{tt}(x,t) + u_{xxxx}(x,t) - \varepsilon u_{xxxx}(-x,t) + d^2 u(x,t), t < 0, \end{cases}$$

краевым условиям

$$u(-1,t) = 0, u(1,t) = 0, u_{xx}(-1,t) = 0, u_{xx}(1,t) = 0, t \in [-a, 0) \cup (0, b]\,,$$

$$u_t(x,-a) = t^{-\beta}{}_C D_{0+}^{\alpha} u(x,b) + \varphi(x),\ 0 \le x \le 1,$$

а также условиям склеивания

$$u\,(x,+0) = u\,(x,-0)\,,\ \lim_{t\to+0} t^{-\beta}{}_C D_{0t}^{\alpha} u(x,t) = \lim_{t\to-0} u_t(x,t).$$

Здесь $\varphi(x)$ – заданная функция, $\beta > 0, \varepsilon \in (-1,1)$ – заданные действительные числа, ${}_C D_{0t}^{\alpha}, 0 < \alpha \le 1$ – интегро-дифференциальный оператор Капуто. Имеет место:

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия:*

$$\varphi(x) \in C^3[-1,1], \varphi^{(l)}(-1) = 0, \varphi^{(l)}(1) = 0, l = 0, 2,$$

$$\frac{\sin\sqrt{\lambda_{ik}}a}{\sqrt{\lambda_{ik}}} - \cos\sqrt{\lambda_{ik}}a + E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},\frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_{ik} b^{\alpha+\beta}) \ge C_0 > 0,\ i = 1,2,\ k = 1,2,\dots.$$

Тогда задача А имеет единственное решение. Здесь $E_{\alpha,m,l}(z)$ – функция Килбаса – Сайго, C_0 – некоторое положительное число, $\lambda_{1k} = (1+\varepsilon)\cdot k^4\pi^4 + d^2$, $\lambda_{2k} = (1-\varepsilon)(k-0,5)^4\pi^4 + d^2$, $k = 1,2,\dots$.

Литература

1. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and applications of fractional differential equations // North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006. 523 p.

Алгоритм робастного метода кластеризации на основе разбиения пространства признаков

Казаков М.А.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; f_wolfgang@mail.ru

Выбросы, присутствующие в данных, могут приводить к существенным проблемам при построении. С одной стороны, не всегда удается с уверенностью определить, является ли данная точка выбросом или нет, а с другой стороны данные, которые будут помечены как выбросы и исключены из рассмотрения могут нести полезную информацию. В задачах кластеризации выбросы могут существенно искажать получаемые границы кластеров, а также в некоторых случаях приводить к трудностям разделения двух кластеров. При построении иерархических моделей кластеризации специфическая сложность возникает при анализе кластеров нижнего уровня, которые характерны относительно низкой плотностью точек, и флуктуацией плотностей.

Рассмотрим алгоритм иерархической кластеризации, устойчивый к выбросам, построенный на основе разбиения пространства признаков. Главный принцип алгоритма заключается в рекурсивном разбиении пространства признаков на равные кубические области. В общем случае для n-мерного пространства признаков это будут n-мерные гиперкубы, поэтому для определенности я буду называть их клетками. На каждом шаге (уровне) анализируются две характеристики клетки: средняя плотность и равномерность распределения плотности клетки верхнего уровня (суперклетки), т.е. равномерность плотности распределения клетки данного уровня вычисляется на основе средних плотностей его субклеток. На основе этих данных, получаемых при анализе подклеток можно принять решение о том, является ли клетка целиком частью какого-либо кластера или нет. Главное предположение заключается в том, что клетка считается частью кластера в том случае, если его средняя плотность и равномерность распределения превышают определенные пороговые значения.

Так, после анализа клеток первого уровня можно получить клетки, которые являются частями кластеров. Далее из полученного множества равномерно плотных клеток выбирается произвольная клетка, которая будет частью первого кластера. На этом этапе необходимо определить, какие из оставшихся клеток также являются частями инициализированного кластера. Для этого используется функция экспансии кластера, позволяющая расширяться кластеру в множестве оставшихся клеток. Функция экспансии анализирует соседние клетки внешних клеток кластера. Разнообразие типов соседей растет с ростом размерности пространства признаков. Функция экспансии использует только два ближайших типа: клетки, смежные по гиперграням (неймановские соседи), а также соседние клетки, смежные по гиперребрам. В случае двумерного пространства признаков такими соседями будут соседи Мура. После полного расширения кластера на первом уровне выбирается клетка из множества оставшихся клеток (не вошедших в первый кластер) которой назначает второй кластер. Функция экспансии расширяет второй кластер на первом уровне. Все продолжается до тех пор, пока не исчерпается множество равномерно плотных клеток первого уровня.

Аналогичным образом производится анализ клеток второго уровня (подклеток неравномерно плотных клеток первого уровня), после чего производится экспансия созданных кластеров на равномерно плотные клетки второго уровня. Из множества оставшихся равномерных плотных клеток произвольно выбирается одна клетка, которой назначается новый кластер. Аналогично алгоритму, описанному для первого уровня, производится экспансия кластера на клетки второго уровня. Процедура выполняется до исчерпания множества равномерно плотных клеток второго уровня.

Изложенный алгоритм рекурсивно применяется на следующих уровнях. В результате формируется некоторое множество кластеров. Этот же алгоритм на следующем этапе можно применить непосредственно к клеткам отдельных кластеров для того, чтобы выявить кластеры внутри кластеров, что позволит в итоге получить иерархическое дерево кластеров.

Устойчивость к выбросам обеспечивается отсеиванием заведомо разреженных клеток. Как следствие, в слиянии клеток в кластеры участвуют только плотные клетки. Применение алгоритма к тестовым данным позволил сделать вывод, что наиболее оптимальное разбиение происходит при $k = 4$, т.е. разбиение ребра клетки на 4.

Априорная оценка решения первой краевой задачи для уравнения конвекции-диффузии дробного порядка с обобщенной функцией памяти

Казакова Е.М.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; shogenovae@inbox.ru

Дробное исчисление применяется при описании большого класса физических и химических процессов, протекающих в средах с фрактальной геометрией, а также при математическом моделировании экономических и социально-биологических процессов [1, с. 149]. В работе [2] методом энергетических неравенств была получена априорная оценка решения первой краевой задачи для уравнения диффузии дробного порядка с обобщенным ядром памяти как для дифференциальной, так и для разностной задач.

В прямоугольнике $\bar{Q}_T = \{(x,t) : 0 \le x \le 1, 0 \le t \le T\}$ рассмотрим первую краевую задачу:

$$\partial_{0t}^{\alpha,\lambda(t)} u + aD_{0t}^{-\beta,\mu(t)} u_x = u_{xx} + f(x,t), \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < t \le T, \tag{1}$$

$$u(0,t) = 0, \qquad u(1,t) = 0, \qquad 0 \le t \le T, \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad 0 \le x \le 1, \tag{3}$$

где $\partial_{0t}^{\alpha,\lambda(t)} u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^t \lambda(t-\tau) u_\tau(x,\tau)(t-\tau)^{-\alpha} d\tau$ —дробная производная Капуто порядка α, $0 < \alpha < 1$, с весовой функцией $\lambda(t) \in C^2[0,1]$, $\lambda(t) > 0$, $\lambda'(t) \le 0$, $t \in [0,T]$, $D_{0t}^{-\beta,\mu(t)} u = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int\limits_0^t \mu(t-\tau) u(x,\tau)(t-\tau)^{\beta-1} d\tau$ — дробный интеграл Римана – Лиувилля порядка β, $0 < \beta < 1$, с весовой функцией $\mu(t) \in C^1[0,1]$, $\mu(t) > 0$, $t \in [0,T]$, a – заданное число.

Получена априорная оценка для решения $u(x,t)$ задачи (1)–(3), из которой следует единственность и непрерывная зависимость решения от входных данных.

Литература

1. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

2. *Alikhanov A.A.* A time-fractional diffusion equation with generalized memory kernel in differential and difference settings with smooth solutions // Comput. Methods Appl. Math. 2017, vol. 17, no. 4, pp. 647–660.

Моделирование криптовалютных систем как системы «роящихся частиц»

Казиев В.М., Казиева Б.В.

КБГУ, Нальчик, Россия; studkvm@mail.ru

Криптовалютный рынок подвержен случайным воздействиям. «Рой» криптовалют (сейчас свыше двух тысяч) этому способствует. Если отслеживать хотя бы Топ-10 криптовалют, видно, что выпадают и быстро «внедряются» различные криптовалюты. Ценность каждой определяется алгоритмами, сложностью её генерации (математических расчётов), доступными ресурсами, случайностью транзакций.

Для криптовалютного рынка важны знания экспертов, эвристические процедуры. Наиболее популярным из формализуемых процедур является метод «роящиеся частицы». Он обладает «интуитивной (социально-биологической) понятностью» и высокой вычислительной эффектностью, устойчивостью, позволяющей решать сложные задачи с дискретными, динамически меняющимися параметрами.

Рассматривается формально-аналитический подход на основе продукционных правил. Пусть задана нечеткая система с входом – $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, нечеткими правилами вида:

$$if\ \Lambda^n_{(i=1)}(x_i = a_{ij})\ then\ r_j, \quad j = 1, 2, \ldots, m,$$

где $r_j \in R$, $a_{ij} \in P, P$ – множество нечетких понятий (носитель нечеткой системы), $F : R^n \to R$. Оператор нечеткой конъюнкции – мультипликативен, а агрегирования нечетких правил – аддитивен. Выход $F(x)$ системы – аналог средневзвешенного с использованием $\mu_{ij}(x_i)$ – функции принадлежности для нечеткого понятия a_{ij}. Для идентификации необходимо иметь статистику $s(x)$, функцию $f(x)$ или экспертные данные $F(x)$. Тип функции принадлежности – трехпараметрический («треугольная функция»). Функционал ошибок (адекватности) – аналог критерия наименьших квадратов (можно и максимального правдоподобия).

Критерии управления «роем» – инерционность, активация памяти, взаимодействие типа «сотрудничество». Инерционность: элемент «роя» не может мгновенно менять свое направления движения (криптовалюта может менять стоимость, капитализацию только на крипторынке). Активация памяти: в каждый момент элемент хранит в памяти наилучшую позицию – свою и «роя» (криптовалюта, точнее трейдинг запоминает состояние рынка). Взаимодействие: движение элемента («роя») задается наилучшей текущей позицией с учетом предыдущей и движения лучшей (по функционалу ошибок) частицы «роя» – криптовалютный рынок пытается самоорганизоваться.

Модель включает динамические уравнения движения частиц (на k-ой итерации), процедуру выбора наилучшей позиции.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (РГНФ), проект №17-02-00467.

Можно провести имитационные эксперименты для обучения «роя» и «частиц» на задачах идентификации распределения максимальных ошибок, сходимости (чувствительности) алгоритма к изменениям коэффициентов и выяснение распределения лучших решений, поведения в окрестности найденных областей (ускорения, замедления транзакций).

Предложенный подход к «движению» на криптовалютном рынке с использованием алгоритма «роя частиц» может оказаться эффективным, особенно, на нынешнем этапе его становления.

Математическая модель микробной популяции

Кайгермазов А.А.[a], **Кудаева Ф.Х.**[b]

КБГУ, Нальчик, Россия; [a]*arslan1961@yandex.ru,* [b]*kfatimat@yandex.ru*

Пусть $u(\tau, t)$ – плотность численности (биомассы) микробной популяции возраста τ в момент времени t. Возраст популяции τ отсчитывается с момента ее рождения. По определению, общая численность микробной популяции (общая концентрация биомассы) будет выражаться интегралом от функции $u(\tau, t)$ по всем возрастам:

$$P(t) = \int\limits_0^\infty u(\tau, t) d\tau.$$

Будем считать, что плотность смертности и плотность рождаемости пропорциональны плотности численности $u(\tau, t)$ и имеют соответственно вид [1, 2]:

$$F(\tau, t; u(\tau, t); u(\bullet, t)) = a(P(t)) \cdot u(\tau, t),$$

$$G(\tau, t; u(\tau, t); u(\bullet, t)) = (P(t)) \cdot e^{-\alpha\tau} u(\tau, t),$$

где $a(P(t))$, $c(P(t))$ – неотрицательные функции (коэффициенты смертности и рождаемости соответственно), $\alpha = const > 0$.

Динамику микробной популяции будем описывать задачей

$$u_\tau + u_t = -a(P(t)) \cdot u(\tau, t), \tag{1}$$

$$u(\tau, 0) = \varphi(\tau), \quad u(0, t) = \int\limits_0^\infty c((t)) \cdot e^{-\alpha\tau} u(\tau, t) d\tau, \tag{2}$$

где $P(t) = \int_0^\infty u(\tau, t) d\tau$.

Задача (1)–(2) относится к классу лимитированных популяционных моделей для любых функций $a(P)$, $c(P)$, за исключением случая $a(P) = const$, $c(P) = const$.

Исследованы стационарные состояния системы (1)–(2). Доказана теорема асимптотической устойчивости стационарного решения.

Литература

1. *Hoppensteadt F.* An age dependent epidemic model // Journal of the Franklin Institute, 1974, vol. 297, no. 5, pp. 325–333.

2. *Busenberg S., Ianelli M.* A class of nonlinear diffusion problems in age-dependent population dynamics // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 1983, vol. 7, no. 5, pp. 501–529.

Критерии минимальности оператора Лапласа

Кальменов Т.Ш.

ИМММ, Алматы, Казахстан; kalmenov.t@mail.ru

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ конечная область с гладкой границей $\partial\Omega$.

Рассмотрим уравнение Лапласа

$$\Delta u = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x), \qquad x \in \Omega. \tag{1}$$

Линейным оператором Δ_0 назовем замыкание дифференциального оператора Δ в $L_2(\Omega)$ на подмножестве функции $u \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$

$$u\big|_{x\in\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial n_x}\bigg|_{x\in\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

где $\frac{\partial}{\partial n_x}$ – производная по направлению нормали.

Оператор Δ с граничным условием замыкаем в $L_2(\Omega)$, при этом если $u_0 \in D(\Delta_0)$, то $u_0 \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ и выполнено неравенство

$$\|\Delta_0 u_0\|_{L_2(\Omega)} \geq c\|u_0\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)}.$$

Ввиду большой теоретической и прикладной важности представляет интерес нахождение условий на функцию $f(x)$, при котором

$$\Delta_0 u_0 = f(x), \quad u_0\big|_{x\in\partial\Omega} = \frac{\partial u_0}{\partial n_x}\bigg|_{x\in\partial\Omega} = 0.$$

Через Δ_0^* обозначим сопряженный оператор к оператору Δ_0 в пространстве $L_2(\Omega)$, а через $\ker \Delta_0^*$ обозначим ядро сопряженного оператора Δ_0^*.

С помощью свойств оператора Δ_0 и $\ker \Delta_0^*$ в работе выдающегося советского математика М.И. Вишика [1] дано описание всех регулярных краевых задач для уравнения Лапласа (1) в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$.

В работе М. Отелбаева [2] теория М.И. Вишика распространена на случай банахова пространства, а также дано описание корректных сужений максимального оператора Δ_0^*, которые включают в себя не только граничные задачи, но и задачи с внутренними граничными условиями. К этой группе задач относятся, в частности, задачи Бицадзе – Самарского [3], возникающие из движения жидкой плазмы.

Задача (1)–(2) является задачей с переопределенными граничными условиями Коши вдоль всей границы $\partial\Omega$ и является некорректной задачей для уравнения (1). Поэтому нахождение условий разрешимости задачи (1)–(2), т.е. $\Delta_0 u_0 = f_0$, является актуальной задачей. В теории некорректных задач для уравнения (1) изучается задача с данными Коши на части границы $\partial\Omega$, что очень затрудняет нахождение критерия разрешимости (необходимые и достаточные условия разрешимости) этой задачи. Основоположниками теории некорректных краевых задач являются выдающиеся советские математики А.Н. Тихонов [4], М.М. Лаврентьев [5] и их ученики и последователи. В их работах построена теория условной корректности некорректных краевых задач. Изучение этой задачи с помощью спектрального анализа самосопряженной задачи для дифференциальных уравнений с отклоняющимися аргументами было начато в работах Т.Ш. Кальменова, М. Садыбекова, Б. Торебек и других [6–8].

В настоящей работе в $L_2(\Omega)$ нами получен критерий разрешимости задачи (1)–(2), т.е. необходимые и достаточные условия на правую часть уравнения, чтобы задача (1)–(2) была однозначно разрешима в $L_2(\Omega)$. При этом существенно используется граничное условие Ньютонового (объемного) потенциала, построенного Т.Ш. Кальменовым, Д. Сураганом в работе [9].

Через $\varepsilon(x)$ обозначим фундаментальное решение уравнения (1), удовлетворяющее уравнению

$$\Delta_x \varepsilon(x) = \delta(x),$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

Теорема. *Задача (1)–(2) (задача Коши с данными на всей границе) корректна, т.е. $f \in R(\Delta_0)$, тогда и только тогда, когда выполняется условие*

$$\left. \int\limits_{\Omega} \varepsilon(x-y) f(y) dy \right|_{x\in\partial\Omega} = 0. \tag{1}$$

Литература

1. *Вишик М.И.* Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений // Труды Московского математического общества. 1952. Т. 1. С. 187–246.

2. *Отелбаев М., Кокебаев Б.К., Шыныбеков А.Н.* К теории сужения и расширения операторов. 1982.

3. *Бицадзе А.В., Самарский А.А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Доклады академии наук СССР. 1969. Т. 185, № 4. С. 739–740.

4. *Тихонов А.Н.* О решении нелинейных интегральных уравнений первого рода // Доклады академии наук СССР. 1965. Т. 161, № 5. С. 1023–1026.

5. *Лаврентьев М.М.* О задаче Коши для уравнения Лапласа // Известия академии наук СССР. Серия математическая. 1956. Т. 20, № 6. С. 819–842.

6. *Кальменов Т.Ш., Искакова У.А.* Критерий сильной разрешимости смешанной задачи Коши для уравнения Лапласа // Доклады академии наук. 2007. Т. 414, № 2. С. 168–171.

7. *Кальменов Т.Ш., Искакова У.А.* Об одном методе решения задачи Коши для уравнения Лапласа // Доклады академии наук. 2008. Т. 423, № 4. С. 449–451.

8. *Kalmenov T.S., Sadybekov M.A., Torebek B.T.* A criterion of solvability of the elliptic Cauchy problem in a multi-dimensional cylindrical domain // Complex Variables and Elliptic Equations. 2019, vol. 64, no. 3, pp. 398–408.

9. *Кальменов Т.Ш., Сураган Д.* К спектральным вопросам объемного потенциала // Доклады академии наук. 2009. Т. 428, № 1. С. 16–19.

10. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988. 512 с.

К вопросу комплексной оценки множества моделей экономического развития

Канаметова Д.А.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия;

Задачи, связанные с программами экономического развития, требуют особого подхода. Надо заметить, что отсутствие единой модели в этих вопросах приводит к разнообразию рекомендаций, которые не всегда могут оказаться согласованными. Для достижения устойчивого прогноза необходимо провести комплексную оценку природно-ресурсного потенциала и уровня экономического развития анализируемой территории; рассмотреть совокупность ранее разработанных моделей оценить преимущество и недостатки каждой из них.

В настоящей работе предлагается метод комплексной оценки множества моделей экономического развития для выявления наиболее оптимальной из предложенных или построения оптимальной в результате синтеза и коррекции уже существующих. Описание каждого региона будет представлено m-мерным вектором $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, где m – число используемых в данном регионе ресурсов [1].

Множество заданных регионов и ресурсов, рассматриваемых для построения концепции устойчивого развития, представляют собой предметную область, на которой было рассмотрено n программы экономического развития (предлагаемых моделей развития). Для всех существующих программ экономического развития имеется экспертная оценка, которую можно представить булевой функцией, принимающей значение: или плохо, или хорошо. Можно предположить, что ни одна из рассматриваемых программ экономического развития не является идеальной. Поэтому предлагается применить методы логической коррекции существующих программ для построения наиболее успешной по отношению к исследуемым регионам [2, 3].

Данный метод основан на логико-математическом аппарате, адаптированном для решения поставленной задачи. В рамках предлагаемого подхода каждая модель развития выступает в качестве алгоритма. Решение данной задачи состоит в построении такой оптимальной программы развития, которая включает в себя преимущества исследуемых программ экономического развития и при этом лишена их недостатков. Построенная оптимальная программа и будет выступать в качестве искомой модели оптимального развития.

Литература

1. *Воронцов К.В.* Оптимизационные методы линейной и монотонной коррекции в алгебраическом подходе к проблеме распознавания // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2000. Т. 40, № 1. С. 166–176.

2. *Лютикова Л.А.* Моделирование и минимизация баз знаний в терминах многозначной логики предикатов. Препринт. Нальчик: НИИ ПМА КБНЦ РАН, 2006. 33 с.

3. *Grabich M., Marichal J.L., Pap E.* Aggregation Functions: Encyclopedia of Mathematics and Its Applications. 2009.

К теории вырождающихся параболических уравнений

Капицына Т.В.

НИУ МЭИ, Москва, Россия; KapitsynaTV@mpei.ru

В докладе рассматривается параболическое уравнение 2-го порядка в цилиндрической области с основанием класса $C^{1+\lambda}$, $0 < \lambda < 1$, вырождающееся на ее границе. Обсуждаются необходимые и достаточные условия существования предела в среднем решения этого уравнения на боковой поверхности области и на ее нижнем основании. Исследуется вопрос об однозначной разрешимости первой смешанной задачи для этого уравнения в случае, когда граничная и начальная функции принадлежат пространствам типа L^2.

Об одной краевой задаче в неограниченной области для параболического уравнения высокого четного порядка с дробной производной Римана – Лиувилля

Карашева Л.Л.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; k.liana86@mail.ru

Рассмотрим в области $D = \{(x,t) : 0 < x < \infty, 0 < t < T\}$ уравнение

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} + (-1)^n \frac{\partial^{2n} u(x,t)}{\partial x^{2n}} = f(x,t), \tag{1}$$

где $n \in \mathbb{N}$, $\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}$ – дробная производная Римана – Лиувилля порядка α [1, с. 9], $0 < \alpha \leq 2$.

Уравнение (1) при $n = 1$ совпадает с диффузионно-волновым уравнением, которое широко исследовано (см. [2] и библиографию там). В частности, в работе [3] исследована краевая задача в полубесконечной области для однородного уравнения (1) при $n = 1$ с дробной производной Римана – Лиувилля. Для уравнения (1) в работе [4] построено фундаментальное решение и решена задача Коши. В работе [5] для уравнения (1) исследована краевая задача в полуполосе.

В данной работе исследована краевая задача для уравнения (1) в неограниченной области, построено решение поставленной задачи и доказанана теорема единственности в классе функций быстрого роста.

Литература

1. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

2. *Псху А.В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.

3. *Геккиева С.Х.* Краевая задача для обобщенного уравнения переноса с дробной в полубесконечной области // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2002. Т. 8, № 1. С. 6–8.

4. *Карашева Л.Л.* Задача Коши для параболического уравнения высокого четного порядка с дробной производной по временной переменной // Сибирские электронные математические известия. 2018. Т. 15. С. 696–706.

5. *Карашева Л.Л.* Задача в полуполосе для параболического уравнения высокого порядка с оператором Римана – Лиувилля по временной переменной // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2018. Т. 23, № 3. С. 57–66.

Об одной краевой задаче для трехмерного эллиптического уравнения с сингулярными коэффициентами в четверти шара

Каримов К.Т.

ФерГУ, Фергана, Узбекистан; karimovk80@mail.ru

В трехмерной области Ω, ограниченной частью сферы

$$S_0 = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ x > 0, y > 0,\ -a < z < a\right\}$$

и двумя полукругами $S_1 = \left\{(x, y, z) : x = 0, y^2 + z^2 < a^2, y > 0, -a < z < a\right\}$, $S_2 = \left\{(x, y, z) : y = 0,\ x^2 + z^2 < a^2,\ x > 0,\ -a < z < a\right\}$, рассмотрим уравнение эллиптического типа

$$U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} + \frac{2\alpha}{x} U_x + \frac{2\beta}{y} U_y = 0, \tag{1}$$

где $U = U\left(x, y, z\right)$ – неизвестная функция, а α, $\beta \in R$, причем $\alpha, \beta < 1/2$.

Задача D. *Найти функцию $U\left(x, y, z\right)$ удовлетворяющую уравнению (1) и краевым условиям*

$$U\left(x, y, z\right) \in C\left(\bar{\Omega}\right) \cap C^2\left(\Omega\right),\ U\left(x, y, z\right) = F\left(x, y, z\right),\ \left(x, y, z\right) \in \bar{S}_0,$$

$$U\left(0, y, z\right) = \mathrm{T}_1\left(y, z\right),\ \left(0, y, z\right) \in \bar{S}_1,\ U\left(x, 0, z\right) = \mathrm{T}_2\left(x, z\right),\ \left(x, 0, z\right) \in \bar{S}_2,$$

где F, T_1, T_2 – заданные непрерывные функции.

При переходе в сферические координаты, область Ω переходит в $\Delta = \{(r, \theta, \varphi) : r \in (0, a),\ \theta \in (0, \pi),\ \varphi \in (0, \pi/2)\}$, а задача D принимает вид

$$u_{rr} + \frac{2\left(1 + \alpha + \beta\right)}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{\left(1 + 2\alpha + 2\beta\right) ctg\theta}{r^2} u_\theta +$$

$$+ \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} u_{\varphi\varphi} + \frac{2\beta ctg\varphi - 2\alpha tg\varphi}{r^2 \sin^2\theta} u_\varphi = 0,\ \left(r, \theta, \varphi\right) \in \Delta,$$

$$\left|u\left(0, \theta, \varphi\right)\right| < +\infty,\ u\left(a, \theta, \varphi\right) = f\left(\theta, \varphi\right),\ \theta \in [0, \pi],\ \varphi \in [0, \pi/2],$$

$$u\left(r, \theta, 0\right) = \tau_2\left(r, \theta\right),\ \ u\left(r, \theta, \pi/2\right) = \tau_1\left(r, \theta\right),\ \ r \in [0, a],\ \theta \in [0, \pi/2],$$

$$\left|u\left(r, 0, \varphi\right)\right| < +\infty,\ \ \left|u\left(r, \pi, \varphi\right)\right| < +\infty,\ r \in [0, a],\ \varphi \in [0, \pi/2],$$

где $u\left(r, \theta, \varphi\right) = U\left(x, y, z\right),\ f\left(\theta, \varphi\right) = F\left(x, y, z\right),\ \tau_j = \mathrm{T}_j,\ j = 1, 2.$

Методом спектрального анализа исследуется однозначная разрешимость последней задачи (например, как в работе [1]).

Литература

1. *Каримов К.Т.* Краевые задачи для трехмерного эллиптического уравнения с сингулярным коэффициентом в цилиндрической области // Бюллетень института математики. 2020. № 4. С. 75–97.

О коэрцитивных свойствах и разделимости нелинейных дифференциальных операторов

Каримов О.Х.

ИМ НАНТ, Душанбе, Таджикистан; karimov_ olim72@mail.ru

Фундаментальные результаты по теории разделимости дифференциальных операторов принадлежат В.Н. Эвeритту и М. Гирцу. Существенный вклад в дальнейшее развитие этой теории внесли К.Х. Бойматов, М. Отелбаев и их ученики.

Рассмотрим в пространстве $L_2(R^n)$ нелинейный дифференциальный оператор вида

$$L[u] = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + V(x,u)u(x) = f(x), \tag{1}$$

где $a_{ij}(x) \in C^2(R^n)$ – вещественный положительный коэффициент, а $V(x,z)$ – положительная функция.

Представим функцию $V(x,z)$ в виде $V(x,z) = F(x,\xi,\eta)$, $\xi = Rez$, $\eta = Imz$. Найдены условия на функцию $F(x,\xi,\eta)$, при выполнении которых уравнение (1) разделяется в пространстве $L_2(R^n)$, и для всех решений $u(x) \in L_2(R^n) \cap W^2_{2,loc}(R^n)$, удовлетворяющих уравнению (1) с правой частью $f(x) \in L_2(R^n)$, выполняется следующее коэрцитивное неравенство:

$$\left\| -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}; L_2(R^n) \right\| + \|V(x,u)u; L_2(R^n)\| +$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n} \left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) V^{\frac{1}{2}}(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}; L_2(R^n) \right\| \leq M\|f(x); L_2(R^n)\|,$$

где положительное число М не зависит от $u(x)$, $f(x)$.

Литература

1. *Бойматов К.Х.* Теоремы разделимости, весовые просранства и их приложения // Труды МИАН СССР. 1984. Т. 170. С. 37–76.

2. *Mohamed A.S., Atia H.A.* Separation of the general second order elliptic differential operator with an operator potential in the weighted Hilbert spaces // Appl. Math. Comput. 2005, vol. 162, pp. 155–163.

3. *Каримов О.Х.* О коэрцитивной разрешимости нелинейного уравнения Лапласа– Бельтрами в гильбертовом пространстве // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, №1(77). С. 163–176.

К вопросу математического моделирования на основе теории конфликта

Кенетова Р.О.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; kenetova_ r@mail.ru

Система отношений между этносами, проживающими в одной среде обитания, является синергетической, поэтому при их моделировании могут быть использованы методы синергетики [1] и нелинейного анализа.

Межэтнический конфликт, как правило, является следствием межпассионарного конфликта. Пусть $n_i = n_i(t)$ – численность пассионариев и субпассионариев в этносе E_i, $i = 1, 2$. Тогда в качестве математической модели межэтнического конфликта можно принять систему:

$$n_1'(t) = (\mu_1 - \mu_{11}n_1 - \mu_{12}n_2)n_1, \qquad n_2'(t) = (\mu_2 - \mu_{21}n_1 - \mu_{22}n_2)n_2, \tag{1}$$

где μ_i – скорость появления, $\lambda_i = \mu_{11}n_1 + \mu_{22}$ – скорость изолирования пассионариев и субпассионариев в этносе E_i, $i = 1, 2$; $\|\mu_{ij}\| = \begin{Vmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{21} & \mu_{22} \end{Vmatrix}$ – матрица взаимодействия этносов. Когда этносы E_1 и E_2 имеют одинаковые размеры, уравнения, входящие в систему (1), принимают вид

$$N_1'(t) = \mu N_1(t) - \lambda N_1^{\alpha}(t),$$

где α, μ и λ – неотрицательные параметры, $N_1(t)$ – численность этноса E_1 в момент времени t.

Точка $([\mu_1\mu_{22} - \mu_2\mu_{12}]/\det\|\mu_{ij}\|)$, с $\det\|\mu_{ij}\|) \neq 0$ является точкой равновесия [2]. Равновесие устойчиво, когда $\det\|\mu_{ij}\|) > 0$, и неустойчиво в противном случае.

В модели (1) непосредственно не участвует численность $n_i^i(t)$ гармоничных особей этноса E_i $(1 = 1, 2)$. Гармоничные особи, т.е. особи, пассионарный импульс которых равен по величине импульсу инстинкта самосохранения, могут сыграть заметную (центристскую) роль в стабилизации межэтнического конфликта. Роль гармоничных особей в математической модели (1) межэтнического конфликта можно учесть осредненно через ее параметры.

Литература

1. *Хакен Г.* Синергетика. М. Мир. 1985. 326 с.
2. *Бейли Н.* Математика в биологии и медицине. М. Мир. 1970. 326 с.

Компьютерное моделирование поиска донора крови и его применение

Керефов Б.М.

КБГУ, Нальчик, СКФУ, Ставрополь, Россия; timur200660@gmail.com

В настоящее время мобильные устройства являются важной частью современного человека. В связи с этим актуальной становится проблема создания приложений и внедрения их на мобильные устройства.

В данной работе построена компьютерная модель и разработано приложение «Донор» на базе операционной системы Android, которое может существенно сократить время, затрачиваемое на поиск доноров крови в случае чрезвычайной ситуации.

В разработанном приложении были выделены следующие структуры:

LoginActivity – деятельность, которая запускает экран инициализации пользователя;

MainActivity – деятельность, которая запускается после LoginActivity;

InfoActivity – деятельность, которая запускается при нажатии на кнопку «контакты» в приложении, содержащая информацию о станции переливания крови.

Эти структуры связаны с моделью для загрузки данных из базы данных и с сервера.

Приложение для ОС Android состоит из набора активностей, каждой из которых соответствует экран приложения. Каждая активность представлена в проекте классом, реализованным на языке Java. Приложение работает с базой данных MySQL, которая находится на сервере. MySQL использует парадигму клиент-сервер.

Представленная разработка проста в использовании, поэтому освоить принципы работы с ней не составит труда даже пользователю, обладающему небольшими навыками работы со смартфоном. Легкость использования достигается благодаря достаточно простому интерфейсу, так как связь между донором и акцептором осуществляется по группе крови и номеру телефона.

Предлагаемое приложение поможет нуждающемуся человеку получить доступ ко всем донорам крови конкретной группы, находящимся поблизости от его местонахождения, через несколько минут. Детали будут содержать группу крови и номер контакта.

Данный программный продукт разработан для самой распространенной операционной системы Android, что делает его доступным для многих пользователей.

Локальные и нелокальные краевые задачи для обобщенного уравнения Аллера – Лыкова

Керефов М.А.[1,a], **Геккиева С.Х.**[2,b]

[1]*КБГУ,* [2]*ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия;* [a]*kerefov@mail.ru,* [b]*gekkieva_s@mail.ru*

Настоящая работа посвящена исследованию уравнения влагопереноса Аллера – Лыкова с переменными коэффициентами с дробной производной Римана – Лиувилля [1]

$$A_1 D_{0t}^{\alpha+1} u + D_{0t}^{\alpha} u = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + A D_{0t}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x,t)\,u + f(x,t),$$

где D_{0t}^{γ} – оператор дробного дифференцирования Римана – Лиувилля [2, с. 9]; $0 < \alpha < 1$; A_1, $A = const > 0$; входящие в уравнение функции удовлетворяют условиям: $0 < c_1 \le k(x,t)\,;\eta(x)\,, q(x,t) \le c_2$; $k_t(x,t)\,, q_t(x,t) \le 0$; $c_1, c_2 = const$.

Предполагаем, что каждая из рассматриваемых в работе локальных и нелокальных задач обладает нужными для изложения производными, а коэффициенты уравнения и граничных условий удовлетворяют необходимыми для изложения условиям гладкости.

С помощью метода энергетических неравенств для решений поставленных локальных и нелокальных задач получены априорные оценки в терминах дробной производной Римана – Лиувилля, из которых следует единственность решения рассматриваемых краевых задач и его устойчивость по правой части и начальным данным.

Литература

1. *Керефов М.А., Геккиева С.Х.* Численно-аналитический метод решения краевой задачи для обобщенных уравнений влагопереноса // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31, вып. 1. С. 3–28.

2. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

Нелокальная краевая задача для уравнения четвертого порядка

Киличов О.Ш.

ИМ АН РУз, Ташкент, Узбекистан; oybek2402@mail.ru

В области $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < p, 0 < y < q\}$ рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = f(x, y), \tag{1}$$

где $f(x, y)$– заданная непрерывная функция в $\overline{\Omega}$.

Задача. *Найти решение* $u(x, y) \in C^{4,k+1}_{x,y}(\overline{\Omega})$, *уравнения (1) по условиям*

$$u(0, y) = u(p, y) = 0,\ 0 \le y \le q, \tag{2}$$

$$u_{xx}(0, y) = u_{xx}(p, y) = 0,\ 0 \le y \le q, \tag{3}$$

$$\frac{\partial^k u}{\partial y^k}\Big|_{y=0} = \frac{\partial^k u}{\partial y^k}\Big|_{y=q},\ 0 \le x \le p, \tag{4}$$

$$\frac{\partial^{k+1} u}{\partial y^{k+1}}\Big|_{y=0} = \frac{\partial^{k+1} u}{\partial y^{k+1}}\Big|_{y=q},\ 0 \le x \le p, \tag{5}$$

где $1 \le k$ *– фиксированное натуральное число.*

Единственность решения задачи (1)–(5) доказывается спектральным методом используя полноту функций $X_n(x)$ [1], для доказательства существования решения применяется метод Фурье.

Литература

1. *Моисеев Е.И.* О решении спектральным методом одной нелокальной краевой задачи // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, № 8. С. 1094–1100.

Математическое моделирование осциллятора Дуффинга с производной переменного дробного порядка

Ким В.А.[1,a], **Паровик Р.И.**[2,3,b]

[1]*КамчатГТУ*, [2]*КамГУ им. Витуса Беринга, Петропавловск-Камчатский,* [3]*ИКИР ДВО РАН, Паратунка, Россия;* [a]*valentinekim@mail.ru,* [b]*romanparovik@gmail.com.*

Рассмотрим следующую задачу Коши для смещения $x(t) \in C^2(0,T)$ [1]:

$$\ddot{x}\left(t\right)+\lambda D_{0t}^{q(t)}x\left(\tau\right)+\omega_0^2 x\left(t\right)+bx^3\left(t\right)=f\left(t\right),x(0)=x_0,\ \dot{x}(0)=y_0, \tag{1}$$

где $0<q(t)<1$, $f\left(t\right)=\delta\cos\left(\omega t\right)$, α – коэффициент затухания, δ и ω – амплитуда и частота колебаний внешнего периодического воздействия, x_0 и y_0 – заданные константы, начальные условия, T – время моделирования. Оператор $D_{0t}^{q(t)}x\left(\tau\right)$ в модельном уравнении (1) имеет вид :

$$D_{0t}^{q(t)}x\left(\tau\right)=\frac{1}{\Gamma\left(1-q\left(t\right)\right)}\frac{d}{dt}\int\limits_0^t\frac{x\left(\tau\right)d\tau}{\left(t-\tau\right)^{q(t)}}. \tag{2}$$

В работе исследуется нелокальная конечно-разностная схема для численного решения задачи (1), рассмотрены вопросы ее сходимости и устойчивости. Проведено сопоставление с результатами, полученными по методам Адамса – Башфорда – Моултона и модифицированного Ньютона [2, 3].

Литература

1. *Kim V.A.* Duffing oscillator with external harmonic action and variable fractional riemann-liouville derivative characterizing viscous friction // Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences, 2016, vol. 13, no. 2, pp. 46–49.

2. *Ким В.А.* Методы Адамса – Башфорда – Моултона и Ньютона – Рафсона для численного анализа осциллятора Дуффинга с производной переменного дробного порядка Римана – Лиувилля // Проблемы вычислительной и прикладной математики. 2021. Т. 33, № 3. С. 82–97.

3. *Kim V.A., Parovik R.I.* Mathematical model of fractional Duffing oscillator with variable memory // Mathematics, 2020, vol. 8, no. 11, pp. 1–14.

НИР КамГУ им. Витуса Беринга, «Природные катастрофы Камчатки – землетрясения и извержения вулканов, № АААА-А19-119072290002.

Об одной внутреннекраевой задаче для уравнения параболо – гиперболического типа

Киржинов Р.А.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; kirzhinov.r@mail.ru

Пусть $\Omega = \{(x,\, y)\colon 0 < x < r,\ -r < y < h\}$ — область евклидовой плоскости точек $(x,\, y)$; $\Omega^- = \Omega \cap \{(x,\, y)\colon y < 0\}$; r, h — вещественные положительные числа.

В области Ω рассматривается уравнение

$$\begin{cases} u_{xx} - u_y = f, & y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy}, & y < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $u = u(x,\, y)$ — неизвестная функция, $f = f(x,\, y)$ — заданная функция.

Исследуется

Задача 1. *Найти решение $u(x,\, y)$ уравнения (1) из класса $C^1\left(\overline{\Omega}\right) \cap C_x^2(\Omega) \cap C_y^2(\Omega^-)$, удовлетворяющее условиям*

$$u(0,\, y) = \varphi(y), \quad u(r,\, y) = \psi(y), \qquad -r \leqslant y \leqslant h, \tag{2}$$

$$\alpha_1\, u(x,\, 0) + \alpha_2\, u(x,\, -r) + \alpha_3\, u_y(x,\, 0) + \alpha_4\, u_y(x,\, -r) = p(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant r, \tag{3}$$

где коэффициенты α_1, α_2, α_3, α_4 — постоянные, такие, что

$$(|\alpha_1| + |\alpha_2|)\,(|\alpha_3| + |\alpha_4|) \neq 0.$$

Условие (3) есть аналог условия А.А. Дезина [1, п. 1.6] $\gamma_1\,[u(s_1)] + \gamma_2\,[u(s_2)] = 0$, где γ_1 и γ_2 — некоторые линейные операторы, а s_1 и s_2 — различные точки границы. Задача 1 при $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$, $\alpha_3 \neq 0$, $p(x) \equiv 0$ с нелокальными условиями периодичности вместо (2) была исследована в работе [2, гл. 4, п 4.6].

Доказана следующая

Теорема. *Если существует решение $u(x,y)$ задачи 1, то оно однозначно определяется только тогда, когда выполнено условие*

$$\alpha_1 + (-1)^k\, \alpha_2 - \mu_k^2\, \alpha_3 - (-1)^k\, \mu_k^2\, \alpha_4 \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Литература

1. *Нахушев А.М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006. 287 с.

2. *Нахушева З.А.* Нелокальные краевые задачи для основных и смешанного типов дифференциальных уравнений. Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2011. 196 с.

Об одной задаче теории функций

Ковалева Л.А.

НИУ «БелГУ», Белгород, Россия; Kovaleva_L@bsu.esu.ru

В пространстве $\mathbb{R}^3$ рассмотрим конечное множество $\mathcal{M}$ плоских выпуклых многоугольников M, которые попарно могут пересекаться только по своим сторонам. Совокупность отрезков L, являющихся сторонами одного или нескольких многоугольников, обозначим $\mathcal{L}$, а множество их концов – F. Объединение K многоугольников $M \in \mathcal{M}$, рассматриваемых как замкнутые подмножества $\mathbb{R}^3$, называется двумерным комплексом, и сетью, если дополнительно каждый отрезок $L \in \mathcal{L}$ может служить границей не более двух многоугольников. По отношению к K элементы $M \in \mathbb{M}$ называем гранями, а элементы $L \in \mathcal{L}$ – сторонами или ребрами в зависимости от того, входит L в границу одной или нескольких граней. Удобно еще с каждым элементом $L \in \mathcal{L}$ связать совокупность $\mathcal{M}_L$ всех граней, граничащих с L.

Пусть подмножество $K^1 \subseteq \mathbb{R}^3$ означает объединение всех отрезков $L \in \mathcal{L}$, взятых без своих концов, так что замкнутое множество $F \cup K^1$ представляет собой ломаную в $\mathbb{R}^3$. Аналогично под K^2 условимся понимать объединение всех граней, взятых без своей границы. Множество $\mathcal{L}$ всех ребер разобьем на два попарно непересекающихся подмножества $\mathcal{L}_D$ и $\mathcal{L}_H$, первое из которых состоит из некоторого подмножества сторон. Соответствующие объединения этих ребер, взятые без своих концов, обозначим K^1_D и K^1_H.

Следуя [1], функцию $u(x) \in C(K \setminus F)$ назовем гармонической на множестве $K^2 \cup K^1_H$, если внутри каждой грани $M \in \mathcal{M}_L$ она гармонична, непрерывно дифференцируема вплоть до внутренних точек отрезка L и сумма нормальных производных $\dfrac{\partial u}{\partial \nu_M}$, взятых изнутри M, равна нулю: $\sum_{M\in\mathcal{M}_L} \frac{\partial u}{\partial \nu_M}\Big|_L = 0$.

Задача Дирихле (задача D) заключается в отыскании гармонической на $K^2 \cup K^1_H$ функции $u \in C(K \setminus F)$ по краевому условию $u\big|_{K^1_D} = f$, где правая часть $f \in C(K^1_D)$ задана.

В работе исследуется фредгольмова разрешимость задачи D, получена формула индекса.

Литература

1. Ковалева Л.А., Солдатов А.П. Задача Дирихле на двумерных стратифицированных множествах // Известия РАН. Сер. матем. 2015. Т. 79, № 1. С. 77–114.

Некоторые классы краевых задач с условиями сопряжения: единственность и неединственность, существование и несуществование

Кожанов А.И.

ИМ СО РАН; НГУ, Новосибирск, Россия; kozhanov@math.nsc.ru

В работе изучаются вопросы существования и несуществования, единственности и неединственности решений краевых задач с условиями сопряжения для различных классов дифференциальных уравнений в частных производных – эллиптических, гиперболических, квазипараболических и квазигиперболических. В частности, обсуждается вопрос о собственных числах и собственных функциях задач с условиями сопряжения. Показывается, что параметры условий сопряжения могут существенно влиять на свойства решений.

Задача Коши для гиперболического уравнения с двумя отрицательными сингулярными коэффициентами

Комилова Н.Д.

ФерГУ, Фергана, Узбекистан; nigora.komilova@bk.ru

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\left[\frac{q}{\eta+\xi}+\frac{p}{\eta-\xi}\right]\frac{\partial u}{\partial\xi}+\left[\frac{q}{\eta+\xi}-\frac{p}{\eta-\xi}\right]\frac{\partial u}{\partial\eta}=0 \qquad (1)$$

в области Δ, ограниченной прямыми $\xi=0$, $\eta=1$ и $\eta=\xi$, где p и q – действительные числа, причем $-1<2p<2q\leq 0$.

В настоящем сообщении будем искать обобщенное решение уравнения (1), принадлежащее так называемому классу $R_2(p,q)$ и удовлетворяющее условиям

$$u(\xi,\xi)=\tau(\xi),\ \lim_{\eta\to\xi}(\eta-\xi)^{2p}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=\nu(\xi), \qquad (2)$$

где $\tau(\xi)$ и $\nu(\xi)$ – заданные функции, причем $\tau(x)$ имеет представление (принадлежность классу $R_2(p,q)$):

$$\tau(x)=\int\limits_0^x\frac{s^{2q}}{(x-s)^{2p}(x+s)^{2q}}F\left(q,\ q-p-1;1-p;\ \frac{(x-s)^2}{(x+s)^2}\right)T(s)ds, \qquad (3)$$

где $F(a,b;c;x)$ – гипергеометрическая функция Гаусса.

Теорема. *Если $T(x)$ и $\nu(x)$ – непрерывные и интегрируемые в $(0,1)$ функции и $\tau(x)$ имеет представление (3), то единственное решение задачи Коши (1)–(2) из класса $u\in R_2(p,q)$ представляется формулой*

$$u(\xi,\eta)=\left(\frac{\eta+\xi}{2}\right)^{-q}\int\limits_0^{\xi}\frac{t^qF\left(q,\ 1-q;1-p;\sigma\right)}{(\eta-t)^p(\xi-t)^p}T(t)dt+$$

$$+\left(\frac{\eta+\xi}{2}\right)^{-q}\int\limits_{\xi}^{\eta}\frac{t^qF\left(q,\ 1-q;1-p;\ \sigma\right)}{(\eta-t)^p(t-\xi)^p}\left[\frac{1}{2\cos\pi\beta}T(t)-\gamma\nu(t)\right]dt,$$

где $\sigma=\dfrac{(\eta-t)(t-\xi)}{2t(\eta+\xi)}$*;* γ *– известная постоянная.*

Построение потоковых сетей высокого ранга оптимальности

Кудаев В.Ч., Багов М.А., Абазоков М.Б.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; ipma@niipma.ru

К потоковым сетям (ПС) относятся сети по переносу вещества и энергии – трубопроводные сети водо- и газоснабжения, электрические сети. В докладе представлен метод решения задач оптимального проектирования ПС.

Задачи синтеза ПС, оптимальных по стоимости и энергозатратам на транспорт потока потребителям, являются существенно многоэкстремальными. Существующие методы не гарантируют глобального решения задачи [1]. Поэтому в работе [2] было введено понятие и дано определение ранга экстремума решения задачи.

В докладе представлен метод и алгоритмы построения в комплексе сетей высокого ранга оптимальности двух важнейших сетевых задач: построение ПС без дополнительных узлов ветвления потока и ПС Штейнера. Задача построения ПС первого типа высокого ранга оптимальности решается на основе сокращения ее размерности за счет: изменения в процессе оптимизации заданного графа возможных соединений узлов сети друг с другом; чередования процесса оптимизации P-го ранга всей сети с нелокальной, нормированной по дальнодействию, оптимизацией (P+1)-го ранга ее подсетей, количество которых равно количеству узлов сети.

При решении задачи построения ПС Штейнера полученная ПС трансформируется в сеть Штейнера следующим образом: для каждого узла ПС строятся альтернативные развертки их в узловые структуры Штейнера; определяются оптимальные координаты точек Штейнера на каждой из структур; определяется наилучшая из них.

Вычислительный эксперимент показал, что время построения ПС высокого ранга оптимальности сокращается в несколько раз, а трансформация ПС в ПС Штейнера сокращает ее стоимость на 4-7%.

Литература

1. *Меренков А.П., Сеннова Е.В., Сумароков С.В. и др.* Математическое моделирование и оптимизация систем тепло-, водо-, нефте- и газоснабжения. Новосибирск: Наука, 1992. 407 с.

2. *Кудаев В.Ч.* Ранги экстремумов и структурная оптимизация больших сетевых систем // Известия КБНЦ РАН. 2016. Т. 72, № 4. С. 15–24.

Задача со свободными границами в медицине

Кудаева Ф.Х.[a]**, Кайгермазов А.А.**[b]

КБГУ, Нальчик, Россия; [a]*kfatimat@yandex.ru,* [b]*arslan1961@yandex.ru*

Описание динамики температурного поля $T = T(p,t)$ в охлаждаемых и замораживаемых областях биоткани, поверхности замораживания $\Phi^*(p,t) = 0$, поверхности влияния криовоздействия $\Gamma(p,t) = 0$ сводится к решению следующей задачи со свободными границами [1, 2]:

$$div(\lambda(T) gradT) - e_t(T) = -W(T),\ p \in \Omega(t),\ t > 0,\ T(p,0) = \overline{T},\ p \in \Omega(0),$$

$$\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial n} = \alpha(p)\left[T - T_c(p,t)\right], \quad p \in S(p,t) = 0, \quad t > 0, \tag{1}$$

$$T = \overline{T},\ \lambda(T)\frac{\partial T}{\partial n} = 0,\ p \in \Gamma(p,t) = 0,\ t > 0,\ T = T^*,\ p \in {}^*(p,t) = 0,\ t > 0,$$

где $\lambda(T)$ – коэффициент теплопроводности, $e(T)$ – удельная тепловая энергия, $W(T)$ – источник тепла, t – время, p – пространственная координата области $\Omega(t)$, $S(p,t) = 0$ – известная заданная поверхность, $\alpha(p)$ – коэффициент теплообмена с окружающей средой, n – внешняя нормаль к поверхности $S(p,t) = 0$, $\overline{T}$ – нормальная температура биоткани, T^* – температура замораживания, $T_c(p,t)$ – температура внешней среды.

Задача (1) сведена к каноническому виду. Получена вариационная постановка задачи (1). Сформулированы определение обобщенного решения вариационной задачи, сформулирована и доказана теорема о существовании и единственности обобщенного решения.

Результаты работы представляют теоретический и практический интерес.

Литература

1. *Березовский А.А., Кудаева Ф.Х.* Канонический вид задач со свободными границами в проблемах гипотермии и криодеструкции биоткани // Асимптотическое интегрирование нелинейных уравнений. Киев: Институт математики АН Украины, 1992.

2. *Кудаева Ф.Х., Кайгермазов А.А., Хашхожева Д.А., Жемухов А.Х., Балкарова С.Б., Этезова М.Б.* Информационно-коммуникационные технологии при исследовании задачи со свободными границами в медицине // Южно-Сибирский научный вестник. 2019. Т. 27, № 3. С. 67–72.

Об определении коэффициентов гиперболического уравнения второго порядка с нелокальным условием

Кулиев Г.Ф.[a], **Тагиев Х.Т.**[b]

БГУ, Баку, Азербайджан; [a]*hamletquliyev@gmail.com*, [b]*tagiyevht@gmail.com*

Рассматривается задача определения пары функций $(u(x,t), \vartheta(x)) \in W_2^1(Q) \times V$ из следующих соотношений

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + \sum_{i=1}^{3} \vartheta_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} = f(x,t),\ (x,t) \in Q = \Omega \times (0,T), \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = u_1(x),\ x \in \Omega, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}|_S = \int_\Omega K(x,y) u(y,t) dy,\ (x,t) \in S, \tag{3}$$

$$\int_0^T R(x,t) u(x,t) dt = \varphi(x),\ x \in \Omega. \tag{4}$$

Задача (1)–(4) приводится к следующей задаче оптимального управления. Найти такую функцию $\vartheta(x)$ из множества

$$V = \{\vartheta(x) = (\vartheta_1(x), \vartheta_2(x), \vartheta_3(x)),\ \vartheta_i(x) \in W_2^1(\Omega) : |\vartheta_i(x)| \le M_i^0,$$

$$\vartheta_i(x)|_{\partial\Omega} = 0, \left|\frac{\partial \vartheta_i}{\partial x_k}\right| \le M_i^k,\ i,\ k = 1,2,3 \text{ почти всюду на } \Omega\},$$

которая доставляет минимум функционалу

$$I(\vartheta) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left[\int_0^T R(x,t) u(x,t;\vartheta) dt - \varphi(x) \right]^2 dx, \tag{5}$$

при ограничениях (1)–(3). Здесь $u(x,t;\vartheta)$ – решение задачи 1)–(3) при заданной функции $\vartheta(t)$; M_i^0, M_i^k, $i,k = 1,2,3$ – заданные положительные числа.

В работе доказываются теоремы существования оптимального управления, непрерывной дифференцируемости по Фреше функционала (5) и выводится необходимое условие оптимальности в виде вариационного неравенства.

Две версии нелокального уравнения Гинзбурга – Ландау

Куликов А.Н., Куликов Д.А.

ЯрГУ, Ярославль, Россия; kulikov_ d_ a@mail.ru

Нелокальное уравнение Гинзбурга – Ландау используется при изучении ферромагнетизма [1]. Рассмотрим периодическую краевую задачу для двух его версий

$$u_t = u - (1+ic)uV(u) - ib_1 u_{xx} + ib_2 u_{xxxx}, \tag{1}$$

$$u_t = u - (d+ic)uV(u) - (f+ih)uV^2(u) - ibu_{xx}, V(u) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |u|^2 dx, \tag{2}$$

$$u(t, x+2\pi) = u(t,x). \tag{3}$$

Здесь $u = u(t,x) = u_1(t,x) + iu_2(t,x), b, b_1, b_2, c, d, f, h \in \mathbb{R}, f > 0$. Пусть

$$u(0,x) = g(x). \tag{4}$$

Теорема 1. *Если $g(x) \in H_2^4$, тогда начально-краевая задача (1), (3), (4) имеет решение при всех $t > 0$. Краевая задача (1), (3) имеет глобальный аттрактор $A_\infty : u(t,x) \in A_\infty$, если $V(u) = 1$.*

Теорема 2. *Пусть $g(x) \in H_2^2$, тогда начально-краевая задача (2), (3), (4) имеет решение при всех $t > 0$. Краевая задача (2), (3) имеет глобальный аттрактор A_∞, выделяемый условием $V(u) = \eta_2$, где η_2 – положительный корень уравнения $1 - d\eta - f\eta^2 = 0$.*

Глобальный аттрактор понимаем в смысле определения из монографии [2]. При $f = g = 0$ краевая задача (2), (3) изучалась в [3].

Литература

1. *Elmer F.J.* Nonlinear and nonlocal dynamics of spatially extended systems: stationary states, bifurcation and stability // Physica D., 1988, vol. 54, no. 3, pp. 203–219.

2. *Temam R.* Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. New-York, Springer-Verlag, 1997, 650 p.

3. *Kulikov A., Kulikov D.* Invariant varieties of the periodic boundary value problem of the nonlocal Ginzburg-Landau equation // Mathematical Method in the Applied Sciences, 2021, vol. 44, no. 15, pp. 11985–11997.

Работа выполнена в рамках реализации программы развития регионального научно-образовательного математического центра (ЯрГУ) при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (Соглашение о предоставлении из федерального бюджета субсидии № 075-02-2021-1397).

Градиентный алгоритм параметрической оптимизации импульсного ПИ-регулятора

Куликов В.В., Куцый Н.Н., Маланова Т.В.

ИрНИТУ, Иркутск, Россия;

Автоматические системы с отрицательной обратной связью, содержащие ПИ-регулятор с фазово-импульсной модуляцией [1], отличаются с положительной стороны своей помехозащищенностью, так как размеры импульса постоянны и не применяется операция дифференцирования. Для этого регулятора затруднительно решать задачу параметрического синтеза аналитическими методами, так как в его законе управления применяются нелинейности следующего вида: «зона насыщения» и «зона нечувствительности». В данной работе предлагается решение этой задачи реализовать градиентным алгоритмом:

$$\mathbf{q}[l+1] = \mathbf{q}[l] - h[l]\nabla_{\mathbf{q}} I(\varepsilon(t, \mathbf{q}[l])),$$

где h – шаг спуска градиентного алгоритма; $\mathbf{q}$ – вектор настраиваемых параметров ПИ-регулятора с фазово-импульсной модуляцией; I – интегральный квадратичный критерий на основе ошибки системы $\varepsilon(t, \mathbf{q})$. Составляющие градиента критерия оптимизации I вычисляются с помощью методов теории чувствительности [2]:

$$\frac{dI}{dq_i} = -2\int_0^L \varepsilon(t, \mathbf{q})\xi_i(t)dt, (i = 1, 2, ..., n),$$

где $\xi_i(t)$ – вектор функций чувствительности, определяемый из уравнения чувствительности для дискретных автоматических систем с постоянным управляющим воздействием регулятора $u(t, \mathbf{q})$:

$$\xi_i(t) = -\sum_k \Delta U_{t_k} \frac{dt_k}{dq_i} G_p(p)\delta(t - t_k), (i = 1, 2, ..., n),$$

где ΔU_{t_k} – величина скачка $u(t, \mathbf{q})$ в моменты его разрыва t_k; $\delta(t - t_k)$ – дельта-функция, смещенная на время t_k.

Литература

1. *Попков Ю.С., Цыпкин Я.З.* Теория нелинейных импульсных систем. М.: Наука, 1973. 416 с.

2. *Городецкий В.И., Захарин Ф.М., Розенвассер Е.Н., Юсупов Р.М.* Методы теории чувствительности в автоматическом управлении. Л.: Энергия, 1971. 343 с.

Фрактальное моделирование влияния положительного заряда в нижней части облака на инициацию молнии

Кумыков Т.С.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; macist20@mail.ru

Конвективные облака относятся к природным объектам с нетривиальной фрактальной структурой, в которых в основном развиваются грозовые процессы [1-4]. Общую структуру заряда «нормального» грозового облака можно рассматривать как вертикальный триполь, состоящий из трех заряженных областей, основного положительного вверху, основного отрицательного в середине и дополнительного положительного ниже основного отрицательного [5, 6]. При этом накопление положительного заряда в нижней области облака может являться одним из существенных причин, для инициирования молнии. Поэтому исследование, направленное на выявление причин и роли фрактальности облачной среды в инициации молнии является актуальным.

В работе представлена упрощенная математическая модель фрактальной проводимости в области нижнего положительного заряда. Основное внимание уделяется роли фрактальности среды в электрифицированном облаке, учитываемая при рассмотрении уравнения

$$\partial_{0t}^{\alpha}\sigma(t) = \eta\left(E^2 - E_0^2\right)\sigma + \eta E_0^2\sigma_0(z),$$

где σ – проводимость канала, E – напряженность электрического поля, η – параметр скорости роста критического уровня проводимости и рассеяния.

Литература

1. *Рис Ф., Вальдфогель А.* Анализ фрактальной размерности облаков с мощными конвективными токам // Фракталы в физике. Труды VI международного симпозиума по фракталам в физике (МЦТФ, Триест, Италия). 1985. С. 644 – 649.
2. *Iudin D.I., Trakhtengerts V.Y., Hayakawa M.* Fractal dynamics of electric discharges in a thundercloud // Phys. Rev. E, 2003, 68 (1), 016601.
3. *Kumykov T.S.* Charge accumulation in thunderstorm clouds: fractal dynamic model // E3S Web of Conferences, 2019. vol. 127, 01001.
4. *Kumykov T.S.* Charging mechanisms of cloud particles in view of fractal medium // 2019. IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng., vol. 698, no. 4, 044029.
5. *Krehbie P.R., Riousset J.A., Pasko V.P., Thomas R.J., Rison W., Stanley M.A. and Edens H.E.* Upward electrical discharges from thunderstorms // Nature, 2008.
6. *Williams E.R.* The tripole structure of thunderstorm // J. Geophys.Res., 1989. 167. vol. 94, no. D11, pp. 13151–13167.

Об одной краевой задаче для уравнения нечетного порядка с кратными характеристиками

Курбанов О.Т.

ТДИУ, Ташкент, Узбекистан; odil69@inbox.ru

Требуется определить в области $D = \{(x,y), h_1(y) < x < h_2(y), 0 < y \leq 1\}$ функцию $u(x,y)$, обладающую следующими свойствами:

1) $u(x,y) \in C_{x,y}^{(2n+1,1)}(D) \cap C_{x,y}^{(2n,0)}(x = h_1(y), 0 < y \leq 1) \cap C_{x,y}^{(n,0)}(\overline{D})$;

2) является регулярным решением уравнения

$$\frac{\partial^{2n+1}u}{\partial x^{2n+1}} + (-1)^n \frac{\partial u}{\partial y} = f(x,y,u(x,y)), \tag{1}$$

в области D;

3) удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,0) = 0,\ h_1(0) \leq x \leq h_2(0), \tag{2}$$

$$\frac{\partial^i u}{\partial x^i}|_{x=h_1 y} = \varphi_i(y), \quad i = \overline{1,n}, \quad 0 \leq y \leq 1, \tag{3}$$

$$\sum a_j \frac{\partial^{2n-j}u}{\partial x^{2n-j}}|_{x=h_1(y)} = g(u[h_1(y),y],y), \quad j = \overline{1,n-1}, 0 \leq y \leq 1, \tag{4}$$

$$\frac{\partial^j u}{\partial x^j}|_{x=h_2(y)} = \varphi_j(y), \quad j = \overline{0,n-1}, \quad 0 \leq y \leq 1, \tag{5}$$

а также условиям согласования

$$\frac{\partial^i (h_1(0))}{\partial x^i} = \frac{\partial^j (h_2(0))}{\partial x^j} = g(u[h_1(0),0],0) = 0, \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{0,n-1}.$$

Имеет место

Теорема. *Пусть* $h_r(y) \in C^1[0,1], r = 1,2$ *и*

$$h_2(y) - h_1(y) \leq n\frac{6n\pi^2}{(n+1)(h_2(y)-h_1(y))^2}, \quad h\prime_1(y) > (-1)^n \alpha^{2n},$$

где $(-\alpha)^j = a_j, -\frac{1}{n} \leq \alpha < 0, j = \overline{0,n-1}$, $g(u,y), f(x,y,u)$ *непрерывные функции своих аргументов* $0 \leq y \leq 1$ *при любом* $|u| < \infty$, *удовлетворяющие условиям*

$$|g(u_1,y) - g(u_2,y)| \leq l(y)|u_1 - u_2|,$$

$$|f(x,y,u_1) - f(x,y,u_2)| \leq L(x,y)|u_1 - u_2|,$$

$$0 < l(y) \leq \frac{1}{2}[h\prime_1(y) - (-1)^n\alpha^{2n}].$$

Тогда решение задачи (1)–(5) единственно.

Единственность решения задачи доказана методом интегралов энергии, применением некоторых элементарных и интегральных неравенств типа Фридрихса.

Математическое моделирование устойчивости регионального развития процессов зеленой экономики

Лесев В.Н.[a], Ашинова И.В.[b]

КБГУ, Нальчик, Россия; [a]lvn_kbsu@mail.ru, [b]asin07@mail.ru

В современном мире сложилась кризисная ситуация, обусловленная, в первую очередь, пандемией и обрушением старых экономических рынков, что повлекло необходимость определения новых направлений развития и выбора соответствующих им индикаторов роста социально-экономического прогресса. Поиски путей устойчивого развития не только в ближайшей, но и долгосрочной перспективе требуют внедрение моделей, учитывающих экологические факторы. Вполне понятно, что развитие, ведущее к исчерпанию природных ресурсов и деградации окружающей среды, не может быть устойчивым. Именно из-за этой проблемы появились такие области зеленой экономики как: экономика на основе зеленого роста, низкоуглеродная экономика, биоэкономика, синяя экономика, циркулярная биоэкономика [1, с. 11]. Экономика, не влияющая на природные активы — основной тренд и главное направление построения современного экономического мирового пространства. Сохранение ресурсов и снижение отрицательного влияния на человека, улучшение его качества жизни — цель и результат внедрения зеленой экономики.

Доказано, что выбор именно процессов зеленой экономики ведет к устойчивому развитию региона [2].

Опишем модель устойчивого развития региона, обозначим его через R. Предположим, что R имеет систему управления C_R, в которую внедряются элементы зеленой экономики [3]. Систему C_R назовем системой зеленой экономики, являющуюся подсистемой регионального развития. Будем рассматривать управление, как функцию системы зеленой экономики, ориентированной либо на сохранение ее основного качества в условиях изменения среды, либо на реализацию определенной программы, обеспечивающей устойчивость функционирования, гомеостаза, достижение намеченной цели [4].

В процессе моделирования социально-экономические системы зеленой экономики необходимо рассматривать как масштабные сложные открытые системы [5]–[7], каждые элементы которых сами по себе являются самоорганизующийся системой, целенаправленно оптимизирующие свое развитие с помощью нейронных сетей и искусственного интеллекта.

Применяя принцип системного подхода при моделировании систем зеленой экономики, обращаемся к методу Форестера исследования динамических систем с обратными нелинейными связями [8]. Для фазовых переменных моделируемой «зеленой» системы строятся квазилинейные дифференциальные уравнения первого порядка одной переменной одинаковой структуры.

Введем математическое описание термина устойчивое развитие региональной зеленой экономики. Предположим, что регион R представляет собой некоторую систему «вход»-«выход» S_R. Будем считать, что R развивается устойчиво тогда и только тогда, когда система S_R устойчива относительно некоторых

Работа выполнена в рамках проекта "Приоритет 2030".

окрестностей точек устойчивости системы. Обозначим входной и выходной объекты через $D(u)$ и $F(u)$. При указанных предположениях уравнение состояния системы будет иметь вид:

$$u = (\varphi, u), \quad \varphi \in D(u), \quad u \in F(u). \tag{1}$$

Утверждение. *Система* S_R *будет устойчивой относительно пары* (E_φ, E_u) *метрических пространств* E_φ *и* E_u *с заданными метриками* $\rho_\varphi = \rho_\varphi(\varphi_1, \varphi_2)$ *и* $\rho_u = \rho_u(u_1, u_2)$*, если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое число* $\delta(\varepsilon) > 0$*, что из неравенства* $\rho_\varphi(\varphi_1, \varphi_2) \le \delta(\varepsilon)$ *следует оценка* $\rho_u(u_1, u_2) \le \varepsilon$*. Здесь* $\varphi_j \in D(u) \subset E_\varphi, u_j \in F(u) \subset E_u$*:* $\quad E_\varphi \supset D(u) \ni \varphi \to (\varphi, u) \to u \in R(u) \subset E_u$.

Пусть D_u и F_u заданные подмножества множеств $D(u)$ и $F(u)$ соответственно. Входящую в (1) пару $(\varphi, u) \in D(u) \times F(u)$ назовем устойчивой относительно D_u и F_u, если малые отклонения входа φ не могут существенно изменить выход u системы S_R в окрестностях φ и u.

Введенное понятие играет важную роль в дальнейших исследованиях задач математического моделирования процессов зеленой экономики, поскольку устойчивое развитие – ключевое требование указанной экономики нового типа.

Литература

1. *Бобылёва С.Н., Кирюшина П.А., Кудрявцевой О.В.* Зелёная экономика и цели устойчивого развития для России: коллективная монография. М.: Экономический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова, 2019. 284 с.

2. *Вукович Н.А.* «Зеленая» экономика: определение и современная эколого-экономическая модель // Вестник УрФУ. Серия экономика и управление. 2018. Т. 17, № 1. С. 128–145.

3. *Нахушев А.М.* К проблеме математического моделирования региональных социально-экономических систем // Вестник СамГТУ. Серия. Математическая. 2007. Т. 6, № 2. С. 4–15.

4. *Нахушев А.М.* О некоторых эффективных параметрах открытых временных систем регионального управления // Известия КБНЦ РАН. 2002. Т. 8, № 1. С. 72–75.

5. *Нахушева З.А., Ашинова И.В.* Экономико-математическая компартментальная модель экономико-социальной образовательной экосистемы территории // Сб. Цифровая трансформация науки и образования. Сборник научных трудов. 2020. С. 229–235.

6. *Ашинова И.В., Гурфова Р.В., Калмыкова А.М., Нахушева З.А.* Экономический трек модели онтогенеза региональных вузов // Экономика и управление: проблемы, решения. 2020. Т. 4, № 12 (108). С. 15–21.

7. *Нахушева З.А., Ашинова И.В.* Компартментальная модель экономико-социальной образовательной экосистемы территории// Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2020. Т. 33, № 4. С. 78–85.

8. *Путилов В.А., Горохов А.В.* Системная динамика регионального развития. Мурманск: НИЦ «Пазори», 2002. 306 с.

Нелинейная математическая модель продольно-поперечных колебаний струны с движущейся границей

Литвинов В.Л.[1,2,a]**,** ***Литвинова К.В.***[1]

[1] *МГУ, Москва,* [2] *СамГТУ, Самара, Россия;* [a] *vladlitvinov@rambler.ru*

До настоящего времени задачи о продольно-поперечных колебаниях объектов с движущимися границами решались в основном при линейной постановке, не учитывался энергетический обмен через движущуюся границу и взаимодействие между продольными и поперечными колебаниями [1-6]. В редких случаях учитывалось действие сил сопротивления внешней среды [7]. Реальные же технические объекты намного сложнее, например, при увеличении интенсивности колебаний большое влияние на колебательный процесс оказывают геометрические нелинейности объекта.

В работе поставлена новая нелинейная математическая модель продольно-поперечных колебаний струны с движущейся границей, в которой учтена геометрическая нелинейность, вязкоупругость, энергетический обмен через границу. Получены граничные условия в случае наличия взаимодействия между частями объекта слева и справа от движущейся границы.

Произведена линеаризация полученной модели. При этом соблюдается принцип однородности: в частном случае малых колебаний полученные линейные модели совпали с классическими, что свидетельствует о корректности полученных результатов. Полученная математическая модель позволяет описывать колебания большой интенсивности струны с движущейся границей.

Литература

1. *Савин Г.Н., Горошко О.А.* Динамика нити переменной длины. Киев: Наукова думка, 1962. 332 с.

2. *Самарин Ю.П.* Об одной нелинейной задаче для волнового уравнения в одномерном пространстве // Прикл. мат. и мех. 1964. Т. 26, №. 3. С. 77–80.

3. *Весницкий А.И.* Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. М.: Физматлит, 2001. 320 с.

4. *Лежнева А.А.* Изгибные колебания балки переменной длины // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1970. № 1. С. 159–161.

5. *Литвинов В.Л.* Решение краевых задач с движущимися границами при помощи приближенного метода построения решений интегро-дифференциальных уравнений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26, № 2. С. 188–199.

6. *Литвинов В.Л., Анисимов В.Н.* Применение метода Канторовича – Галеркина для решения краевых задач с условиями на движущихся границах // Известия РАН. Механика твердого тела. 2018. № 2. С. 70–77.

7. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л.* Математическое моделирование и исследование резонансных свойств механических объектов с изменяющейся границей: монография. Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2020. 100 с.

Когнитивные технологии и ситуационное моделирование в медицине

Ловпаче З.Н.[a], **Теувов И.А.**[b]

КБГУ, Нальчик, Россия; [a]lovpache.zarema@ mail.ru, [b]teuw@mail.ru

Современные эволюционные проблемы медицины (управления, интеллектуализации, качества услуг и подготовки, переподготовки кадров) требуют современных, цифровых технологий, цифровых экосистем в здравоохранении. Такими технологиями являются когнитивное и ситуационное моделирование, которые релевантны при ограниченных ресурсах медицинского мониторинга, обследования. Ограниченность ресурсов в медицине – проблема всех стран, например, в США 30% населения – вне системы медицинского обслуживания (регулярного), а в ЕС за страховку приходиться платить по нарастающей, несмотря на государственную поддержку.

Здравоохранение активизирует новые бизнес-процессы. Например, персонализированной цифровой медицины, когда ряд анализов проводится дома, онлайн, например, по технологии HealthVanlt: пациент авторизуется, измеряет и вводит данные анализа на портале, затем разрешает (ЭЦП) доступ врачу и медперсоналу к своей электронной карте (ЭМК). Реализуется схема: «е-медицина – портал – врач – документооборот – ЛПУ (клиника)», исключающая типовые ошибки назначения, координации действий, утери данных и др. Появляется возможность цифрового контроля тактик и стратегий лечения по данным о препаратах, назначениях, экспертной системы, шкале тяжести и др.

Когнитивные медицинские технологии реализуются медиками, физиологами, психологами, математиками, информатиками, специалистами по инженерии знаний и др. Когнитивные карты эффективны при клинических испытаниях, «маршрутизации» стратегии и визуализации лечения, отслеживании состояния пациента, ситуаций, возникающих в медико-социальных системах, например, мониторинга и диагностики по снимкам с использованием систем искусственного интеллекта WatsonHealth, MergeHealthcare и др. В частности, WatsonHealth позволяет анализировать снимки, данные ЭМК, может самообучаться при этом, снижать «шумы» в снимках, повышая в реальном режиме точность диагностики онлайн и выявляя опасности.

Когнитивные технологии – основа ситуационного моделирования в медицине, а также обучения студентов (персонала). Например, имитации причин и последствий врачебных ошибок, в том числе, из-за ограниченности информационных возможностей. Это позволит моделировать ситуации, принятие решений, связанные с оценкой информации, вариантами лечения, организацией и планированием. Обучающее ситуационное моделирование строится на специальных кейсах, ситуационных тестах. Например, с использованием Data Science можно моделировать принятие SaaS-решения с использованием удаленного режима, облачных вычислений, на сервере диагностического центра (поставщика услуг). Или используя IoT-наблюдение за больным COVID-19.

Нелокальная краевая задача для нагруженного уравнения диффузии с оператором Римана – Лиувилля

Лосанова Ф.М.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; losanovaf@gmail.com

В работе для уравнения дробной диффузии вида

$$D_{0t}^{\alpha}u(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x,t), \tag{1}$$

где D_{0t}^{α} – оператор Римана – Лиувилля [1, с. 28], $0 < \alpha < 1$, в области $\Omega = \{(x,t) : \ 0 < x < l, 0 < t < T\}$ евклидовой плоскости независимых переменных (x,t) исследуется следующая

Задача. *Найти регулярное в области Ω решение $u = u(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальному*

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1}u(x,t) = \tau(x), \ \ 0 \le x \le l \tag{2}$$

и краевым условиям:

$$u(0,t) + \int\limits_0^l M(\xi,t)u(\xi,t)\,d\xi = \varphi(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

$$u(l,t) + \int\limits_0^l N(\xi,t)u(\xi,t)\,d\xi = \psi(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{4}$$

где $M(\xi,t), N(\xi,t) \in C(\overline{\Omega})$, $0 < \alpha < 1$.

Различные случаи уравнения вида (1) исследовались в работах [1–5] и других авторов.

Литература

1. *Нахушев А.М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006. 287 с.
2. *Нахушева В.А.* Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов. М.: Наука, 2006. 173 с.
3. *Нахушев З.А.* 1-я и 2-я краевые задачи в интегральной постановке для параболического уравнения второго порядка // Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26, № 1. С. 1982–1992.
4. *Псху А.В.* Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными дробного и континуального порядка. Нальчик, 2005. 186 с.
5. *Самарский А.А.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 16, № 11. С. 1925–1935.

Метод определения информативности свойств объектов в задачах распознавания

Лютикова Л.А.[a], **Шматова Е.В.**[b]

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россиия; [a]*lylarisa@yandex.ru*, [b]*lenavsh@yandex.ru*

Предлагается комбинированный подход к решению задач распознавания образов, который дает возможность корректировать работу нейронной сети. В случаи уже обученной нейронной сети, даже если неизвестна предметная область, на основе только весовых характеристик нейрона предлагается получить логические связи в исследуемых данных, построить логическую функцию решатель для заданной области, таким образом перейти к структурным методам решения. При помощи булевой производной можно выявить наиболее важные характеристики для каждого объекта и для предметной области в целом. Это значит получить более корректную картину исследуемой области, и соответственно возможность работы с ней.

Данный подход дает возможность имея только веса нейронной сети, построить логическую функцию классификатор, которая способна скорректировать работу данной сети. Дальнейшее исследование этой функции позволит выявить наиболее важные признаки для каждого объекта, а также показать, как меняя значения определенных признаков получаем изменения в объектах.

При построении решающей функции можно не знать обучающей выборки, достаточно знать значение весов и структуру $\Sigma\Pi$-нейрона. Функция строится по дереву, алгоритм построения которого описан в [1]. Количество уровней равно наибольшему количеству произведений переменных в каждом из слагаемых плюс 1. В примере их будет 3.

Расположим переменные $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ на нижнем уровне дерева. Второй слой это коэффициенты стоящие перед слагаемыми с одной переменной, третей коэффициенты, стоящие перед слагаемыми с двумя переменными и т. д. Значение каждого узла будем считать как $y_{k+1} = w_{k+1} + \Sigma y_i$, где i – индексы соответствующих объектов, переменные которых входят в качестве сомножителей в элемент.

Литература

1. *Lyutikova L.* Sigma-Pi neural networks: error correction methods // Procedia Computer Science. 2018, vol. 145, pp. 312–318.

Обобщение теоремы Калитвина об ограниченности в весовых классах Лебега

Ляхов Л.Н.[1,a], **Трусова Н.И.**[1,2,b]

[1]*ВГУ, Воронеж,* [2]*ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского, Липецк, Россия;* [a]*levnlya@mail.ru,* [b]*trusova.nat@gmail.com*

Пусть $D = \{x : 0 < x_i < b_i\}$ — конечный параллелепипед в $\mathbb{R}^n$, α и $\overline{\alpha}$ — мультииндексы, состоящие из m и $n-m$ различных натуральных чисел, дополняющих друг друга до набора $(1, 2, \ldots, n)$, и $D = D_\alpha \times D_{\overline{\alpha}}$.

Определение. *Выражение*

$$(K_\alpha^{(m)} u)(x) = \int_{D_\alpha^{(m)}} k_\alpha(x; t_\alpha)\ u(x_{\overline{\alpha}}, t_\alpha) t_\alpha^{\gamma_\alpha}\ dt_\alpha$$

будем называть весовым частно-интегральным оператором дробного порядка $m + |\gamma_\alpha|$.

Все переменные, входящие в определение, разбиваем на три группы. Первая t_α — переменные интегрирования, вторая x_α — свободные от интегрирования переменные с номерами переменных интегрирования и $x_{\overline{\alpha}}$ — оставшиеся (свободные) переменные. Положим $x^\gamma = x_{\overline{\alpha}}^{\gamma_{\overline{\alpha}}} x_\alpha^{\gamma_\alpha}$.

Имеет место следующее обобщение теоремы Калитвина (см. [1], [2]) в анизотропных классах Лебега [3].

Теорема. *Пусть* $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$ *и* $p_i,\ q_i \geq 1$ *и* $r = \frac{q_2}{p_2} \geq 1$ *и пусть* $u \in L_{\mathbf{q}}^\gamma(D_{t_\alpha} \times D_{x_{\overline{\alpha}}})$, $\quad K_\alpha^m u \in L_{\mathbf{p}}^\gamma(D_{x_\alpha} \times D_{x_{\overline{\alpha}}})$.

Оператор $K_\alpha^{(m)}$ *ограничен в* $L_{\mathbf{p}}^\gamma(D)$, *если его ядро принадлежит весовому анизотропному пространству*

$$k_\alpha = k_\alpha(x_\alpha, x_{\overline{\alpha}}; t_\alpha) \in L_{(q_1', p_1, p_2 r')}^{(\gamma_\alpha, \gamma_\alpha, \gamma_{\overline{\alpha}})}(D_{t_\alpha} \times D_{x_\alpha} \times D_{x_{\overline{\alpha}}}),$$

где $q' = \frac{q_1}{q_1 - 1}$ *и* $r' = \frac{q_2}{q_2 - p_2}$. *Кроме того*

$$\|K_\alpha^{(m)} u\|_{L_{\mathbf{p}}^\gamma} \leq \|k_\alpha\|_{L_{(\frac{q_1}{q_1-1}, p_1, \frac{p_2 q_2}{q_2 - p_2})}^{(\gamma_\alpha, \gamma_\alpha, \gamma_{\overline{\alpha}})}(D_{t_\alpha} \times D_{x_\alpha} \times D_{x_{\overline{\alpha}}})} \|u\|_{L_{\mathbf{q}}^\gamma\ (D_{t_\alpha} \times D_{x_{\overline{\alpha}}})}.$$

Литература

1. *Appell J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P.* Partial integral operators and integro-differential equations. New York: Marcel Dekker, 2000. 560 p.

2. *Калитвин А.С.* Линейные операторы и уравнения с частными интегралами. Воронеж: ЦЧКИ, 2000. 252 с.

3. *Бессов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. Москва: Наука, 1975. 478 с.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 19-41-480002.

Начальная задача для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с переменным запаздыванием

Мажгихова М.Г.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; mazhgihova.madina@yandex.ru

Рассматривается уравнение

$$\partial_{0t}^{\alpha} u(t) - \lambda u(t) - \mu u(t - \tau(t)) = f(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

где ∂_{0t}^{α} – дробная производная Капуто [1], $0 < \alpha \leq 1$, λ, μ – произвольные постоянные, $\tau(t)$ – непрерывная положительная функция.

Регулярным решением уравнения (1) назовем функцию $u = u(t)$, имеющую абсолютно непрерывную производную первого порядка и удовлетворяющую этому уравнению при $t > 0$.

Задача. *Найти регулярное решение $u(t)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям*

$$u(t) = \varphi_0(t), \quad T \leq t \leq 0,$$

где $T = \inf\{t : t - \tau(t) \leq 0\}$.

Доказана теорема существования и единственности поставленной задачи.

Литература

1. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

Об одной краевой задаче со смещением для гиперболического уравнения третьего порядка

Макаова Р.Х.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; makaova.ruzanna@mail.ru

В евклидовой плоскости точек (x, y) рассматривается уравнение вида

$$0 = \begin{cases} u_y - au_{xx} - bu_{xxy}, & y > 0, \\ u_{yy} - c^2 u_{xx}, & y < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где a, b и c – заданные положительные числа; $u = u(x, y)$ – искомая действительная функция независимых переменных x и y.

Пусть $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^- \cup (A_0 A_r)$, где $\Omega^+ = \{(x, y) : 0 < x < r, 0 < y < T\}$, $A_0 A_r = \{(x, 0) : 0 < x < r\}$, а Ω^- – область, ограниченная характеристиками $A_0 C : x + cy = 0$, $A_r C : x - cy = r$ уравнения (1) при $y < 0$, выходящими из точек $A_0 = (0, 0)$, $A_r = (r, 0)$ и пересекающимися в точке $C = \left(\frac{r}{2}, -\frac{r}{2c}\right)$. Уравнение (1) при $y > 0$ совпадает с уравнением Аллера [1], а при $y < 0$ – с волновым уравнением.

В настоящее время исследованию краевых задач со смещением для различных типов и порядков уравнений посвящены немало работ. В работах [2], [3] А.М. Нахушевым было введено понятие краевой задачи со смещением для гиперболических, вырождающихся гиперболических и смешанного типа уравнений.

В данной работе исследуется вопрос однозначной разрешимости краевой задачи со смещением для гиперболического уравнения третьего порядка (1) с оператором Аллера в главной части.

Литература

1. *Hallaire M.* L'eau et la productions vegetable // Institut National de la Recherche Agronomique, 1964, vol. 9.

2. *Нахушев А.М.* О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5, № 1. С. 44–59.

3. *Нахушев А.М.* Новая краевая задача для одного вырождающегося гиперболического уравнения // Доклады АН СССР. 1969. Т. 187, № 4. С. 736–739.

О методе решения интегральных уравнений Фредгольма на основе мультипликативных функций преобразования Меллина для класса тригонометрически-логарифмических функций

Макаров А.М., Ермаков А.С.

ПГУ, Пятигорск, Россия; mellin_22@mail.ru

В развитие теории и приложений обработки сигналов на фоне шумов большую роль сыграли интегральные преобразование Фурье для представления сигналов и развития теории спектрального анализа, преобразование Лапласа для теории решения дифференциальных уравнений, преобразование Гильберта, для цифровой реализации широкополосных сигналов. Их внедрение обогатило функциональные возможности теории сигналов, расширив область их применения. Применение интегрального преобразования Меллина (ИПМ) для обработки сигналов, обеспечивает масштабную инвариантность решающих правил к изменению длительности входного сигнала.

В работе рассматриваются основы операторного исчисления, порождаемого ИПМ, которое основано на свойстве свертки в базисе преобразования Меллина. Особенно подробно рассмотрены вопросы решения интегрального уравнения (ИУ) Фредгольма, где решение ищется для класса гармонических функций с логарифмическим законом изменения частоты. Показано, что для таких функций наиболее просто решаются ИУ. Для решения уравнения необходимо использовать обратное ПМ, то есть теорию вычетов, для ее применения в работе использован модифицированный интеграл Бромовича и интеграл Вагнера. Получены необходимые и достаточные условия его ис-пользования в базисе ИПМ. В качестве примера рассмотрено решение задачи нахождения новых ядер на основе заданного ядра прямого интегрального преобразования.

Также рассмотрены трудности, возникающие при создании численных алгоритмов ПМ и, впервые сформулированы основные условия для численной реализации обратного ИПМ, что существенно развило область применения операторного метода, основанного на свертке в базисе ИПМ. Таким образом, можно заключить о том, что в результате проведенных исследований получены результаты, значительно расширяющие область применения ИПМ для приложений касающихся обработки информационных сигналов.

Компьютерная программа HFMD 1.0 для численного анализа экономических циклов в рамках обобщенной модели Дубовского

Макаров Д.В.[a], Паровик Р.И.[b]

КамГУ им. Витуса Беринга, Петропавловск-Камчатский, Россия;
[a]danil-makarov-pk@yandex.ru, [b]romanparovik@gmail.com

В современном мире все больше людей нуждаются в математическом моделировании экономических процессов. Это связано с тем, что при ведении бизнеса математическое описание экономических процессов дает количественное и качественное представление, что помогает в дальнейшем прогнозировании и принятии правильных управленческих решений. Одним из важнейших экономических процессов является экономический кризис. Экономические кризисы определяют экономическое благосостояние граждан и степень социальной напряженности в стране. Еще в 1920-х годах советский экономист Н.Д. Кондратьев выделил в экономических временных рядах долгосрочные периодические колебания (волны) длительностью 50-55 лет [1]. Наиболее полное математическое описание моделирования циклов Кондратьева было выполнено в работах С. В. Дубовского [2].

В данной работе предложена компьютерная программа, реализующая решение обобщенной математическая модели С.В. Дубовского с учетом эффектов памяти в экономической системе [3]. Для разработки программы были выбраны язык программирования Python высокого уровня и среда разработки PyCharm [4].

Литература

1. *Кондратьев Н.Д., Опарин Д.Н.* Большие циклы конъюнктуры. М.: Институт экономики, 1928.
2. *Дубовский С.В.* Объект моделирования - цикл Кондратьева // Математическое моделирование. 1995. № 6. С. 65–74.
3. *Makarov D.V., Parovik R.I.* Modeling of the economic cycles using the theory of fractional calculus. // Journal of Internet Banking and Commerce. 2016, vol. 21.
4. *Лутц М.* Python Pocket Reference. O'Reilly Media, 2014.

Работа выполнена в рамках исследовательского проекта Камчатского государственного университета имени Витуса Беринга «Математическая модель длинных волн Кондратьева с учетом наследственности» № АААА-А20-120021190003-1.

Достаточные условия разрешимости задачи преследования при импульсном воздействии

Мамадалиев Н.[1,a], **Мустапакулов Х.Я.**[1], **Абдуалимова Г.М.**[2,b]

[1]*НУУз, Ташкент,* [2]*АндГУ, Андижан, Узбекистан;* [a]*m_numana59@mail.ru,* [b]*abduolimova81@inbox.ru*

В данной работе рассмотрена линейная дифференциальная игра преследования при этом на управления убегающего игрока накладывается интегральное ограничение, а преследователь использует импульсное ограничения.

Рассматривается дифференциальная игра преследования

$$\dot{z} = Cz + u - v, \tag{1}$$

где $z \in \mathbb{R}^d$, u – параметр преследователя v – параметр убегания, C – постоянная матрица U – компактное подмножество в $\mathbb{R}^d$, терминальное множество представляется бесконечным цилиндром вида $M = M^0 + M^1$, где M^0 – линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^d$, M^1 – непустой компакт из ортогонального дополнения L к M^0 в пространстве $\mathbb{R}^d$.

Предположение. a) Множества $W_i(n)$ [1] непусты при всех $n,\ i,\ n \in N,\ i = 1, \ldots, n$, [1]; b) пусть выполнено неравенство $\sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i(n, z, v_i^*(\cdot), w) \geq 1$ при всех $n,\ i,\ n \in N,\ i = 1, \ldots, n$[1].

Теорема. *Если для системы (1) выполнены предположение, множества M^1, U выпуклы и $K = K(z,w) < \infty$ для начального положения $z = z^0$ и вышеуказанного набора w, то траекторию $z(t)$ системы (1) можно вывести на терминальное множество M к моменту времени $t = \tau_K$.*

Литература

1. *Чикрий А.А., Матичин И.И.* Линейные дифференциальные игры с импульсным управлением игроков // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2005. Т. 11, № 1. С. 212–224.

Работа выполнена при поддержке Узбекского фонда фундаментальных исследований, проект № ОТ-Ф4-33.

Численное решение нестационарных задач управления теплопроводности с переменными коэффициентами в прямоугольнике

Мамадалиев Н.[a], **Хайиткулов Б.Х.**[b]

НУУз, Ташкент, Узбекистан; [a]*m_numana59@mail.ru*, [b]*b.hayitqulov@mail.ru*

В параллелепипеде $D = \{a \le x \le b,\ c \le y \le d,\ 0 \le t \le T\}$ требуется определить функцию $f(x, y, t) \ge 0$, доставляющую при каждом $t \in [0, T]$ минимум линейному функционалу [1]

$$J\{f\} = \int\limits_a^b \int\limits_c^d f(x, y, t)dydx \to \min,$$

при следующих условиях:

$$\begin{array}{l}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\chi(x, y)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\chi(x, y)\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) + f(x, y, t),\\
a < x < b,\ c < y < d,\ 0 < t \le T,\\
u(x, y, 0) = u_0(x, y),\ a \le x \le b,\ c \le y \le d,\\
u(a, y, t) = \mu_1(y, t),\ u(b, y, t) = \mu_2(y, t),\ c \le y \le d,\ 0 < t \le T,\\
u(x, c, t) = \mu_3(x, t),\ u(x, d, t) = \mu_4(x, t),\ a \le x \le b,\ 0 < t \le T,
\end{array}$$

$$m(x, y, t) \le u(x, y, t) \le M(x, y, t), \quad (x, y, t) \in D,$$

где $u = u(x, y, t)$ – температура в точке (x, y) прямоугольника в момент времени t; $\chi(x, y) > 0$ – коэффициент теплопроводности; $u_0(x, y)$, $\mu_1(y, t)$, $\mu_2(y, t)$, $\mu_3(x, t)$, $\mu_4(x, t)$, $m(x, y, t)$, $M(x, y, t)$ – заданные функции. Функции $m(x, y, t)$, $M(x, y, t)$ имеют смысл функций минимального и максимального профиля температуры в области D соответственно. Источник тепла описывается квадратично интегрируемой функцией $f(x, y, t)$ в пространстве $L_2(D)$.

Для получения консервативных разностных схем используется интегро-интерполяционный метод.

Литература

1. *Хайиткулов Б.Х.* Консервативные разностные схемы по оптимальному выбору местоположения источников тепла в стержне // Математическое моделирование и численные методы. 2020. №. 3. С. 85–98.

Работа выполнена при поддержке Узбекского фонда фундаментальных исследований, проект № ОТ-Ф4-33.

Исследование одной краевой задачи для параболо-гиперболического уравнения третьего порядка вида $\left(b\frac{\partial}{\partial y}+c\right)(Lu)=0$ в пятиугольной области с тремя линиями изменения типа

Мамажонов М.[1,a], **Шерматова Х.М.**[2,b]

[1]*КГПИ, Коканд,* [2] *ФерГУ, Фергана, Узбекистан;* [a]*bek84-08@mail.ru,* [b]*hilola-1978@mail.ru*

В области $G=G_1\cup G_2\cup G_3\cup G_4\cup J_1\cup J_2\cup J_3$ рассмотрим уравнение

$$\left(b\frac{\partial}{\partial y}+c\right)(Lu)=0, \tag{1}$$

где $b,c\in\mathbb{R}$, причем $b\neq 0$, G_1- прямоугольник с вершинами в точках $A\,(0;\,0)$, $B\,(1;\,0)$, $B_0\,(1,\,1)$, $A_0\,(0,\,1)$; G_2- треугольник с вершинами в точках B, $E\,(1/2\ ,\,-3/2\ )$, $D\,(-1,\,0)$; G_3- прямоугольник с вершинами в точках A, D, $D_0\,(-1,\,1)$, A_0; G_4- прямоугольник с вершинами в точках B, B_0, $C_0\,(2,\,1)$, $C\,(2,\,0)$; J_1- открытый отрезок с вершинами в точках C и D; J_2- открытый отрезок с вершинами в точках A и A_0; J_3 – открытый отрезок с вершинами в точках B и B_0; $u=u\,(x,y)-$ неизвестная функция, а

$$Lu=\begin{cases}u_{xx}-u_y,\ (x,\,y)\in G_1,\\ u_{xx}-u_{yy},\ (x,\,y)\in G_j, j=2,\,3,4.\end{cases}$$

Задача M_{bc}**.** *Требуется найти функцию* $u\,(x,\,y)$*, которая: 1) непрерывна в* $\overline{G}$ *и в области* $G\backslash(J_1\cup J_2)$ *имеет непрерывные производные, участвующие в уравнении (1), причем* u_x *и* u_y *непрерывны вплоть до части границы области* G*, указанные в краевых условиях; 2) удовлетворяет уравнению (1) в области* $G\backslash(J_1\cup J_2)$ *; 3) удовлетворяет известным краевым условиям и непрерывным условиям склеивания на линиях изменения типа* $J_1,\ J_2,\ J_3$*.*

Теорема. *Если* $\varphi_1\,(y)\,,\varphi_2\,(y)\in C^3\,[0,1]$, $\psi_1\,(x)\in C^3\,[1/2,\,2]$, $\psi_2\,(x)\in C^3\,[-1,\,-1/2]$, $\psi_3\,(x)\in C^3\,[0,1/2]$, $\psi_4\,(x)\in C^2\,[1/2,2]$, $\psi_5\,(x)\in C^2\,[-1,1/2]$, *то задача* M_{bc} *имеет единственное решение. Здесь* $\varphi_i\ \ (i=1,2)$ *и* $\psi_j\ \ \left(j=\overline{1,5}\right)$ *заданные достаточно гладкие функции в краевых условиях.*

Замечание. Аналогичные задачи рассмотрены в работах [1, 2].

Литература

1. *Джураев Т.Д., Мамажонов М.* Краевые задачи для одного класса уравнений четвертого порядка смешанного типа // Дифференциальные уравнения. 1986. Т. 22, № 1. С. 25–31.

2. *Мамажонов М., Мамажонов С.М.* Постановка и метод исследования некоторых краевых задач для одного класса уравнений четвертого порядка параболо-гиперболического типа // Вестник КРАУНЦ. Физ-мат. науки. 2014. Т. 8, № 1. С. 14–19.

Смешанная задача для вырождающегося уравнения четвертого порядка с дробной производной

Маманазаров А.О.

ФерГУ, Фергана, Узбекистан; mamanazarovaz1992@gmail.com

В области $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < l,\, 0 < t < T\}$ рассмотрим уравнение

$$ {}_C D_{0t}^{\alpha} u\,(x,t) + \left[x^{\beta} u_{xx}\,(x,t)\right]_{xx} = f\,(x,t)\,, \tag{1}$$

где ${}_C D_{0t}^{\alpha}$ – оператор дробного дифференцирования в смысле Капуто порядка α [1]

$$ {}_C D_{0t}^{\gamma} g\,(t) = \frac{1}{\Gamma\,(n-\alpha)} \int\limits_0^t \frac{g^{(n)}\,(z)\,dz}{(t-z)^{\gamma-n+1}}, \quad n = [\gamma]+1, \quad t > 0,$$

α, β, l, T – заданные действительные числа, причем $0 < \alpha \le 1$, $0 \le \beta < 1$, $l, T > 0$; а $f\,(x,t)$ – заданная в области Ω функция.

Регулярным в области Ω *решением* уравнения (1) назовем функцию $u = u(x,y)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω и $u\,(x,t) \in C\left(\bar{\Omega}\right)$, ${}_C D_{0t}^{\alpha} u\,(x,t)$, $\left(x^{\beta} u_{xx}\right)_{xx} \in C\,(\Omega)$.

Для уравнения (1) исследуется следующая смешанная задача:

Задача. *Найти регулярное в области* Ω *решение уравнения (1), удовлетворяющее следующим начальным*

$$u\,(x,0) = \varphi\,(x)\,, \qquad 0 \le x \le l$$

и краевым условиям

$$u\,(0,t) = 0,\ 0 \le t \le T,\ u_x\,(0,t) = u_{xx}\,(l,t) = u_{xxx}\,(l,t) = 0,\ 0 < t \le T,$$

где $\varphi\,(x)$ *– заданная функция в* $[0,l]$*, причем* $\varphi\,(0) = 0$.

Исследована однозначная разрешимость рассматриваемой задачи.

Литература

1. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and applications of fractional differential equations (North-Holland Mathematics Studies, 204). Amsterdam: Elsevier, 2006. 523 p.

Трехмерная начально-краевая задача для одного дифференциального уравнения дробного порядка с частными производными и ее корректная разрешимость

Мамедов И.Г.[a], Омарова К.К.[b]

ИСУ НАНА, Баку, Азербайджан; [a]ilgar-mamedov-1971@mail.ru, [b]omarovakonulk@gmail.com

В этой работе рассматривается трехмерное дифференциальное уравнение с частными производными дробного порядка

$$\begin{aligned}
&(V_{\alpha,\beta,\gamma}u)(x,y,z) \equiv {}_0^C D_x^\alpha {}_0^C D_y^\beta {}_0^C D_z^\gamma u(x,y,z) + a_{\alpha,\beta,0}(x,y,z) {}_0^C D_x^\alpha {}_0^C D_y^\beta u(x,y,z)+\\
&+a_{0,\beta,\gamma}(x,y,z) {}_0^C D_y^\beta {}_0^C D_z^\gamma u(x,y,z) + a_{\alpha,0,\gamma}(x,y,z) {}_0^C D_x^\alpha {}_0^C D_z^\gamma u(x,y,z)+\\
&+a_{\alpha,0,0}(x,y,z) {}_0^C D_x^\alpha u(x,y,z) + a_{0,\beta,0}(x,y,z) {}_0^C D_y^\beta u(x,y,z)+\\
&+a_{0,0,\gamma}(x,y,z) {}_0^C D_z^\gamma u(x,y,z) + a_{0,0,0}(x,y,z)u(x,y,z) =\\
&= \varphi_{\alpha,\beta,\gamma}(x,y,z) \in L_p(G),
\end{aligned} \tag{1}$$

при следующих начально-краевых условиях

$$\begin{cases}
V_{0,0,0}u \equiv u(0,0,0) = \varphi_{0,0,0} \in \mathbb{R};\\
(V_{\alpha,0,0}u)(x) \equiv {}_0^C D_x^\alpha u(x,y,z)\Big|_{\substack{y=0\\z=0}} = \varphi_{\alpha,0,0}(x) \in L_p(G_1);\\
(V_{0,\beta,0}u)(y) \equiv {}_0^C D_y^\beta u(x,y,z)\Big|_{\substack{x=0\\z=0}} = \varphi_{0,\beta,0}(y) \in L_p(G_2);\\
(V_{0,0,\gamma}u)(z) \equiv {}_0^C D_z^\gamma u(x,y,z)\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = \varphi_{0,0,\gamma}(z) \in L_p(G_3);\\
(V_{\alpha,\beta,0}u)(x,y) \equiv {}_0^C D_x^\alpha {}_0^C D_y^\beta u(x,y,z)\Big|_{z=0} = \varphi_{\alpha,\beta,0}(x,y) \in L_p(G_1 \times G_2);\\
(V_{0,\beta,\gamma}u)(y,z) \equiv {}_0^C D_y^\beta {}_0^C D_z^\gamma u(x,y,z)\Big|_{x=0} = \varphi_{0,\beta,\gamma}(y,z) \in L_p(G_2 \times G_3);\\
(V_{\alpha,0,\gamma}u)(x,z) \equiv {}_0^C D_x^\alpha {}_0^C D_z^\gamma u(x,y,z)\Big|_{y=0} = \varphi_{\alpha,0,\gamma}(x,z) \in L_p(G_1 \times G_3),
\end{cases} \tag{2}$$

где $0 < \alpha,\beta,\gamma < 1, (x,y,z) \in G = G_1 \times G_2 \times G_3, G_i = (0,h_i),\ (i = 1,2,3)$, $\varphi_{0,0,0}$ – заданная постоянная, а $\varphi_{\alpha,0,0}(x)$, $\varphi_{0,\beta,0}(y)$, $\varphi_{0,0,\gamma}(z)$, $\varphi_{\alpha,\beta,0}(x,y)$, $\varphi_{0,\beta,\gamma}(y,z)$ и $\varphi_{\alpha,0,\gamma}(x,z)$ являются заданными измеримыми функциями. Отметим, что здесь в качестве дробной производной используется дробная производная в смысле Капуто.

В данной работе выявлен гомеоморфизм между определенными парами банаховых пространств при исследовании трехмерной начально-краевой задачи для уравнения (1) с негладкими коэффициентами в результате сведения этой задачи к эквивалентному интегральному уравнению Вольтерра второго рода. Кроме того, для поставленной трехмерной начально-краевой задачи (1), (2) найдено интегральное представление решения.

Существование и единственность решения для нелинейных импульсных интегро-дифференциальных уравнений с нелокальными граничными условиями

Мамедов Р.С.[a], **Касумов С.Ю.**[b]

АГУНП, Баку, Азербайджан; [a]*rasadmammedov@gmail.com,* [b]*sardarkasumov1955@mail.ru*

В данной статье исследуется существование и единственность решений нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа

$$\dot{x} = f\left(t, x, \phi x(t), \varphi x(t)\right), \quad t \in [0, T], \quad t \neq t_i, \quad i = 1, 2, \ldots, p, \tag{1}$$

с двухточечными граничными условиями

$$Ax(0) + Bx(T) = \alpha \tag{2}$$

и импульсивными состояниями в заданные моменты времени:

$$\Delta x(t_i) = I_i\left(x\left(t_i\right)\right), \quad i = 1, 2, \ldots, p, \quad 0 = t_0 < t_1 < \ldots, t_p < T_{p+1} = T. \tag{3}$$

Здесь A и B – постоянные квадратные матрицы порядка n, причем $detN \neq 0$, $N = A + B$; $f : [0, T] \times R^n \times R^n \times R^n$ и $I_i : R^n \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \ldots, p$, – заданные функции; $\phi x(t) = \int\limits_0^t \mu(t, s)x(s)ds$, $\varphi x(t) = \int\limits_0^t \gamma(t, s)x(s)ds$, $\mu, \gamma : R \times R \to R^{n \times n}$ – являются заданными функциями; $\Delta x(t_i) = x(t_i^+) - x(t_i^i)$, $i = 1, 2, \ldots, p$, где $x(t_i^+) = \lim\limits_{h \to 0^+} x(t_i + h) = \lim\limits_{h \to 0^-} x(t_i + h) = x(t_i)$.

Получены и доказаны новые результаты о существовании и единственности решения расматриваемой задачи с использованием принципа сжатых отображений Банаха и теоремы Шефера о неподвижной точке. Заметим, что аналогичная краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения была изучена в [1].

Литература

1. *Sharifov, Ya.* Optimal control problems for impulsive systems under nonlocal boundary conditions // Vestnik Sam. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Phys. math. sci., 2013, vol. 33, no. 4, pp. 34–45.

Краевая задача для линейной системы уравнений в частных производных с операторами дробного дифференцирования Джрбашяна – Нерсесяна

Мамчуев Мурат О.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; mamchuev@rambler.ru

В области $\Omega = \{(x,y): \ 0 < x < a, \ 0 < y < b\}$, $a, b < \infty$ рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$D_{0x}^{\{\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_k\}}u(x,y) + AD_{0y}^{\{\beta_0,\beta_1,...,\beta_m\}}u(x,y) = Bu(x,y) + f(x,y), \qquad (1)$$

где $D_{0x}^{\{\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_k\}}$ и $D_{0y}^{\{\beta_0,\beta_1,...,\beta_m\}}$ – операторы дробного дифференцирования Джрбашяна – Нерсесяна [1] порядков $\alpha = \sum_{i=0}^{k}\alpha_i - 1 > 0$ и $\beta = \sum_{i=0}^{m}\beta_i - 1 > 0$ соответственно, $\alpha_i, \beta_j \in (0,1]$, $(i = \overline{0,k}, j = \overline{0,m})$; $f(x,y) = ||f_1(x,y), ..., f_n(x,y)||$ и $u(x,y) = ||u_1(x,y), ..., u_n(x,y)||$ – соответственно заданный и искомый n-мерные векторы, A и B – заданные постоянные действительные квадратные матрицы порядка n.

Оператор $D_{0t}^{\{\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_k\}}$ порядка $\gamma = \sum_{i=0}^{k}\gamma_i - 1 > 0$, $\gamma_i \in (0,1]$ $(i = \overline{0,k})$, определяется соотношением [1]

$$D_{0t}^{\{\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_k\}} = D_{0t}^{\gamma_n - 1}D_{0t}^{\gamma_{n-1}}...D_{0t}^{\gamma_1}D_{0t}^{\gamma_0},$$

где D_{0t}^{σ} – оператор дробного интегро-дифференцирования Римана – Лиувилля [2, с. 9] прядка σ.

Исследована краевая задача в прямоугольной области для линейной системы уравнений (1) с частными операторами дробного дифференцирования Джрбашяна – Нерсесяна с постоянными коэффициентами в случае, когда матричные коэффициенты системы имеют комплексные собственные значения (в том числе и кратные). Доказаны теоремы существования и единственности регулярного решения исследуемой краевой задачи. Решение построено в явном виде в терминах функции Райта матричного аргумента.

Литература

1. *Джрбашян М.М., Нерсесян А.Б.* Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка // Изв. АН АрмССР. Математика. 1968. С. 3-28.

2. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

Разработка и применение статического и динамического методов исследования упругих и прочностных свойств полимерных композиционных материалов

Мамчуев Мухтар О.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; mamchuevmo@yandex.ru

Полимерные композиционные материалы (ПКМ) – являются незаменимыми и широко востребованными материалами при производстве самой разной продукции гражданского и военного назначения.

Важнейшими отраслями, в которых применяются ПКМ, являются производство космических аппаратов, авиационной техники, судостроение, радиоэлектроника.

Надежность функционирования данной техники существенно снижается при таких механических воздействиях, как вибрации, удары, скоростные перегрузки. Поэтому всестороннее исследование упругих и прочностных свойств ПКМ является актуальной задачей и без решения её невозможно получить материалы с заданными механическими свойствами.

Наряду с традиционными методами исследования ПКМ, в настоящее время все больше применяются методы неразрушающего контроля и анализа. В работе проводились исследование механических свойств образцов ряда перспективных ПКМ, изготавливаемых в виде пластинок, с помощью неразрушающих методов. Решаются следующие задачи:

1. Разработка новой методики исследования механических свойств ПКМ путем статических и динамических измерений.

2. Разработка и изготовление измерительного стенда.

3. Разработка алгоритма и программы обработки цифровых данных, получаемых в процессе измерения.

4. Проведение экспериментов по исследованию механических свойств перспективных ПКМ, изготавливаемых в Институте химии и биологии КБГУ.

Существование и единственность решений нелинейных дифференциальных уравнений с нелокальными краевыми условиями при импульсных воздействиях

Марданов М.Дж.[1,2,a]**, Шарифов Я.А.**[2,b]

[1]*ИММ НАНА,* [2]*БГУ, Баку, Азербайджан;* [a]*misirmardanov@yahoo.com,* [b]*sharifov22@rambler.ru*

Исследутся существование и единственность решений нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа

$$\dot{x} = f(t,x), \quad t \in [0,T], \quad t \neq t_i, \quad i = 1,2,\ldots,p$$

с нелокальными краевыми условиями

$$Ax(0) + \int_0^T m(t)x(t)dt + Bx(T) = \alpha,$$

и импульсивными состояниями

$$\Delta x(t_i) = I_i(x(t_i)), \quad i = 1,2,\ldots,p, \quad 0 = t_0 < t_1 < \cdots t_p < T_{p+1} = T.$$

Здесь: A и B – постоянные квадратные матрицы порядка n; $m(t) \in R^{n\times n}$, причем $\det N \neq 0$, $N = A + \int_0^T m(t)dt + B$; $f : [0,T] \times R^n \to \mathbb{R}^n$ и $I_i : \mathrm{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $i = 1,2,\ldots,p$, – заданные функции; $\Delta x(t_i) = x(t_i^+) - x(t_i)$, $i = 1,2,\ldots,p$, где $x(t_i^+) = \lim_{h\to 0^+} x(t_i + h)$, $x(t_i) = \lim_{h\to 0^-} x(t_i + h)$ – правый и левый пределы в точках $t = t_i$ соответственно. Целью работы является доказательство новых результатов о существовании и единственности решения с использованием принципа сжатых отображений Банаха и теоремы Шефера и Красносельского о неподвижной точке. Аналогичные нелокальные краевые задачи для обыкновенного дифференциального уравнения исследованы в [1, 2].

Литература

1. *Sharifov Ya.* Optimal control problems for impulsive systems under nonlocal boundary conditions // Vestnik Sam. Gos. Tekhn. Univ., ser. Phys. math. sci., 2013, vol. 33, no. 4, pp. 34–45.

2. *Марданов М.Дж., Шарифов Я.А., Зейналлы Ф.М.* Существование и единственность решений нелинейных дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями нелокальными краевыми условиями, // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. 2019. № 60. С. 61–72.

О системном подходе принятия решений в условиях нечеткости ситуаций

Мирзоев Ф.А., Кулиев Р.М.

БГУ, Баку, Азербайджан; farhad_1958@mail.ru

Настоящая работа посвящена обсуждению основных принципов моделирования управленческой деятельности в условиях нечеткости ситуаций ([1, 2]). Теория нечетких множеств к настоящему времени приобрела широкую популярность и получила практическое применение во многих отраслях знаний. Среди областей широкого применения теории нечетких множеств особое место также занимают задачи математического программирования с нечеткими значениями параметров и (или) ограничений. К примеру рассматривается оптимизационно-управленческая модель производственной программы объединения с конечным числом производственных структур с учетом экологического фактора (т.е. часть выпуска продукции затрачивается на природоохранную деятельность):

$$(C, Y) \to \max, \quad (Q, Y) \leq R, \quad Y \geq 0.$$

В этой модели Y – вектор вариантов экологической программы; C – вектор эффективности вариантов; Q – матрица удельных затрат вариантов программы; R – вектор лимита на природоохранные затраты. При перспективном планировании возможно, что компоненты векторов C, Q, и R назначаются координирующим центром и допускаются некоторые отклонения от «директивного» значения. В итоге значения компонентов этих векторов параметрически зависят от степеней допустимости. Очевидно, что при такой трактовке компоненты вышеуказанных векторов будут представлять собой нечеткие множества допустимых значений каждого варианта эффективности, удельных затрат и лимита на природоохранные затраты (см. напр. [3]). Полученную задачу нечеткого линейного программирования можно решать средствами теории нечетких множеств.

Литература

1. *Zadeh L.A.* Fuzzy Sets.-Inform. And Contr., 1965, no. 8, pp. 338–353.
2. *Андрейчиков А.В., Андрейчикова О.Н.* Анализ синтез и планирование решений в экономике. М.: «Финансы и статистика», 2000.
3. *Кулиев Р.М., Мирзоев Ф.А.* Application of interval method in the analysis of economic-ecologically oriented Fuzzy models // Вестник Бакинского Университета. Серия Физико-Математических наук. 2018. № 2. С. 17–25.

Задача с условиями Геллерстедта на параллельных характеристиках для одной специальной области

Мирсабуров М.[a], **Амонов Б.Б.**[b], **Хуррамов Н.Х.**[c]

ТерГУ, Термез, Узбекистан; [a]*mirsaburov@mail.ru,* [b]*amonovbobur91@mail.ru,* [c]*nxurramov22@mail.ru*

Пусть D_a- область ограниченная отрезком OB оси Oy, $0 \leq y \leq ((m+2)a/2)^{2/(m+2)}$, дугой AB нормальной кривой $\sigma_a : x^2 + \frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2} = a^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, здесь $O = O(0,0)$, $A = A(a,0)$, $B = B(0,b)$ и характеристиками

$$OC : x - \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2} = 0 \quad \text{и} \quad AC : x + \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2} = a$$

уравнения

$$(sign\ y)|y|^m u_{xx} + u_{yy} + (\beta_0/y)u_y = 0, \tag{1}$$

где постоянная $m > 0$, $\beta_0 \in (-m/2, 1)$.

Обозначим через D_a^+ и D_a^- части области D_a, лежащие соответственно в полуплоскостях $y > 0$ и $y < 0$, а через C_0 и C_1 точки пересечения характеристик OC и AC с характеристиками уравнения (1), выходящими из точки $E(c,0)$, где c- некоторое число, принадлежащее интервалу $I = (0,a)$ оси $y = 0$.

Задача Г. *Требуется найти в области D_a функцию $u(x,y) \in C\left(\overline{D}_a\right)$, удовлетворяющую следующим условиям: 1) функция $u(x,y)$ принадлежит $C^2\left(D_a^+\right)$ и удовлетворяет уравнению (1) в области D_a^+; 2) функция $u(x,y)$ является в области D_a^- обобщенным решением класса R_1; 3) на интервале вырождения OA имеет место условие сопряжения*

$$\lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y\to+0}y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}, \quad x \in (0,a), \tag{2}$$

причём эти пределы при $x \to 0$, $x \to a$ могут иметь особенности порядка меньше $1-2\beta$, $\beta = (m+2\beta_0)/2(m+2) \in (0,1/2)$; 4) выполняются равенства

$$u(x,y)\mid_{\sigma_a} = \varphi_1(x),\ x \in [0,a];\ u(0,y) = \ \varphi_2(x),\ y \in [0,b]; \tag{3}$$

$$u(x,y)\mid_{OC_0} = \psi_0(x), \quad x \in [0,c/2]; \tag{4}$$

$$u(x,y)\mid_{EC_1} = \psi_1(x), \quad x \in [c,(c+a)/2]. \tag{5}$$

Заметим, что условие (3) является условием Дирихле, заданным на $\sigma_a \cup OB$, а условия (4) и (5) есть условия Геллерстедта, заданные соответственно на граничной характеристике OC_0 и параллельной ей внутренней характеристике EC_1. При $c = 0$ или $c = a$ из задачи Г следует задача Трикоми. Задача Г исследуется методом работы [1].

Литература

1. *Мирсабуров М., Хуррамов Н.* Задача с условием Бицадзе – Самарского на характеристиках одного семейства и общими условиями сопряжения на линии вырождения для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56, № 8. С. 1073–1094.

Задача с аналогом условия Франкля на отрезке вырождения для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения с сингулярным коэффициентом

Мирсабуров М.[a], **Эргашева С.Б.**[b]

ТерГУ, Термез, Узбекистан; [a]*mirsaburov@mail.ru,*
[b]*sarvinozergasheva96@mail.ru*

Пусть Ω – характеристический четырехугольник комплексной плоскости $C : z = x + iy$, ограниченная характеристиками AC_1, BC_1, AC_2, BC_2, где $A(-1,0)$, $B(1,0)$, $C_1\left(0,((m+2)/2)^{2/(m+2)}\right)$, $C_2\left(0,-((m+2)/2)^{2/(m+2)}\right)$ уравнения

$$-|y|^m u_{xx} + u_{yy} + \alpha_0 |y|^{(m-2)/2} u_x + (\beta_0/y) u_y = 0, \tag{1}$$

где m, α_0, β_0 – некоторые постоянные, удовлетворявшие условиям $m > 0$, $-m/2 < \beta_0 < 1$, $-(m+2)/2 < \alpha_0 < (m+2)/2$.

Корректность постановки краевых задач для уравнения (1) существенно зависит от ее числовых параметров α_0 и β_0 – коэффициентов при младших членах уравнения. На плоскости параметров $\alpha_0 O \beta_0$ рассмотрим треугольник $A_0B_0C_0$ ограниченной прямыми

$$A_0C_0 : \beta_0 + \alpha_0 = -m/2;\ B_0C_0 : \beta_0 - \alpha_0 = -m/2;\ A_0B_0 : \beta_0 = 1.$$

Пусть $P(\alpha_0, \beta_0) \in \Delta A_0B_0C_0$, т.е. $0 < \alpha, \beta < 1$, $\alpha + \beta < 1$, где $\alpha = (m + 2(\beta_0 + \alpha_0))/2(m+2)$, $\beta = (m + 2(\beta_0 - \alpha_0))/2(m+2)$.

Обозначим через Ω_1 и Ω_2 части области Ω, лежащие соответственно в полуплоскостях $y > 0$ и $y < 0$, и через A_0 и B_0 соответственно точки пересечения характеристик AC_2 и BC_2 с характеристикой исходящей из точки $E(c,0)$, где $c \in J = (-1,1)$ – интервал оси $y = 0$.

Пусть линейная функция $p(x) = \delta - kx$, где $k = (1-c)/(1+c)$, $\delta = 2c/(1+c)$ отображает множество точек отрезка $[-1, c]$ на множество точек отрезка $[c, 1]$ причем $p(-1) = 1$, $p(c) = c$.

Настоящая работа посвящена исследованию корректности задачи в области Ω для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения (1), когда граничная характеристика AC_2 области Ω_2 произвольным образом разбивается на два куска AA_0 и A_0C_2 и на первом куске $AA_0 \subset AC_2$ задаются значения искомой функции, а второй кусок $A_0C_2 \subset AC_2$ освобождена от краевого условия и это недостающее краевое условие заменено аналогом условия Франкля на отрезке вырождения AB :

$$u(x,0) - \mu u(p(x),0) = f(x),\ x \in [-1, c],$$

на характеристике BC_1 задается значение искомой функции. Однозначная разрешимость задачи A доказывается методом работы [1].

Литература

1. *Балкизов Ж.В.* Первая краевая задача для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения // Кавказский матем. журнал. 2016. Т. 18, № 2. С. 19–30.

Задача с аналогом условия Бицадзе – Самарского для одного класса вырождающихся гиперболических уравнений

Мирсабурова Г.М.

ТГПУ, Ташкент, Узбекистан; mirsaburov@mail.ru

Пусть D – конечная односвязная область полуплоскости $y < 0$, ограниченная отрезком AB оси $y = 0$, характеристиками AB и BC уравнения

$$-(-y)^m u_{xx} + u_{yy} - (m/2y)u_y = 0, \tag{1}$$

где постоянная $m > 0$, $A = A(-1,0)$, $B = B(1,0)$. На отрезке AB рассмотрим точки $E_k = E_k(c_k, 0)$, $k = \overline{1,n}$, $-1 < c_1 < c_2 < ... < c_n < 1$. На отрезке $[-1,1]$ оси $y = 0$ введем монотонно возрастающие функции $p_k(x) \in C^1[-1,1]$, отображающие отрезок $[-1,1]$ на отрезки $[c_k, 1]$, соответственно, причем $p_1(x) > p_2(x)... > p_n(x) > x$ при $x \in [-1,1]$ и $p_k(-1) = c_k, p_k(1) = 1$. В качестве примера таких функций приведем линейные функции $p_k(x) = b_k x + a_k$, где $a_k = (1 + c_k)/2$, $b_k = 1 - a_k$. Через $\theta(x_0)$ и $\theta_k(p_k(x_0))$ соответственно обозначим аффиксы точек пересечения характеристик

$$AC:\ x - (2/(m+2))(-y)^{(m+2)/2} = -1,\quad E_kB_k:\ x - (2/(m+2))(-y)^{(m+2)/2} = c_k,$$

где $B_k \in BC$, $k = \overline{1,n}$, с характеристиками из семейства BC выходящими из точек $(x_0, 0)$, $(p_k(x_0), 0)$ соответственно.

Настоящая работа посвящена исследованию для вырождающегося гиперболического уравнения задачи с аналогом условия Бицадзе – Самарского, которое связывает значения искомого решения на граничной характеристике и на параллельных ей n внутренних характеристиках.

Задача А. _В области D найти регулярное решение $u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D)$ уравнения (1), удовлетворяющее следующим условиям:_

$$u(x,0) = \tau(x), \quad x \in [-1,1], \tag{2}$$

$$\frac{d}{dx}u[\theta(x)] = \sum_{k=1}^{n} \mu_k(x) \frac{d}{dx} u[\theta_k(p_k(x))] + \rho(x), \quad x \in [-1,1], \tag{3}$$

где заданные функции $\tau(x)$, $\mu_k(x)$, $\rho(x) \in C[-1,1] \cap C^2(-1,1)$.

Основным результатом работы является

Теорема. _Задача А при выполнение условия $\delta_1 + \delta_2 + ... + \delta_n < 1$ однозначно разрешима, где $\delta_k = max|\mu_k(x)p_k^{'}(x)|$, $k = 1, 2$._

Теорема доказывается методом работы [1].

Литература

1. _Бицадзе А.В., Салахитдинов М.С._ К теории уравнений смешанно-составного типа // Сибирский математический журнал. 1961. Т. 2, № 1. С. 7–19.

Задача со смещением на внутренних характеристиках в бесконечной области для уравнения Геллерстедта с сингулярными коэффициентами

Мирсабурова У.М.

ТерГУ, Термез, Узбекистан; mirsaburov@mail.ru

Пусть $D = D^+ \cup D^- \cup I$ – бесконечная область комплексной плоскости $C = \{\, z = x+iy\}$, D^+– полуплоскость $y > 0$, D^- – конечная область полуплоскости $y < 0$, ограниченная характеристиками уравнения

$$(\mathrm{sign}\ \mathrm{y})|\mathrm{y}|^{\mathrm{m}}\mathrm{u}_{\mathrm{xx}} + \mathrm{u}_{\mathrm{yy}} + \alpha_0|\mathrm{y}|^{\mathrm{m}/2-1}\mathrm{u}_{\mathrm{x}} + \beta_0(\mathrm{y})^{-1}\mathrm{u}_{\mathrm{y}} = 0, \qquad (1)$$

исходящими из точек $A(-1,0)$ и $B(1,0)$ и отрезком AB прямой $y = 0$, $I = \{(x,y) : -1 < x < 1,\ y = 0\}$. В уравнении (1) предполагается, что m, α_0, β_0 – некоторые действительные числа, удовлетворяющие условиям $m > 0$, $|\alpha_0| < (m+2)/2$, $-m/2 < \beta_0 < 1$.

Задача SV. *В области D найти функцию $u(x,y)$ удовлетворяющую следующим условиям: 1) функция $u(x,y)$ непрерывна в любой подобласти $\overline{D}_R$ неограниченной области D; 2) $u(x,y) \in C^2(D^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в этой области; 3) $u(x,y)$ является обобщенным решением класса R_1 в области $D(EC_0 \cup EC_1)$; 4) на интервале вырождения I имеет место следующее условие сопряжения*

$$\lim_{y\to -0} (-y)^{\beta_0} \left(\partial u/\partial y\right) = \lim_{y\to +0} y^{\beta_0} \left(\partial u/\partial y\right), \quad x \in I \setminus \{c\},$$

причем эти пределы при $x = \pm 1, x = c$ могут иметь особенности порядка ниже $1-\alpha-\beta$, где $\alpha = (m + 2(\beta_0 + \alpha_0))\,/2(m+2), \beta = (m + 2(\beta_0 - \alpha_0)\,/2(m+2)$; 5) выполняется равенство

$$\lim_{R\to +\infty} u(x,y) = 0, \quad y > 0,$$

где $R^2 = x^2 + 4(m+2)^{-2}y^{m+2}$; 6) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,0) = \tau_1(x), \quad x \in (-\infty,-1];\ u(x,0) = \tau_2(x),\ x \in [1,+\infty);$$

$$a(x)D^{1-\beta}_{x,1}u\left[\theta^*_0(q(x))\right] + b(x)D^{1-\alpha}_{x,1}u\left[\theta^*_1(p(x))\right] = \psi(x), \quad x \in I;$$

$$u(p(x),0) - u(q(x),0) = f(x), \quad x \in I,$$

где $p(x) = ax - b$, $q(x) = a - bx, a = (1+c)/2$, $b = 1 - a$; $\theta^*_0(q(x))$, $\theta^*_1(p(x))$ – аффиксы точек пересечения характеристик EC_1 и EC_0 с характеристиками, исходящими из точек $M(q(x_0),0)$, $M(p(x_0),0)$ соответственно, где $x_0 \in \overline{I}$, $\tau_1(x)$, $\tau_2(x)$, $a(x)$, $b(x)$, $\psi(x)$, $f(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, причем $f(1) = 0$, $a^2(x) + b^2(x) \neq 0$.

Корректность задачи SV доказывается методом работы [1].

Литература

1. *Рузиев М.Х.* Задача со смещениями во внутренних характеристиках для уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа с сингулярным коэффициентом // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49, № 8. С. 1016–1025.

Компьютерное вычисление топологической плотности алмазоподобных структур

Мокрова А.А.[a]**, Шутов А.В.**

ВлГУ, Владимир, Россия; [a] *albina.mokrova@yandex.ru*

Топологическая плотность – хорошо известная характеристика графов. Известно, что топологическая плотность коррелирует с другими параметрами кристаллических структур, такими как энергия решетки, распределение отдельных элементов, каталитическая активность и объем на молекулу.

Если G некоторый граф, v его вершина. Предположим, что G связен и степени его вершин ограничены абсолютной константой. Для каждой вершины $v \in G$ координационное окружение $eq_n(v)$ есть множество вершин, находящихся на расстоянии n от вершины v в метрике графа, n-ое координационное число – это число вершин графа G, входящих в координационное окружение $eq_n(v)$. Граф G называется d-периодическим, если его группа симметрии содержит подгруппу изоморфную $\mathbb{Z}^d$ и число орбит Z относительно действия этой подгруппы конечно.

Тогда топологическая плотность d-периодического графа G может быть определена как $td(G) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} e_k(v)}{n^d}$.

Вложим G в Евклидово пространство $\mathbb{R}^d$ следующим образом. Выберем некоторую решетку $L \in \mathbb{R}^d$ и Z различных точек $\{v_1, \ldots, v_Z\}$ из ее фундаментальной области. Пусть Pol_G – многогранник роста графа G определенный в [1]. Тогда в [2] доказано, что $td(G) = Z\frac{vol_d(Pol_G)}{\det L}$.

На основе последней формулы в [2] разработан автоматизированный алгоритм вычисления топологической плотности. В докладе будут приведены результаты вычисления топологической плотности алмазоподобных структур – 3-периодических графов, в которых каждая вершина имеет степень 4. Структуры взяты из известной базы SACADA [3].

Литература

1. *Журавлев В.Г.* Самоподобный рост периодических разбиений и графов // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13, № 2. С. 69–92.

2. *Shutov A., Maleev A.* Topological densities of periodic graphs // Zeitschrift für Kristallographie – Crystalline Materials, 2020, vol. 235, pp. 609–617.

3. Samara Carbon Allotrope Database. http://sacada.sctms.ru.

Образующие дифференциального тела относительно движения кватернионных пространств

Муминов К.К.[1,a], **Журабоев С.С.**[2,b]

[1]*НУУз, Ташкент,* [2]*ФерГУ, Фергана, Узбекистан* [a]*m.muminov@rambler.ru,* [b]*saidaxbor.juraboyev@mail.ru*

Пусть H^n – n-мерное линейное пространство над телом кватернионов чисел H, и пусть $GL(n,H)$ – группа всех обратимых линейных преобразований пространства H^n, и $Sp(n) = \{\sigma \in GL(n,H) : \langle \sigma x, \sigma y\rangle = \langle x, y\rangle\}$ где $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$, $x, y \in H^n$, $\bar{y}$ – эрмитово сопряженный элемент к y.

Через $H^n \lhd GL(n,H)$, обозначим полупрямое произведение групп $GL(n,H)$ и H^n. Если Γ подгруппа $GL(n,H)$, то $H^n \lhd \Gamma$ есть подгруппа в группе $H^n \lhd GL(n,H)$.

Обозначим через $A[\![x,\bar{x}]\!]$ дифференциальное тело дифференциальных рациональных функций от переменных $x \in H^n$, где A некоторое дифференциальное поле, а отображение дифференцирования $d : A[\![x,\bar{x}]\!] \to A[\![x,\bar{x}]\!]$ определяется с помощью этих равенств

$$d\left(f^{-1}\right) = -f^{-1} d(f) f^{-1}, d\left(f^{-1} g\right) = -f^{-1} d(f) f^{-1} g + f^{-1}(g),$$

здесь $f = f[x,\bar{x}]$, $g = g[x,\bar{x}]$ – дифференциальные многочлены.

Если G подгруппа в группе $H^n \lhd GL(n,H)$ и $f\left[\!\left[xh, \overline{xh}\right]\!\right] = f[\![x,\bar{x}]\!]$ для всех $h \in G$, то дифференциальная рациональная функция $f[\![x,\bar{x}]\!] \in A[\![x,\bar{x}]\!]$ называется $G-$инвариантной. Множества всех $G-$инвариантных дифференциальных рациональных функций обозначается через $A[\![x,\bar{x}]\!]^G$. Система $F = \{f_i\}_{i=1}^k \in A[\![x,\bar{x}]\!]^G$ называется системой образующих $d-$тела $A[\![x,\bar{x}]\!]^G$, если любой элемент $f \in A[\![x,\bar{x}]\!]^G$ может быть получен из конечного числа элементов F применением конечного числа раз алгебраических операций, дифференцирования и операции эрмитого сопряжения в $A[\![x,\bar{x}]\!]^G$ [1].

Теорема. *Пусть $G = H^n \lhd Sp(n)$. Тогда система многочленов*

$$\left\langle d^i(x), d^i(x)\right\rangle, \left\langle d^i(x), d^{i+1}(x)\right\rangle, i = \overline{1,n}$$

является конечной системой образующих в дифференциальное тело $A[\![x,\bar{x}]\!]^G$, где d^i-порядок i-го дифференцирования.

Литература

1. *Муминов К.К., Чилин В.И.* Эквивалентность кривых в конечномерных пространствах. LAP LAMBERT Academic Publishing. Deutschland (Германия). 2015. 122 с.

Нелинейные отображения симплекса в себя удовлетворяющие условию Харди – Литлвуда – Пойа

Муминов У.Р.[1,a], **Эшниязов А.И.**[2,b], **Ганиходжаев Р.Н.**[3,c]

[1] *ФерГУ, Фергана,* [2] *ГулГУ, Гулистан,* [3] *НУУз, Ташкент, Узбекистан;*
[a] *u_muminov_88@mail.ru,* [b] *eshniyozovabdumalik@yandex.com,*
[c] *rganikhodzhaev@gmail.com*

Часто в прикладных задачах симплекс $S^{m-1}=\{x=(x_1,...,x_m): \sum\limits_{i=1}^{m} x_i=1,$ $x_i\geq 0\}$ рассматривается как набор состояний некоторой системы состоящей из m видов. При этом отображение $F: S^{m-1}\to S^{m-1}$ называется эволюционным оператором, который описывает динамику системы разностным соотношением

$$x^{(n+1)}=F\left(x^{(n)}\right), \tag{1}$$

причем $x^0\in S^{m-1}$ – произвольная начальная точка, а последовательность $\left\{x^{(n)}\right\}$ – ее орбита.

Пусть $x_\downarrow=(x_{[1]},...,x_{[m]})$ – невозрастающая перестановка координат состояния $x\in S^{m-1}$. Положим $x\prec y$, если $\sum\limits_{i=1}^{k} x_{[i]}\leq \sum\limits_{i=1}^{k} y_{[i]}$ для всех k.

Определение. *Эволюционный оператор F называется оператором Харди – Литлвуда – Пойа, если*

$$F(x)\prec x \tag{2}$$

для всех $x\in S^{m-1}$.

Известно [2], что, если F линейное отображение $F=(P_{ij})\,;\, i,j=\overline{1,m}$, то для выполнения условия (2) необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{j=1}^{m} P_{ij}=\sum_{i=1}^{m} P_{ij}=1,$$

причем $P_{ij}\geq 0$.

Пусть $F=(P_{ij})\,;\, i,j=\overline{1,m}$, где $P_{ij,k}=P_{ji,k}\geq 0$ и $\sum\limits_{k=1}^{m} P_{ij,k}=1$. Действие F на $x\in S^{m-1}$ определим равенством

$$F(x)=\left(\sum_{i,j=1}^{m} P_{ij,1}x_ix_j,\ \sum_{i,j=1}^{m} P_{ij,2}x_ix_j,\ ...,\ \sum_{i,j=1}^{m} P_{ij,m}x_ix_j\right). \tag{3}$$

Очевидно, $F: S^{m-1}\to S^{m-1}$ – непрерывное квадратичное отображение.

Пусть $P_k=(P_{ij,k})\,,\ i,j=\overline{1,m}.$

Теорема 1. *Для существования стохастической матрицы T_k такой, что*

$$P_k=\frac{1}{2}\left(T_k+T_k^{'}\right) \tag{4}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{i,j\in I_l}^{m} P_{ij,k} \le l \tag{5}$$

для любого $l = \overline{1,m}$ и произвольного набора индексов $I_l = \{i_1, ..., i_k\}$, где $1 \le i_t \le m$. Заметим, что условие (5) является необходимым того чтобы F было оператором Харди – Литлвуда – Пойа.

Пусть В множество всех отображений вида (3) удовлетворяющих условию (5).

Теорема 2. *В является выпуклым многогранником. Описание всех крайних точек многогранника В получено только лишь при $m = 2$.*

Литература

1. *Харди Г.Г., Литтлвуд Дж.Е., Полиа Г.* Неравенства /перев. Левина В.И./ Москва: Госуд. из-во иностранной литературы, 1948.
2. *Marshall A.W., Olkin I., Arnold B.* Inequalities: theory of majorization and its applications. Springer, 2011.
3. *Ганиходжаев Г.Н.* Исследования по теории квадратичных стохастических операторов. Ташкент, 1995 (диссертация).

Разрешимость задачи преследования для одной квазилинейной дифференциальной игры нейтрального типа с интегральными ограничениями

Мухсинов Е.М.

ТГУПБП, Худжанд, Таджикистан; yodgor.mukhsinov@gmail.com

Рассмотрим задачу преследования [1, с. 254] для игры

$$\dot{x}\left(t\right)=\sum_{i=1}^{n}B_i\dot{x}\left(t-h_i\right)+Ax\left(t\right)+\sum_{i=1}^{n}A_ix\left(t-h_i\right)+f(u\left(t\right),v\left(t\right),t) \qquad (1)$$

с терминальным множеством M, которое является замкнутым подпространством пространства X. В игре X,Y и Z – гильбертовые пространства, $t\geq 0$, $x\left(t\right)\in X$, $0<h_1<h_2<\cdots<h_n=h$, операторы A_i,B_i линейны и ограничены, а линейный замкнутый оператор $A{:}D\to X$ порождает фундаментальное решение $\Phi\left(t\right)$. Предполагаем, что для любых допустимых отображений $u(\cdot):[0,\infty)\to Y$, $v(\cdot):[0,\infty)\to Z$ удовлетворяющие интегральным ограничениям, задача Коши (1) с непрерывным начальным условием $x\left(s\right)=\varphi\left(s\right),\ -h\leq s\leq 0$, имеет абсолютно непрерывное решение [2, с. 268].

Теорема. *Пусть:* 1) *непрерывно зависящий от t линейный оператор $L\left(t\right):Z\to Y$ и интегрируемое отображение $g:Y\to X$ такие, что при всех $T\geq 0,\ t\in[0,T]$ имеет место равенство*

$$\pi\Phi\left(T-t\right)g\left(u\left(t\right)-L\left(T-t\right)v\left(t\right)\right)=-\pi\Phi\left(T-t\right)f\left(u\left(t\right),v\left(t\right),t\right);$$

$$2)\ \rho\geq\lambda\left(t\right),\quad \lambda^2\left(t\right)=sup\left\{\int_0^t\left\|L\left(s\right)v\left(t-s\right)\right\|^2ds:\int_0^t\left\|v\left(s\right)\right\|^2ds\leq\sigma^2\ \right\};$$

$$3)\ \left[\pi\Phi\left(T\right)-\sum_{i=1}^{n}\pi\Phi\left(T-h_i\right)B_i\right]\varphi\left(0\right)+\sum_{i=1}^{n}\int_{-h_i}^{0}\pi\Phi\left(T-s-h_i\right)[A_i\varphi(s)+$$

$$+B_i\dot{\varphi}(s)]ds\in\left\{\int_0^T\pi\Phi\left(T-s\right)g\left(p\left(s\right)\right)ds:\int_0^T\left\|p\left(s\right)\right\|^2ds\leq\left(\rho-\lambda\left(t\right)\right)^2\right\},$$

то в игре (1) возможно преследование за время T.

Литература

1. *Мухсинов Е.М.* Разрешимость задачи преследования для одной линейной дифференциальной игры нейтрального типа // Материалы Международной конференции по алгебре, анализу и геометрии. Казань. 2021. С. 253–255.

2. *Datko R.* Linear autonomous neutral differential equations in Banach space // Journal of differential equations. 1977, vol. 25, pp. 258–274.

Автоматизация измерений прочностных свойств конструкционных материалов

Нарожнов В.В.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; narojnov.victor@gmail.com

В работе разрабатываются и реализуются новые экспериментальные методы для исследования предела прочности и сопротивления разрушению твердых конструкционных строительных материалов. Методы основаны на царапании и сверлении образцов с контролируемыми нормальной и латеральной силами. Измерения осуществляются посредством системы тензодатчиков, оцифрованные сигналы обрабатываются с помощью ПЭВМ. Для металлов, сплавов и твердых полимеров методы позволяют оценить такой важный параметр, как поверхностная энергия. Предлагается теоретическая модель для расчета поверхностной энергии, основанная на парном потенциале межчастичного взаимодействия. Проведенные расчеты для простых металлов показали хорошее согласие с экспериментальными данными. Разработанные методы планируется внедрить в лабораторию для проведения исследований перспективных конструкционных строительных материалов.

Литература

1. *Вульф А.М.* Резание металлов. Л: Машиностроение, 1973. 496 с.
2. *Боуден Ф.П., Тейбор Д.* Трение и смазка твердых тел. Пер. с англ. под ред. И.В. Крагельского. М.: Машиностроение, 1968. 543 с.

Формула представления общего решения и задача типа Коши для системы m линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с левой граничной сингулярной точкой

Олими А.Г. (Олимов А.Г.)

ХГУ, Худжанд, Таджикистан; abdumanon1950@mail.ru

Рассмотрим систему уравнений

$$y_j' + \sum_{k=1}^{m} \frac{p_{jk}(x)}{x-a} y_k = \frac{f_j(x)}{x-a}, \quad j = \overline{1,m}, \quad x \in \Gamma = (a,b). \tag{1}$$

Теорема. *Пусть в системе (1): 1) $p_{jk}(x), f_j(x)$ функции из класса $C(\overline{\Gamma})$, $p_{jj}(a) \neq 0$; 2) главным считается s-тое уравнение; 3) $p_{ss}(x)$ в точке a удовлетворяет условию Гельдера $|p_{ss}(x) - p_{ss}(a)| \leq H_s(x-a)^{h_s}$, $H_s > 0$, $0 < h_s \leq 1$; 4) $p_{ss}(a) > 0$; 5) если же $p_{ss}(a) < 0$, то выполняется условие $f_j(x) = o[(x-a)^{\alpha_{js}}], a_{js} > -p_{ss}(a)$; 6) выполняются равенства $p_{jk}(x) = o[(x-a)^{\beta_{jk}}]$, $j \neq k$, $\Omega_{js}(x) = p_{jj}(x) - p_{ss}(x) = o[(x-a)^{\gamma_{js}}], \beta_{jk}, \gamma_{js} > 0$ при $x \to a+0$.*

Тогда общее решение системы из класса $C^1(\Gamma)$ выражается формулой

$$y_j(x) = (x-a)^{-p_{ss}(a)} exp[-w^{1,+}_{p_{ss},a}(x)]\varphi_j(x), \quad j = \overline{1,m}, \tag{2}$$

где $w^{1,+}_{p_{ss},a}(x) = \int\limits_a^x \frac{p_{ss}(t)-p_{ss}(a)}{t-a} dt$, а $\varphi_j(x)$ есть решение следующей системы интегральных уравнений Вольтерра второго рода со слабой особенностью:

$$\varphi_j(x) + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{m} \int\limits_a^x p_{jk}(\xi)(\xi-a)^{-1}\varphi_k(\xi)d\xi + \int\limits_a^x \Omega_{js}(\xi)(\xi-a)^{-1}\varphi_j(\xi)d\xi =$$

$$= K^{1,+}_a[p_{ss}(x), f_j(x), c_j], \quad j = \overline{1,m}$$

с известной правой частью [1, с. 5] и произвольными постоянными c_j.

Представление (2) обладает характеристическим свойством, выражаемым равенствами $[(x-a)^{p_{ss}(a)} y_j(x)]_{|x=a+0} = c_j, j = \overline{1,m}$, что позволяет решить задачу типа Коши с условиями $[(x-a)^{p_{ss}(a)} y_j(x)]_{|x=a+0} = y_j$, $j = \overline{1,m}$, где y_j – заданные числа.

Литература

1. *Rajabov N.* Introduction to ordinary differential equations with singular and super-singular coefficients. Dushanbe, 1998. 160 p.

Об одной нелокальной задаче с условием Франкля для вырождающегося уравнения смешанного типа

Очилова Н.К.

ТФИ, Ташкент, Узбекистан; nargiz.ochilova@gmail.com

Рассмотрим уравнение

$$0 \equiv \begin{cases} y^{m_0}u_{xx} - x^{n_0}u_y, & x > 0,\ y > 0, \\ (-y)^n u_{xx} - u_{yy}, & x > 0,\ y < 0, \\ u_{xx} - (-x)^m u_{yy}, & x < 0,\ y > 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $n,\ m,\ n_0,\ m_0 = const > 0$, в области D ограниченной при $x > 0,\ \ y > 0$ отрезками CB, BB_0, B_0A_0, прямых $y = 0, x = 1, y = h$ и при $x > 0, y < 0$ $(x < 0, y > 0)$ ограниченной прямой $x = 0, (-h_0 \leqslant y \leqslant 0), (y = 0,\ (-h_1 \leqslant x \leqslant 0))$ и характеристикой $CC_0 : x + \frac{1}{p}(-y)^p = r_0$, $(A_0C_1 : y + \frac{1}{q}(-x)^q = h)$ уравнения (1), где $p_0 = (n_0+2)/2$, $q_0 = (m_0+2)/2$, $p = (n+2)/2$, $q = (m+2)/2$, $h = pq^{\frac{1}{q}}$, $h_0 = (pr_0)^{\frac{1}{p}}$, $h_1 = (qh)^{\frac{1}{q}}$, $0 < r_0 < 1$ причем $n > 0$, $m > 0$, $n_0 > 0$, $m_0 > 0$. $(m-2) \setminus 2 < n_0 < (2n+2-m) \setminus m+2$.

Введем обозначения: $I_1 = \{(x,y) : 0 < x < r_0, y = 0\}$, $I_2 = \{(x,y) : x = 0, 0 < y < h\}$, $D_1 = D \cap \{y > 0\} \cap \{x > 0\}$, $D_2 = D \cap \{y < 0\} \cap \{x > 0\}$, $D_{21} = D_2 \cap \{x + y > 0\}$, $D_{22} = D_2 \cap \{x - y < 0\}$, $D_3 = D \cap \{y > 0\} \cap \{x < 0\}$, $D_{31} = D_3 \cap \{x + y > 0\}$, $D_{32} = D_3 \cap \{x + y < 0\}$, $\Delta_1 = D_1 \cup D_{21} \cup I_1$, $\Delta_2 = D_1 \cup D_{31} \cup I_2$,$\alpha_0 = \frac{n_0+1}{n_0+2}$, $2\alpha = \frac{n}{n+2}$, $2\beta = \frac{m}{m+2}$, причем

$$0 < \alpha < \frac{1}{2},\ \ 0 < \beta < \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} < \alpha_0 < 1. \tag{2}$$

Обозначим, через

$$\theta_1(x_0) = \left[\frac{r_0 - x_0}{2}, -\left(\frac{m+2}{4}(r_0 + x_0)\right)^{\frac{2}{m+2}}\right],$$

$$\theta_2(y_0) = \left[-\left(\frac{m+2}{4}(h - y_0)\right)^{\frac{2}{m+2}}, \frac{h + y_0}{2}\right].$$

Задача AF1. *Требуется определить функцию $u(x,y)$, обладающую следующими свойствами: 1) $u(x,y) \in C(\bar{D}) \cap C^{2,1}(D_1) \cap C^2(D_{21} \cup D_{22} \cup D_{31} \cup D_{32})$; 2) $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению (1) в областях D_1 и D_{21}, D_{22}, D_{31} и D_{32}; 3) u_x, $u_y \in C(\Delta_1)$, причем $u_y(+0,y)$ может иметь особенность порядка меньше единицы при $y \to 0$ и ограничена при $y \to h$, а $u_x(+0,y)$ может иметь особенность порядка меньше $\frac{m+1}{n_0+2}$ при $y \to 0$ и ограничена при $y \to h$; 4) $u_x \in C(\Delta_2)$, причем $u_x(x,+0)$ может иметь особенность порядка меньше единицы при $x \to 0$ и $x \to r_0$; 5) $y^{-m_0}u_y \in C(D_1 \cup I_1)$ и $u_y \in C(D_2 \cup I_1)$ причем на AC выполняется условие склеивания:*

$$\nu_2^+(x) \equiv \lim_{y \to +0} y^{-m_0}u_y(x,y) = \lim_{y \to -0} u_y(x,y) \equiv \nu_2^-(x),\ (x,0) \in I_1,$$

$$\nu_1^+(y) \equiv \lim_{x\to+0} u_x(x,y) = \lim_{x\to-0} u_x(x,y) \equiv \nu_1^-(y),\ (0,y)\in I_2,$$

при условии, что эти пределы существуют, причем $\nu_2^{\pm}(x)$ *и может иметь особенность порядка меньше единицы при* $x\to 0$ *и ограничена при* $x\to r_0$*; 6)* $u(x,y)$ *удовлетворяет следующим краевым условиям:* $u(x,y)|_{BB_0} = \varphi_0(y)$, $0\leqslant y\leqslant h$; $u(x,y)|_{CB} = \varphi_1(x)$, $r_0\leqslant x\leqslant 1$; $D_{x1}^{1-\beta}u(\theta_1(x)) = a_1(x)u_y(x,0)+a_2(x)$, $0<x<1$; $D_{yh}^{1-\beta}u(\theta_2(y)) = b_1(y)u_x(0,y)+b_2(y)$, $0<y<h$, $u(-hx,0)=u(+x,0)$, $0\leqslant x<r_0$; $u_x(0,-h_0y)=u_x(0,-y)$, $0\leqslant y<h$; *где* $\varphi_0(y)$, $a_j(x)$, $b_j(y)$, $j=1,2$ *– заданные функции, причем*

$$\varphi_0(y)\in C\left[0,h\right]\cap C^2(0,h),\quad \varphi_1(x)\in C^1\left[r_0,1\right]\cap C^3\left[r_0,1\right], \tag{3}$$

$$a_j(x)\in C^1\left[0,r_0\right]\cap C^2\left[0,r_0\right],\quad b_j(y)\in C^1\left[0,h\right]\cap C^2\left[0,h\right],\quad j=1,2. \tag{4}$$

Теорема. *Если выполнены условия (2), (3) и (4) то решение* ***задача AF1*** *существует и единственно.*

Хаотические и регулярные режимы динамической системы Селькова с эффектами памяти

Паровик Р.И.

ИКИР ДВО РАН, Паратунка, Россия; romanparovik@gmail.com

В работе [1] авторами был предложен интересный подход к описанию взаимодействия трещин в упруго-хрупкой среде, который основывается на применении нелинейной динамической системы Селькова, которая исследуется в рамках теории биологических систем [2].

Динамическая система Селькова [1] по мнению авторов хорошо описывает взаимодействие двух видов трещин: первый вид – затравочные трещины с меньшей энергией, которые при достижения критического уровня своей концентрации переходят во второй вид трещин с большей энергией. Трещины второго виды являются источником микросейсмических явлений (колебаний) и после отдачи своей энергии они частично переходят в затравочные трещины. Далее, этот автоколебательный процесс повторяется. В работе авторов [3] была рассмотрена обобщенная динамическая система Селькова с учетом эредитарности (наследственности), которая изучается в рамках наследственной механики. Эта модель учитывает свойство динамической системы «помнить» некоторое время, оказанное на нее воздействие. Учет эредитарности системы определяется с помощью производных дробных порядков в смысле Герасимова-Капуто. В работе [3] с помощью численного метода Адамса-Басшфорта-Мултона были построены расчетные кривые и исследованы точки покоя дробной системы Селькова.

В настоящей работе мы рассмотрим динамические режимы дробной системы Селькова с помощью построения максимальных показателей Ляпунова с целью опредления границ хаотического и регулярного поведения системы.

Литература

1. *Makovetsky V.I., Dudchenko I.P., Zakupin A.S.* Auto oscillation model of microseism's sources // Geosistemy perehodnykh zon. 2017, № 4(1), pp. 37–46.

2. *Brechmann P., Rendall A.D.* Dynamics of the Selkov oscillator // Mathematical Biosciences. 2018, vol. 306, pp. 152–159.

3. *Parovik R., Rakhmonov Z., Zunnunov R.* Modeling of fracture concentration by Sel'kov fractional dynamic system // E3S Web of Conferences. 2020, vol. 196, 02018.

Работа выполнена в рамках тематического исследования ИКИР ДВО РАН «Физические процессы в системе ближнего космоса и геосфер под солнечными и литосферными воздействиями» № AAAA-A21-121011290003-0.

Математическое моделирование динамики солнечной активности с помощью дробного уравнения Риккати с переменной эредитарностью

Паровик Р.И. [1,2,a], **Твёрдый Д.А.**[2,b]

[1]*ИКИР ДВО РАН, Паратунка,* [2]*КамГУ им. Витуса Беринга, Петропавловск-Камчатский, Россия;* [a]*romanparovik@gmail.com,* [b]*dimsolid95@gmail.com*

Для моделирования динамики солнечной активности, рассмотрим модельное дробное уравнение Риккати [1] с переменными коэффициентами и дробной производной (2) переменного порядка:

$$\partial_{0t}^{\alpha(t)}u(\sigma)+a(t)u^2(t)-b(t)u(t)-c(t)=0, \qquad u(0)=u_0, \tag{1}$$

где $u(t)\in C[0,T]$ – монотонно-возрастающая функция, $t\in[0,T]$ – время, T – модельное время, u_0 – заданная константа, $0<a(t)<b(t)<1$, $c(t)$ – непрерывные функции на отрезке $[0,T]$.

Оператор дробного переменного порядка $0<\alpha(t)<1$ типа Герасимова – Капуто, действующий на функцию $u(t)\in C[0,T]$ имеет вид:

$$\partial_{0t}^{\alpha(t)}u(\sigma)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha(t))}\int_0^t\frac{\dot{u}(\sigma)d\sigma}{(t-\sigma)^{\alpha(t)}}, \tag{2}$$

где $\Gamma(.)$ – гамма-функция Эйлера, а $\dot{u}(t)=\frac{du}{dt}$.

Решение задачи Коши для (1) будем искать с помощью модифицированного метода Ньютона (MNM), он является более точным, чем EFDS. Показано что MNM локально устойчив и сходится с первым порядком.

Также для определения начального приближения в MNM будем использовать решение полученное методом нелокальной явной конечно-разностной схемы (EFDS) [2-4], схема устойчива и сходится так же с первым порядком.

Литература

1. *Tvyordyj D.A.* Hereditary Riccati equation with fractional derivative of variable order // Journal of Mathematical Sciences, Springer, 2021, vol. 253, no. 4, pp. 564–572.

2. *Parovik R.I., Tverdyi D.A.* Some Aspects of Numerical Analysis for a Model Nonlinear Fractional Variable Order Equation // Mathematical and Computational Applications, MDPI, 2021, vol. 26, no. 3, p. 55.

3. *Parovik R.I.* On a finite-difference scheme for an hereditary oscillatory equation // Journal of Mathematical Sciences, Springer, 2021, vol. 253, no. 4, pp. 547–557.

4. *Parovik R.I.* Mathematical modeling of linear fractional oscillators // Mathematics, MDPI, 2020, vol. 8, no. 11, pp. 18–79.

Сильные средние арифметические, типа Марцинкевича, рядов Фурье функции двух переменных

Пачулиа Н.Л., Голава М.Р.

АГУ, Сухум, Абхазия; niaz-pachulia@rambler.ru

Используя свойства сильных средних с пропусками в точках Лебега, установлен максимальный порядок роста функции φ, при котором ряд Фурье функции двух переменных сильно суммируем методом средних арифметических типа Марцинкевича.

Пусть $f \in L_p$, $\mathrm{p} \geq 1, T = [-\pi, \pi]$, $S_{m,n}(fxy)$ – частные суммы ее двойного ряда Фурье $S[f]$ и (x, y) – p-точка Лебега функции f, т.е.

$$\lim_{h_1 h_2 \to 0} \left(\tfrac{1}{h_1 h_2} \int_0^{h_1} \int_0^{h_2} \left| f(x+t, y+\tau) - f(x,y) \right|^p dxdy \right)^{\frac{1}{\mathrm{p}}} = 0,$$
$$\sup_{h_1} \tfrac{1}{h_1} \int_0^{h_1} \int_0^{\pi} \left| f(x+t, y+\tau) - f(x,y) \right|^p dxdy = M_1(x,y) < \infty,$$
$$\sup_{h_2} \tfrac{1}{h_2} \int_0^{\pi} \int_0^{h_2} \left| f(x+t, y+\tau) - f(x,y) \right|^p dxdy = M_2(x,y) < \infty.$$

Теорема. *Пусть $f \in L_\mu(T^2)$, $p \in (1, \mu)$ и (x, y) ее p-точка Лебега, а функция φ удовлетворяет следующим свойствам: непрерывна на $[0,\infty)$, возрастает, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(u) > 0$ для $u > 0$, $\varphi(2u) \leq a\varphi(u)$ для $u \in [0, \sigma]$, $ln\varphi(u) = 0\left(u^{\frac{1}{2}}\right)$, $u \to \infty$. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{2n} \varphi\left(\left| S_{k,k}(f, x, y) - f(x,y) \right| \right) = 0. \qquad (1)$$

Если же $\lim\limits_{n\to\infty} ln\varphi(u) \Big/ u^{\frac{1}{2}} = \infty$, то существует функция $f \in C(T^2)$ и точка (x_0, y_0) в которой равенство (1) не выполняется.

Модель адаптационного сценария развития биологической инвазии

Переварюха А.Ю.

СПб ФИЦ РАН, Санкт–Петербург, Россия; madelf@rambler.ru

Резкие популяционные изменения представляют проблему для математического моделирования. Они составляют большую группу переходных процессов существования экосистем, которые переходят в иные устойчивые режимы. Нами разработаны сценарии для особых случаев популяционной динамики и взаимодействия противоборствующих организмов на основе дифференциальных уравнений с запаздыванием $t-\tau$. Ранее мы предлагали модификации уравнений для описания особой колебательной активности после бифуркации Андронова–Хопфа в (1) после увеличения репродуктивного параметра R. (1) отличается последующим разрушением образовавшегося краткого режима колебаний.

$$\frac{dN}{dt} = RN(t)\left(1 - \frac{N(t-\tau_1)}{\mathfrak{K}}\right)(\mathfrak{U} - N(t-\tau_2)), \tag{1}$$

где параметр $\mathfrak{U}$ величина, что выполняется $\mathfrak{U} < \mathfrak{K} \times 0.75$ — это величина, которую мы назвали предкритической емкостью полунасыщения вида-вселенца. Значение численности $\mathfrak{U}$ играет роль «спускового крючка» для ряда необратимых деструктивных процессов при инвазии и мешает эффективному биотическому противодействию. При большом диапазоне значений $R\tau_1$ система не имеет обычного балансового равновесия-точки $N(t) \to K$ и не имеет неустойчивого равновесия, вокруг которого происходят орбитально устойчивые колебания $N_*(t; R\tau_1\tau_2)$. Объема «Экологической ниши» в такой небалансируемой ситуации просто не существует. Потому заменим в (1) традиционное обозначение величины ниши K на $\mathfrak{K}$, так как по смыслу эта величина иная, чем в модели Хатчинсона:

$$\frac{dN}{dt} = RN(t)\left(1 - \frac{N(t-\tau)}{K}\right).$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 17-01-000125.

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ГРУППОВОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Петров Н.Н., Мачтакова А.И.

УдГУ, Ижевск, ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия;

kma3@list.ru, bichurina.alyona@yandex.ru

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра G $n+m$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и m убегающих $E_1, \ldots, E_m$, описываемая системой вида

$$D^{(\alpha)} z_{ij} = a_i z_{ij} + u_i - v_j, \quad z_{ij}(0) = z_{ij}^0, \quad u_i, v \in V.$$

Здесь $z_{ij}, u_i, v_j \in \mathbb{R}^k$, $D^{(\alpha)} f$ — производная по Капуто функции f порядка $\alpha \in (0,1)$, V — выпуклый компакт $\mathbb{R}^k$, $a_i \in \mathbb{R}^1$, $i \in I = \{i, \ldots, n\}$, $j \in J = \{1, \ldots, m\}$.

Целью группы преследователей является поимка заданного числа убегающих. Пусть далее $\lambda(h, v) = \sup\{\lambda \geqslant 0 \ : -\lambda h \in V - v\}$, $\mathrm{int} A$, $\mathrm{co} A$ соответственно внутренность и выпуклая оболочка множества A.

Теорема 1. *Пусть $a_i \leqslant 0$ для всех $i \in I$, $m = 1$, $\min\limits_v \max\limits_i \lambda(z_{i1}^0, v) > 0$. Тогда в игре G происходит поимка убегающего в классе квазистратегий преследователей.*

Теорема 2. *Пусть $0 \in \mathrm{int}\,\mathrm{co}\left\{z_{ij}^0, i \in I, j \in J\right\}$, $a_i = a \leqslant 0$, для всех $i \in I$, все убегающие используют одно и тоже управление, V — строго выпуклый компакт с гладкой границей, $n \geqslant k+1$. Тогда в игре G происходит поимка хотя бы одного убегающего.*

Будут также приведены достаточные условия разрешимости задач:
- поимки хотя бы двух жестко скоординированных убегающих;
- многократной поимки заданного числа убегающих.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-71-10070.

Обратная задача для вырожденного эволюционного уравнения дробного порядка

Плеханова М.В.[a], **Ижбердеева Е.М.**[b]

ЧелГУ, Челябинск, Россия; [a]*mariner79@mail.ru,*
[b]*elizaveta.izhberdeeva@gmail.com*

Рассмотрим обратную задачу для вырожденного уравнения

$$D^{\sigma_n}Lx(t) = Mx(t) + \varphi(t)u, \quad t \in [0,T], \tag{1}$$

$$D^{\sigma_k}(Px)(0) = x_k, \quad k = 0,\dots,n-1, \tag{2}$$

$$\int\limits_0^T x(t)d\mu(t) = x_T, \tag{3}$$

в котором, $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $\ker\mathcal{L} \neq 0$, $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $\mathcal{X},\mathcal{Y}$ – банаховы пространства, D_M – область определения оператора M, D^{σ_n} – дробная производная Джрбашяна — Нерсесяна [1], $\varphi \in C([0,T];\mathbb{R})$, $u \in \mathcal{Y}$ неизвестен.

Известно $X = X^0 + X^1$, $Y = Y^0 + Y^1$, L_k (M_k) сужение оператора L (M) на подпространство $\mathcal{X}^k$ $(D_{M_k} = D_M \cap \mathcal{X}^k)$, $k = 0, 1$. Введем

$S = L_1^{-1}M_1$, $G := M_0^{-1}L_0$, $\psi(A) = z_T - \int\limits_0^T \sum\limits_{k=0}^{n-1} t^{\sigma_k}E_{\sigma_n,\sigma_k+1}(t^{\sigma_n}A)z_k d\mu(t)$,

$\chi(\lambda) = \int\limits_0^T d\mu(t)\int\limits_0^t (t-s)^{\sigma_n-1}E_{\sigma_n,\sigma_n}((t-s)^{\sigma_n}\lambda)\varphi(s)ds$, $\lambda \in \mathbb{C}$,

$F(s)\nu = M_0\sum\limits_{k=0}^{p}(-1)^{k+1}\left(\sum\limits_{l=1}^{p}\frac{f_l(s)G^l}{f_0(s)}\right)^k\frac{\nu}{f_0(s)}$.

Теорема. *Пусть оператор M (L,p) – ограничен, $\varphi(t)M_0^{-1}u^0 \in C([0,T];\mathcal{L}(\mathcal{X}))$, существуют $(D^{\sigma_n}G)^l\varphi(t)M_0^{-1}u^0 \in C((0,T];\mathcal{X})$ для $l = 0,1,\dots,p$, $D^{\sigma_k}(D^{\sigma_n}G)^l\varphi(t)M_0^{-1}u^0 \in C([0,T];\mathcal{X})$ для $k = 0,1,\dots,n-1$, $l = 0,1,\dots,p-1$, $(D^{\sigma_n})^l\varphi \in C((0,T];\mathbb{R})$, для $l = 0,1,\dots,p$, $\chi(\lambda) \neq 0, \lambda \in \sigma(S)$, $\mu : [0,T] \to \mathbb{R}$ – функция ограниченной вариации и $\int\limits_0^T \varphi(t)d\mu(t) \neq 0$. Тогда для всех $x_k \in \mathcal{X}$, $x_T \in \mathcal{Z}$, $k = 0,1,\dots,n-1$, существует единственное решение задачи (1)–(3), которое имеет вид*

$$u = (\chi(S))^{-1}\psi(S) + F(T)(I-P)x_T.$$

Литература

1. *Джрбашян М.М., Нерсесян А.Б.* Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка // Изв. АН АрмССР. Математика. 1968. С. 3–28.

l-ПРОБЛЕМА МОМЕНТОВ ДЛЯ СИСТЕМ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Постнов С.С.

ИПУ РАН, Москва, Россия; postnov.sergey@inbox.ru

Рассматривается l-проблема моментов в следующей постановке [1]. Пусть дана система функций $g_n(\tau) \in L_{p'}(t_0, T]$ и набор чисел c_n, $n = 1, \ldots, N$, хотя бы одно из которых отлично от нуля, а также задано число $l > 0$. Необходимо найти функцию $u(t) \in L_p(t_0, T]$, $1/p + 1/p' = 1$, такую, что выполняются соотношения

$$\int_{t_0}^{T} g_n(\tau) u(\tau) d\tau = c_n,$$

и условие $\|u(t)\|_{L_p} \leq l$.

К l-проблеме моментов для линейных систем целого порядка сводятся задачи оптимального (в смысле минимума нормы управления при заданном времени управления и в смысле быстродействия при заданном ограничении на норму управления) управления и наблюдения, в том числе в условиях действия возмущений [1].

В настоящей работе аналогичная сводимость в случае задачи оптимального управления демонстрируется для линейных систем дробного порядка следующего вида:

$${}_0D_t^{\alpha_i} q_i(t) = a_{ik} q_k(t) + b_{ik} u_k(t) + f_i(t), i = 1, \ldots, N,$$

где оператор дробного дифференцирования понимается в смысле Хильфера, а функции $q_i(t)$, $u_i(t)$ и $f_i(t)$ описывают соответственно состояние системы, управление и внешнее возмущение.

Кроме того, для таких систем рассматривается задача оптимального наблюдения и оценки состояния в условиях действия возмущений. Обсуждаются условия, при которых получаемая l-проблема моментов является корректной и разрешимой, а также строятся её аналитические решения.

Литература

1. _Красовский Н.Н._ Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.

Нелокальные по времени задачи для уравнения дробной диффузии

Псху А.В.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; pskhu@list.ru

В области $\Omega = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}^n, a < y < T\}$ $(-\infty \leq a)$ рассматривается уравнение

$$\left(\frac{\partial^\sigma}{\partial y^\sigma} - \Delta_x\right) u(x,y) = f(x,y), \tag{1}$$

где $\frac{\partial^\sigma}{\partial y^\sigma}$ – дробная производная порядка σ по переменной y с началом в точке $y = a$ [1]; $\sigma \in (0,1)$; Δ_x – оператор Лапласа по переменной $x \in \mathbb{R}^n$.

В докладе обсуждаются вопросы разрешимости нелокальных по времени краевых задач, а также задач с обратным ходом времени, для уравнения (1).

Литература

1. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

Краевые задачи для уравнений смешанного типа высокого порядка

Пятков С.Г.

ЮГУ, Ханты-Мансийск, Россия; pyatkovsg@gmail.com

Рассматривается уравнение

$$a_l(t)u^{(l)} + a_{l-1}(t)u^{(l-1)} + \sum_{k=0}^{l-2} \sum_{|\alpha|<\frac{2m(l-1-k)}{l-1}} a_{k,\alpha}(t,x)D_t^k D_x^\alpha u- \\ - \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x)D^\alpha u - \lambda u = f, \tag{1}$$

где $x \in G \subset \mathbb{R}^n$, G – ограниченная область с границей $\Gamma = \partial G \in C^{2m}$, $t \in (0,T)$. Пусть $Q = (0,T) \times G$. Основной особенностью этого уравнения является тот факт, что коэффициент a_l может менять знак на интервале $(0,T)$ и таким образом уравнение является уравнением смешанного типа. Уравнение (1) дополняется краевыми условиями вида

$$U_i u = \sum_{j=0}^{l-1}(\alpha_{i,j}u^{(j)}(0,x) + \beta_{i,j}u^{(j)}(T,x)) = 0, \quad i = 1,2,\dots,l, \tag{2}$$

$$B_j u|_\Gamma = \sum_{|\alpha|\le m_j} b_{\alpha,j}(x)D^\alpha u = 0, \quad j = 1,2,\dots,m. \tag{3}$$

Оператор B, заданный выражением $Bu = \sum\limits_{|\alpha|=2m} b_\alpha(x)D^\alpha u$ и граничными условиями $B_j u|_\Gamma = \sum_{|\alpha|\le m_j} b_{\alpha,j}(x)D^\alpha u|_\Gamma = 0$, где $x \in G \subset \mathbb{R}^n$, предполагается эллиптическим. В качестве области определения $D(B)$ возьмем пространство состоящее из функций $u \in W_2^{2m}(G)$ таких, что $B_j u|_\Gamma = 0$.

Основные условия на старшие коэффициенты уравнения имеют вид: коэффициенты a_{l-1}, a_l вещественны, $a_l(0)a_l(T) > 0$ и для некоторой постоянной $\delta_1 > 0$ выполнено неравенство

$$(-1)^{(l+1)/2}(a_{l-1}(t) - \frac{1}{2}a_{lt}(t)) \ge \delta_1 \ \forall t \in [0,T]. \tag{4}$$

При естественных условиях гладкости на данные и условий типа Лопатинского на боковой поверхности цилиндра Q и на его верхнем и нижнем основании мы показываем фредгольмовость задачи (1)–(3) а также существование и единственность решений задачи (1)–(3) таких, что $u \in L_2(0,T;W_2^{2m}(G))$, $Bu, u^{(l-1)} \in L_2(Q)$, $a_l u^{(l-1)} \in W_2^1(0,T;L_2(G))$ для всех достаточно больших значений параметра λ.

Переопределённая линейная система трех интегральных уравнений вольтерровского типа с тремя сингулярными областями

Раджабов Н.Р.

ТНУ, Душанбе, Таджикистан; nusrat38@mail.ru

В области $\Omega = \{(x, y, z) : a < x < a_0,\ b < y < b_0, c < z < c_0\}$ рассмотрим переопределённую систему интегральных уравнений

$$\begin{cases} \varphi(x,y,z) + \int\limits_a^x \frac{A(t)\varphi(t,y,z)}{t-a}dt = f(x,y,z), \\ \varphi(x,y,z) + \int\limits_a^x \frac{B(s)\varphi(x,s,z)}{s-b}ds = g(x,y,z), \\ \varphi(x,y,z) + \int\limits_a^x \frac{C(\tau)\varphi(t,y,\tau)}{\tau-c}d\tau = E(x,y,z), \end{cases} \tag{1}$$

где $A(x), B(y), C(z),\ f(x,y,z),\ g(x,y,z),\ E(x,y,z)$ – заданные функции, $\varphi(x,y,z)$ – искомая функция.

Система (1) изучена сведением к одному одномерному интегральному уравнению вольтерровского типа с сингулярной точкой в ядре [1]. Доказано, что если в системе (1) $f(x,y,z) \in C(\bar{\Omega}),\ g(x,y,z) \in C(\bar{\Omega}), E(x,y,z) \in C(\bar{\Omega}), A(x) \in C(\bar{\Gamma}_1),\ B(y) \in C(\bar{\Gamma}_2),\ C(z) \in C(\bar{\Gamma}_3), A(a) < 0,\ B(b) < 0, C(c) < 0,\ f(a,b,c) = 0$ с определённым асимптотическим поведением и при выполнении ряда других условий, найдено явное решение рассматриваемой системы через одну произвольную постоянную. Изучены другие возможные случаи. Изучены случаи, когда основным уравнением системы является второе уравнение или третье уравнение рассматриваемой системы. Во всех случаях решение найдено в явном виде.

Литература

1. *Раджабов Н.* Интегральные уравнения типа Вольтерра с фиксированными граничными и внутренними сингулярными и сверхсингулярными ядрами и их приложения. Душанбе, 2007. 221 с.

2. *Раджабов Н.* Переопределенная линейная система интегральных уравнений и сингулярные, сверх-сингулярные интегральные уравнения типа Вольтерра третьего рода с логарифмическими и сверх-сингулярными ядрами и их приложения. Душанбе, 2021. 317 с.

Случайные пространственные волны COVID-19

Рассадин А.Э.

НИУ ВШЭ, Нижний Новгород, Россия; brat_ras@list.ru

Появление новой коронавирусной инфекции COVID-19 породило обширную серию исследований, посвящённую теории эпидемий (см. [1] и ссылки там). Однако большинство этих работ рассматривает только временную динамику болезни. Между тем очевидно, что знание её пространственно-временной динамики даёт более удовлетворительное описание распространения COVID-19. Ещё более реалистичными являются модели такой динамики, коэффициенты которых – не постоянные величины, как, например, в [2], а случайные величины с известными функциями распределения.

В представленном докладе для следующей модели пространственно-временной динамики COVID-19:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\,\frac{\partial u}{\partial x} = f(u), \qquad u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

для различных правых частей $f(u)$ уравнения (1) и начальных условий $u_0(x)$ к нему при случайных скоростях c распространения пространственной волны эпидемии вычислены автокорреляционные функции:

$$K(x_1,t_1;\ldots;x_n,t_n) =< u(x_1,t_1)\cdot\ldots\cdot u(x_n,t_n) >, \qquad n \in \mathbb{N},$$

а также приведены примеры графиков этих последних.

Литература

1. *Рассадин А.Э.* Об оценках решений эволюционных уравнений моделей распространения пандемии COVID-19 // Актуальные проблемы математики и информационных технологий. Материалы II Всероссийской конференции, приуроченной к 90-летию Дагестанского государственного университета, Махачкала, 5-7 февраля 2021 года. Махачкала: Издательство ДГУ, 2021. С. 138–141.

2. *Гаджимурадов Т.А., Агаларов А.М., Балякин А.А., Жулего В.Г.* Бегущие волны в SIR-модели с нелинейным уровнем заболеваемости и пространственной диффузией // Межд. науч. конф. «Уфимская осенняя математическая школа-2020»: сборник тезисов. Часть II. (Уфа, 11-14 ноября 2020 г.) / отв. ред. З.Ю. Фазуллин. Уфа. Аэтерна, 2020. С. 28–30.

Основные состояния для модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями и с внешним полем на дереве Кэли порядка три

Расулова М.А.[a], Аскаров Ж.Н.[b]

НамГУ, Наманган, Узбекистан; [a]m_rasulova_a@rambler.ru,
[b]Askarjavokhir02@gmail.com

Пусть $\tau^k = (V, L), k \geq 1$ есть дерево Кэли порядка k (см. [1]).

Пусть $\Phi = \{-1, 1\}$. Тогда конфигурация σ на V определяется как функция $x \in V \mapsto \sigma(x) \in \Phi$.

Гамильтониан модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями и с внешним полем имеет вид

$$H(\sigma) = J_1 \sum_{\langle x,y \rangle \in L} \sigma(x)\sigma(y) + J_2 \sum_{x,y \in V: d(x,y)=2} \sigma(x)\sigma(y) + \alpha \sum_{x \in V} \sigma(x),$$

где $J_1, J_2, \alpha \in R$, α – внешнее поле.

Определим энергию конфигурации σ_b на единичном шаре b следующим образом:

$$U(\sigma_b) = \frac{1}{2} J_1 \sum_{x \in b} \sigma(c_b)\sigma(x) + J_2 \sum_{x,y \in b: d(x,y)=2} \sigma(x)\sigma(y) + \alpha\sigma(c_b),$$

здесь c_b – центр единичного шара b.

Теорема 1. *Пусть $k = 3$. Тогда для модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями и с внешним полем $\alpha \neq 0$ верны следующие утверждения: I. a) $\varphi(x) = 1, \forall x \in V$ конфигурация является трансляционно -инвариантным основным состоянием на множестве $\{(J_1, J_2, \alpha) \in R^3 : J_1 \leq 0, J_1 + 6J_2 \leq 0,\ \alpha \leq 0\}$; б) $\varphi(x) = -1, \forall x \in V$ конфигурация является трансляционно-инвариантным основным состоянием на множестве $\{(J_1, J_2, \alpha) \in R^3 : J_1 \leq 0, J_1 + 6J_2 \leq 0,\ \alpha \geq 0\}$; II. Всякие H_A-периодические основные состояния являются трансляционно-инвариантными.*

Теорема 2. *Пусть $k = 3$. Тогда для модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями и с внешним полем $\alpha \neq 0$ всякие H_A-слабо периодические основные состояния являются трансляционно-инвариантными.*

Литература

1. *Rozikov U.A., Рахматуллаев М.М.* Слабо периодические основные состояния и меры Гиббса для модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли // Теор. и матем. физика. 2009. Т. 160, № 3. С. 507–516.

Необходимое условие нетривиальной разрешимости и общее решение некоторой переопределенной системы уравнений в частных производных

Рахимова М.А.

ТГУПБП, Худжанд, Таджикистан; rakhimova.mahsuda@mail.ru

Рассмотрим переопределенную систему дифференциальных уравнений с частными производными

$$\begin{cases} u_x = Au, \\ u_y = Bu, \end{cases} \tag{1}$$

где $u = (u_1, u_2, \cdots u_n)^T$ – искомая вектор-функция переменных x, y и A, B – постоянные вещественные матрицы порядка n.

Необходимое условие нетривиальной разрешимости системы (1) имеет вид

$$(AB - BA)u = 0. \tag{2}$$

Тождественное выполнение этого равенства будет условием Фробениуса для системы (1).

Рассмотрим два возможных случая.

Случай 1. Пусть $AB = BA$, т.е. матрицы A и B являются перестановочными. Тогда условие (2) выполняется тождественно по $u \in R^n$ и общее решение системы (1) запишется в виде

$$u(x, y) = e^{Ax+By}\vartheta_0,$$

где ϑ_0 – произвольный вектор из R^n.

Случай 2. Пусть $AB \neq BA$, т.е. матрицы A и B не являются перестановочными. Если дополнительно матрица $C = AB - BA$ обратимая, то из условия Фробениуса следует, что $u = 0$ и система (1) имеет только нулевое решение.

Пусть матрица C является необратимой. Тогда она имеет нулевое собственное значение. Через $u_1, u_2, \cdots u_m$ обозначим собственные векторы матрицы C, отвечающие нулевому собственному значению, $m = n - rang\ C$, $1 \leq m \leq n - 1$. Так как нас интересуют ненулевые решения системы (1), то из (2) следует что для фиксированного (x, y) u является собственным вектором матрицы C, отвечающий нулевому собственному значению. Поэтому $u(x, y)$ должно представляться в виде

$$u(x, y) = \sum_{j=1}^{m} \vartheta_j(x, y)u_j, \quad \vartheta_j(x, y) \in C^1. \tag{3}$$

Подставляя (3) в (1) и с учётом того, что u_j ортонормированы, умножая обе части уравнений скалярно на u_k, получим систему

$$\begin{cases} \vartheta_x = A_1\vartheta, \\ \vartheta_y = B_1\vartheta, \end{cases} \tag{4}$$

где $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2, \cdots \vartheta_m)$, A_1 – матрица $m \times m$ с элементами (Au_j, u_k), B_1 – с элементами (Bu_j, u_k). Система (4) – эта система вида (3), только размерности $m \leq n - 1$.

Основные состояния для модели Поттса с внешним полем

Рахматуллаев М.М.[1,a], **Расулова М.А.**[2,b], **Неъматов М.**[3]

[1]*ИМ АН РУз,* [2]*НамГУ, Наманган,* [3]*КГПИ, Фергана, Узбекистан;*
[a]*mrahmatullaev@rambler.ru,* [b]*m_rasulova_a@rambler.ru*

Пусть $\tau^k = (V, L), k \geq 1$ есть дерево Кэли порядка k (см. [1]).

Пусть $\Phi = \{1, 2, 3\}$. Тогда конфигурация σ на V определяется как функция $x \in V \mapsto \sigma(x) \in \Phi$.

Гамильтониан модели Поттса с внешним полем имеет вид

$$H(\sigma) = J \sum_{\langle x,y \rangle \in L} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} + \alpha \sum_{x \in V} \sigma(x),$$

где $J, \alpha \in R$, α – внешнее поле.

Пусть M – множество единичных шаров с вершинами в V. Мы назовем сужение конфигурации σ на шаре $b \in M$ ограниченной конфигурацией σ_b. Определим энергию конфигурации σ_b на b следующим образом:

$$U(\sigma_b) = \frac{1}{2} J \sum_{x \in b} \delta_{\sigma(c_b)\sigma(x)} + \alpha\sigma(c_b),$$

здесь c_b – центр единичного шара b.

Лемма. *Для каждой конфигурации φ_b верно следующее*

$$U(\varphi_b) \in \{U_n : n = \overline{1, 3(k+2)}\},$$

где

$$U_n = \left\{\frac{n-1}{k+2}\right\} \cdot \frac{k+2}{2} J + \left(1 + \left[\frac{n-1}{k+2}\right]\right) \alpha.$$

Обозначим $A_{k+2} = \{(J, \alpha) \in R^2 : J \leq 0, \alpha \geq 0\}$, $A_{2k+4} = \{(J, \alpha) \in R^2 : J \leq 0, \alpha = 0\}$, $A_{3k+6} = \{(J, \alpha) \in R^2 : J \leq 0, \alpha \leq 0\}$.

Теорема 1. *Пусть $k \geq 2$. Тогда $\varphi(x) = i, \forall x \in V$ конфигурация является трансляционно-инвариантным основным состоянием на множестве $A_{(k+2)i}$ для модели Поттса с внешним полем, здесь $i \in \Phi$.*

Теорема 2. *Пусть $\alpha \neq 0$. Тогда всякие $G_k^{(2)}$ – периодические основные состояния являются трансляционно-инвариантными.*

Литература

1. *Rozikov U.A.* Gibbs measures on Cayley trees. World scientific, 2013.

Физико-топологическое моделирование интегральных 3D приборных структур

Рехвиашвили С.Ш.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; rsergo@mail.ru

Разрабатывается общая парадигма быстрого сквозного моделирования интегральных 3D приборных структур, которая включает расчеты основных электрофизических параметров (в частности, времена жизни, подвижности и коэффициенты диффузии носителей заряда в зависимости от уровней легирования и температуры), декомпозицию активных областей, расчет параметров распределенных эквивалентных схем, формирование библиотек компонентов, схемотехническое моделирование.

Эффективность подхода продемонстрирована на примере интегрального 3D конденсатора с барьером Шоттки [1]. Показано, что путем формирования объемной функциональной структуры конденсатора можно добиться значительного увеличения его емкости. Составлена распределенная эквивалентная схема конденсатора, учитывающая конструктивно-технологические особенности. Построена SPICE-модель интегрального конденсатора и на численном примере проведена идентификация параметров модели. С помощью схемотехнического моделирования изучено влияние паразитных параметров на характеристики интегрального конденсатора.

Литература

1. *Рехвиашвили С.Ш., Гаев Д.С., Бойко А.Н.* Физико-топологическое моделирование объемной конденсаторной структуры с барьером Шоттки // Микроэлектроника. 2021. Т. 50, № 5. С. 384–389.

Краевая задача для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом

Рузиев М.Х.

ИМ АН РУз, Ташкент, Узбекистан; mruziev@mail.ru

Рассмотрим уравнение

$$signy|y|^m u_{xx} + u_{yy} + (\beta_0/y)u_y = 0, \tag{1}$$

в области $D = D^+ \cup D^- \cup I$, где D^+ – первый квадрант плоскости, D^- – конечная область четвертый квадрант плоскости, ограниченная характеристиками OC и BC уравнения (1) выходящими из точек $O(0,0)$, $B(1,0)$ и отрезком OB прямой $y = 0$, $I = \{(x,y) : 0 < x < 1, y = 0\}$. В (1) $m > 0$, $-\frac{m}{2} < \beta_0 < 1$. Введем обозначения: $I_0 = \{(x,y) : 0 < y < \infty, x = 0\}$, $I_1 = \{(x,y) : 1 \le x < \infty, y = 0\}$, C_0 и C_1 – соответственно точки пересечения характеристик OC и BC с характеристикой исходящей из точки $E(c,0)$, где $c \in I$ – произвольное фиксированное число. Пусть $q(x) \in C^1[c,1]$ – диффеоморфизм из множества точек отрезка $[c,1]$ в множество точек отрезка $[0,c]$, причем $q'(x) < 0$, $q(1) = 0$, $q(c) = c$. В качестве примера такой функции приведем линейную функцию $q(x) = k(1-x)$, где $k = c/(1-c)$.

Задача GF. *Найти в области D функцию $u(x,y)$ со свойствами: 1)$u(x,y) \in C(\bar{D})$ где $\bar{D} = \bar{D^-} \cup D^+ \cup \bar{I_0} \cup \bar{I_1}$;*

2) $u(x,y) \in C^2(D^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в этой области;

3) $u(x,y)$ является обобщенным решением класса R_1 в области D^-;

4) выполняется равенства

$$\lim_{R\to\infty} u(x,y) = 0, R^2 = x^2 + (4/(m+2)^2)y^{m+2}, x \ge 0, y \ge 0;$$

5) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям $u(0,y) = \varphi(y)$, $y \ge 0$; $u(x,0) = \tau_1(x)$, $x \in \bar{I_1}$; $u(x,y)|_{EC_1} = \psi(x)$, $c \le x \le (c+1)/c$; $u(q(x),0) = \mu u(x,0) + f(x)$, $c \le x \le 1$, и условию сопряжения

$$\lim_{y\to+0} y^{\beta_0} u_y = \lim_{y\to-0} (-y)^{\beta_0} u_y, \quad x \in I \setminus \{c\},$$

причем эти пределы при $x = 0$, $x = 1$, $x = c$ могут иметь особенности порядка ниже $1 - 2\beta$, где $\beta = \frac{m+2\beta_0}{2(m+2)}$, $f(x)$, $\psi(x)$, $\tau_1(x)$, $\varphi(y)$ – заданные функции.

Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с дробными производными

Сабитов К.Б.

ИСИ, Уфа, СФ БашГУ, Стерлитамак, Россия; sabitov_fmf@mail.ru

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$Lu = \begin{cases} u_{xx} + D_{0y}^{\alpha} u(x,y) = 0, \quad y > 0, \quad 1 < \alpha \le 2, \\ u_{xx} - D_{0y}^{\beta} u(x,y) = 0, \quad y < 0, \quad 1 < \beta \le 2, \end{cases} \tag{1}$$

в области $\Omega = \{(x,y)|\ 0 < x < l, -a < y < b\}$, где l, a и b – заданные положительные постоянные, $D_{0y}^{\gamma} u(x,y)$, $\gamma = \alpha$ при $y > 0$ и $\gamma = \beta$ при $y < 0$ – операторы дробного порядка в смысле Капуто.

Задача Дирихле. *Найти функцию $u(x,y)$ со свойствами*:

$$u(x,y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C_x^1(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C_x^2(\Omega_+ \cup \Omega_-), \ \ D_{0y}^{\gamma} u \in C(\Omega_{\pm}); \tag{2}$$

$$Lu(x,y) \equiv 0, \quad (x,y) \in D_+ \cup D_-; \tag{3}$$

$$u(0,y) = u(l,y) = 0, \ \ -a \le y \le b; \tag{4}$$

$$u(x,-a) = \psi(x), \quad u(x,b) = \varphi(x), \qquad 0 \le x \le l, \tag{5}$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, $\varphi(0) = \varphi(l) = \psi(0) = \psi(l) = 0$.

Отметим, что в работах Геккиевой С.Х., Репина О.А., Килбаса А.А. изучены аналоги задач Трикоми и Бицадзе – Самарского для уравнений смешанного типа с дробной производной $u_{xx} - D_{0y}^{\alpha} u = 0$, $0 < \alpha < 1$ при $y > 0$, а при $y < 0$ являются чисто гиперболическими уравнениями $u_{xx} - u_{yy} = 0$, $\ u_{xx} - (-y)^m u_{yy} = 0$, $m < 1$, $\ xu_{xx} + yu_{yy} + pu_x + qu_y = 0$. При этом область задания уравнения при $y > 0$ совпадает с полуплоскостью $y > 0$, а при $y < 0$ – представляет характеристический треугольник.

В данной работе установлен критерий единственности решения задачи (2)–(5). Решение построено в виде суммы ортогонального ряда и показано его сходимость в классе регулярных решений (2), (3) уравнения (1). Установлена устойчивость решения относительно граничных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в классе непрерывных и квадратично-суммируемых функций.

Разностная схема для математической модели фильтрационного горения газов

Садриддинов П.Б.

ТНУ, Душанбе, Таджикистан; Parviz06@list.ru

В работе рассматривается следующая математическая модель, состоящая из трех дифференциальных уравнений с нелинейными правами частями

$$
\begin{aligned}
&-\rho_2 c_2 \frac{dT_2}{dx} = \alpha_2 \lambda_2 \frac{d^2 T_2}{dx^2} + \alpha_c S_c (T_1 - T_2),\\
&\rho_{10} c_p (v_{10} - u) \frac{dT_1}{dx} = -\alpha_c S_c (T_1 - T_2) + \rho_{10} Q \eta_0 J, \qquad (1)\\
&\rho_{10} (v_{10} - u) \frac{dn}{dx} = -\rho_{10} J, \quad J = n k_0 \exp(-E/RT_1).
\end{aligned}
$$

Граничными условиями задачи являются условия на бесконечности

$$
\begin{aligned}
&x = -\infty: \quad T_1 = T_0,\ T_2 = T_0,\ n = 1,\\
&x = +\infty: \quad \frac{dT_1}{dx} = 0,\ \frac{dT_2}{dx} = 0,\ n = 0. \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Для решения задачи (1)–(2) составляется разностная схема. Подобное исследование рассматривались в работах [1-4].

Литература

1. *Лаевский Ю.М., Бабкин В.С.* Фильтрационное горение газов // В сб.: Распространение тепловых волн в гетерогенных средах. Новосибирск, Наука. Сибирское Отделение. 1988. 286 с.

2. *Лаевский Ю.М., Яушева Л.В.* Численное моделирование фильтрационного горения газа на основе двухуровневых полунеявных расностных схем // Вичислительный технологии. 2007. Т. 12, № 2. С. 90–103.

3. *Бабкин В.С., Бунев В.А., Коржавин А.А.* Распространение пламени в пористых инертных средах // Горение газов и натуральных топлив. Черноголовка. 1980. С. 87–89.

4. *Садриддинов П.Б.* Приближенное определение скорости фронта фильтрационного горения газов в инертной пористой среде // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2010. Т. 53, № 1. С. 28–33.

Об определении двумерного ядра интегро-дифференциального волнового уравнения

Сафаров Ж.Ш.

ИМ АН РУз, Ташкент, Узбекистан; j.safarov65@mail.ru

Рассматривается интегро-дифференциальное уравнение

$$u_{tt} = u_{zz} + u_{xx} + \int\limits_0^t k(x,\alpha)u(x,z,t-\alpha)\,d\alpha, \qquad z \in (0,l), t > 0, x > 0,$$

с начальными и граничными условиями

$$u|_{t=0} = 0, \qquad u_t|_{t=0} = 0,$$

$$u_z|_{z=0} = \delta(x)\delta'(t), \qquad u_z|_{z=l} = 0.$$

Здесь $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака. В предположении $k(t,x) \in C(\Pi)$, исследуется задача об определении функции $k(t,x)$ из условия

$$u(x,0,t) = g(x,t),$$

где $\Pi = \{(x,t) : x > 0, t > 0\}$.

Основным результатом данной работы является следующая теорема локальной, однозначной разрешимости обратной задачи.

Теорема. *Пусть*

$$(g(x,+0), g_t(x,+0)) \in A_{s_0}, \quad (g(x,z), g_t(x,z), g_{tt}(x,z)) \in (C_l[0,2l], A_{s_0})$$

$$\max\{\|g\|_{s_0}(t), \|g_t\|_{s_0}(t), \|g_{tt}\|_{s_0}(t)\} \le R, \quad t \in [0,2l],$$

где $R > 0$ – заданное число. Тогда найдется такое $a \in (0,l)$, что для любого $s \in (0,s_0)$ в области $\Gamma_{sl} = D_2 \cap \{(x,z,t) : 0 \le z \le a(s_0-s)\}$ существует единственное решение обратной задачи для которого

$$(\widetilde{u}(x,z,t), \widetilde{u}_t(x,z,t)) \in C(A_{s_0}, F), \quad k(x,t) \in C(A_{s_0}, [0, a(s_0-s)])$$

$$F = \{(z,t,s) : (z,t) \in D_{0l}, \quad 0 < z < a(s_0-s)\},$$

причем

$$\|\widetilde{u} - \widetilde{u}_0\|_s(z,t) \le R; \quad \|\widetilde{u}_t - \widetilde{u}_{0t}\|_s(z,t) \le \frac{R}{s_0-s}; \quad \|\widetilde{u}_t - \widetilde{u}_{0t}\|_s(z) \le \frac{R}{(s_0-s)^2}.$$

Метод дробного дифференцирования в численно-аналитических решениях задач подземного массопереноса

Сербина Л.И.

ГБОУ ВО СГПИ, Ставрополь, Россия; lserbina@mail.ru

Характерной чертой современной теории математического моделирования нестационарного режима динамических процессов и систем является постоянно увеличивающийся круг задач прикладного значения, который требует повышения точности и достоверности существующих численно-аналитических расчетных алгоритмов. Достигнутые в последнее время определенные успехи математического моделирования эволюции нелинейных динамических процессов и систем с ярко выраженными аномальными свойствами связаны с использованием фрактального анализа, фундаментальной основой которого является математический аппарат дифференциальных уравнений с дробной производной.

В данной работе, следуя основным идеям [1], показано, что при определенной схематизации одномерный поток миграции солей и примесей в водонасыщенном почвенном слое $0 \le x \le r$ со сложной (фрактальной) геометрической структурой порового пространства, может быть более адекватно описан дифференциальным уравнением с частными производными параболического типа дробного порядка

$$D_{0t}^{\alpha} u(x;\eta) = D_f \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b\frac{\partial u}{\partial x} + \beta(u_* - u), \qquad (1)$$

где $u = u(x;t)$ – концентрация почвенного раствора в точке x в момент времени $t > 0; D_f$ – коэффициент фрактальной диффузии, b – скорость конвекции, β – коэффициент растворения соли; u_* – предельная концентрация насыщения; D_{0t}^{α} – оператор дробного в смысле Римана – Лиувилля дифференцирования по времени t порядка $\alpha \in [0;1]$.

В качестве математической модели широкого класса практически важных задач, связанных с расчетом состояния и прогнозом аномального поведения процесса влагосолепереноса в почвогрунтах, интерпретируемых как среды с фрактальной структурой [2], для уравнения (1) рассматривается следующая видоизмененная задача Коши.

Задача S. *Найти регулярное в любой точке $x \in [0;r]$ и для любого момента времени $t > 0$ решение $u = u(x;t)$ дробного уравнения (1), ограниченное при $t \to 0$ и удовлетворяющее условию Коши:*

$$u(0;t) = \tau(t), u_x(0;t) = \varphi(t), 0 \le t \le T. \qquad (2)$$

В основе предлагаемого приближенного численно-аналитического метода решения задачи S, связанного с интерпретацией экстремального поведения искомой функции, лежит аппроксимация дробного модельного уравнения его дискретным дробным аналогом и эффективного использования элементов дробного исчисления.

Литература

1. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2000. 299 с.
2. *Сербина Л.И.* Нелокальные математические модели переноса в водоносных системах. М.: Наука, 2007. 167 с.

О некоторых свойствах решения задачи на ячейке для обобщенного уравнения Бельтрами

Сиражудинов М.М.[1,a]**, Джамалудинова С.П.**[2]**, Ибрагимов М.Г.**[2]

[1]*ДФИЦ РАН,* [2]*ДГУ, Махачкала, Россия;* [a]*sirazhmagomed@yandex.ru*

Рассмотрим задачу на ячейке периодов:

$$\begin{cases} \mathcal{A}N_j \equiv \partial_{\bar\xi}N_j(x,\,y)+\mu(x,\,y)\partial_\xi N_j(x,\,y)+\nu(x\,y)\partial_{\bar\xi}\overline{N_j(x,\,y)}=\chi_j, \\ N_j(x,\cdot)\in W_2^1(\square;\,\mathbb{C}), \langle N_j(x,\cdot)\rangle_y=0,\ j=1,\,2, \end{cases} \tag{1}$$

$\chi_1 = 2^{-1}\left(\mu^0+\nu^0-\mu-\nu\right)$, $\chi_2 = 2^{-1}i\left(\mu^0-\nu^0-\mu+\nu\right)$, где $\xi = y_1+iy_2$, $x\in\overline{Q}$ – выступает в роли параметра $\mu(x,y)$, $\nu(x,y)$ – измеримые ограниченные функции, липшицевы по x (с постоянной Липшица l), периодические по y и удовлетворяющие условию эллиптичности $\operatorname{vrai\,sup}_{Q\times\square}|\mu(x,\,y)-\nu(x,\,y)|\leqslant k_0<1$, $\mu^0(x)$, $\nu^0(x)$ – функции, определённые формулами $\mu^0(x) = \left\langle\,\mu(x,\cdot)\,\mathscr{Q}(x,\cdot)+\overline{\nu(x,\cdot)}\,\mathscr{P}(x,\cdot)\,\right\rangle_y$, $\nu^0(x) = \left\langle\,\overline{\mu(x,\cdot)}\,\mathscr{P}(x,\cdot)+\nu(x,\cdot)\,\mathscr{Q}(x,\cdot)\,\right\rangle_y$, где $\mathscr{P}(x,y)=2^{-1}\times$ $\times(p_1(x,y)+ip_2(x,y))$, $\mathscr{Q}(x,y)=2^{-1}(\overline{p_1(x,y)}+i\,\overline{p_2(x,y)})$, p_1, p_2 – *базисные векторы ядра* $\operatorname{Ker}\mathcal{A}^*$. Задача на ячейке периодов, в случае когда коэффициенты зависят только от y, изучена в [1].

Теорема 1. *Для каждого $x\in Q$ периодическая задача (1) однозначно разрешима.*

Приведем основные свойства решения задачи (1).

Свойство 1. *Найдется число $q>2$, зависящее только от постоянной эллиптичности k_0 такое, что N_j, $j=1,2$ принадлежит $W_q^1(\square)$ и имеют место неравенства $\|N_j(x,\,\cdot)\|_{C^\alpha(\square;\,\mathbb{C})}\leqslant c, \|N_j(x,\,\cdot)\|_{W_r^1(\square;\,\mathbb{C})}\leqslant c$, для всех $x\in\bar{Q}$, где $c>0$ – постоянная, зависящая только от постоянной эллиптичности k_0, $2<r\leqslant q$, $\alpha=(r-2)/r$.*

Свойство 2. *Решение $N_j=N_j(x,y)$, $j=1,2$, задачи (1) непрерывно в $\overline{Q}\times\overline{\square}$, липшицево по x в $\overline{Q}$ и гельдерово по y в $\overline{\square}$ с показателем $\alpha=(r-2)/r$, ($2<r\geqslant q$, $\geqslant 2$ – показатель повышенной суммируемости) в $\overline{\square}$, т. е. для любых $x,x'\in\overline{Q}$, $y,y'\in\overline{\square}$ имеем:*

$$|N_j(x,y)-N_j(x',y')|\leqslant c_0|x-x'|+c_1|y-y'|^\alpha,$$

где c_0, $c_1>0$ – постоянные, зависящие только от k_0 и l.

Литература

1. *Сиражудинов М.М.* Асимптотический метод усреднения обобщенных операторов Бельтрами // Матем. сборник. 2017. Т. 208, № 4. С. 87–110.

Некоторые задачи для вырожденного уравнения субдиффузии

Смадиева А.Г.

ИМММ, Алматы, Казахстан; smadiyeva@math.kz

В данной работе рассматривается уравнение диффузии с дробными производными Капуто и Римана – Лиувилля. В некоторых задачах решение находим применяя метод разделения переменных Фурье, в других с помощью прямого и обратного преобразования Фурье. Решения представлены с помощью функции Килбаса – Сайго $E_{\alpha,m,l}(x)$. При доказательстве сходимости решения использовали свойства этой функции [1], равенство Парсеваля и теорему Пляншереля. Доказана существование и единственность решения.

Литература

1. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and applications of fractional differential equations. Elsevier. North-Holland. Mathematics studies. 2006. 539 p.

Работа выполнена при поддержке МОН РК, по проекту AP08052046.

Задача Коши для субдиффузионного уравнения дробного порядка по времени на графе, состоящем из серии петель

Собиров З.А., Сапарбаев Р.А.

НУУз, Ташкент, Узбекистан; rajapboy1202@gmail.com

Пусть граф состоит из входящих ребер, в которых координаты определены от $-\infty$ до 0, серии петель, каждая серия состоит из трех отрезков $[L_{i-1}; L_i]$, $i = \overline{1, n-1}$, соответственно, и из исходящих ребер, в которых координаты определены от L_{n-1} до ∞. Ребра графа обозначим через $B_{ij} = \{x_{ij} : L_{i-1} \leq x \leq L_i\}$, $L_0 = 0, i = \overline{0, n}, j = \overline{1, 3}$ (рис. 1).

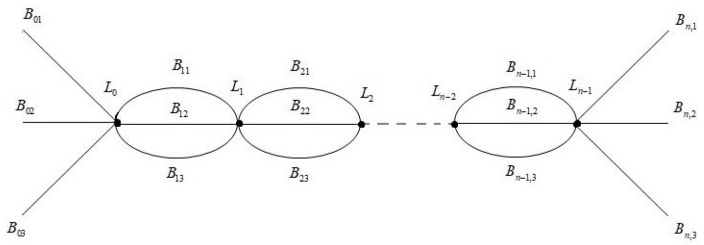


рис. 1.

На каждом ребре графа рассмотрим субдиффузионное уравнение дробного порядка по времени

$$D_{0t}^{\alpha} u_{ij}(x,t) - (u_{ij}(x,t))_{xx} = f_{ij}(x,t), \ 0 < t < T, \ x \in B_{ij},$$

где $D_{0t}^{\alpha} u(x,t)$ – дробная производная Римана – Лиувиля [1], $0 < \alpha < 1$. Требуем выполнения условий: начальные условия $\lim\limits_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1} u_{ij}(x,0) = \varphi_{ij}(x)$; асимптотические условия на бесконечностях $\lim\limits_{x\to -\infty} u_{0j}(x,t) = \lim\limits_{x\to\infty} u_{nj}(x,t) = 0$, и условия склеивания (условия Кирхгоффа) в узловых точках графа $u_{ij}(L_i,t) = u_{i+1,k}(L_i,t)$, $t \in [0,T], k = \overline{0,n}$, $\sum\limits_{k=1}^{3} (u_{ik}(L_i,t))_x = \sum\limits_{k=1}^{3} (u_{i+1,k}(L_i,t))_x$, $i = \overline{0, n-1}, j = \overline{1,3}$. Задача состоит в нахождении регулярных решений рассматриваемых уравнений, которые удовлетворяют вышеуказанным условиям. Доказана единственность решения рассматриваемой задачи методом интегралов энергии. Построено точное решение задачи в виде интегрального представления через данные функции.

Литература

1. *Псху А.В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. Москва: Наука, 2005. 199 с.

Динамика генетических осцилляторов: математическое и схемотехническое моделирование

Станкевич Н.В.[1,2,a]***, Дорошенко В.М.***[2]***, Лайло В.В.***[2]

[1]*НИУ ВШЭ, Нижний Новогород,* [2]*ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН, Саратов, Россия;* [a]*stankevichnv@mail.ru*

Генетические осцилляторы (репрессиляторы) представляют собой важный класс моделей, благодаря свой прикладной значимости [1]. Исследование таких систем показывает богатейшее разнообразие динамических режимов, а также различных нелинейных эффектов, таких как мультистабильность, синхронизация, самоорганизующаяся квазипериодичность [2-3]. Реализация экспериментального исследования генетического осциллятора – очень трудная задача. В связи с этим представляет интерес разработка математических и радиофизических моделей, описывающих динамику генетических осцилляторов.

Упрощенная модель репрессилятора состоит как минимум из трёх основных элементов – генов, динамика которых описывается тремя переменными x, y и z. Ген x кодирует белок, подавляющий транскрипцию с гена y, ген y подавляет транскрипцию гена z и белковый продукт гена z, замыкая цикл, подавляет транскрипцию с гена x. С точки зрения электро-биологической аналогии репрессилятор похож на кольцевой инвертор, но со специфической функцией ингибирования. В математической модели ингибирование можно описать с помощью функции Хилла, а также экспоненциальными функциями. В рамках данной работы проведено исследование двух математических моделей генетических осцилляторов. Изучены особенности динамики осцилляторов, определены условия возбуждения автоколебаний в модели. Разработана радиофизическая модель, основанная на принципах аналогового моделирования, для верификации и анализа наблюдаемых явлений с учетом естественных шумов, которая реализована в пакете схемотехнического моделирования MultiSim.

Литература

1. *Elowitz M.B., Leibler S.* A synthetic oscillatory network of transcriptional regulators // Nature. 2000, vol. 403, pp. 335–338.
2. *Ullner E. et al.* Multistability of synthetic genetic networks with repressive cell-to-cell communication // Phys. Rev. E. 2008, vol. 78, p. 031904.
3. *Stankevich N., Volkov E.* Evolution of quasiperiodicity in quorum-sensing coupled identical repressilators // Chaos. 2020, vol. 30, p. 043122.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 21-12-00121.

Построение решений неоднородных систем типа Клаузена вблизи особенности на бесконечности

Тасмамбетов Ж.Н.[a], **Убаева Ж.К.**[b]

АРУ им. К. Жубанова, Актобе, Казахстан; [a]*tasmam@rambler.ru,* [b]*Zhanar_ubaeva@mail.ru*

При изучении многомерных вырожденных уравнении, важную роль играют свойства обобщенных гипергеометрических функций многих переменных, особенно гипергеометрическая функция двух переменных Клаузена. Она является решением систем типа Клаузена состоящих из двух дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка вблизи особенности $(0,0)$. Неисследованным остается построение решений вблизи особенности (∞,∞), в частности построение решений неоднородных систем вблизи регулярной особенности на бесконечности.

Теорема. *Общее решение неоднородной простой системы Клаузена*

$$x^2(1-x)p_{3,0}+[1+\beta_1+\beta_2+\beta_3-(3+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)x]xp_{2,0}+$$

$$+[\beta_1\beta_2-(1+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)x]p_{1,0}-\alpha_1\alpha_2\alpha_3p_{0,0}=f_1$$

$$y^2(1-y)p_{0,3}+[1+\beta_1^{'}+\beta_2^{'}+\beta_3^{'}-(3+\alpha_1^{'}+\alpha_2^{'}+\alpha_3^{'})y]yp_{0,2}+$$

$$+[\beta_1^{'}\beta_2^{'}-(1+\alpha_1^{'}+\alpha_2^{'}+\alpha_3^{'}+\alpha_1^{'}\alpha_2^{'}+\alpha_1^{'}\alpha_3^{'}+\alpha_2^{'}\alpha_3^{'})y]p_{0,1}-\alpha_1^{'}\alpha_2^{'}\alpha_3^{'}p_{0,0}=f_2, \quad (1)$$

где $p_{0,0}(x,y)=Z(x,y)$ общая неизвестных для двух уравнений системы (1), $p_{j,k}(j,k=0,1,2,3)$ различные порядки частных производных неизвестные функции $Z(x,y)$, с правой частью $f_1(x,y)=\alpha_{0,0}^{(1)}x^\rho y^\sigma, f_2(x,y)=\alpha_{0,0}^{(2)}x^\rho y^\sigma$ вблизи регулярной особенности $(x=\infty, y=\infty)$ представляется в виде:

$$Z(x,y)=\sum_{i=1}^{9}C_iZ_i+\frac{x^\rho y^\sigma}{(\rho-\alpha_1)(\rho-\alpha_2)(\rho-\alpha_3)(\rho-\alpha_1^{'})(\rho-\alpha_2^{'})(\rho-\alpha_3^{'})}\cdot$$

$$\cdot\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{3m+3n}\rho_m[-(\rho+\beta_1-1)]_m[-(\rho+\beta_2-1)]_m(\sigma)_n}{m!n!(-1)^{3m+3n}[-(\rho-\alpha_1-1)]_m[-(\rho-\alpha_2-1)]_m[-(\rho-\alpha_3-1)]_m}\cdot$$

$$\cdot\frac{[-(\sigma+\beta_1-1)]_n[-(\sigma+\beta_2-1)]_n}{[-(\sigma+\alpha_1^{'}-1)]_n[-(\sigma+\alpha_2^{'}-1)]_n[-(\sigma+\alpha_3^{'}-1)]_n}\cdot x^m y^n,$$

где использовано обозначение

$$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-m+1)=(-1)^n(-\alpha_n).$$

Задача Неймана для эллиптического уравнения с несколькими сингулярными коэффициентами

Тулакова З.Р.

Ферганский филиал ТУИТ, Фергана, Узбекистан; ziyodacoders@gmail.com

Пусть $\mathbb{R}_m$ – m-мерное евклидово пространство; $x := (x_1, ..., x_m)$ – произвольная точка в нём и n – натуральное число, причем $1 \le n \le m$ и $m \ge 2$. 2^n-ую часть $\mathbb{R}_m$ определим следующим образом:

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}_m : x_i > 0,\ i = 1, ..., n;\ -\infty < x_j < +\infty,\ j = n+1, ..., m\}.$$

Рассмотрим обобщенное сингулярное эллиптическое уравнение

$$\sum_{i=1}^{m} u_{x_i x_i} + \sum_{k=1}^{n} \frac{2\alpha_k}{x_k} u_{x_k} = 0, \tag{1}$$

в гипероктанте Ω, где α_k – действительные числа, причем $0 < 2\alpha_k < 1$. Здесь и далее $1 \le k \le n \le m$.

Задача Неймана. *Найти регулярное решение $u(x)$ уравнения (1) из класса функций $C\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющее условиям:*

$$\left. \left(x_k^{2\alpha_k} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) \right|_{x_k = 0} = \nu_k(\tilde{x}_k),\ \tilde{x}_k \in S_k;\quad \lim_{R \to \infty} u(x) = 0,$$

где $\nu_k(\tilde{x}_k)$ – заданные функции; $\tilde{x}_k := x \setminus \{x_k\} \in S_k \subset \mathbb{R}_{m-1}$; S_k – боковые грани гипероктанта Ω; $R^2 := x_1^2 + ... + x_m^2$.

В настоящем сообщении решение задачи Неймана для уравнения (1) в бесконечной области Ω найдено в явном виде:

$$u(\xi) := u(\xi_1, ..., \xi_m) = -\sum_{k=1}^{n} \int_{S_k} \prod_{i=1,\, i \ne k}^{n} \left[x_i^{2\alpha_i} \right] \cdot \nu_k(\tilde{x}_k)\, q\left(x_k^0; \xi\right) dS_k,$$

где $q(x;\xi)$ – фундаментальное решение уравнения (1) [1], а

$$x_k^0 := (x_1, ..., x_{k-1}, 0, x_{k+1}, ..., x_m).$$

Литература

1. *Ergashev T.G.* Fundamental solutions for a class of multidimensional elliptic equations with several singular coefficients // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. 2020, vol. 13, no. 1, pp. 48–57.

Неоднородная задача типа Коши для линейного уравнения с несколькими дробными производными Римана – Лиувилля

Туров М.М.[1,a], **Фёдоров В.Е.**[1,2,b]

[1] *ЧелГУ, Челябинск,* [2] *ИММ УрО РАН, Екатербург, Россия;*
[a] *turov_m_m@mail.ru,* [b] *kar@csu.ru*

Рассмотрим неоднородное уравнение на $(0,T)$

$$D_t^{\alpha}z(t)=\sum_{j=1}^{m-1}A_jD_t^{\alpha-m+j}z(t)+\sum_{l=1}^{n}B_lD_t^{\alpha_l}z(t)+\sum_{s=1}^{r}C_sJ_t^{\beta_s}z(t)+f(t), \qquad (1)$$

где операторы A_j, $j=1,2,\dots,m-1$, B_l, $l=1,2,\dots,n$, C_s, $s=1,2,\dots,r$, линейны и ограничены в банаховом пространстве $\mathcal{Z}$.

Решением задачи

$$D_t^{\alpha-m+k}z(0)=z_k,\ k=m^*,m^*+1,\dots,m-1, \qquad (2)$$

для уравнения (1) будем называть такую функцию $z:(0,T)\to\mathcal{Z}$, что $J_t^{m-\alpha}z\in C^m((0,T);\mathcal{Z})\cap C^{m-1}([0,T];\mathcal{Z})$, $J_t^{m_l-\alpha_l}z\in C^{m_l}((0,T);\mathcal{Z})\cap C^{m_l-1}([0,T];\mathcal{Z})$, $l=1,2,\dots,n$, $J_t^{\beta_s}z\in C((0,T);\mathcal{Z})$, $s=1,2,\dots,r$, и выполняются равенства (1) и (2) при $t\in(0,T)$, m^* – специальный параметр, называемый дефектом задачи Коши.

Теорема. *Пусть* $m-1<\alpha\le m\in\mathbb{N}$, $\alpha_1<\alpha_2<\dots<\alpha_n<\alpha$, $m_l-1<\alpha_l\le m_l\in\mathbb{N}$, $\alpha_l-m_l\ne\alpha-m$, $l=1,2,\dots,n$, $\beta_1>\beta_2>\dots>\beta_r\ge0$, $A_j\in\mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $j=1,2,\dots,m-1$, $B_l\in\mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $l=1,2,\dots,n$, $C_s\in\mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $s=1,2,\dots,r$, $z_k\in\mathcal{Z}$, $k=m^*,m^*+1,\dots,m-1$, $f\in C((0,T);\mathcal{Z})\cap L_1(0,T;\mathcal{Z})$. *Тогда существует единственное решение задачи (1), (2) при этом оно имеет вид*

$$z(t)=\sum_{p=m^*}^{m-1}Z_p(t)z_p+\int_0^t Z(t-s)f(s)ds,$$

где

$$Z_p(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\lambda^{-\alpha}R_\lambda\cdot\left(\lambda^{m-1-p}I-\sum_{j=p+1}^{m-1}\lambda^{j-1-p}A_j\right)e^{\lambda t}d\lambda, Z(t)=$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\lambda^{-\alpha}R_\lambda e^{\lambda t}d\lambda, R_\lambda:=\left(I-\sum_{j=1}^{m-1}\lambda^{j-m}A_j-\sum_{l=1}^{n}\lambda^{\alpha_l-\alpha}B_l-\sum_{s=1}^{r}\lambda^{-\beta_s-\alpha}C_s\right)^{-1}.$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 21–51–54003).

Численные методы решения однородной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения

Турсунова Б.А.

ТерГУ, Термез, Узбекистан; barno.tursunova.2016@mail.ru

Существующие численные методы численного моделирования поставленной задачи можно разделить на несколько групп: 1) конечно-разностные методы; 2) методы пошагового интегрирования; 3) метод исключения и дифференциальной прогонки; 4) спектральные методы; 5) спектрально-сеточный метод. Среди этих методов эффективными и высокоточными является спектрально-сеточный метод (ССМ) [1–3].

Рассмотрим проблему на собственные значения для обыкновенного дифференциального уравнения m-го порядка при линейных краевых условиях.

Рассматриваемое уравнение можно записать в операторной форме с компактными операторами T и $\bar{T}$ в банаховом пространстве E [1, 3]:

$$X + TX = \lambda \bar{T} X. \tag{1}$$

Введем проектор $P_p : Ł_{2,\rho}^{N} \to Ł_{2,\rho}^{(\bar{p})}$ по правилу: если $X = (x_1(y), ...x_N(y))$ и $x_j(y) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(j)} U_k(\tilde{y})$.

Тогда приближенная задача на собственные значения, полученная спектрально-сеточным методом, имеет вид [1]:

$$X^{(p)} + P_p X^{(p)} T = \lambda^{(p)} \bar{T} X^{(p)}. \tag{2}$$

Затем доказывается сходимость приближенных собственных значений уравнения (2) к точным собственным значениям уравнения (1).

Литература

1. *Абуталиев Ф.Б., Нармурадов Ч.Б.* Математическое моделирование проблемы гидродинамической устойчивости. Т.: «Фан ва технология», 2011. 188 с.

2. *Нармурадов Ч.Б., Подгаев А.Г.* Численный метод решения задач для обыкновенных дифференциальных уравнений на основе неоднородной сплайн – аппроксимации // Применение методов функционального анализа к неклассическим уравнениям математической физики. Сб. науч. тр. Инс-т. матем. СО РАН. Новосибирск, 1989. С. 151–164.

3. *Нармурадов Ч.Б., Турсунова Б.А.* Сходимость спектрального-сеточного метода с полиномами Чебышева второго рода // Проблемы вычислительной и прикладной математики. 2020. № 1. С. 94–101.

Разрушение и глобальная разрешимость задачи Коши для псевдогиперболического уравнения, связанного с обобщенным уравнением Буссинеска

Умаров Х.Г.

АН ЧР, Грозный, Россия; umarov50@mail.ru

Для нелинейного дифференциального уравнения строго псевдогиперболического типа, связанного с обобщенным уравнением Буссинеска шестого порядка:

$$u_{tt} - u_{xxtt} + \mu u_{xxxxtt} +$$
$$+ a_5\, u_{xxxxxt} + a_4\, u_{xxxxt} + a_3\, u_{xxxt} + a_2\, u_{xxt} + a_1\, u_{xt} + a_0\, u_t +$$
$$+ b_6\, u_{xxxxxx} + b_5\, u_{xxxxx} + b_4\, u_{xxxx} + b_3\, u_{xxx} + b_2\, u_{xx} + b_1\, u_x + b_0\, u =$$
$$= (f(u))_{xx},$$

где $\mu > 0$, a_k, b_k — заданные числовые параметры, исследована разрешимость задачи Коши в пространстве непрерывных функций на всей числовой оси.

Найден явный вид решения соответствующего линейного уравнения. Установлен временной отрезок существования классического решения задачи Коши для нелинейного уравнения и получена оценка нормы этого локального решения. Рассмотрены условия существования глобального решения и разрушения решения на конечном отрезке.

Задача с локальными и нелокальными условиями для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения с сингулярным коэффициентом

Уринов А.К.[1,a]***, Мирсабурова У.М.***[2,b]

[1] *ФерГУ, Фергана,* [2] *ТерГУ, Термез, Узбекистан;* [a] *urinovak@mail.ru,*
[b] *umirsaburova@gmail.com*

Пусть Ω – характеристический четырехугольник плоскости xOy, ограниченный характеристиками AC_1, BC_1 при $y>0$ и AC_2, BC_2 при $y<0$, исходящими из точек $A\,(-1,0)$ и $B\,(1,0)$ вырождающегося внутри области гиперболического уравнения

$$-\left|y\right|^m u_{xx}+u_{yy}+\alpha_0\left|y\right|^{(m-2)/2}u_x+(\beta_0/y)u_y=0, \tag{1}$$

где m, α_0, β_0 – заданные числа, причем $m>0$, $-m/2<\beta_0<1$, $|\alpha_0|<(m+2)/2$. Пусть, далее, $I=\{(x,y):-1<x<1, y=0\}$, а A_0 и B_0 – соответственно точки пересечения характеристик AC_2 и BC_2 с характеристикой, исходящий из точки $E\,(c,\,0)$, где $c\in(-1,1)$.

Предположим, что $0<\alpha,\beta<1$, $\alpha+\beta<1$, где $\left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\}=\frac{m+2(\beta_0\pm\alpha_0)}{2(m+2)}$.

Задача А. *Требуется найти в области Ω функцию $u\,(x,y)\in C\left(\bar{\Omega}\right)\cap C^2(\Omega\backslash I)$, удовлетворяющую следующим условиям: 1) $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению (1) в области $\Omega\backslash I$; 2) На отрезке вырождения I имеет место условие сопряжения в виде $\lim\limits_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}(\partial/\partial y)u=\lim\limits_{y\to+0}y^{\beta_0}(\partial/\partial y)u$, $x\in(-1,1)\backslash\{c\}$, причем эти пределы при $x=\pm1$, $x=c$ могут иметь особенность порядка ниже $1-\alpha-\beta$; 3) Выполняются следующие условия: $u\,(x,y)|_{BC_1}=\psi_1(x)$, $0\le x\le 1$; $u\,(x,y)|_{AA_0}=\psi_2(x)$, $-1\le x\le(c-1)/2$; $u\,[\theta(x)]=\mu u\,[\theta^*(x)]+\rho(x)$, $c\le x\le 1$, где $\mu\in R$ и $\mu<0$; $\theta(x_0)$ $[(\theta^*(x))]$ – точки пересечения характеристики $A_0C_2\,(EB_0)$ с характеристикой, исходящей из точки $M\,(x_0,0)$, $x_0\in[c,1]$, где $\psi_1\,(x)$, $\psi_2\,(x)$, $\rho\,(x)$ – заданные непрерывные функции, причем $\psi_1\,(1)=0$, $\psi_2\,(-1)=0$.*

Заметим, что последнее из условий 3) есть условие Бицадзе – Самарского, заданное на граничной характеристике A_0C_2 и параллельной ей внутренней характеристике EB_0.

Исследованы единственность и существование решения задачи А.

Задача типа Коши с производной высокого порядка в начальных условиях для вырождающегося гиперболического уравнения второго рода

Уринов А.К.[1,a], **Окбоев А.Б.**[2,b]

[1] *ФерГУ, Фергана,* [2] *ИМ АН РУз, Узбекистан;* [a] *urinovak@mail.ru,* [b] *aoqboyev@mail.ru*

Рассмотрим уравнение

$$L_{\alpha,\lambda}\left(u\right)\equiv u_{xx}+yu_{yy}+\alpha u_{y}-\lambda^{2}u=0, y<0 \tag{1}$$

в конечной односвязной области D, ограниченной его характеристиками OB : $x-2\sqrt{-y}=0$, $AB : x+2\sqrt{-y}=1$ и $OA : y=0$, где α и λ – заданные числа, причем $\alpha=-n+\alpha_0, \alpha_0\in\left(1/2,1\right), n\in N$, а $\lambda\in R$ или $i\lambda\in\mathbb{R}$.

Отметим, что в работе [1] для уравнения (1) при $\alpha\in\mathbb{R}\setminus(0,1)$ сформулирована видоизмененная задача Коши. В этой работе мы исследуем следующую начальную задачу для уравнения (1).

Начальная задача (типа Коши). *Найти функцию* $u\left(x,y\right)\in C\left(\overline{D}\right)\cap C_{x,y}^{2,n}\left(D\cup I\right)\cap C_{x,y}^{2,n+1}\left(D\right)$, *удовлетворяющую в области* D *уравнению (1) и начальным условиям*

$$u(x,0)=\tau(x), x\in[0,1]; \lim_{y\to-0}(-y)^{\alpha_0}\frac{\partial^{n+1}}{\partial y^{n+1}}u(x,y)=\nu(x), x\in(0,1), \tag{2}$$

где $I=\{(x,\ y):\ 0\leq x\leq 1,\ y=0\}$, *а* $\tau\left(x\right)$ *и* $\nu\left(x\right)$ *– заданные функции.*

Теорема. *Если* $\tau\left(x\right)\in C^{2(n+1)}\left[0,1\right]$ *и* $\nu\left(x\right)\in C^{2}\left[0,1\right]$, *то функция*

$$u\left(x,y\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\gamma_1(4y)^kC_n^k}{(-n+\beta_0+1/2)_k(\beta_0)_k}\int_0^1\Psi_k[\psi(\zeta),\lambda][z(1-z)]^{k+\beta_0-1}\times$$

$$\times\bar{J}_{k+\beta_0-1}(\sigma)dz-\gamma_2(-y)^{1-\alpha}\int_0^1\nu\left(\zeta\right)\left[z\left(1-z\right)\right]^{n-\beta_0}\bar{J}_{n-\beta_0}\left(\sigma\right)dz$$

является единственным решением задачи (1), (2), *где* $\beta_0=\alpha_0-1/2$, $\gamma_1=\Gamma(2\beta_0)\,\Gamma^{-2}(\beta_0)$, $\gamma_2=\frac{4^n\Gamma(2-2\beta_0)}{(1-n-\alpha)(-n+\beta_0)_n\Gamma^2(1-\beta_0)}$, $\bar{J}_\gamma\left(z\right)=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(z/2)^{2m}}{m!(\gamma+1)_m}$, $\gamma\neq -1,-2,...,$ $\Gamma(x)$ *– гамма-функция Эйлера,* $(a)_n$ *– символ Похгаммера,* $\Psi[\psi(\xi),\lambda]=[\lambda^2-(d^2/d\xi^2)\psi(\xi)]^k$, $\xi=x-2\sqrt{-y}(1-2z)$, $\sigma=4\lambda\sqrt{-yz(1-z)}$.

Литература

1. *Уринов А.К., Окбоев А.Б.* Видоизмененная задача Коши для одного вырождающегося гиперболического уравнения второго рода // Украинский математический журнал. 2020. Т. 72, № 1. С. 100–118.

Вклад российских математиков в становление отечественной информатики

Ускова О.Ф.

ВГУ, Воронеж, Россия; sunny.uskova@list.ru

Днем рождения отечественной информатики считается 4 декабря. В этот день в 1948 году член-корреспондент Академии наук И.С. Брук и молодой инженер Б.И. Рамеев получили авторское свидетельство на изобретение цифровой вычислительной техники с приоритетом от Государственного комитета Совета Министров СССР.

Большой вклад в становление и развитие отечественной вычислительной техники внес Сергей Алексеевич Лебедев, известный конструктор серии БЭСМ. Самая знаменитая ЭВМ этой серии БЭСМ-6, первая в мире выполняла миллион операций в секунду и в течение 17 лет была самой востребованной в мире.

В нашей стране в 1951 году в числе первых разработчиков (с С.А. Авраменко и С.А. Богомолец) первой прикладной компьютерной программы для решения дифференциальной краевой задачи второго порядка

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = y(1) = 0,$$

был математик с мировым именем профессор Селим Григорьевич Крейн [1], заслуженный деятель науки. В 60-70 годы прошлого века Крейн С.Г. плодотворно работал в Воронежском государственном университете (ВГУ) заведующим кафедрой уравнений в частных производных.

Начиная с 2008 года, факультет прикладной математики, информатики и механики ВГУ проводит ежегодно соревнования студентов по информатике и программированию Центрально-Черноземного региона, посвященные дню рождения отечественной информатики [1].

Литература

1. *Ускова О.Ф., Горбенко О.Д, Каплиева Н.А.* Российской информатике 70 лет // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научной конференции. Воронеж: Издательство научно-исследовательские публикации, 2018. С. 1416–1418.

Сильно непрерывные разрешающие семейства операторов для уравнений с распределенными дробными производными в банаховых пространствах

Фёдоров В.Е.[a]**, *Филин Н.В.***[b]

ЧелГУ, Челябинск, Россия; [a]*kar@csu.ru,* [b]*nikolay_filin@inbox.ru*

Рассмотрим задачу Коши

$$z^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{1}$$

для уравнения распределенного порядка

$$\int\limits_0^b \omega(\alpha) D_t^\alpha z(t) d\alpha = Az(t), \ \ t > 0, \tag{2}$$

где $0 \le m-1 < b \le m \in \mathbb{N}$, $\omega : [0, b] \to \mathbb{C}$, D_t^α — дробная производная Герасимова — Капуто, $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$ (линейный замкнутый оператор, плотно определенный в $\mathcal{Z}$, действующий в это же пространство). Решением задачи (1), (2) называется такая функция $z \in C^{m-1}(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathcal{Z}) \cap C(\mathbb{R}_+; D_A)$, что $\int\limits_0^b \omega(\alpha) D_t^\alpha z(t) d\alpha \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{Z})$ и выполняются равенства (1), (2).

Семейство операторов $\{S(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t \ge 0\}$ называется *разрешающим* для уравнения (2), если выполняются следующие условия:

(i) $S(t)$ сильно непрерывно при $t \ge 0$, $S(0) = I$;

(ii) $S(t)[D_A] \subset D_A$, $S(t)Az = AS(t)z$ для всех $z \in D_A$, $t \ge 0$;

(iii) $S(t)z_0$ — решение задачи Коши $z(0) = z_0$, $z^{(k)}(0) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, m-1$, для уравнения (2) при любом $z_0 \in D_A$.

В докладе представлены необходимые и достаточные условия существования разрешающего семейства операторов в терминах расположения спектра и поведения резольвенты оператора A и функции ω (см. [1]), их связь с существованием решения полной задачи Коши (1), (2). Показано, что разрешающее семейство непрерывно в операторной норме тогда и только тогда, когда оператор A ограничен.

Литература

1. *Fedorov V.E., Filin N.V.* On strongly continuous resolving families of operators for fractional distributed order equations // Fractal and Fractional, 2021, vol. 5, iss. 20, pp. 1–14.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 21-51-54003.

Численное решение задачи оптимального выбора внешних сил в волновом уравнении

Хайиткулов Б.Х.[a], Латипов Н.К.[b]

НУУз, Ташкент, Узбекистан; [a]b.hayitqulov@mail.ru, [b]nusratulla@mail.ru

В прямоугольнике $D = \{a \leq x \leq b,\ 0 \leq t \leq T\}$ требуется определить функцию $f(x,t) \geq 0$, доставляющую при каждом $t \in [0,T]$ минимум линейному функционалу [1, 2]

$$J\{f\} = \int\limits_a^b f(x,t)dx \to \min, \tag{1}$$

при следующих условия:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \chi \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad a < x < b,\ 0 < t \leq T,\\
&u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x),\ a \leq x \leq b,\\
&u(a,t) = \mu_1(t),\ u(b,t) = \mu_2(t),\ 0 < t \leq T,
\end{aligned} \tag{2}$$

$$m(x,t) \leq u(x,t) \leq M(x,t), \quad (x,t) \in D, \tag{3}$$

где $u = u(x,t)$ – неизвестная функция; χ – фазовая скорость; $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, $m(x,t)$, $M(x,t)$ – заданные функции. Функции $m(x,t)$ и $M(x,t)$ – минимальное и максимальное значения, заданные в области D. Внешняя сила описывается квадратично интегрируемой функций $f(x,t)$ в пространстве $L_2(D)$.

В такой математической постановке эта задача на равномерной сетке решается методом конечных разностей.

Литература

1. *Хайиткулов Б.Х.* Консервативные разностные схемы по оптимальному выбору местоположения источников тепла в стержне // Математическое моделирование и численные методы. 2020. №. 3. С. 85–98. DOI: 10.18698/2309-3684-2020-8598.

2. *Хайиткулов Б.Х.* Консервативные схемы для нестационарной задачи выбора оптимального размещения источников тепла в параллелепипеде. Вестник Дагестанского государственного университета. Серия 1. Естественные науки. 2021. Т. 36, вып. 2. С. 39–46. DOI: 10.21779/2542-0321-2021-36-2-39-46.

Работа выполнена при поддержке Узбекского фонда фундаментальных исследований, проект № ОТ-Ф4-33.

Решение методом конечных разностей одной задачи для линейного нагруженного дифференциального уравнения гиперболического типа

Ханкишиев З.Ф.

БГУ, Баку, Азербайджан; hankishiyev.zf@yandex.com

В настоящей работе рассматривается следующая задача: *найти непрерывную в замкнутой области* $\overline{D} = \{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ *функцию* $u = u(x,t)$, *удовлетворяющую уравнению*

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + bu(x,t) + \sum_{k=1}^{m} b_k u(x, \overline{t}_k) + f(x,t),\ 0 < x < l, 0 < t \leq T,$$

интегральным условиям

$$\int_0^l c_1(x)u(x,t)dx = \mu_1(t), \quad \int_0^l c_2(x)u(x,t)dx = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{1}$$

и начальным условиям

$$u(x,0) = \varphi_1(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi_2(x), \quad 0 \leq x \leq l.$$

Здесь $f(x,t)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $c_1(x)$, $c_2(x)$ – известные непрерывные функции своих аргументов; $a > 0$, b, $k = 1, 2, \ldots, m$ – точки интервала $(0, T]$. Предполагается, что функции $c_1(x)$, $c_2(x)$ подчиняются условиям

$$\begin{cases} c_1^{'}(x) = a_{11}c_1(x) + a_{12}c_2(x), \\ c_2^{'}(x) = a_{21}c_1(x) + a_{22}c_2(x), \end{cases} \tag{2}$$

где a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} – действительные числа.

Интегральные условия (1), с учетом условий (2), сначала заменяются нелокальными граничными условиями, после этого к решению полученной новой задачи применяется метод конечных разностей и строится разностная задача, аппроксимирующая ее со вторым порядком точности. Далее, дается алгоритм решения построенной разностной задачи.

Гипергеометрические функции типа Гаусса от трех переменных второго порядка

Хасанов А.Х.

ИИМ АН РУз, Ташкент, Узбекистан; anvarhasanov@yahoo.com

Доклад состоит из следующих пунктов:

1. Введение и предварительные сведения;
2. Определения гипергеометрических функций от трех переменных;
3. Интегральные представления гипергеометрических функций;
4. Системы дифференциальных уравнений в частных производных гипергеометрического типа и их линейно независимые решения;
5. Формулы разложения с операторами Берчнелла и Ченди;
6. Формулы разложения с операторами $H(\alpha, \beta)$ и $\bar{H}(\alpha, \beta)$;
7. Формулы разложения с операторами $\bar{\Delta}(h)$ и $\bar{\nabla}(h)$;
8. Формулы аналитического продолжения;
9. Формулы преобразования;
10. Литература.

Средние арифметические уклонений функции прямоугольных частных сумм ее ряда Фурье

Хашба Л.А.

АГУ, Сухум, Абхазия; aniballe@mail.ru

Пусть функция $f \in L_p(T^m), p \geq 1, m \in N, T[-\pi, \pi], S_k(f, x)$ – прямоугольные частные суммы порядка $k \in N^m$ m-мерного ряда Фурье $S[f]$ функции f, и точка $x \in T^m$ является ее p-точкой Лебега. Отметим, что если $|f|^p(ln^+|f|)^{m-1} \in L(T^m)$, то почти каждая точка $x \in T^m$ является ее р-точкой Лебега.

Теорема 1. *Пусть функция $f \in L_p(T^m)$ $p > 1$, $m \in N$, x ее p-точка Лебега. Тогда для любого $B \subset X_{j=1}^m [n_j, 2n_j] \cap N^m$, $n = (n_1, \ldots, n_m) \in N^m$*

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{\bar{r}} \sum_{k\in B} S_k(f, x) - f(x) \right| \left(\ln \prod_{j=1}^m \left(\frac{n_j}{r_j} \right) \right)^{-\mathrm{m}} = 0,$$

более того $\forall q > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{\bar{r}} \sum_{k\in B} |S_k(f, x) - f(x)|^q \right\}^{\frac{1}{q}} \left(ln \prod_{j=1}^m \left(\frac{n_j}{r_j} \right) \right)^{-m} = 0,$$

где r_j – мощность проекции множества B на j-ось, $\bar{r}$ – произведения всех этих чисел.

Теорема 2. *Пусть функция $f \in L_p(T^m)$, $p > 1$, $m \in N$ и x ее p-точка Лебега. Если функция φ удовлетворяет следующим условиям: непрерывна на $[0;\infty)$, возрастает, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(u) > 0$ для $u > 0$, $\varphi(2u) \leq a\varphi(u)$ для $u \in [0;\sigma], ln\varphi(u) = 0\left(u^{\frac{1}{m}}\right), u \to \infty$, то в точке x*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\prod_{j=1}^m (n_j + 1)} \sum_{k=n}^{2n} \varphi(|S_k(f, x) - f(x)|) = 0.$$

Моделирование речных экосистем на примере р. Баксан

Хаширова Т.Ю.[a], **Гергов А.Р.**[b], **Елеев И.З.**[c]

КБГУ, Нальчик, Россия; khashirova@mail.ru[a]*, gergoff@mail.ru*[b]*, inal.eleev@bk.ru*[c]

При моделировании развития экосистем особенный интерес вызывают речные экосистемы, представляющие собой проточные воды и включающие биотические взаимодействия между растениями, животными и микроорганизмами, а также абиотические физические и химические взаимодействия. Речные экосистемы являются частью более крупных водосборов, в которых мелкие верхние потоки стекают в средние, а те в свою очередь, постепенно стекают в более крупные речные сети. Речные экосистемы являются яркими примерами лотковых экосистем, плоские воды простираются от источников шириной всего несколько сантиметров до крупных рек шириной километров. Результаты, представленные в статье, применимы к лоточным экосистемам в целом.

Создана камерная модель экосистемы реки Баксан. Компьютерная модель состоит из двух подсистем: биотической и абиотической. В данной статье речь пойдет о подсистеме, описывающей функционирование абиотические процессы, происходящие в речной системе. Реки, протекающие в горных и предгорных районах, характеризуются присутствием нерастворимых частиц, фракций разного размера, т.е. твердым стоком, задача управления которым является одной из наиболее актуальных задач в настоящее время. Для определения расхода донных наносов использовалась методика, предложенная Я. И. Никитиным, согласно которой наиболее устойчивой является зависимость расхода донных наносов от расхода воды и уклона [2].

Расход донных наносов можно выразить зависимостью

$$G = K\left(Q - Q_0\right)^n,$$

где G – расход донных наносов по сечению русла в кг/с; Q – расход воды в м^3/с; Q_0 – расход воды, при котором движение донных наносов только начинается; коэффициент расхода K увеличивается с увеличением уклона реки, а показатель степени остается постоянным $n = 2$.

Разработана модель по управлению твердым стоком на горных ландшафтах, а также алгоритм решения поставленной задачи, макеты входных и выходных параметров [1]. Алгоритм реализован на высокоуровневом языке программирования общего назначения Python. При подключении специальных модулей модели, имеется возможность запуска программы на Web серверах, что позволяет увеличить область применения во много раз.

Графический интерфейс реализован с использованием библиотеки PyQt, для создания шаблонов формы используется Qt Designer. В качестве карт при реализации модели предпочтение отдано OpenStreetMap (OSM). Для создания карт используются данные с персональных GPS-трекеров, аэрофотографии, видеозаписи, спутниковые снимки и панорамы улиц, предоставленные некоторыми компаниями, а также знания человека, рисующего карту.

Работа выполнена в рамках проекта «Приоритет 2030».

Модель по управлению твердым стоком на горных ландшафтах планируется для использования в исследовательских целях, а также в качестве демонстрационной в учебном процессе для студентов соответствующих специальностей.

Модель является открытой, система может быть дополнена новыми блоками, модель может стать сама подсистемой более крупной системы, например, глобальной модели охватывающей социально-экономические, экономические, научно-технические др. аспекты охраны экосистем и ландшафтов.

Литература

1. *Хаширова Т.Ю.* Применение информационных технологий в вопросах охраны и мелиорации природных ландшафтов // Природообустройство. 2011. № 1. С. 22–28.
2. *Шмакова М.В.* Теория и практика математического моделирования речных потоков. СПб.: Изд-во «Лема», 2013. 142 с.

Об одном дискретном уравнении в четверти плоскости и связанной с ним краевой задаче

Ходырева А.А.

НИУ «БелГУ», Белгород, Россия; 711012@bsu.edu.ru

Основная цель – исследование разрешимости уравнения

$$\sum_{\tilde{y}\in D_d} A_d(\tilde{x}-\tilde{y})u_d(y) = v_d(\tilde{x}), \quad \tilde{x}\in D_d, \tag{1}$$

где D_d – дискретная область вида $D_d = C\cap\mathbb{Z}^2$, C – выпуклый конус в $\mathbb{R}^2$, $P_\pm$ – операторы сужения на $D_d(+)$ и $\mathbb{Z}^2\setminus D_d(-)$ соответственно. Уравнение (1) в пространстве $L_2(D_d)$ разрешимо одновременно с уравнением

$$(A_dP_+ + I_dP_-)U_d = V_d \tag{2}$$

в пространстве $L_2(\mathbb{Z}^2)$; здесь I_d обозначает единичный оператор. Рассматривается общее парное уравнение

$$(A_dP_+ + B_dP_-)U_d = V_d$$

в пространстве $L_2(\mathbb{Z}^2)$, где A_d, B_d – два разных псевдодифференциальных оператора с символами $\tilde{A}_d(\xi), \tilde{B}_d(\xi)$ [1].

Обозначим $\pm C^2 \equiv C^2_\pm$ и назовем периодической волновой факторизацией функции $G(t)$ относительно конуса C^2 ее представление в виде

$$G(t) = G_{\neq}(t)G_{=}(t),$$

где функции $G_{\neq}, G_{=}$ допускают ограниченное аналитическое продолжение в трубчатые области $T_{per}(C^2_+)$, $T_{per}(C^2_-)$ вида $\mathbb{T}^2 + i\pm C^2$ соответственно.

Теорема. *Если эллиптический символ $\tilde{A}_d(\xi)\in C(\mathbb{T}^2)$ допускает периодическую волновую факторизацию относительно C^2, то уравнение* (1) *однозначно разрешимо при любой правой части $v_d\in L_2(D_d)$.*

Литература

1. *Васильев В.Б.* Волновая факторизация эллиптических символов // Мат. заметки. 2000. Т. 68, вып. 5. С. 653–667.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ, проект № FZWG-2020-0029.

Интегрирование модифицированного уравнения Кортевега - де Фриза с дополнительным членом

Хоитметов У.А.

ИМ АН РУз, Ташкент, Узбекистан; x_umid@mail.ru

В данной работе изучается модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза с дополнительным членом

$$u_t + 6u^2 u_x + u_{xxx} + \gamma(t) u(0,t) u_x(x,t) = 0, \tag{1}$$

где $\gamma(t)$ – заданная непрерывно дифференцируемая функция. Уравнение (1) рассматривается при начальном условии

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{2}$$

где начальная функция $u_0(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ обладает следующими свойствами:
1) для некоторого $\varepsilon > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u_0(x)|\, e^{2\varepsilon|x|} dx < \infty; \tag{3}$$

2) несамосопряженный оператор $L(0) = i \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} & -u_0(x) \\ -u_0(x) & -\frac{d}{dx} \end{pmatrix}$ имеет ровно $2N$ собственных значений $\xi_1(0)$, $\xi_2(0)$, $\ldots$, $\xi_{2N}(0)$ с кратностями $m_1(0)$, $m_2(0), \ldots$, $m_{2N}(0)$.

Пусть функция $u(x,t)$ обладает требуемой гладкостью и достаточно быстро стремится к своим пределам при $x \to \pm\infty$ т.ч.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^j u(x,t)}{\partial x^j} \right| e^{2\varepsilon|x|} dx < \infty, \quad j = 0,1,2,3. \tag{4}$$

В данной работе выведена эволюция данных рассеяния для несамосопряженного оператора $L(t)$ с помощью которой можно найти решение задачи (1)–(4).

Литература

1. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995.

2. *Хасанов А.Б.* Об обратной задачи теории рассеяния для системы двух несамосопряженных дифференциальных уравнений первого порядка // Докл. АН СССР. 1984. Т. 277, № 3. С. 559–562.

3. *Хасанова А.Б., Хоитметов У.А.* Интегрирование общего нагруженного уравнения Кортевега–де Фриза с интегральным источником в классе быстроубывающих комплекснозначных функций // Изв. вузов. Матем. 2021. Т. 7. С. 52–66.

Компьютерная модель для решения задачи двухфазной фильтрации при поршневом вытеснении

Холматова И.И.

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и искусственного интеллекта, Ташкент, Узбекистан;

Одним из важных разделов теории разработки всегда была и остается методология теории фильтрации, которая разделяется на самостоятельные разделы. При анализе процесса фильтраций, происходящих в неоднородной пористой среде, важно рассмотреть ее более простую математическую модель. Построенный численный алгоритм для решения задачи и проверенный на тестовом примере, можно было бы использовать для решения более сложных задач. Для решения таких задач нам нужно создать устойчивый вычислительный алгоритм. Вычислительный алгоритм считается устойчивым, когда полученная погрешность в ходе решения с течением времени не возрастает. Такой подход незаменим для дальнейшего совершенствования методологии при построении компьютерной модели рассматриваемой задачи.

При построении компьютерной модели рассматриваемой задачи сначала распознается произвольный вид рассматриваемой области, с помощью метода фиктивных областей [1] создается стандартный вид и осуществляются переход к безразмерным переменным. Затем значения параметров, заданных в скважинных точках, распространяются по всей рассматриваемой области, т.е. строится функциональная зависимость этих параметров. Для этого используется метод локальной аппроксимации [2]. Используя один из методов (продольно-поперечный, покомпонентного расщепления или локально одномерный метод) совместно с методом потоковой прогонки решается рассматриваемая задача [3-5]. Полученные результаты записываются в отдельных файлах для оформления графиков и таблиц.

Литература

1. *Коновалов А.Н.* Задачи фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. Новосибирск: Наука, 1988. 166 с.
2. *Катковник В.Я.* Непараметрическая идентификация и сглаживание данных. М.: Наука, 1985. 408 с.
3. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.
4. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука,1977. 405 с.
5. *Равшанов Н., Рахмонов З.Р, Холматова И.И.* Компьютерная модель фильтрации флюида в неоднородной пористой среде // Проблемы вычислительной и прокладной математики. 2019. Т. 24, № 6. С. 91–101.

Аналог задачи Трикоми для одного нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа

Хубиев К.У.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; khubiev_math@mail.ru

Рассмотрим нагруженное [1] уравнение смешанного гиперболо-параболического типа

$$\begin{cases} u_{xx} - u_y = \lambda u(x,0), \quad y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy} = \mu u_{xx}(x-y,0), \quad y < 0 \end{cases} \tag{1}$$

в области Ω, ограниченной отрезками прямых $x = 0$, $x = 1$, $y = h > 0$ при $y > 0$, и характеристиками $x + y = 0$, $x - y = 1$ уравнения (1) при $y < 0$; λ, μ – заданные постоянные.

Для уравнения (1) рассматривается следующая

Задача T. *Найти регулярное в области Ω решение $u(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям:*

$$u(0,y) = \varphi_0(y), u(1,y) = \varphi_1(y), \quad 0 \le y \le h,$$
$$u(x/2, -x/2) = \psi(x), \quad 0 \le x \le 1,$$

где $\varphi_0(y), \varphi_1(y), \psi(x)$ – заданные функции, причем $\varphi_0(0) = \psi(0)$.

Аналог задачи Трикоми для уравнения (1), в котором нагруженное слагаемое в гиперболической части имело вид $\mu_1(x-y)u(x-y,0) + \mu_2(x+y)u(x+y,0)$ исследован в [2], для модельного уравнения вида (1) с производной первого порядка и с дробной производной порядка меньше единицы при нагруженных слагаемых – в [3] и [4] соответственно. В данной работе исследуется однозначная разрешимость задачи **T**.

Литература

1. *Нахушев А.М.* Нагруженные уравнения и их применение. М.: Наука, 2012. 232 с.

2. *Хубиев К.У.* Краевые задачи для характеристически нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2021. Т. 195. С. 127–138.

3. *Хубиев К.У.* Об одном аналоге задачи Трикоми для уравнения смешанного гиперболо-параболического типа с производной при нагрузке // Доклады АМАН. 2009. Т. 11, № 2. С. 58–60.

4. *Хубиев К.У.* Аналог задачи Трикоми для нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа с дробной производной при нагрузке // Доклады АМАН. 2015. Т. 17, № 3. С. 54–59.

Краевая задача с условием третьего рода для уравнения диффузии дробного порядка

Хуштова Ф.Г.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; khushtova@yandex.ru

В области $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < \infty,\ 0 < y < T\}$ рассмотрим уравнение

$$u_{xx}(x, y) - \partial_{0y}^{\alpha} u(x, y) = 0, \tag{1}$$

где ∂_{0y}^{α} – регуляризованная дробная производная [1, с. 11], [2, с. 14], $0 < \alpha \leqslant 1$.

Регулярным решением уравнения (1) в области Ω назовем функцию $u = u(x, y)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω, и такую, что $u, u_x \in C(\bar{\Omega})$, u_{xx}, $\partial_{0y}^{\alpha} u \in C(\Omega)$, $\bar{\Omega}$ – замыкание области Ω.

Задача. *Найти регулярное в области Ω решение уравнения* (1), *удовлетворяющее краевым условиям*

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \infty, \tag{2}$$

$$u_x(0, y) = hu(0, y) - \nu(y), \quad 0 < y < T, \tag{3}$$

где $\nu(y)$ – заданная функция, $h = const$.

Далее в работе $f(y) * g(y)$ – свёртка Лапласа, $\phi(\rho, \delta; z)$ – функция Райта [3], $E_{\rho,\mu}(z)$ – функция типа Миттаг – Леффлера [4, с. 117].

Примем обозначения $\beta = \alpha/2$, $K_{\beta}(x, y) = y^{\beta-1}\phi\left(-\beta, \beta; -xy^{-\beta}\right)$, $E(y) = y^{\beta-1}E_{\beta,\beta}\left(-hy^{\beta}\right)$, $\widetilde{K}(x, y) = K_{\beta}(x, y) - hK_{\beta}(x, y) * E(y)$.

Теорема. *Пусть $\nu(y) \in C[0, T]$, $\nu(0) = 0$. Тогда функция*

$$u(x, y) = \int\limits_0^y \widetilde{K}(x, y - \eta)\, \nu(\eta)\, d\eta$$

является решением задачи (1)–(3).

Литература

1. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
2. *Псху А.В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука. 2005. 199 с.
3. *Wright E.M.* The generalized Bessel function of order greater than one // The Quarterly Journal of Mathematics. 1940, vol. os-11, no. 1. pp. 36–48.
4. *Джрбашян М.М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 672 с.

О некоторых краевых задачах для эллиптической системы первого порядка

Чернова О.В.

НИУ «БелГУ», Белгород, Россия; chernova_ olga@bsu.edu.ru

В области D комплексной плоскости C рассматривается общая эллиптическая система первого порядка

$$L_A U(z) + a(z)U(z) + b(z)\overline{U(z)} = F(z), \quad L_A = \partial/\partial y - A\partial/\partial x, \quad z \in D.$$

Здесь матрица $A \in \mathbb{C}^{l\times l}$, $a(z)$, $b(z)$, $F(z) \in C(D)$. Решением рассматриваемой системы служит $l-$вектор-функция $U = (U_1, \dots, U_l) \in C^1(D)$. Исходную систему всегда можно свести к каноническому виду $\partial\phi(z)/\partial y - J\partial\phi(z)/\partial x + c\phi(z) + d\overline{\phi(z)} = F_0(z)$, относительно $l-$вектор-функции $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ [1] и $l \times l$ комплексные матричные коэффициенты $c(z)$, $d(z) \in C(D)$, а $J \in \mathbb{C}^{l\times l}-$треугольная матрица, собственные значения которой $\mathrm{Im}\lambda > 0$. Пусть $D = D_1 \cup D_2-$открытое множество, где D_1 конечная, а D_2-бесконечная области. Для рассматриваемой системы задача линейного сопряжения задается граничным условием

$$C_{11}U^+(t) - C_{12}U^-(t) + \overline{C_{21}U^+(t)} - \overline{C_{22}U^-(t)} = f(t), \quad t \in \Gamma,$$

где $l\times l-$матричные коэффициенты $C_{ij}(t) \in C(\Gamma)$, $f(t)-$комплексная $l-$вектор-функция. Вводится класс $C^\mu_\delta(\widehat{D}, \infty)$, $-1 < \delta < 0$ [1]. Предполагая, что выполнены условия a, $b \in C^\mu_{\delta_0}(\widehat{D}, \infty)$, $\delta_0 < -1$, $f(t) \in C^\mu(\Gamma)$, $F \in C^\mu_{\delta-1}(\widehat{D}, \infty)$, $-1 < \delta < 0$ решение системы U ищем в классе $C^\mu_{A,\delta}(\widehat{D}, \infty)$ [2]. Задача сводится к задаче линейного сопряжения для эллиптической системы с треугольной матрицей, при этом граничное условие выражается через $l \times l$ матрицы B и $2l \times 2l$ матрицу G. Далее используя специальное представление для функции $\phi(z) \in C^\mu_{J,\delta}(\widehat{D}, \infty)$ [2] мы получаем некоторую систему одномерных и двумерных сингулярных интегральных уравнений, которая изучается классическими методами [3].

Литература

1. *Солдатов А.П.* Сингулярные интегральные операторы и эллиптические эллиптические краевые задачи. I // Функциональный анализ. СМФН. Российский университет дружбы народов, Москва. 2017. Т. 63, № 1. С. 1–189.

2. *Чернова О.В.* Обобщенный оператор Векуа-Помпейю // Научные ведомости БелГУ. 2018. Т. 50, № 1. С. 40–46.

3. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. Москва: Наука, 1968. 513 с.

Вопросы типизации иерархических информационных структур

Чернышев Г.В.

ИИПРУ КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; HenryChern@yandex.com

Известно понятие свободной категории C_G, порожденной графом G. Рассмотрим частный случай такой категории, когда G является деревом (с отмеченным r-объектом v_r) из G.

Для любого объекта v_i, морфизм χ_{v_i}, начинающийся с r-объекта, назовем ch-*морфизмом*.

Предложение 1 (Уникальность C_G для деревьев)**.** *Для любых объектов a и b категории C_G следующие условия эквивалентны*:

1. $|C_G\,(a,b)| = 1$;
2. $\chi_a = \chi_{v_m} \circ C_G\,(v_m, v_a)\,, \qquad \chi_b = \chi_{v_m} \circ C_G\,(v_m, b)$;

где $\chi_{v_m} = \chi_a \otimes \chi_b$ – наибольший общий делитель ch-морфизмов χ_a и χ_b.

Множество всех ch-морфизмов, представленных вложенными множествами имен объектов категории, назовем *типом* этой категории. Будем считать две категории *структурно эквивалентными*, если мощности вложенных множеств их ch-морфизмов равны на любом согласованном уровне вложенности.

Если C_1, C_2 — категории типа C_G, $=_S$ — отношение структурной эквивалентности, P_C^k — мощность вложенного множества на уровне k категории типа C, то верно

Предложение 2. *$C_1 =_S C_2$ тогда и только тогда, когда $P_{C_1}^k = P_{C_2}^k$ для всех $k \in L \subset \mathbb{N}$.*

Поскольку категория C_G является формализацией (произвольного) дерева, предложение 2 может быть использовано для построения процедуры проверки структурной эквивалентности (произвольных) деревьев, согласно функторной диаграмме: $C_G \xrightarrow{F_{GG'}} C_{G'} \xrightarrow{F_{G'S}} C_S$.

Предложение 3. *Категорий C типа C_G с условием $|C\,(a,b)| \geqslant 2$, для любых a и b из C, не существует.*

Нелокальная задача для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения с сингулярным коэффициентом

Чориева С.Т., Туропова С.Ж.

ТерГУ, Термез, Узбекистан; sanamchoriyeva37@gmail.ru

Рассмотрим уравнение

$$-|y|^m u_{xx} + u_{yy} - \frac{m}{2y} u_y = 0, \quad m > 0. \tag{1}$$

Пусть Ω – конечная односвязная область плоскости независимых переменных $x,\ y$, ограниченная характеристиками уравнения (1).

Задача Г. Найти в области Ω регулярное решение

$$u(x,y) = \begin{cases} u_1(x,y),\ (x,y) \in \Omega_1 = \Omega \cap y < 0, \\ u_2(x,y),\ (x,y) \in \Omega_2 = \Omega \cap y > 0 \end{cases}$$

уравнения (1) из класса $C\left(\overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2}\right) \cap C^2\left(\overline{\Omega} \setminus AB\right)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u_j[\theta^{(j)}(x)] = \mu_1 u_j[\theta^{(j)}_{k_1}(x)] + \mu_2 u_j[\theta^{(j)}_{k_2}(x)] +$$

$$+\frac{1}{2}\mu_1 u_j(p_1(x),0) - \frac{1}{2}\mu_2 u_j(p_2(x),0) + \delta_j(x),\ \forall x \in I = AB,$$

здесь, $j = 1$ соответствует области Ω_1, а $j = 2$ соответствует области Ω_2, $p_1(x) = a_1 + b_1 x$, $p_2(x) = a_2 + b_2 x$, где $a_i = \frac{2}{k_i+1}$, $\ b_i = \frac{k_i-1}{k_i+1}$, $\ i = 1,2$ и условиям сопряжения

$$\lim_{y\to+0} u_1(x,y) = c \lim_{y\to-0} u_2(x,y),\ \forall x \in \overline{I},$$

$$\lim_{y\to+0} y^{-\frac{m}{2}} \frac{\partial u_1}{\partial y} = \rho(x) \lim_{y\to-0} (-y)^{-\frac{m}{2}} \frac{\partial u_2}{\partial y} + \lambda(x),\ \forall x \in I,$$

где $\theta^{(j)}(x)(\theta^{(j)}_{k_1}(x),\ \theta^{(j)}_{k_2}(x))$ аффикс точки пересечения характеристики BC_j (кривой $x + [2k_j/(m+2)] \mid y \mid^{(m+2)/2} = 1$, лежащей внутри области Ω_j) с характеристикой, выходящей из точки $M(x_0,0) \in I$; $c = const$; $\mu_1,\ \mu_2 = const$; $\delta_j(x),\ \rho(x),\ \lambda(x)$ заданные функции из класса $C^2(\overline{I}) \cap C^3(I)$, причем $\tau(1) = \tau'(1) = \tau''(1) = 0$, $\rho(x) - c \neq 0,\ k_1 > k_2 > 1,\ \delta^{(n)}_j(1) = 0,\ \lambda^{(n)}(1) = 0,\ n = 0,1,2.$

Корректность задачи Г доказывается методом работы [1].

Литература

1. *Мирсабуров М., Чориева С.Т.* Об одной нелокальной краевой задаче для гиперболического уравнения, вырождающегося внутри области // Узб. мат. журнал. 2010. № 4. С. 118–126.

Оптимизация квадратурных формул в пространстве Соболева

Шадиметов Х.М.[1,2], Нуралиев Ф.А.[1,2], Уликов Ш.Ш.[2]

[1] *ТГТУ,* [2] *ИМ АН РУз, Ташкент, Узбекистан;*

kholmatshadimetov@mail.ru; nuraliyevf@mail.ru;sh-ulikov@mail.ru

В настоящей работе в факторизованном пространстве Соболева $W_2^{(m)}(0,1)$ – гильбертово пространство классов вещественных функций $\varphi(x)$, отличающихся самое большее на полином с $m-2$ производными (в смысле обобщенных функций) порядка m, квадратично интегрируемыми в интервале (0,1) и нормой

$$\|\varphi\| = \left\{ \int\limits_0^1 \left(\left(\frac{d^m\varphi(x)}{dx^m} \right)^2 + \left(\frac{d^{m-1}\varphi(x)}{dx^{m-1}} \right)^2 \right) dx \right\}^{\frac{1}{2}},$$

явно найден элемент Рисса функционала погрешности квадратурных формул. Кроме того в сопряженном пространстве $W_2^{(m)*}(0,1)$ вычислен квадрат нормы функционала погрешности квадратурных формул. Справедливы

Теорема 1. *Элемент Рисса функционала погрешности квадратурной формулы в пространстве имеет вид:*

$$U_\ell(x) = (-1)^m \left(\frac{signx}{2} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} - \sum_{n=1}^{m-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \right) \right) * \ell(x) + P_{m-2}(x).$$

Теорема 2. *Для квадрата нормы функционала погрешности имеет место формула*

$$\left\| \ell(x) \left| W_2^{(m)*}(0,1) \right. \right\|^2 = (-1)^m \left[\sum_{\beta=0}^{N} \sum_{\gamma=0}^{N} k[\beta]\, k[\gamma]\, \mu_m(h\beta - h\gamma) - \right.$$

$$\left. -2 \sum_{\beta=0}^{N} k[\beta] \int\limits_0^1 \mu_m(x - h\beta)\, dx + \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \mu_m(x-y)\, dxdy \right].$$

Здесь $\mu_m(x)$ – функция Грина

$$\mu_m(x) = \frac{\mathrm{sign}x}{2} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} - \sum_{n=1}^{m-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \right).$$

Робастная схема градиентного бустинга

Шибзухов З.М.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, МПГУ, Москва, Россия; intellimath@mail.ru

В классической схеме градиентного бустинга решается задача минимизации эмпирического риска:

$$H^* = \arg \min_{H \in L(\mathcal{H})} \mathcal{Q}(H),$$

где $L(\mathcal{H})$ — класс линейных комбинаций базовых функций из класса $\mathcal{H}$:

$$H(x) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j h_j(x),$$

где $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $h_j(x) \in \mathcal{H}$, $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{Q}(H) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \ell(H(\tilde{x}_k), \tilde{y}_k), \tag{1}$$

$\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_N\}$ — конечный набор входов; $\{\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_N\}$ — значения, ожидаемые на выходе; $\ell(y, \tilde{y})$ — неотрицательная дифференцируемая функция потерь.

На каждом шаге процедуры градиентного бустинга решается задача минимизации:

$$h^*, \alpha^* = \arg \min_{h, \alpha} \mathcal{Q}(h, \alpha),$$

где

$$\mathcal{Q}\big(h, \alpha\big) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \ell(\tilde{H}_k + \alpha h_k, \tilde{y}_k), \tag{2}$$

$\alpha \in \mathbb{R}$ и $h \in \mathcal{H}$, $\tilde{H}_k = H(\tilde{x}_k)$, $\tilde{h}_k = h(\tilde{x}_k)$. Один из методов поиска минимума $\mathcal{Q}(h, \alpha)$ основан на применении итеративного метода *поочередной минимизации* (*alternating minimization*):

$$\begin{aligned} h^{p+1} &= \arg \min_{h \in \mathcal{H}} \mathcal{Q}(h, \alpha^p) \\ \alpha^{p+1} &= \arg \min_{\alpha} \mathcal{Q}(h^{p+1}, \alpha), \end{aligned} \tag{3}$$

вначале $\alpha^0 = 1$. Однако, эмпирическое распределение значений

$$\{z_k = z_k(h, \alpha) = \ell(\tilde{H}_k + \alpha h_k, \tilde{y}_k) \colon k = 1, \dots, N\}$$

может содержать выбросы из-за искажений в данных или неадекватности части данных по отношению к выбранной модели зависимости. При этом, среднее арифметическое чувствительно к выбросам.

Для преодоления влияния выбросов используется более робастная постановка задачи:

$$\mathcal{Q}_{\mathsf{M}}(h,\alpha) = \mathsf{M}\{z_1(h,\alpha),\ldots,z_N(h,\alpha)\},$$

где $\mathsf{M}\{z_1,\ldots,z_N\}$ — дифференцируемая усредняющая агрегирующая функция, устойчивая к выбросам в данных [1–3].

По построению, $\partial\mathsf{M}/\partial z_k \geqslant 0$ для всех $k=1,\ldots,N$ и

$$\partial\mathsf{M}/\partial z_1 + \cdots + \partial\mathsf{M}/\partial z_N = 1.$$

Процедура (3) для поиска h^* и α^* принимает вид процедуры *итеративного перевзвешивания* (*iterative reweighting*):

$$\begin{aligned} h^{p+1} &= \arg\min_{h\in\mathcal{H}} \sum_{k=1}^{N} \gamma_k(h^p,\alpha^p)\ell(\tilde{H}_k + \alpha^p h(\tilde{x}_k), \tilde{y}_k) \\ \alpha^{p+1} &= \arg\min_{\alpha} \sum_{k=1}^{N} \gamma_k(h^{p+1},\alpha^p)\ell(\tilde{H}_k + \alpha h_k, \tilde{y}_k). \end{aligned} \tag{4}$$

В этой итеративной схеме на каждом шаге осуществляется минимизация взвешенной суммы потерь.

На наглядных примерах демонстрируется устойчивость процедуры (4) относительно большого количества выбросов в обучающих данных.

Литература

1. *Calvo T., Beliakov G.* Aggregation functions based on penalties // Fuzzy Sets and Systems. 2010, vol. 161(10), pp. 1420–1436.

2. *Shibzukhov Z.M.* Resistant neural network learning via empirical risk minimization. Advances in Neural Networks. Lecture Notes in Computer Sciences. Springer. 2019, vol. 11554, pp. 340–350.

3. *Shibzukhov Z.M.,Semenov T.A.* Machine learning based on minimizing robust mean estimates. In Pattern Recognition. ICPR International Workshops and Challenges. Springer International Publishing. 2021, pp. 112–119.

О корректности краевых задач третьего рода с вырождающимся коэффициентом при конормальной производной

Шубин В.В.

НГУ, Новосибирск, Россия; vlad.v.shubin@gmail.com

Рассмотрим краевую задачу третьего рода для уравнения теплопроводности

$$u_t = \Delta u + f(x,t) \quad \text{при } (x,t) \in Q, \tag{1}$$

$$u(x,0) = 0 \quad \text{при } x \in \Omega, \tag{2}$$

$$a(x,t)\frac{\partial u}{\partial \nu} - u(x,t) = 0 \quad \text{при } (x,t) \in S, \tag{3}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – область с гладкой границей, $T > 0$, $S = \partial\Omega \times (0,T)$, $Q = \Omega \times (0,T)$, ν – внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

В случае, когда функция $a(x,t)$ гладкая и не обращается в 0 на замыкании S, краевая задача (1)–(3) исследована в классических работах (см. например [1]). Однако, если $a(x,t)$ обращается в 0 в некоторых точках, о корректности данной краевой задачи известно довольно мало. Можно отметить работы [2], [3], в которых с помощью аналога принципа Зарембы – Жиро доказана единственность решения в случае, когда $a(x,t) \leqslant 0$.

В данной работе рассматриваются краевые задачи с условием (3) для различных уравнений параболического, гиперболического, эллиптического и квазипараболического типа, в которых коэффициент $a(x,t)$ может обращаться в 0. Показано, что в некоторых случаях имеет место неединственность решения, а в некоторых других случаях необходимым условием разрешимости является условие ортогональности. Также доказаны теоремы существования и единственности решения в некоторых весовых пространствах.

Литература

1. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.

2. *Выборны Р.* О свойствах решений некоторых краевых задач для уравнений параболического типа // Доклады АН СССР. 1957. Т. 117, № 4. С. 563–565.

3. *Камынин Л.И., Химченко Б.Н.* Об аналогах теоремы Жиро для параболического уравнения 2-го порядка // Сиб. матем. журн. 1973. Т. 14, № 1. С. 86–110.

Задача смешанного управления для уравнений дробного порядка

Шуклина А.Ф.[a], **Плеханова М.В.**[b]

ЧелГУ, Челябинск, Россия; [a]*isaf@csu.ru*, [b]*mariner79@mail.ru*

Пусть $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Z}_1$ — рефлексивные банаховы пространства, $\mathcal{Z}$ компактно вложено в $\mathcal{Z}_1$, $\mathcal{U}$ — банахово пространство, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Z})$, $F : (t_0, T) \times \mathcal{Z}^{m-1} \to \mathcal{Z}$, пространство управлений $\mathfrak{U} = L_q(t_0, T;\mathcal{U}) \times \mathcal{Z}^m$ с нормой $\|(u, v)\|^2_{\mathfrak{U}} = \|u\|^2_{L_q(t_0,T;\mathcal{U})} + \|v\|^2_{\mathcal{Z}^m}$. Рассмотрим задачу

$$D^\alpha_t z(t) = Az(t) + F(t, z(t), z^{(1)}(t), \dots, z^{(r)}(t)) + Bu(t),\ t \in (t_0, T), \tag{1}$$

$$z^{(k)}(t_0) = v_k,\ k = 0, 1, \dots, m-1, \tag{2}$$

$$(u, v) = (u, v_0, v_1, \dots, v_{m-1}) \in \mathcal{U}_\partial, \tag{3}$$

$$J = \|z-z_d\|_{C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{Z})}+\delta\|u-u_d\|^q_{L_q(t_0,T;\mathcal{U})}+\delta_1 \sum_{k=0}^{m-1} \|v_k-v_{dk}\|^2_{\mathcal{Z}} \to \inf, \tag{4}$$

где $\mathcal{U}_\partial$ – множество допустимых управлений, $\mathcal{U}_\partial \subset \mathfrak{U}$, заданны $z_d \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Z})$, $u_d \in L_q(t_0, T;\mathcal{U})$, $v_{dk} \in \mathcal{Z}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, $\delta > 0$, $\delta_1 > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $m-1 < \alpha \le m$, $r \in \{0, 1, \dots, m-1\}$.

Решения задачи (1), (2) будем искать в пространстве

$$\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{Z}) \equiv$$
$$\equiv \left\{ z \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Z}) :\ J^{m-\alpha}_t \left(z - \sum_{k=0}^{m-1} z^{(k)}(t_0)\tilde{g}_{k+1} \right) \in W^m_q(t_0, T; \mathcal{Z}) \right\}.$$

Теорема. *Пусть $\alpha > 1$, $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, $r = m - 2$, отображение $F : (t_0, T) \times \mathcal{Z}^{m-1}_1 \to \mathcal{Z}_1$ каратеодориево, равномерно липшицево по $\overline{z} \in \mathcal{Z}^{m-1}_1$, $F : (t_0, T) \times \mathcal{Z}^{m-1} \to \mathcal{Z}$ каратеодориево, равномерно липшицево по $\overline{z} \in \mathcal{Z}^{m-1}$, при некотором $\overline{y} \in \mathcal{Z}^{m-1}$ выполняется $F(\cdot, \overline{y}) \in L_q(t_0, T; \mathcal{Z})$. Предположим, что $\mathcal{U}_\partial$ – непустое выпуклое замкнутое подмножество в $\mathfrak{U} = L_q(t_0, T;\mathcal{U}) \times \mathcal{Z}^m$, пространство $\mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{Z})$ непрерывно вложено в банахово пространство $\mathfrak{Y}$, которое, в свою очередь, непрерывно вложено в $W^{m-2}_q(t_0, T; \mathcal{Z}_1)$. Тогда задача (1)–(4) имеет решение $(\hat{z}, \hat{u}, \hat{v}) \in \mathcal{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{Z}) \times \mathcal{U}_\partial$.*

Литература

1. *Plekhanova M.V.* Degenerate distributed control systems with fractional time derivative // Ural Mathematical Journal, 2016. pp. 58–71.

2. *Фурсиков А.В.* Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Научная книга, 1999. 350 с.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 21-51-54003.

Экономичные факторизованные схемы для псевдопараболических уравнений третьего порядка

Шхануков-Лафишев М.Х.[1], Лафишева М.М.[2], Бечелова А.Р.[2], Тхабисимова М.М.[2]

[1]*ИПМА КБНЦ РАН*, [2]*КБГУ, Нальчик, Россия; taisauti@yandex.ru, lafishevamadina@gmail.com, bechelova1956@mail.ru, tembotova.mari@mail.ru*

В работе рассмотрены экономичные факторизованные схемы для псевдопараболических уравнений третьего порядка и доказана устойчивость разностной схемы по начальным данным и правой части.

В цилиндре $Q_T = G \times [0 < t < T]$, основанием которого служит p-мерный параллелепипед $G = \{x = (x_1, x_2, \quad \ldots, x_p) : < x_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1, 2, \ldots p\}$ с границей Γ рассмотрена задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + \mu \frac{\partial}{\partial t} Lu + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_t, \tag{1}$$

$$u|_\Gamma = 0, \quad t \geq 0, \quad \overline{G} = G + \Gamma,$$

$$u(x,0) = u_0(x),$$

где $Lu = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u$, $L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)$, $0 < c_0 \leq k_\alpha \leq c_1$, $\mu = const > 0$.

Переписав уравнение (1) в виде уравнения с искусственной вязкостью [1], получена задача:

$$\varepsilon L u_{tt} + u_t = Lu + \mu L u_t + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_t, \tag{2}$$

$$u|_\Gamma = 0, \quad t \geq 0, \quad \overline{G} = G + \Gamma, \tag{3}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \tag{4}$$

где $\varepsilon > 0$ – малая величина.

Задаче (2)–(4) поставлена в соответствие разностная схема и доказана ее устойчивость.

Литература

1. *Годунов С.К., Рябенький В.С.* Разностные схемы. Москва, 1977. 439 с.

Локально-одномерные схемы для уравнения, описывающего коагуляционные процессы в конвективных облаках, обладающих «памятью»

Шхануков-Лафишев М.Х.[1,a], **Лафишева М.М.**[2,b], **Тайсаев И.Д.**[3,c]

[1]*ИПМА КБНЦ РАН,* [2]*КБГУ,* [3]*НОЦ КБНЦ РАН, Нальчик, Россия;*

[a]*taisauti@yandex.ru,* [b]*lafishevamadina@gmail.com,* [c]*taysaevid@gmail.com*

Подобные краевые задачи возникают при описании функции распределения по массам капель в облаках за счет микрофизических процессов коагуляции, дробления и замерзания [1, 2]. Функция $u(x,m,t)$, $x=(x_1,x_2,\ldots,x_p)$ такая, что $u(x,m,t)dm$ дает в каждой точке x в момент времени t концентрацию облачных капель, масса которых заключена в интервале от m до $m+dm$.

В цилиндре $\overline{Q_T}=\overline{G}\times[0,T]$, с основанием G, с границей Γ, рассмотрим задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=Lu+f(x,m,t),\quad (x,t)\in Q_T, \tag{1}$$

$$u|_\Gamma=0,\quad u(x,m,0)=u_0(x,m),\quad x\in\overline{G}, \tag{2}$$

где $Lu=\sum\limits_{\alpha=1}^{p}L_\alpha u$,

$$L_\alpha u=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)+r_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}-\frac{1}{p}u(x,m,t)\int\limits_0^{m_1}\beta_1(m,m')\,u(x,m',t)dm'+$$

$$+\frac{1}{p}\int\limits_0^{m/2}u(x,m-m',t)\beta_1(m,m-m')u(x,m',t)dm'+\frac{1}{p}\int\limits_0^{t}K(x,t,\tau)u(x,m,\tau)d\tau,$$

$0<c_0\le k_\alpha\le c_1$, $|r_\alpha|$, $|K|\le c_2$, $|\beta_1|$, $|r_\alpha|\le c_3$, $\beta_1(m,m')=\pi(r(m)+r(m'))^2\cdot|V_1(m)-V_1(m')|\cdot E(m,m')$, $r(m)$, $r(m')$ – радиусы частиц; $V_1(m)$, $V_1(m')$ – скорости их падения; $E(m,m')$ – коэффициент захвата для капель; $\pi(r)$ – давление. Нелокальные источники в (1) описывают коагуляционные процессы. Из (1)–(2) следует, что значение функции распределения по массам капель в момент времени t определяется ее значением во все предшествующие моменты времени, т. е. среда обладает «памятью». Для задачи (1)–(2) построена ЛОС, обладающая суммарной аппроксимацией $O(|h|^2+\tau)$.

Литература

1. *Ашабоков Б.А., Шаповалов А.В.* Конвективные облака: численные модели и результаты моделирования в естественных условиях и при активном воздействии. Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2008. 254 с.
2. *Berry E.X.* Cloud droplet by collection // J. Atoms Sci. 1967, vol. 24, pp. 688–701.

О специальной задаче сопряжения для эллиптических уравнений

Эберлейн Н.В.

НИУ «БелГУ», Белгород, Россия; 649377@bsu.edu.ru

Пусть $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = a|x_1|, a > 0\}$. Мы рассматриваем следующую задачу сопряжения: найти функцию $U(x)$, состоящую из двух компонент

$$U(x) = \begin{cases} U_+(x), & x \in C_+^a \\ U_-(x), & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{C_+^a} \end{cases}$$

в пространстве Соболева – Слободецкого $H^s(\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma)$, которая удовлетворяет следующему уравнению и дополнительным условиям

$$\begin{cases} (AU)(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma, \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} U_+(x_1, x_2) dx_2 = g_0(x_1), \quad x_1 \in \mathbb{R}, \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} U_-(x_1, x_2) dx_2 = g_1(x_1), \quad x_1 \in \mathbb{R}, \\ u_+(x) - u_-(x) = g_2(x), \quad x \in \Gamma, \end{cases} \tag{1}$$

где A – псевдодифференциальный оператор с символом $A(\xi)$, удовлетворяющим условию

$$c_1(1 + |\xi|)^\alpha \le |A(\xi)| \le c_2(1 + |\xi|)^\alpha,$$

u_+, u_- обозначают граничные значения U из C_+^a и $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{C_+^a}$ соответственно, а функции $g_0, g_1 \in H^{s+1/2}(\mathbb{R})$ and $g_2 \in H^{s-1/2}(\Gamma)$ заданы.

В предположении, что символ $A(\xi)$ допускает волновую факторизацию [1] относительно C_+^a с индексом æ таким, что $æ - s = 1 + \delta, |\delta| < 1/2$, задача (1) сводится к эквивалентной системе линейных интегральных уравнений. Более того, если символ и элементы факторизации обладают свойством однородности, последняя система может быть сведена к системе линейных алгебраических уравнений относительно четырех неизвестных функций.

Литература

1. *Васильев В.Б.* Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи. Москва: КомКнига, 2010. 135 с.

Смешанная краевая задача для уравнения с производными дробного порядка с различными началами

Энеева Л.М.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; eneeva72@list.ru

Рассмотрим уравнение

$$D_{0x}^{\alpha}\partial_{1x}^{\alpha}u(x)-q(x)u(x)=f(x)\qquad(0<\alpha<1).\tag{1}$$

Здесь $q(x)$ и $f(x)$ — заданные в интервале $]0,1[$ функции, а через D_{0x}^{α} и ∂_{1x}^{α} обозначены дробные производные порядка α по переменной $x\in]0,1[$, в смысле Римана – Лиувилля с началом в точке $x=0$, и в смысле Капуто с началом в точке $x=1$ [1].

К уравнениям вида (1) приводит введение понятия эффективной скорости изменения параметров при моделировании физических и геофизических систем [2, 3]. Ряд вопросов теории уравнения (1) были рассмотрены в [4, 5] (см. также ссылки в этих работах).

Исследуется следующая задача: *найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям*

$$\lim_{x\to 0}D_{0x}^{\alpha-1}\partial_{1x}^{\alpha}u(x)=u_0,\qquad u(1)=u_1.\tag{2}$$

В данной работе решена задача (1), (2). Задача эквивалентно редуцирована к нагруженному интегральному уравнению, для которого найдено достаточное условие однозначной разрешимости. Как следствие, для исследуемой задачи получено неравенство Ляпунова.

Литература

1. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

2. *Рехвиашвили С.Ш.* К определению физического смысла дробного интегродифференцирования // Нелинейный мир. 2007. Т. 5, № 4. С. 194–197.

3. *Рехвиашвили С.Ш.* Формализм Лагранжа с дробной производной в задачах механики // Письма в ЖТФ. 2004. Т. 30, № 2. С. 33–37.

4. Энеева Л.М. О задаче Неймана для уравнения с дробными производными с различными началами // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2018. Т 24, № 4. С. 61–65.

5. Энеева Л.М. Неравенство Ляпунова для уравнения с производными дробного порядка с различными началами // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2019. Т 28, № 3. С. 32–40.

Формулы разложения для гипергеометрических функций трех переменных и их применения к решению краевых задач

Эргашев Т.Г.[1,a], **Кобилов Х.М.**[2,b], **Холдорова И.Ж.**[2,c]

[1] *ТИИИМСХ, Ташкент,* [2] *ФерГУ, Фергана, Узбекистан;*
[a] *ergashev.tukhtasin@gmail.com,* [b] *khoji1997@mail.ru,* [c] *irodaxonxoldorova@mail.ru*

Большие успехи в изучении гипергеометрического ряда одного переменного стимулировали развитие соответствующих теорий для рядов от двух или многих переменных. В 1889 году Горн [1] дал общее определение гипергеометрической функции двух переменных и он установил, что существуют 34 существенно различных сходящихся ряда порядка 2. Кроме того, Горн выделил эти 34 гипергеометрические ряды на полные и конфлюэнтные гипергеометрические функции (Список Горна). Оказывается, существуют 14 полных рядов и существуют 20 конфлэнтных рядов, которые являются предельными формами для полных рядов.

Сривастава и Карлссон [1] установили, что существуют 205 полных гипергеометрических рядов от трех переменных и дали область определения каждой функции из этого списка. Однако, до сих пор не составлен список конфлюэнтных гипергеометрических рядов от трех переменных.

Для исследования гипергеометрической функции многих переменных очень важны формулы разложения, которые позволяют представить гипергеометрическую многих переменных через бесконечную сумму произведений нескольких гипергеометрических функций одного переменного, а это, в свою очередь, облегчает процесс изучения свойств функций многих переменных.

Проведенные нами исследования показали, что существуют 416 существенно различных конфлюэнтных гипергеометрических рядов трех переменных, которые являются предельными формами 205 полных гипергеометрических рядов из списка Сриваставы – Карлссона.

В настоящем сообщении установлены формулы разложения для некоторых тройных конфлюэнтных рядов и найдены их применения к решению краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений.

Литература

1. *Srivastava H.M., Karlsson P.W.* Multiple Gaussian hypergeometric series. New York, Chichester, Brisbane and Toronto: Halsted Press, 1985. 428 p.

Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с оператором распределенного дифференцирования

Эфендиев Б.И.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; beslan_ efendiev@mail.ru

В интервале $0 < x < l$ рассмотрим уравнение

$$u''(x) - q(x) \int\limits_0^\beta \mu(\alpha) D_{0x}^{\alpha} \big[p(x)u(x)\big] d\alpha = f(x), \qquad 0 < \beta < 1, \qquad (1)$$

где D_{0x}^{α} – оператор дробного интегро-дифференцирования Римана – Лиувилля порядка α [1, 2], $\mu(\alpha)$, $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ – заданные функции, $u(x)$ – искомая функция.

Пусть $\mu(\alpha)$ суммируема на отрезке $[0, \beta]$, $p(x)$ удовлетворяет условию Липшица на отрезке $[0, l]$ и $q(x)$ абсолютно непрерывна на отрезке $[0, l]$, то есть

$$\mu(\alpha) \in L[0, \beta], \quad p(x) \in Lip[0, l], \quad q(x) \in AC[0, l]. \qquad (2)$$

Регулярным решением уравнения (1) в интервале $]0, l[$ назовем функцию $u(x)$, принадлежащую классу $C[0, l] \cap C^2]0, l[$ и удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках $x \in]0, l[$.

Задача. *Найти регулярное решение $u(x)$ уравнения (1) в интервале $]0, l[$, удовлетворяющее условиям*

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \qquad (3)$$

где u_0, u_1 – заданные константы.

Теорема. *Пусть $f(x) \in L[0, l] \cap C]0, l[$ и выполнены включения (2). Тогда существует единственное регулярное решение задачи (1), (3). Решение имеет вид*

$$u(x) = -u_0 W_t(x, 0) + u_1 W(x, 0) + \int\limits_0^x W(x, t) f(t) dt.$$

Здесь $W(x, t)$ – фундаментальное решение уравнения (1).

Литература

1. *Нахушев А.М.* О непрерывных дифференциальных уравнениях и их разностных аналогах // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300, № 4. С. 796–799.
2. *Нахушев А.М.* О положительности операторов непрерывного и дискретного дифференцирования и интегрирования весьма важных в дробном исчислении и в теории уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 1. С. 101–109.

Динамика квадратичных отображений Лотки – Вольтерра с вырожденной кососимметрической матрицей (случай малых размерностей)

Эшмаматова Д.Б., Таджиева М.А., Ганиходжаев Р.Н.

ТГТУ, Ташкент, Узбекистан; 24dil@mail.ru

Рассмотрим класс квадратичных стохастических операторов Лотки – Вольтерра $V\;:\;x_k^{'}=x_k(1+\sum\limits_{i=1}^{m}a_{ki}x_i),\;\;k=\overline{1,m}$, где коэффициенты удовлетворяют условиям $a_{ki}=-a_{ki},\;|a_{ki}|\leq 1$ [1].

Это отображение действует в произвольном $(m-1)$-мерном симплексе и отображает симплекс в себя $V:S^{m-1}\to S^{m-1}$.

Пусть V – отображение Лотки – Вольтерра с кососимметрической матрицей, когда главные миноры четного порядка равны нулю, т.е. мы получим отображение Лотки – Вольтерра с вырожденной матрицей, когда некоторые коэффициенты $a_{ki}=0$.

Рассмотрим динамические системы Лотки – Вольтерра с вырожденной кососимметрической матрицей, при $m=3$:

$$V_1:\begin{cases}x_1^{'}=x_1(1+a_{12}x_2),\\x_2^{'}=x_2(1-a_{12}x_1),\\x_3^{'}=x_3,\end{cases}\qquad V_2:\begin{cases}x_1^{'}=x_1(1-a_{12}x_2+a_{13}x_2),\\x_2^{'}=x_2(1+a_{12}x_1),\\x_3^{'}=x_3(1-a_{13}x_1),\end{cases}$$

$$V_3:\begin{cases}x_1^{'}=x_1(1-a_{12}x_2-a_{13}x_3),\\x_2^{'}=x_2(1+a_{12}x_1),\\x_3^{'}=x_3(1+a_{13}x_1),\end{cases}\qquad V_4:\begin{cases}x_1^{'}=x_1(1-a_{12}x_2+a_{13}x_3),\\x_2^{'}=x_2(1+a_{12}x_1),\\x_3^{'}=x_3(1-a_{13}x_1).\end{cases}$$

Теорема. *Решения систем линейных неравенств*

$$P=\{x\in S^{m-1}:\sum_{i=1}^{m}a_{ki}x_i\geq 0\}\quad \textit{и}\quad Q=\{x\in S^{m-1}:\sum_{i=1}^{m}a_{ki}x_i\leq 0\},$$

где $k=\overline{1,m}$, *– выпуклые непустые многогранники.*

В работе найдены множества P и Q для этих систем, а так же даны критерии характера неподвижных точек. Кроме того построены фазовые портреты траектории неподвижных точек.

Литература

1. *Ганиходжаев Р.Н., Таджиева М.А., Эшмаматова Д.Б.* Динамические свойства квадратичных гомеоморфизмов конечномерного симплекса // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2018. Т. 144. С. 104–108.

Об одной нелокальной краевой задаче для уравнения смешанного типа высокого порядка

Юлдашев Т.К.

НУУз, Ташкент, Узбекистан; tursun.k.yuldashev@gmail.com

В области $\Omega = \{(t,x)\,|\,-T < t < T, 0 < x < l\}$ рассматривается дифференциальное уравнение смешанного типа высокого порядка

$$D^{\pm}[U] = \alpha\,(t)\,\beta\,(x) \tag{1}$$

с нелокальным условием интегрального вида

$$U\,(T,\,x) + \int\limits_0^T U\,(t,\,x)\,d\,t = \varphi\,(x),\ \ 0 \le x \le l, \tag{2}$$

где T и l – заданные положительные числа,

$$D^{+} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \varepsilon\frac{\partial^{2k+2}}{\partial t^2\,\partial x^{2k}} - \omega^2\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}},\ \ (t,x) \in \Omega^{+},$$

$$D^{-} = \frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon\frac{\partial^{2k+1}}{\partial t\,\partial x^{2k}} - \frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}},\ \ (t,x) \in \Omega^{-},$$

ω – положительный параметр, ε – положительный малый параметр, k – фиксированное натуральное число, $\alpha(t) \in C(\Omega_T)$, $\Omega_T \equiv [-T;T]$, $\beta(x) \in C\,(\Omega_l)$, $\varphi(x) \in C\,(\Omega_l)$ – заданные достаточно гладкие функции, $\Omega_l \equiv [0;l]$, $\Omega^{+} = \{(t,x)\,|\,0 < t < T,\, 0 < x < l\}$, $\Omega^{-} = \{(t,x)\,|\,-T < t < 0,\, 0 < x < l\}$.

Однозначно определяется регулярная функция $U(t,x)$, удовлетворяющая уравнению (1), интегральному условию (2), граничному условию

$$U(t,\,0) = U(t,\,l) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}U(t,\,0) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}U(t,\,l) =$$

$$= \ldots = \frac{\partial^{2k-2}}{\partial x^{2k-2}}U(t,\,0) = \frac{\partial^{2k-2}}{\partial x^{2k-2}}U(t,\,l) = 0$$

и класс функций

$$U(t,x) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega') \cap C^{1,2k}_{t,x}(\Omega^-) \cap C^{2,2k}_{t,x}(\Omega^+) \cap C^{1+2k}_{t,x}(\Omega^-) \cap C^{2+2k}_{t,x}(\Omega^+),$$

где $\overline{\Omega} = \{(t,x)|-T \le t \le T, 0 \le x \le l\}, \Omega' = \{(t,x)|-T < t < T,\ 0 \le x \le l\}$.

On the spectrum of module linear endomorphisms of the Banach – Kantorovich space

Arziev A.D., Kudaybergenov K.K.

IMASUz, Tashkent, Uzbekistan allabayarziev@gmail.com; karim2006@mail.ru

Let $L^0 = L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ be an algebra of all complex measurable functions on Ω. Consider a linear space X over the field of complex numbers $\mathbb{C}$. A mapping $\|\cdot\| : X \to L^0$ is called a L^0-valued norm on X, if for every $x,\ y \in X,\ \lambda \in \mathbb{C}$ the following relations hold:

1) $\|x\| \geq 0,\ \ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$; 2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$; 3) $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$.

The pair $(X,\ \|\cdot\|)$ is called a lattice-normed space over L^0.

A (bo)-complete d-decomposable lattice-normed space over L^0 is called a Banach – Kantorovich space over L^0. It is known that every Banach – Kantorovich space X over L^0 is a module over L^0 and $\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$ for all $\lambda \in L^0$, $u \in X$ (see [1]).

A L^0-module X equipped with a mapping $(\cdot|\cdot) : X \times X \to L^0$ is called a pre-Hilbert module over L^0 if the following conditions are satisfied:

1) For $x \in X$ we have $(x|x) > 0$. Moreover, $(x|x) = 0$ if and only if $x = 0$.

2) The map $(\cdot|\cdot) : X \to L^0$, $x \longmapsto (x|y)$ is L^0-linear for every $y \in X$.

3) $\overline{(x|y)} = (y|x)$ for all $x, y \in X$.

In a pre-Hilbert module X the Cauchy–Schwarz inequality $|(x|y)| \leq \sqrt{(x|x)}\sqrt{(y|y)}$ holds for all $x, y \in X$. The pre-Hilbert module X is called a Kaplansky–Hilbert module, if it is complete with respect to this norm.

A linear mapping $T : X \to Y$ between Kaplansky–Hilbert modules is called L^0-bounded, if there is $0 \leq c \in L^0$ such that $||T(x)|| \leq c||x||$ for all $x \in X$. Any L^0-bounded L^0-linear mapping $T : X \to Y$ between Kaplansky – Hilbert modules is called a module homomorphism. Denote by $\mathrm{Hom}(X;Y)$ the space of all module homomorphisms. Define a L^0-norm of $T \in \mathrm{Hom}(X;Y)$ by $||T|| = \sup\limits_{||x|| \leq \mathbf{1}} ||T(x)||$. Then $\mathrm{Hom}(X;X)$ is a Banach–Kantorovich algebra over L^0 [2].

Theorem. *Let X be a Kaplansky – Hilbert module over L^0 and let $T \in Hom(X;X)$. The set $spm(T)$ is nonempty, (o)-closed, cyclic and bounded subset of L^0.*

References

1. *Kusraev A.G.* Dominated operators. Kluwer, 2000.

2. *Albeverio S., Ayupov Sh.A., Kudaybergenov K.K.* Derivations on the algebra of measurable operators affiliated with a type I von Neumann algebra // Siberian Adv. Math. 2008, vol. 18, no. 2, pp. 86–94.

On the nonlocal problems in time for time-fractional subdiffusion equations

Ashurov R.R.[1,a], **Fayziev Yu.E.**[2,b]

[1]*IMASUz,* [2]*NUUz, Tashkent, Uzbekistan;* [a]*ashurovr@gmail.com,* [b]*fayziev.yusuf@mail.ru*

The nonlocal boundary value problem, $d_t^\rho u(t) + Au(t) = f(t)$ $(0 < t \leq T)$, $u(\xi) = \alpha u(0) + \varphi$ (α is a constant and $0 < \xi \leq T$), in an arbitrary separable Hilbert space H with the strongly positive selfadjoint operator A, is considered. The operator d_t on the left hand side of the equation expresses either the Gerasimov – Caputo derivative or the Riemann – Liouville derivative; naturally, in the case of the Riemann – Liouville derivatives, the nonlocal boundary condition should be slightly changed. Existence and uniqueness theorems for solutions of the problems under consideration are proved. The influence of the constant α on the existence of a solution to problems is investigated. Inequalities of coercivity are obtained and it is shown that these inequalities differ depending on the considered type of fractional derivatives. The inverse problems of determining the right-hand side of the equation and the function φ in the boundary conditions are investigated.

If $\alpha = 0$ (and $\xi = T$), then these problems are called *the backward problems*. The backward problems in case of the Gerasimov – Caputo derivatives were studied in detail in [1]. The work [2] is devoted to the study of the backward problems in case of the Riemann – Liouville derivatives. It is well known, that regardless of the fact that the classical or fractional derivative is taken into the equation, this problem is ill-possed in the sense of Hadamard.

In case of the classical derivative: $d_t^\rho u(t) = u'(t)$ the above nonlocal boundary value problem has been extensively studied by A. O. Ashyralyev et al. (see, for example, [3]). As shown in this paper the problem, in contrast to the backward problem, is coercively solvable in some spaces of differentiable functions.

References

1. *Sakamoto K., Yamamoto M.* Initial value/boundary value problems for fractional diffusion-wave equations and applications to some inverse problems // J. Math. Anal. Appl. 2011, vol. 382, pp. 426–447.
2. *Alimov Sh.A., Ashurov R.R.* On the backward problems in time for time-fractional subdiffusion equations. 2020, https://www.researchgate.net/ publication/351575279
3. *Ashyralyev A. O., Hanalyev A. Sobolevskii P. E.* Coercive solvability of nonlocal boundary value problem for parabolic equations // Abstract and Applied Analysis. 2001, vol. 6, no. 1, pp. 53–61.

Boundary conjugation problems for piecewise-analytic functions in Besov spaces

Bliev N.K.[a], Yerkinbayev N.M.[b]

IMMM, Almaty, Kazakhstan; [a]bliev.nazarbay@mail.ru, [b]nurlan.erkinbaev@mail.ru

The main aim of this work is solvability of the continuous boundary conjugation problem of analytic functions in the Besov space which is embedded into the class of continuous functions. Moreover, it is aimed to obtain conditions of solvability of such problems in Besov space.

Coefficients of the optimal interpolation formulas in $W_2^{(4,0)}(0,1)$ space

Boltaev A.K.[1,a], Atamuradova B.M.[2,b]

[1]*IM AS RUz,* [2]*Tashkent Vocational School No. 1 for people with disabilities, Tashkent, Uzbekistan;* [a]*aziz_boltayev@mail.ru;* [b]*bashi86@mail.ru*

Consider the following interpolation formula:

$$\varphi(x) \cong P_{\varphi}(x) = \sum_{\beta=0}^{N} C_{\beta}(x)\varphi(x_{\beta}) \tag{1}$$

where $C_{\beta}(x)$ are the coefficients and x_{β} are the nodes of the interpolation formula (1), $x_{\beta} \in [0,1]$, δ is Dirac's delta-function, function φ belongs to the Hilbert space $W_2^{(4,0)}(0,1)$.

The difference $\varphi - P_{\varphi}$ is called *the error* of the interpolation formula (1). The value of this error at a point $z \in [0,1]$ is a linear functional on the space $W_2^{(4,0)}(0,1)$ and it has the form $\ell(x,z) = \delta(x-z) - \sum\limits_{\beta=0}^{N} C_{\beta}(z)\delta(x-x_{\beta})$.

In the present work we construct the optimal interpolation formula of the form (1) in the space $W_2^{(4,0)}$ and we find explicit formulas for optimal coefficients $\mathring{C}_{\beta}(z)$ (if there exist) satisfying the following equality $\left\|\mathring{\ell}\right\|_{W_2^{(4,0)*}} = \inf\limits_{C_{\beta}(z)} \|\ell\|_{W_2^{(4,0)*}}$. The following is true

Theorem. *The coefficients of the optimal interpolation formula of the form (1) in the space $W_2^{(4,0)}$ have the form*

$$\begin{aligned}
C_0 &= \frac{8}{K} \cdot \left[B_1(z,h) + \sum_{k=1}^{3} \frac{A_k}{\tau_k} \cdot \left(\sum_{\gamma=0}^{N} \tau_k^{\gamma} G_4(z-h\gamma) + M_k + \tau_k^N N_k \right) \right], \\
C_{\beta} &= \frac{8}{K} \cdot \left[B_2(z,h) + \sum_{k=1}^{3} \frac{A_k}{\tau_k} \cdot \left(\sum_{\gamma=0}^{N} \tau_k^{|\beta-\gamma|} G_4(z-h\gamma) + \tau_k^{\beta} M_k + \tau_k^{N-\beta} N_k \right) \right], \\
\beta &= \overline{1, N-1}, \\
C_N &= \frac{8}{K} \cdot \left[B_3(z,h) + \sum_{k=1}^{3} \frac{A_k}{\tau_k} \cdot \left(\sum_{\gamma=0}^{N} \tau_k^{N-\gamma} G_4(z-h\gamma) + \tau_k^N M_k + N_k \right) \right].
\end{aligned}$$

where $B_1(z,h), B_2(z,h), B_3(z,h), G_4(z-h\gamma), A_k, \tau_k, M_k$ and $N_k (k=1,2,3)$ are known.

Equivalence of curves in Galileo-symplectic geometry

Chilin V.[a], ***Muminov K.*** [b]

NUUz, Tashkent, Uzbekistan; [a]*vladimirchil@gmail.com,* [b]*m.muminov@rambler.ru*

Let $GL(2n,\mathbb{R})$ be the group of all invertible linear transformations of $\mathbb{R}^{2n}$. Identifying elements of $\mathbb{R}^{2n}$ with $2n$-dimensional vector-columns $\vec{x} = \{x_j\}_{j=1}^{2n}$ and transformations $g \in GL(2n,\mathbb{R})$ with $2n \times 2n$ matrices $(g_{ij})_{i,j=1}^{2n}$, one can consider the action of a linear transformation $g \in GL(2n,\mathbb{R})$ on $\mathbb{R}^{2n}$ as the multiplication of g by $\vec{x}$ (writing $g\vec{x}$).

Let $Sp(2n,\mathbb{R}) = \{g \in GL(2n,\mathbb{R}) : \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle g\vec{x}, g\vec{y} \rangle$ for all $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^{2n}\}$ be the symplectic subgroup in $GL(2n,\mathbb{R})$, where $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_2 - x_2 y_1 + \cdots + x_{2n-1} y_{2n} - x_{2n} y_{2n-1}$. Denote by $\vec{e}_i = (0, ...0, 1, 0, ..., 0)$ the canonical basis in $\mathbb{R}^{2n}$, $i = 1, \ldots, 2n$, and put $U_{2n} = \{\alpha \cdot \vec{e}_1\}$, $V_{2n} = \{\alpha \cdot \vec{e}_{2n}\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $W_{2n} = \left\{\sum_{i=2}^{2n-1} \alpha_i \cdot \vec{e}_i : \alpha_i \in \mathbb{R},\right.$ $i = 2, \ldots, 2n-1\}$. Consider the subgroup $\Gamma_{Sp}(2n,\mathbb{R})$ in $GL(2n,\mathbb{R})$ of all such $g = (g_{ij})_{i,j=1}^{2n} \in GL(2n,\mathbb{R})$ for which $g(U_{2n}) = U_{2n}$, $g_{11} = \pm 1$, $g(V_{2n}) = V_{2n}$, $g_{2n,2n} = \pm 1$, $g(W_{2n}) = W_{2n}$, and the restriction $g|_{W_{2n}}$ of g to the subspace W_{2n} is an element of the symplectic group $Sp(2(n-1),\mathbb{R})$. It is clear that $\Gamma_{Sp}(2n,\mathbb{R})$ is a subgroup in the symplectic group $Sp(2n,\mathbb{R})$ (this subgroup is called *Galilean group of symplectic linear transformations in* $\mathbb{R}^{2n}$).

Denote by I the interval $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ (the cases $a = -\infty$ or $b = +\infty$ are possible). An *I-path* is a vector function $\vec{x}(t) = \{x_j(t)\}_{j=1}^{2n} \in \mathbb{R}^{2n}$, $t \in I$, such that the coordinate functions $x_j(t)$, $j = 1, \ldots, 2n$, are C^∞ – differentiable. The r-th derivative of the I-path $\vec{x}(t) = \{x_j(t)\}_{j=1}^{2n}$ is the vector-function $\vec{x}^{(r)}(t) = \{x_j^{(r)}(t)\}_{j=1}^{2n}$, where $x_j^{(r)}(t)$ is the r-th derivative of the coordinate function $x_j(t)$, $j = 1, \ldots, 2n$, $r = 1, 2, \ldots$

We say that the I-path $\vec{x}(t) = \{x_j(t)\}_{j=1}^{2n}$ is a *Galilean I-path,* if $|x_1^{(1)}(t)| + |x_{2n}^{(1)}(t)| \neq 0$ and $\det M_{2n-2}(\vec{x}(t)) \neq 0$ for all $t \in I$, where

$$M_{2n-2}(\vec{x}(t)) = \left(x_j^{(i)}(t)\right)_{i=0,1,\ldots,2n-3,\ j=2,\ldots,2n-1},\ x_j^{(0)}(t) = x_j(t).$$

I-paths $\vec{x}(t)$ and $\vec{y}(t)$ are called $\Gamma_{Sp}(2n,\mathbb{R})$-*equivalent* if there exists $g \in \Gamma_{Sp}(2n,\mathbb{R})$ such that $\vec{y}(t) = g\vec{x}(t)$ for all $t \in I$. The following theorem gives a criterion for the $\Gamma_{Sp}(2n,\mathbb{R})$-equivalence of Galilean I-paths in the space $\mathbb{R}^{2n}$ (see [1]).

Theorem 1. *Two Galilean I-paths $\vec{x}(t)$ and $\vec{y}(t)$ are $\Gamma_{Sp}(2n,\mathbb{R})$-equivalent if and only if $x_1(t) = \pm y_1(t)$, $x_{2n}(t) = \pm y_{2n}(t)$ and*

$$x_2^{(k-1)}(t)x_3^{(k)}(t) - x_2^{(k)}(t)x_3^{(k-1)}(t) + \cdots + x_{2n-2}^{(k-1)}(t)x_{2n-1}(k)(t) - x_{2n-2}(k)(t)x_{2n-1}^{(k-1)}(t) =$$

$$y_2^{(k-1)}(t)y_3^{(k)}(t) - y_2^{(k)}(t)y_3^{(k-1)}(t) + \cdots + y_{2n-2}^{(k-1)}(t)y_{2n-1}^{(k)}(t) - y_{2n-2}^{(k)}(t)y_{2n-1}^{(k-1)}(t)$$

for all $t \in I$, $k = 1, \ldots, 2n-2$.

Two paths $\vec{x} : I_1 \to \mathbb{R}^n$ and $\vec{y} : I_2 \to \mathbb{R}^n$ are called D-equivalent, if there exists C^∞ – differentiable function φ from I_2 onto I_1, such that $\varphi'(t) > 0$ and $\vec{y}(t) = \vec{x}(\varphi(t))$ for all $t \in I_2$. A class $\gamma = \gamma(\vec{x})$ of all pathes that are D-equivalent to the path $\vec{x}(t)$ is called an oriented curve in $\mathbb{R}^{2n}$ generated by this path. In this case, a path $\vec{y}$ from class γ is called a parametrization of γ. If $\vec{x}(t)$ is a Galilean I-path and $\vec{y}(t) \in \gamma(\vec{x}(t))$, then $\vec{y}(t)$ is also a Galilean I-path. We say that an oriented curve γ is a Galilean curve, if $\gamma = \gamma(\vec{x})$, where $\vec{x}(t)$ is a Galilean I-path.

Let $\vec{x}(t)$ be an I-path in $\mathbb{R}^{2n}$, $g \in \Gamma_{Sp}(2n,\mathbb{R})$, $\gamma = \gamma(\vec{x}(t))$, and let $g\gamma = \gamma(g(\vec{x}(t))$. The curves γ_1 and γ_2 are called $\Gamma_{Sp}(2n,\mathbb{R})$ - *equivalent*, if there exists $g \in \Gamma_{Sp}(2n,\mathbb{R})$ such that $\gamma_2 = g\gamma_1$. It is clear, that $\Gamma_{Sp}(2n,\mathbb{R})$-equivalence of paths $\vec{x}(t)$ and $\vec{y}(t)$ implies $\Gamma_{Sp}(2n,\mathbb{R})$-equivalence of curves $\gamma(\vec{x})$ and $\gamma(\vec{y})$. The converse is generally not true.

If $\vec{x}(t)$ is a Galilean I-path then $|x_1^{(1)}(t)| + |x_{2n}^{(1)}(t)|$ is a positive continuous function on I, in particular, there exists a finite integral $l_{\vec{x}}(c,d) = \int\limits_c^d |x_1^{(1)}(t)| + |x_{2n}^{(1)}(t)|dt \geq 0$ for any segment $[c,d] \subset I$. Therefore, for interval $I = (a,b)$ the following finite or infinite limits are defined $l_{\vec{x}}(a,d) = \lim_{c\to a+0} l_{\vec{x}}(c,d)$, and $l_{\vec{x}}(c,b) = \lim_{d\to b-0} l_{\vec{x}}(c,d)$. We say that an I-path $\vec{x}(t)$ is a path of the type

$(L1)$, if $l_{\vec{x}}(a,d) < \infty$ and $l_{\vec{x}}(c,b) < \infty$; $(L2)$, if $l_{\vec{x}}(a,d) < \infty$ and $l_{\vec{x}}(c,b) = +\infty$;

$(L3)$, if $l_{\vec{x}}(a,d) = +\infty$ and $l_{\vec{x}}(c,b) < \infty$; $(L4)$, if $l_{\vec{x}}(a,d) = +\infty$ and $l_{\vec{x}}(c,b) = +\infty$.

Define the interval $I(\vec{x}) = \big(A(\vec{x}),\ B(\vec{x})\big) \subset \mathbb{R}$ according to the following rule:

(i). If $\vec{x}(t)$ is of type $(L1)$, then we set $A(\vec{x}) = 0$ and $B(\vec{x}) = \int\limits_a^b |x_1^{(1)}(t)| + |x_{2n}^{(1)}(t)|dt$;

(ii). If $\vec{x}(t)$ is of type $(L2)$, then we set $A(\vec{x}) = 0$ and $B(\vec{x}) = +\infty$;

(iii). If $\vec{x}(t)$ is of type $(L3)$, then we set $A(\vec{x}) = -\infty$ and $B(\vec{x}) = 0$;

(iv). If $\vec{x}(t)$ is of type $(L4)$, then we set $A(\vec{x}) = -\infty$ and $B(\vec{x}) = +\infty$.

Define now a special parametrization for Galilean I-path $\vec{x}(t)$. Consider a function $p_{\vec{x}}$ from $I = (a,b)$ onto $I(\vec{x})$, using the following rule: If an I-path $\vec{x}(t)$ has a type $(L1)$ or $(L2)$, then $p_{\vec{x}}(t) = l_{\vec{x}}(a,t)$; a type $(L3)$, then $p_{\vec{x}}(t) = -l_{\vec{x}}(t,b)$; a type $(L4)$, then $p_{\vec{x}}(t) = l_{\vec{x}}(a_I,t)$, for some fixed point $a_I \in I$.

Since $\vec{x}(t)$ is a Galilean I-path, it follows that the function $p_{\vec{x}}(t)$ is C^∞ – differentiable and $p'_{\vec{x}}(t) > 0$ for each $t \in I$. In particular, there exists an inverse function $q_{\vec{x}}(s)$ from $I(\vec{x})$ onto I, in addition, $q_{\vec{x}}$ is a C^∞ – differentiable function and $q'_{\vec{x}}(s) > 0$ for all $s \in I(\vec{x})$. Therefore, $\vec{y}(s) = \vec{x}\big(q_{\vec{x}}(s)\big)$ is a Galilean $I(\vec{x})$-path and $\gamma(\vec{x}) = \gamma(\vec{y})$. Using Theorem 1 and an parametrization $\vec{x}(\big(q_{\vec{x}}(s)\big)$ we obtain the following criterion of $\Gamma_{Sp}(2n,\mathbb{R})$-equivalence of Galilean curves.

Theorem 2. *Let γ and β be a curves, generated by Galilean I-path $\vec{x}$ and Galileo J-path $\vec{y}$, let $\vec{u}(s) = \vec{x}\big(q_{\vec{x}}(s)\big)$, $s \in I(\vec{x})$, $\vec{v}(r) = \vec{y}\big(q_{\vec{y}}(r)\big)$, $r \in J(\vec{y})$. Then the curves γ and β are $\Gamma_{Sp}(2n,\mathbb{R})$-equivalent if and only if $I(\vec{x}) = J(\vec{y})$, $v_1(t) = \pm u_1(t), v_{2n}(t) = \pm u_{2n}(t)$ and*

$$v_2^{(k-1)}(t)v_3^{(k)}(t) - v_2^{(k)}(t)v_3^{(k-1)}(t) + \cdots + v_{2n-2}^{(k-1)}(t)v_{2n-1}(k)(t) - v_{2n-2}(k)(t)v_{2n-1}^{(k-1)}(t) =$$

$$= u_2^{(k-1)}(t)u_3^{(k)}(t) - u_2^{(k)}(t)u_3^{(k-1)}(t) + \cdots + u_{2n-2}^{(k-1)}(t)u_{2n-1}^{(k)}(t) - u_{2n-2}^{(k)}(t)u_{2n-1}^{(k-1)}(t)$$

for all $t \in I(\vec{x})$, $k = 1, \ldots, 2n-2$.

References

1. *Muminov K.K, Chilin V.I.,* Equivalence of paths in Galilean-symplectic geometry // Abstracts of reports of conf. «Modern methods of mathematical physics and their applications», Tashkent, November 17-18, 2020, pp. 29–32.

Extreme points of the set of elements majorized by an integrable function

Dauitbek D.

IMMM, Almaty, Kazakhstan; dauitbek@math.kz

Let f be an arbitrary integrable function on a finite measure space (X, Σ, ν). We characterise the extreme points of the set $\Omega(f)$ of all measurable functions on (X, Σ, ν) majorised by f, providing a complete answer to a problem raised by W.A.J. Luxemburg in 1967.

Inverse coefficient problem for the time-fractional diffusion equation

Durdiev D.K.

Bukhara Branch of the IM AS RUz, Bukhara, Uzbekistan;

d.durdiev@mathinst.uz

We consider the following one dimensional anomalously diffusive equation:

$$ {}_0D_t^{\alpha} u - u_{xx} + q(t)u(x,t) = f(x,t),\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

the solution of which satisfies the initial condition

$$ u(x,0) = \varphi(x),\ x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

where the Gerasimov – Caputo fractional differential operator ${}_0D_t^{\alpha}$ is defined by [1]

$$ {}_0D_t^{\alpha} u(x,t) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u_{\tau}(x,\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}} d\tau,\ \alpha \in (0,1]$$

and $f(x,t)$, $\varphi(x)$ are given smooth functions.

We pose the inverse problem as follows: find the function $q(t)$, $t > 0$ in (1), if the solution of the Cauchy problem (1), (2) satisfies

$$ u(0,t) = g(t),\ t > 0, \tag{3}$$

$g(t)$ is a given function.

By $C^m(\mathbb{R})$ we denote the class of functions that are bounded in $\mathbb{R}$ together with all derivatives up to the order of m. When $m = 0$, $C^0(\mathbb{R}) =: C(\mathbb{R})$ and this is usual space of continuous and bounded functions.

We also introduce the class $H^l(\mathbb{R})$ of bounded Hölder continuous functions on $\mathbb{R}$ with $l \in (0,1)$. By $C\left([0,\, T],\ H^l(\mathbb{R})\right)$ we denote the class of continuous with respect to t variable on the segment $[0,\, T]$ with values in $H^l(\mathbb{R})$ functions.

Theorem 1. *If $f(x,t) \in C\left([0,\, T],\ H^l(\mathbb{R})\right)$, $\varphi(x) \in C^2(\mathbb{R})$, $g(t) \in C^1[0,\, T]$, $|g(t)| \geq g_0 = const > 0$, g_0 is a given number, $\varphi(0) = g(0)$, then there exists a number $T^* \in (0, T)$, such that there exists a unique solution $q(t) \in C[0,\, T^*]$ of the inverse problem (1)–(3).*

References

1. *A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo* Theory and application of fractional differetial equations. North–Holland Mathematical Studies, Amsterdam: Elsevier, 2006.

A model of age heaping with applications to population graduation that retains informative demographic variation

Ediev D.M.

NCSA, Cherkessk; MSU, Moscow, Russia; ediev@ncsa.ru

Age heaping remains an issue in both historical and contemporary demographic studies. Traditional smoothing techniques are problematic in dealing with age heaping in cases where the population age structure shows both the digit preference and informative variation by age that should not be lost during the graduation. Same applies to more recent modelling-based smooth reconstructions of the latent population distributions. We generalize and modify an earlier model where age rounding's propensity depends on the distance to the round age and the strength of age heaping at that age. Efficient and robust estimation method is proposed for parameterizing the model that allows reconstructing the latent population distribution by age. We test our model in comparison to the traditional alternatives on an ample set of empirical data. Our method is capable of removing age heaping without substantial distortions of the actual population variation by age. In comprehensive empirical testing, our method appears the best in both the quality of heaping removal and retaining the informative population variation. The method has good potential for a wide practical application.

The research leading to these results has received funding from the Russian Foundation for Basic Research under Grant 18-01-00289 «Mathematical models and methods of correcting the distortions of the age structure and mortality rates of the elderly population».

A reaction – diffusion – advection competition model with a free boundary

Elmurodov A.N.

IMASUz, Tashkent, Uzbekistan; elmurodov@mathinst.uz

The article discusses the existence and qualitative properties of solutions of a competitive-diffusion system of quasilinear parabolic equations in a domain with a free boundary. The problem of describing the dynamic process of the invasion of a new competitor into the habitat of a local species belongs to Du and Lin [1], who investigated the nonlinear evolution of two species in an unbounded spatial domain.

We focus on the case where the indigenous population undergoes expansion and growth in a limited area to be more realistic, and we investigate the model of diffuse competition described by the following problem $Q = \{(t,x) : t > 0, h(t) < x < s(t)\}$, $D = \{(t,x) : t > 0, |x| < l\}$,

$$\begin{cases} a(u)u_t - d_1 u_{xx} - k_1 u_x = u(a_1 - b_1 u - c_1 v), \quad (t,x) \in Q, \\ b(v)v_t - d_2 v_{xx} - k_2 v_x = v(a_2 - b_2 u - c_2 v), \quad (t,x) \in D, \\ u(0,x) = u_0(x), \quad -l < -s_0 \leqslant x \leqslant s_0 = s_0 < l, \\ v(0,x) = v_0(x), \quad -l \leqslant x \leqslant l, \\ v(t,-l) = v(t,l) = u(t,h(t)) = u(t,s(t)) = 0, \quad t \geqslant 0, \\ \dot{s}(t) = -\mu_1 u_x(t,s(t)), \quad \dot{h}(t) = -\mu_2 u_x(t,h(t)), t > 0, \end{cases} \tag{1}$$

where $x = h(t)$, $x = s(t)$ is called a free boundary, which is to be determined together with u and v, all the parameters a_i, b_i, c_i, d_i, k_i and $\mu_i (i = 1, 2)$ are given positive constants.

The coefficients $a(u)$, $b(v)$ and functions $u_0(x)$, $v_0(x)$ satisfy:

$$\begin{cases} A_0 \geqslant a(u) \geqslant a_0 > 0, \quad B_0 \geqslant b(v) \geqslant b_0 > 0, \quad Q; \\ u_0(x) \in C^2([-s_0, s_0]), u_0(-s_0) = u_0(s_0) = 0 \text{ and } u_0(x) \text{ in } [-s_0, s_0]; \\ v_0(x) \in C^2[-l, l], v_0(l) = 0, v_0(-l) = 0, v_0(x) \geqslant 0 \text{ in } [-l, l]. \end{cases}$$

This model describes how a new species with population density u invades into the habitat of a native competitor v.

Problem (1) with $a(u) \equiv 1$, $b(v) \equiv 1$ was studied in [1].

The main contribution of this article is the establishment of the global existence of the classical solution to problem (1) and the study of the behavior of the solution. A method is proposed for establishing a priori Schauder-type estimates for a new class of free boundary problems for mixed-two-phase equations. The principle of comparison is proved.

References

1. *Du Y.H., Lin, Z.G.* The diffusive competition model with a free boundary: invasion of a superior or inferior competitor // Discrete Contin. Dyn. Syst. B. 2014, vol. 19, pp. 3105–3132.

Decomposition of one linear programming problem with complex structures

Gasimov G.G.[a], Kerimov S.R.

ASOIU, Baku, Azerbaijan; [a] q.qasim56@gmail.com

The thesis is devoted to the problem of linear programming with a special structure, where the main matrix is in a block-ladder form

$$(c, x_j) \to \max, \tag{1}$$

$$A_1 x_1 \leq b, \tag{2}$$

$$A_j x_j \leq x_{j-1}, \ j \in [2; J], \tag{3}$$

$$x_j \geq 0, \ j \in [1; J]. \tag{4}$$

The dimensions of the vector x_j and matrix A_j are consistent, b is vector with dimensions m_j, $j \in [1; J]$, x and c are vectors with dimensoin $j \in [1; J]$. An algorithm for solving the problem is created and a universal batch program is developed. At the same time, Danchik-Wolfe decomposition method was also used to solve the problem.

The algorithm was used to solve a practical problem, and a positive result was achieved.

References

1. *Budak B.M., Samarskii A., Tikhonov A.N.* A collection of problems in mathematical physics. Poland: Pergamon Press, 2004.
2. *Samarskii A.A.* The theory of difference schemes. New York: CRC Press, 2001. 786 p.

Obtaining fractional order differential equation for Laplace – Stieltjes transform of the joint distribution for semi-Markov walk process

Ibayev E.A., Omarova K.K.

ICS ANAS, Baku, Azerbaijan; elshanibayev@gmail.com, omarovakonulk@gmail.com

Let there be given a sequence of independent and identically distributed pairs of random variables $\{\xi_k, \zeta_k\}_{k\geq 1}$ defined on the probability space $(\Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P})$, where the random variables ξ_k and ζ_k, $k=\overline{1,\infty}$ are positive and independent. Using these random variables, we construct the following semi-Markovian random walk process

$X_z(t,\omega) = z - t + \sum\limits_{i=0}^{k-1}\zeta_i$, if $\sum\limits_{i=0}^{k-1}\xi_i \leq t < \sum\limits_{i=0}^{k}\xi_i \quad k=\overline{1,\infty}$,

where $\xi_0 = \zeta_0 = 0$.

Let $\tau_1^a(\omega)$ be first reaching moment to level a (a>0) and $\gamma_1^a(\omega)$ be length of jump from the level by process $X_z(t,\omega)$

$\tau_1^a(\omega) = \inf\{t : X_z(t,\omega) \geq a\}$ and $\gamma_1^a(\omega) = X_z(\tau_1^a, \omega) - a$.

We denote

$$L(t, \gamma|\, z) = P\left\{\tau_1^a(\omega) < t;\, \gamma_1^a(\omega) > \gamma|\, X_z(0,\omega) = z\right\}.$$

It is well known that the Laplace –Stieltjes transformation of $L(t,\gamma|\,z)$ has

$$\tilde{L}(\theta,\gamma|\,z) = \int\limits_{t=0}^{\infty} e^{-\theta t} d_t L(t,\gamma|\,z),\ \ \theta > 0\,.$$

We set

$$Q(\theta,\gamma\,|z) = e^{(\theta+\beta)z}\,\tilde{L}(\theta,\gamma|\,z).$$

Fractional order differential equation will be as follows

$$D_z^{\alpha+1}(Q\,(\theta,\gamma\,|z)) - (\mu+\theta+\beta)D_z^{\alpha}(Q\,(\theta,\gamma\,|z)) + \mu\beta^{\alpha}Q\,(\theta,\gamma\,|z) = 0.$$

References

1. *Ibayev E.A.* Laplace transform of the distribution of the first moment reaching positive level // Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. 2006, vol. 6, no. 4, pp. 115–120.

2. *Bandaliyev R.A., Nasirova T.H. and Omarova K.K.* Mathematical modeling of the semi-Markovian random walk processes with jumps and delaying screen by means of a fractional order differential equation // Math. Meth. Appl. Sci. 2018, vol. 41, no. 18, pp. 9301–9311.

Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equations in $\mathbb{R}^2$

Juraev D.A.

HMASRU, Karshi, Uzbekistan; juraev_davron@li.ru

In this paper, the problem of continuation of the ill-posed Cauchy problem solution is studied for matrix factorizations of the Helmholtz equation in a two-dimensional bounded domains (see, for instance [1-2]).

Let $\mathbb{R}^2$ be a two dimensional real Euclidean space, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, $G_\rho \subset \mathbb{R}^2$ is a bounded simply connected domain which boundary consists of segments of rays $|y_1| = \tau y_2,\ \ 0 < y_2 \leq y_0 < \infty$, with the beginning at zero and the arc S of a smooth curve lying inside the angle of width $\dfrac{\pi}{\rho}$, i.e., $\partial G_\rho = S \bigcup T,\ T = \partial G_\rho \backslash S$.

We assume that $(0, x_2) \in G_\rho,\ \ x_2 > 0$. $G_\rho-$ is called a domain of the type of a curvilinear triangle.

We consider a system of differential equations in the region G_ρ

$$D\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) U(x) = 0, \tag{1}$$

where $D\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ is the matrix of first-order differential operators.

We denote by $A(G_\rho)$ the class of vector functions in the domain G_ρ continuous on $\overline{G}_\rho = G_\rho \bigcup \partial G_\rho$ and satisfying system (1).

Formulation of the problem. *Suppose* $U(y) \in A(G_\rho)$ *and*

$$U(y)|_S = f(y),\ y \in S.$$

Here, $f(y)$ a given continuous vector-function on S. It is required to restore the vector function $U(y)$ in the domain G_ρ, based on it's values $f(y)$ on S.

References

1. *Juraev D.A.* On the Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation in a bounded domain // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2018, vol.15, pp. 11–20.

2. *Juraev D.A.* On a regularized solution of the Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation // Advanced Mathematical Models & Applications. 2019, vol. 4, no. 1, pp. 86–96.

Mixed Cauchy boundary value problem for noncharacteristic degenerate hyperbolic equations

Kakharman N.

IMMM, Almaty, Kazakhstan; n.kakharman@math.kz

In this paper, in a cylindrical domain $D = \Omega \times (0, T)$, with $\Omega \subset R^n$ we consider a mixed Cauchy problem with potential lateral boundary condition for the following noncharacteristic degenerated equation

$$Lu = u_{tt} - k(t)\Delta_x u(x,t) = f(x,t),$$

where $k(t) \geq 0$. As in the case for strictly hyperbolic equations, we first establish that $u \in W_2^1(D)$ and $u \in W_2^2(D)$ under the assumptions $\left\| \frac{f}{k} \right\|_{L_2(\Omega)}(t) < \infty$ and $\left\| \frac{grad_x f}{k} \right\|_{L_2(\Omega)}(t) < \infty$ for every $t \in [0, T]$, respectively.

A number of works has been devoted to the study of the mixed Cauchy problem for noncharacteristically degenerate second-order hyperbolic equations, beginning with the work of M.L. Krasnov [1]. Later these works were generalized for general degenerate higher order equations by D.T. Dzhuraev [2], V.N. Vragov [3] and A.I. Kozhanov [4].

In the study of the mixed Cauchy problem in a cylindrical domain, the lateral boundary conditions are usually local boundary conditions of the Dirichlet type or periodic boundary conditions.

In the work of T.Sh. Kalmenov and D. Suragan [5], the boundary condition for the Newton (volume) potential was found, which is a new integro-differential self-adjoint boundary condition for the Laplace equation.

In this paper, we study the mixed Cauchy problem for one class of noncharacteristic degenerate hyperbolic equations using this boundary condition. Unlike other works devoted to this topic, where solutions of the mixed Cauchy problem with different lateral boundary conditions of the considered problems are obtained in weighted spaces, in this paper, all solutions of the considered mixed Cauchy problems are obtained in classical Sobolev spaces.

References

1. *Krasnov M.L.* Mixed boundary problems for degenerate linear hyperbolic differential equations second order // Matematicheskii Sbornik, 1959, vol. 49(91), pp. 29–84.
2. *Dzhuraev T.D.* Boundary value problems for equations of mixed and mixed-composite types. Tashkent: Fan, 1979.
3. *Vragov V.N.* Boundary value problems for nonclassical equations of mathematical physics. Novosibirsk Univ., Novosibirsk, 1983.
4. *Kozhanov A.I.* Linear inverse problems for a class of degenerate equations of Sobolev type // Vestnik YuUrGU. Ser. Mat. Model. Progr. 2012, no. 11, pp. 33–42.
5. *Kal'menov T.S., Suragan D.* To spectral problems for the volume potential // Doklady Mathematics, 2009, vol. 80, no. 2, pp. 646–649.

Inverse source problem for divergence form parabolic equations

Karazym M.

Nazarbayev University, Nur-Sultan, Kazakhstan; mukhtar.karazym@nu.edu.kz

Let Ω be an open bounded domain in $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ with piecewise smooth boundary $\partial\Omega$ and let T be a positive real number.

Following the paper [1] where our method was introduced, we solve an inverse problem of recovering r explicitly

$$\begin{aligned} \rho(x)\partial_t u(t,x) - \nabla_x \cdot \big(p(x)\nabla_x u(t,x)\big) = r(t), \qquad & (t,x) \in (0,T)\times\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x), \qquad & x \in \Omega, \\ u(t,x) = 0, \qquad & (t,x) \in (0,T)\times\partial\Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

from the observation data at a single point $x_0 \in \Omega$

$$h_1(t) := u(t, x_0), \tag{2}$$

which is continuously differentiable in $[0,T]$.

References

1. *Karazym M., Ozawa T., Suragan D.* Multidimensional inverse Cauchy problems for evolution equations // Inverse Problems in Science and Engineering, 2020, vol. 28, no. 11, pp. 1582–1590.

This work was supported by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP09057887).

Global Lagrange stability analysis of shunting inhibitory cellular neural networks with time-varying delays

Kashkynbayev A.T.

Nazarbayev University, Nur-Sultan, Kazakhstan; ardak.kashkynbayev@nu.edu.kz

The stability in the Lagrange sense for cellular neural networks (CNNs) has proven to be one of the effective tools to study multi-stable dynamics of the neural networks. In this work, rather than studying the existence and Lyapunov stability of an equilibrium point we investigate multi-stable dynamics of shunting inhibitory cellular neural networks (SICNNs) with time-varying delays and coefficients. This is the first study that addresses the Lagrange stability for SICNNs. By constructing proper Lyapunov functions and using inequality techniques, we analyze three different types of activation functions, namely, bounded, sigmoid and Lipschitz-like type activation functions. New delay-dependent sufficient criteria are derived to ensure the global Lagrange stability for SICNNs. Furthermore, globally exponentially attractive sets are given for the different activation functions. Finally, an illustrating example with numerical simulations is given to support the theoretical results.

This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant «Dynamical Analysis and Synchronization of Complex Neural Networks with Its Applications».

Almost periodic solutions of fuzzy retarded SICNNs

Kashkynbayev A.[1,a], **Koptileuova M.**[1,b], **Issakhanov A.**[2,c], **Cao J.** [3,d]

[1]*Nazarbayev University, Nur-Sultan,* [2]*IMMM,* [3]*Southeast University, Almaty, Kazakhstan;* [a]*ardak.kashkynbayev@nu.edu.kz,* [b]*moldir.koptileuova@nu.edu.kz,* [c]*alfarabi.issakhanov@gmail.com,* [d]*jdcao@seu.edu.cn*

We present our study about almost periodic solutions of fuzzy shunting inhibitory cellular neural networks (FSICNNs) with several delays

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_{pq}(t) = &-a_{pq}(t)x_{pq}(t) - \sum_{C_{kl}\in N_r(p,q)} C_{pq}^{kl}(t)f(x_{kl}(t))x_{pq}(t) + L_{pq}(t)+ \\
&+ \sum_{C_{kl}\in N_r(p,q)} B_{pq}^{kl}(t)U_{pq}(t) - \bigwedge_{C_{kl}\in N_r(p,q)} D_{pq}^{kl}(t)f(x_{kl}(t-\tau_{kl}))x_{pq}(t)- \\
&- \bigvee_{C_{kl}\in N_r(p,q)} E_{pq}^{kl}(t)f(x_{kl}(t-\tau_{kl}))x_{pq}(t) + \bigwedge_{C_{kl}\in N_r(p,q)} T_{pq}^{kl}(t)U_{pq}(t)+ \\
&+ \bigvee_{C_{kl}\in N_r(p,q)} H_{pq}^{kl}(t)U_{pq}(t).
\end{aligned}
$$

Almost periodic solutions of FSICNNs were not studied thoroughly before, which increases the importance of this study for the sake of theoretical enrichment of this field. We analyze FSICNNs for uniqueness and stability of its almost periodic solutions. 6 sufficient conditions are presented, and proven for existence of unique and exponentially stable almost periodic solutions. In addition, numerical example confirming theoretical findings is presented, which was constructed out of 5 sets of initial conditions, resulting in the converging and stable solutions.

This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant «Dynamical Analysis and Synchronization of Complex Neural Networks with Its Applications»).

Inverse problem for integro-differential Kelvin – Voigt equation

Khompysh Kh.

Al-Farabi KazNU, Almaty, Kazakhstan; konat_k@mail.ru

In this work, we study the questions of existence and uniqueness of the weak solutions of the following inverse problem for Kelvin– Voigt equations with memory describing the motion of one an incompressible viscoelastic nonnewtonian fluids [1]

$$\begin{aligned}
&\vec{u}_t(x,t) - \mu\Delta\vec{u}(x,t) - \kappa\Delta\vec{u}_t(x,t) + \nabla p - \textstyle\int_0^t K(t-\tau)\Delta\vec{u}(x,\tau)d\tau = f(t)\vec{g}(x,t),\\
&div\,\vec{u}(x,t) = 0, \quad (x,t) \in Q_T,\\
&\vec{u}(x,t) = 0, \ (x,t) \in S_T,\\
&\vec{u}(x,0) = \vec{u}_0(x), \ \ x \in \Omega,\\
&\textstyle\int_\Omega \vec{u}(x,t)\omega(x)dx = e(t), \ t \in [0,T].
\end{aligned}$$

Here $\Omega \in R^d$, $d \geq 2$ is a bounded domain with smooth boundary $\partial\Omega$ and $Q_T = \Omega\times(0,T)$ is a cylinder with the leteral $S_T = \partial\Omega\times[0,T]$. The inverse problem consists of determine the intensity of an external forcing $f(t)$ the velocity field $\vec{u}(x,t)$, and the pressure $p(x,t)$.

References

1. *Oskolkov A.P.* The uniqueness and solvability in the large of boundary value problems for the equations of motion of aqueous solutions of polymers // Zap. Nauchn. Sem. LOMI. 1973, vol. 38, pp. 98–136.

Supported by the Grants no. AP08052425 and AP09057950 of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (MES RK).

One non-local problem for the time-fractional equations on the Metric Graph

Khujakulov J.R.

IMASUz, Tashkent, Uzbekistan; jonibek@mail.ru

Let us a graph have j incoming and m outgoing edges. At the incoming edges, the coordinates are determined from L_j to 0, and in outgoing edges from 0 to L_m. The edges of the graph are denoted by $B_k, B_k = \{x_k : 0 < x_k < L_k\}$, $k = \overline{1, j+m}$ at one point $O(0,0)$, called the vertex of the graph. Line segments are called bonds of the graph. On the each edges of the over defined graph, we consider fractional differential equations

$$D_{0+}^{\alpha,\mu} u^{(k)}(x,t) - u_{xx}^{(k)}(x,t) = f^{(k)}(x,t), \quad x \in B_k \tag{1}$$

on the metric graphs, where $l-1 < \alpha < l$, , $l \in N$, $0 \le \mu \le 1$, $k = \overline{1, j+m}$ $f^{(k)}(x,t)$ are known functions and $D_{0+}^{\alpha,\mu}$ is Hilfer operator: We will study following problems for equation (1).

Problem. *To find functions $u^{(k)}(x,t)$ in the domain $B_k \times (0,T)$, satisfy equation (1) at $l-1 < \alpha < l$, $l = 1,2$ with the following properties:*

$$I_{0+}^{(1-\mu)(l-\alpha)} u^{(k)}(x,t)\Big|_{t=0} = M I_{0+}^{(1-\mu)(l-\alpha)} u^{(k)}(x,t)\Big|_{t=T}$$

$$[\alpha] \frac{d}{dt} I_{0+}^{(1-\mu)(n-\alpha)} u^{(k)}(x,t)\Big|_{t=0} = \varphi^{(k)}(x), \quad k = \overline{1, j+m} \;\; x \in B_k;$$

where $M \in R$,

$$u^{(k)}(0,t) = u^{(1)}(0,t), t \in [0,T], k = \overline{2, j+m},$$

$$\frac{\partial u^+}{\partial x}(0,t) + A_{mj} \frac{\partial u^+}{\partial x}(0,t) = 0, \;\; t \in [0,T],$$

$$u^{(k)}(L_k,t) = 0, \;\; t \in [0,T], \;\; k = \overline{1, j+m},$$

where $u^- = (u_1, u_2, ..., u_j)^T$,$u^+ = (u_{j+1}, u_{j+2}, ..., u_{j+m})^T$,$u = (u^+, u^-)^T$ A_{mj} is a matrix with all elements equal one, and $\varphi^{(k)}(x)$ are sufficiently smooth given functions.

On the solvability of an integral equation for a fractionally loaded heat boundary value problem

Kosmakova M.T., Akhmanova D.M.

KarSU, Karaganda, Kazakhstan; svetlanamir578@gmail.com

In the domain $Q = \{(x,t) \mid x > 0,\ t > 0\}$ we consider the problem

$$u_t - u_{xx} + \lambda \left\{ {}_rD_{0t} u\,(x,t) \right\} \Big|_{x=\gamma(t)} = f\,(x,t)\,, \tag{1}$$

$$u\,|_{t=0}\, = 0, u\,|_{x=0}\, = 0, \tag{2}$$

where λ is a complex parameter, ${}_rD_{0t}^{\beta}\, u(x,\, t)$ is the Riemann – Liouville derivative of an order β, $0 < \beta < 1$, $\gamma(t)$ is a continuous increasing function, $\gamma(0) = 0$.

The problem is studied in the class of continuous functions.

BVP (1)–(2) has been reduced to the Volterra integral equation of the second kind:

$$\mu\,(t) + \lambda \int_0^t K_\beta\,(t,\tau)\,\mu\,(\tau)\,d\tau = f_2\,(t)\,, \tag{3}$$

with the kernel

$$K_\beta\,(t,\tau) = \frac{1}{\Gamma\,(1-\beta)\,\,(t-\tau)^{\beta}} -$$

$$-\frac{\gamma\,(t)}{2\sqrt{\pi}\,\,(t-\tau)^{\beta+\frac{1}{2}}}\,\exp\left(-\frac{\gamma^2\,(t)}{4\,(t-\tau)}\right)\Psi\left(1-\beta, \frac{3}{2}; \frac{\gamma^2\,(t)}{4\,(t-\tau)}\right), \tag{4}$$

where $\Psi\,(a,b,y)$ is the Tricomi degenerate hypergeometric function.

Theorem. *Integral equation (3) with kernel (4) for* $0 \le \beta < 1$ *and with* $\gamma(t) \sim t^{\omega}$ *in the neighborhood of* $t = 0$ *is uniquely solvable in the class of continuous functions for any continuous right-hand side* $f_2(t)$, *if* $\frac{1}{2} \le \omega < 1 - 2\beta$ *or* $0 \le \omega < \frac{1}{2}$, $0 \le \beta \le 1$.

References

1. *Ramazanov M.I., Kosmakova M.T., Kasymova L.Zh.* On a problem of heat equation with fractional load // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020, vol. 41, no. 9, pp. 1873–1885.

2. *Amangaliyeva M.M., Akhmanova D.M., Dzhenaliev M.T., Ramazanov M.I.* Boundary value problems for a spectrally loaded heat operator with load line approaching the time axis at zero or infinity // Differential Equations. 2011, vol. 47, no. 2, pp. 231–243.

This work was supported by the CS MES RK grant no. AP09259780, 2021-2023.

Sturm type theorems for a fourth-order differential equation on a network

Kulaev R.Ch.[1,a], **Urtaeva A.A.**[2,3,b]

[1]*SMI VSC RAS,* [2]*NOSU,* [3]*NCCMR, Vladikavkaz, Russia;* [a]*kulaevrch@mail.ru;* [b]*urtaeva-96@mail.ru*

We study a fourth-order equation

$$Lu \equiv \frac{d^2}{d\Gamma^2}\left(p(x)\frac{d^2u}{d\Gamma^2}\right) - h(x)u = 0, \quad x \in \Gamma, \tag{1}$$

where Γ is a network [1, 2]. By *a differential equation on a network*, we understand the set of differential equations on the edges

$$(p_i(x)u_i'')'' - r_i(x)u = 0, \quad x \in \gamma_i \in E(\Gamma)$$

and the set of consistency conditions at the nodes

$$u \in C(\Gamma) \cap C^4[\Gamma], \quad \beta(a)u_i''(a) - \vartheta(a)u_{i\nu}'(a) = 0, \quad a \in J(\Gamma), \quad i \in I(a),$$

$$\sum_{i \in I(a)} (p_i u_i'')_\nu'(a) - h(a)u(a) = 0, \quad a \in J(\Gamma).$$

A subgraph $\Gamma_0 \subset \Gamma$ is called an S^2*-zone* of a function $u(x) \in C(\Gamma) \cap C^1[\Gamma]$ if the following conditions hold: 1) $u(x) \neq 0$ on Γ_0; 2) there exist a subgraph Γ_1 such that $\Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \Gamma$ and $u(x) = 0$ on $\partial\Gamma_0 \cup \partial\Gamma_1$; 3) $u'(x) = 0$ on $\partial\Gamma_0 \cap \partial\Gamma_1$.

The Separation Theorem. *Let $u(x)$ and $v(x)$ be two solutions of (1) such that $u|_{\partial\Gamma} = v|_{\partial\Gamma} = 0$. If $u(x)$ has an S^2-zone $\Gamma_0 \subset \Gamma$, then $v(x)$ vanishes at least once in Γ_0 unless $v(x)$ is a constant multiple of $u(x)$ on Γ_0.*

Let $r(x)$, $R(x) \in C[\Gamma]$. Denote by L_r, L_R differential operators with $h(x) = r(x)$ and $h(x) = R(x)$, respectively.

The Comparison Theorem. *Suppose that $0 < r(x) \le R(x)$ on Γ, and $v(x)$, $u(x)$ are nontrivial solutions of equations $L_r v(x) = 0$ and $L_R u(x) = 0$, respectively, such that $v|_{\partial\Gamma} = u|_{\partial\Gamma} = 0$. If $v(x)$ has an S^2-zone $\Gamma_0 \subset \Gamma$, then $u(x)$ vanishes at least once in Γ_0 unless $u(x)$ is a constant multiple of $v(x)$ on Γ_0.*

References

1. *Kulaev R.Ch.* Disconjugacy of fourth-order equations on graphs // Sb. Math. 2015, vol. 206, no. 12, pp. 1731–1770.
2. *Borovskikh A.V., Lazarev K.P.* Fourth-order differential equations on geometric graphs // Journal of Math. Scien. 2004, vol. 119, no. 6, pp. 719–738.

Inverse problem for a subdiffusion equation with the Caputo derivative

Mukhiddinova O.T.

IM AS RUz, Tashkent, Uzbekistan; oqila1992@mail.ru

Let $A(x, D) = \sum\limits_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) D^\alpha$ be a positive formally self-adjoint elliptic differential operator of order $m = 2l$ with sufficiently smooth coefficients $a_\alpha(x)$ in an arbitrary multidimensional domain.

Let $0 < \rho \le 1$. Consider the subdiffusion equation with the Caputo fractional derivative [1]

$$D_t^\rho u(x,t) + A(x,D)u(x,t) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad 0 < t \le T, \tag{1}$$

with the initial condition

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{2}$$

and the boundary conditions

$$B_j u(x,t) = \sum_{|\alpha| \le m_j} b_{\alpha,j}(x) D^\alpha u(x,t) = 0, \quad 0 \le m_j \le m-1, \quad j = 1, 2, ..., l,$$

$$x \in \partial\Omega, \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

where $\varphi(x)$ and the coefficients $b_{\alpha,j}(x)$ are given functions. In the present paper, we consider the following inverse problem

$$u(x,T) = \Psi(x), \quad x \in \overline{\Omega}. \tag{4}$$

Theorem. *Let the functions $\varphi(x)$, $\psi(x)$ be continuous in the closed domain $\bar{\Omega}$. Then there can exist only one classical solution $\{u(x,t),\ f(x)\}$ of the inverse problem (1)–(4).*

Note that a similar inverse problem for subdiffusion equation with Riemann – Liouville fractional derivative was studied in [2].

References

1. *Pskhu A.V.* Fractional partial differential equations. M.: Nauka, 2005.
2. *Ashurov R.R., Mukhiddinova A.T.* Inverse problem of determining the heat source density for the subdiffusion equation // Differential Equations. 2020, vol. 56, no. 12, pp. 1550–1563.

An application of an explicit solution for recovering the time-dependent control function for the time-fractional diffusion equation

Oralsyn G.

IMMM, Almaty, Kazakhstan; g.oralsyn@list.ru

We consider the following inverse problem of finding a pair (u, p) for the time-fractional diffusion equation (see, e.g. [1] and [2]):

$$\Diamond_{\alpha,t} u = \partial_t^\alpha u(t,x) - \Delta u(t,x) = p(t) f(t,x) \text{ in } \Omega \times (0,T), \tag{1}$$

$$u(0,x) = 0, \ x \in \Omega,$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is a bounded domain with the boundary $\partial\Omega \in C^{1+\gamma}$, $0 < \gamma < 1$, $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2$ is the Laplacian and

$$\partial_t^\alpha u(t,x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\tau} u'_\tau(\tau,x) d\tau$$

is the fractional Caputo time derivative of order $0 < \alpha \leq 1$. Here Γ is the gamma function. We shall note that for $\alpha = 1$ the fractional derivative coincides with the standard time derivative.

In this paper, our main goal is to study inverse problems of recovering the time-dependent control function $p(t)$ in the Cauchy problem for the multidimensional time-fractional diffusion equation (1). In order to find a pair (u, p), we fix a point $q \in \Omega$ as an observation point for some time-dependent quantity. So, by using this additional date we find the time-dependent control function $p(t)$. For our analysis, we use a method of the recently developed potential theory (see e.g [3]) for the time-fractional diffusion equation.

References

1. *Sadybekov M.A., Oralsyn G.* Nonlocal initial boundary value problem for the time-fractional diffusion equation // Electron Journal of Differential Equations. 2017, 201, pp. 1–7.
2. *Kemppainen J.* Existence and uniqueness of the solution for a time-fractional diffusion equation // Fractional Calculus and Applied Analysis. 2011, vol. 14, no. 3, pp. 411–417.
3. *Karazym M., Ozawa T., Suragan D.* Multidimensional inverse Cauchy problems for evolution equations // Inverse Problems in Science and Engineering. 2020, vol. 28, no. 11, pp. 1582–1590.

This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP09058317).

On one solution of the boundary value problem

Orumbayeva N.T.[a], **Tokmagambetova T.D.**[b]

KarSU, Karaganda, Kazakhstan; [a] *orumbayevan@mail.ru,* [b] *tengesh@mail.ru*

On $\Omega = [0, X] \times [0, Y]$ we consider the boundary value problem

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = a_1(x,y)\frac{\partial^3 u_1}{\partial x^2 \partial y} + a_2(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_3(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} +$$

$$+a_4(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a_5(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + a_6(x,y)u + f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega, \tag{1}$$

$$u(x,y)|_{x=0} = \varphi(y), \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}|_{x=0} = \psi(y), \tag{2}$$

$$u(x,y)|_{y=0} = u(x,y)|_{y=Y}, \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}|_{y=0} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}|_{y=Y}, \tag{3}$$

where the functions $a_1(x,y), a_2(x,y), a_3(x,y), a_4(x,y), a_5(x,y), a_6(x,y), f(x,y)$ are continuous on Ω, $\varphi(y)$, $\psi(y)$ are twice continuously differentiable on $[0, Y]$ functions, conditions of agreement are met $\varphi(0) = \varphi(Y), \varphi'(0) = \varphi'(Y)$. In this work, the problem (1)–(3) is investigated by the parametrization method [1].

In terms of the matrix $Q_\nu(x,h)$, which elements are defined through $A(x,y) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \alpha + a_1(x,y) + \frac{a_2(x,y)}{\alpha} & -\alpha - a_1(x,y) + \frac{a_2(x,y)}{\alpha} \\ \alpha - a_1(x,y) - \frac{a_2(x,y)}{\alpha} & -\alpha + a_1(x,y) - \frac{a_2(x,y)}{\alpha} \end{pmatrix}$, sufficient conditions have been established unique solvability of problem (1)–(3). The post explores the questions of existence, the uniqueness of the solution to this problem and the convergence of the algorithm for finding its solution. The statement is true

Theorem. *Let's suppose that for some* $0 < \mu < 1, h > 0 : Nh = Y$, $N = 1, 2, ...,$ *and* ν, $\nu \in \mathbb{N}$, $(2N \times 2N)$ *the matrix* $Q_\nu(x,h)$ *is invertible for all* $x \in [0, X]$ *and the inequalities are carried out*
1) $\|[Q_\nu(x,h)]^{-1}\| \le \gamma_\nu(x,h)$; *2)* $q_\nu(x,h)\frac{(A(x)h)^\nu}{\nu!} \le \mu$,
where $q_\nu(x,h) = 1 + \gamma_\nu(x,h)\sum\limits_{j=1}^{\nu}\frac{(A(x)h)^j}{j!}$, $A(x) = \max\limits_{y\in[0,Y]}\|A(x,y)\|$.

References

1. *Dzhumabayev D.S.* On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2016, pp. 342–347.

Research supported by Committee of Science of the Ministry of Education and Sciences the Republic of Kazakhstan, grant no. AP09259780.

Extremality of translation-invariant Gibbs measures for the three-state Potts-SOS model

Rahmatullaev M.M.[1,a], **Rasulova M.A.**[2,b]

[1]*IM AS RUz, Tashkent,* [2]*NamSU, Namangan, Uzbekistan;*
[a]*mrahmatullaev@rambler.ru,* [b]*m_rasulova_a@rambler.ru*

The Cayley tree Γ^k (see [1]) of order $k \geq 1$ is an infinite tree, i.e., a graph without cycles, from each vertex of which exactly $k+1$ edges issue. Let $\Gamma^k = (V, L, i)$, where V is the set of vertices of Γ^k, L is the set of edges of Γ^k and i is the incidence function associating each edge $l \in L$ with its endpoints $x, y \in V$. If $i(l) = \{x, y\}$, then x and y are called *nearest neighboring vertices*, and we write $l =< x, y >$.

The Hamiltonian of the Potts-SOS model with nearest-neighbor interaction has the form (see [2])

$$H(\sigma) = -J \sum_{<x,y>\in L} |\sigma(x) - \sigma(y)| - J_p \sum_{<x,y>\in L} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)},$$

where $J, J_p \in R$ are nonzero coupling constants.

Let N be a number of translation-invariant splitting Gibbs measures for the three-state Potts-SOS model on the binary tree.

Theorem 1. *Let $J_p = 2J$. There exists $\theta_c (\approx 7.729813675)$ such that*

$$N = \begin{cases} 1, & if\, \theta \in (0; \theta_c), \\ 2, & if\ \ \theta = \theta_c, \\ 3, & if\ \ \theta \in (\theta_c; \infty), \end{cases}$$

where $\theta = \exp(2/T)$, T is temperature.

Theorem 2. *Let $J_p = 2J$. Then the following assertions hold:*
a) there exists $\theta_1 (\approx\ 0.1666993311)$ such that the measure μ_1 is non-extreme if $\theta \in (0; \theta_1)$ and is extreme if $\theta \in (\theta_1; \infty)$;
b) there exists $\theta_2 (\approx 9.706301628)$ such that the measure μ_2 is extreme if $\theta \in [\theta_c; \theta_2)$ and is non-extreme if $\theta \in (\theta_2; \infty)$;
c) the measure μ_3 is extreme (where it exists, that is $\theta \in [\theta_c; \infty)$).

References

1. *Rozikov U.A.* Gibbs measures on Cayley trees. World scientific, 2013.
2. *Rasulova M.A.* Periodic Gibbs measures for the Potts-SOS model on a Cayley tree // Theoretical and Mathematical Phys. 2019, vol. 199, no. 1, pp. 586–592.

A diffusive prey-predator model with two different free boundary

Rasulov M.S.[a], **Norov A.Q.**[b]

IM AS RUz, Tashkent, Uzbekistan; [a]*rasulov@mathinst.uz,* [b]*norov@mathinst.uz*

In this work, we study a quasilinear parabolic system with two free boundaries, in which two free boundaries are used to describe propagation fronts of two types, respectively [1, 2]. The interaction between the two species is formulated as the following free boundary problem:

$$\begin{cases} k_1(u)u_t - d_1u_{xx} - m_1u_x = u(a_1 - b_1u - c_1v), & (t,x) \in D, \\ k_2(v)v_t - d_2v_{xx} - m_2v_x = v(a_2 + b_2u - c_2v), & (t,x) \in Q, \\ u(0,x) = u_0(x), & 0 \le x \le s_0 = s(0), \\ v(0,x) = v_0(x), & 0 \le x \le h_0 = h(0), \\ u_x(t,0) = v_x(t,0) = 0, & 0 \le t \le T, \\ u(t,s(t)) = v(t,h(t)) = 0, & 0 \le t \le T, \\ u \equiv 0, & s(t) \le x \le h(t), \\ s'(t) = -\mu u_x(t,s(t)),\ h'(t) = -\rho v_x(t,h(t)), & 0 \le t \le T, \end{cases} \tag{1}$$

where $D = \{(t,x) : 0 < t \le T,\ 0 < x < s(t)\}$, $Q = \{(t,x) : 0 < t \le T,\ 0 < x < h(t)\}$; $x = s(t)$ and $x = h(t)$ – free boundaries, $u(t,x)$ and $v(t,x)$ represent densities of components; d_i, a_i, b_i, c_i, μ, ρ – positive constants, $i = 1,2$.

Theorem. *Let $u\,(t,x)\,, v\,(t,x)\,, s\,(t)$ be a solution of (1). Then*

$$0 < u(t,x) \le M_1 \equiv \max\left\{\max_x |u_0|, \frac{a_1}{b_1}\right\}, \quad (t,x) \in \overline{D},$$

$$0 < v(t,x) \le M_2 \equiv \max\left\{\max_x |v_0|, \frac{a_1b_2 + a_2b_1}{b_1c_2}\right\}, \quad (t,x) \in \overline{Q},$$

$$0 < s'\,(t) \le M_3 \equiv \mu N_1, \quad 0 < t \le T,$$

$$0 < h'\,(t) \le M_4 \equiv \rho N_2, \quad 0 < t \le T,$$

where $N_1 \ge \max\left\{\frac{a_1}{m_1}, \max\limits_x \left|\frac{u_0}{s_0 - x}\right|\right\}$, $N_2 \ge \max\left\{\frac{a_2M_2 + b_2M_1}{m_2M_1}, \max\limits_x \left|\frac{v_0}{s_0 - x}\right|\right\}$.

References

1. *Wang M., Zhang Y.* Two kinds of free boundary problems for the diffusive prey-predator model // Nonlinear Anal. Real World Appl. 2015, vol. 24, pp. 73–82.

2. *Wu C.H.* The minimal habitat size for spreading in a weak competition system with two free boundaries // J. Diff. Eq. 2015, vol. 259, pp. 873–897.

New descriptions of harmonic Hardy spaces and applications in differential equations

Restrepo J.E., Suragan D.

Nazarbayev University, Nur-Sultan, Kazakhstan; cocojoel89@yahoo.es, joel.restrepo@nu.edu.kz

We present equivalent descriptions of the harmonic Hardy spaces in the unit disc and in the upper half plane. Such descriptions are found as an application of the generalized Hadamard operator of M. M. Djrbashian (in the unit disc [1] and in the half plane [2]) of a standard function kernel. We also give some results on its inverse operator. We use the obtained results to show explicit solutions of some generalized integro-differential equations over the harmonic Hardy space. To prove our statements we mainly follow some ideas from [1-3].

References

1. *Djrbashian M.M., Zakaryan V.S.* Classes and boundary properties of functions meromorphic in the disc. Moscow: Nauka, 1993.
2. *Jerbashian A.M., Jerbashian V.A.* Functions of ω-bounded type in the half-plane // CMFT: Calculation Methods and Function Theory. 2007, vol. 7, no. 2, pp. 205–238.
3. *Jerbashian A.M., Restrepo J.E.* On some classes of harmonic functions with nonnegative harmonic majorants in the half-plane // J. Contemp. Math. Anal. 2016, vol. 51, no. 2, pp. 79–89.

The authors were supported by the Nazarbayev University Program 091019CRP2120.

Differential games with Gronwall – Bellman type constraints on controls

Samatov B.T.[1,a], **Akbarov A.Kh.**[2,b], **Juraev B.I.**[2,c]

[1]*NamSU, Namangan,* [2]*ASU*, Andijan, Uzbekistan;* [a]*samatov57@inbox.ru,* [b]*akbarov.adhambek@bk.ru,* [c]*jbahodirjon@bk.ru*

Let dynamics of pursuer P and evader E be described by the following equations

$$\text{P}: \ \dot{x} = u, \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

$$\text{E}: \ \dot{y} = v, \quad y(0) = y_0, \tag{2}$$

where $x, y, x_0, y_0, u, v \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $x_0 \neq y_0$. We propose a Grönwall – Bellman type constraint [1] for the pursuer and geometric constraint for the evader

$$|u(t)|^2 \leq \rho^2 + 2k \int_0^t |u(s)|^2 ds \text{ for almost every } t \geq 0, \tag{3}$$

$$|v(t)| \leq \beta \text{ for almost every } t \geq 0 \tag{4}$$

respectively, where ρ and β are given positive numbers and k is a given non-negative number.

Definition. *If $\beta \leq \rho$, then the function*

$$u_{GrG}(t, v) = v - \lambda_{GrG}(t, v)\xi_0$$

is called Π_{GrG}-strategy of pursuer ([2]) in the GrG-game of pursuit, where

$$\lambda_{GrG}(t, v) = \langle v, \xi_0 \rangle + \sqrt{\langle v, \xi_0 \rangle^2 + \rho^2 e^{2kt} - |v|^2}, \ \xi_0 = z_0/|z_0|.$$

Theorem 1. *If the condition $\rho \geq \beta$ holds for differential game (1)–(4), then pursuit can be completed by Π_{GrG}-strategy on $[0, T_{GrG}]$, where T_{GrG} is the first positive solution of the equation $e^{kt} = \frac{k\beta}{\rho}t + 1 + \frac{|z_0|k}{\rho}$.*

Theorem 2. *If $\rho \geq \beta$, then for any control of pursuer, the strategy of evader $v(t) = -\beta\xi_0$, $t \geq 0$, guarantees the inequality $x(t) \neq y(t)$ on the time interval $[0, T_{GrG})$.*

References

1. *Samatov B.T., Ibragimov G.I., Khodjibayeva I.V.* Pursuit-evasion differential games with the Grönwall type constraints on controls // Ural Mathematical Journal. 2019, vol. 5, no. 1, pp. 1–13.

2. *Petrosjan L.A.* Differential games of pursuit. Singapore: World Scientific Publishing, 1993.

«Life-line» game under non-stationary geometrical constraints on controls

Samatov B.T.[a], **Horilov M.A.**[b], **Soyibboev U.B.**[c]

NamSU, Namangan, Uzbekistan; [a]*samatov57@inbox.ru,* [b]*mxorilov86@mail.ru,* [c]*ulmasjonsoyibboev@gmail.com*

In the space $\mathbb{R}^n$, consider differential game when Pursuer P and Evader E having radius vectors x, y and velocity vectors u, v correspondingly move by the equations

$$\dot{x} = u,\ x(0) = x_0,\ |u(t)| \le \alpha(t) \text{ a.e. } t \ge 0, \tag{1}$$

$$\dot{y} = v,\ y(0) = y_0,\ |v(t)| \le \beta(t) \text{ a.e. } t \ge 0, \tag{2}$$

where $x, y, u, v \in \mathbb{R}^n,\ n \ge 2$; x_0 and y_0 are the initial positions, it is assumed that $x_0 \ne y_0$. Here $\alpha(t)$ and $\beta(t)$ are non-negative integrable functions which mean the maximal speeds of the pursuer and evader at moment $t,\ t \ge 0$.

Definition. *If $\alpha(t) \ge \beta(t)$ for all $t \ge 0$, then the function*

$$\boldsymbol{u}_G(t, v) = v - \lambda_G(t, v)\xi_0, \quad \lambda_G(t, v) = \langle v, \xi_0 \rangle + \sqrt{\langle v, \xi_0 \rangle^2 + \alpha^2(t) - |v|^2}, \tag{3}$$

is called Π_G-strategy of pursuer in the pursuit game, where $\xi_0 = z_0/|z_0|$.

Theorem. *Let $\alpha(t) \ge \beta(t)$ for all $t \ge 0$ and T is a positive root of the equation $\int\limits_0^t (\alpha(s) - \beta(s))ds = |z_0|$. Then Π_G-strategy (3) guarantees completion of pursuit on the time interval $[0, T]$.*

In the monograph of Isaacs [1], the problem called «Life line» (problem 9.5.1, [1]) was proposed for controls with stationary geometric constraints. Later, this problem was solved by L. Petrosyan [2]. Moreover, «life line» problem was studied for integral and mixed constraints in [3]. In the game (1)–(2), the «life line» problem can be solved for the case of non-stationary geometric constraints on controls by the strategy (3).

References

1. *Isaacs R.* Differential games. New York: John Wiley and Sons, 1965. (Russian)
2. *Petrosjan L.A.* Differential games of pursuit. Singapore: World Scientific Publishing, 1993.
3. *Azamov A.A., Samatov B.T.* The П-strategy: analogies and applications // The Fourth International Conference Game Theory and Management. 2010, vol. 4, no. 1, pp. 33–47.

Mathematical model of populations depending on two previous steps

Seytov Sh.J.

NUUz, Tashkent, Uzbekistan; sh-seyotv@mail.ru

The present paper is devoted to investigation of the modified case of the logistic mapping $x_n = \lambda \cdot x_{n-1}(1 - x_{n-2})$ which depends on previous two steps. We learnt logistic mappings as second order difference equations. We have classified all Cauchy problems whose solutions are stable, unstable, periodic and chaotic.

Modified case of the logistic mapping (ML)

$$x_n = \lambda \cdot x_{n-1}(1 - x_{n-2}) \tag{1}$$

where $|x_n|$ is a number the number of existing population to the maximum possible population [1,3] in millions. The values of interest for the parameter λ means conditions for living.

Definition 1. The filled Julia set K of a mapping (1) is defined as the set of all points x, that have bounded orbits with respect to mapping (1) [2].

Definition 2. Julia set is the common boundary of the filled Julia set $J = \partial K$.

Theorem 1. *The mapping* (1) *has two fixed points* $fix(ML) = \{0, 1 - \frac{1}{\lambda}\}$.

Theorem 2. *The fixed point zero is stable for* $0 < \lambda < 1$ *and unstable for* $\lambda > 1$.

Theorem 3. *The fixed point* $1 - \frac{1}{\lambda}$ *is stable for* $1 < \lambda < 5/4$ *and unstable for* $\lambda > 5/4$.

Theorem 4. *The mapping* (1) *has periodic orbits for* $5/4 < \lambda < 9/4$.

Theorem 5. *The mapping* (1) *has chaotic orbits for* $\lambda > 9/4$.

References

1. *Ganikhodzhayev R., Seytov Sh.J.* An analytical description of mandelbrot and Julia sets for some multi-dimensional cubic mappings // IP Conference Proceedings. 2021, vol. 2365, pp. 050006.

2. *Ganikhodzhaev R.N., Seytov Sh.J.* Coexistence chaotic behavior on the evolution of populations of the biological systems modeling by three dimensional quadratic mappings // Global and Stochastic Analysis. 2021, vol.8, no. 3, pp. 41–45.

3. *Ganikhodzhaev R.N., Seytov Sh.J.* Mathematical modelling of the evolutions of the populations in the connected two islands // Problems of computational and applied mathematics. 2021, vol. 31, no. 1, pp. 24–35.

Periodization of functions from the Sobolev space $L_2^{(m)}(0,1)$

Shadimetov Kh.M.[1,a]***, Gulomov O.Kh.***[2,b]

[1] *TSTU,* [2] *IM AS RUz, Tashkent, Uzbekistan;*

[a] *kholmatshadimetov@mail.ru,* [b] *otabek10@mail.ru*

In this paper we consider the periodization problem of functions f from the Sobolev space $L_2^{(m)}(0,1)$. The space $L_2^{(m)}(0,1)$ consists of functions possessing generalized derivative of order m and square integrable with m-th order generalized derivative. The norm of a function in this space is defined as

$$\left\|\varphi|L_2^{(m)}\right\| = \left(\int_0^1 (\varphi^{(m)}(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

The space $\widetilde{L_2^{(m)}}(0,1)$ is the space of periodic functions and it is the subspace of $L_2^{(m)}(0,1)$. Elements φ $(\in \widetilde{L_2^{(m)}}(0,1))$ satisfy the condition of periodicity $\varphi(x) = \varphi(x+\gamma)$, γ is an integer number. Moreover $\varphi^{(\alpha)}(1) = \varphi^{(\alpha)}(0)$, $\alpha = 0,1,...,m-1$. It should be noted that every element of the space $\widetilde{L_2^{(m)}}(0,1)$ is a class of equivalent functions that differ from each other by a constant term.

Definition. Let $f \in L_2^{(m)}(0,1)$ for $m \geq 1$. By the periodization of a function f we mean finding a function $\varphi \in L_2^{(m)}(0,1)$ satisfying the conditions

$$\varphi^{(\alpha)}(1) = \varphi^{(\alpha)}(0) \quad \text{for} \quad \alpha = 0,1,...,m-1,$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \varphi(x)\,dx.$$

Theorem. *Let $f \in L_2^{(m)}(0,1)$, then the following function*

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{n=0}^{m-1} \frac{B_{n+1}(x)}{(n+1)!}\left(f^{(n)}(0) - f^{(n)}(1)\right)$$

is a periodic function in the space $L_2^{(m)}(0,1)$, i.e. $\varphi(x) \in \tilde{L}_2^{(m)}(0,1)$.

References

1. *Shadimetov Kh.M.* Optimal lattice quadrature and cubature formulas in Sobolev spaces. Tashkent: Fan va technology, 2019.

Integro-differential Kelvin – Voigt equation with p-Laplacian and damping term

Shakir A.

Al-Farabi KazNU, Almaty, Kazakhstan; ajdossakir@gmail.com

Let Ω be a bounded domain in $\mathbb{R}^d, d \geq 2$ with smooth boundary $\partial\Omega$, and $Q_T = \{(x,t) : \ x \in \Omega, \ 0 < t \leq T\}$ is a cylinder with lateral Γ_T. We study the following initial boundary value problem of determining the pair of the functions $(\mathbf{u}(x,t), \pi(x,t))$, which satisfy integro-differential Kelvin – Voigt equation with $p-$Laplacian and damping term

$$\mathbf{u}_t - \varkappa div\ \left(|\nabla\mathbf{u}|^{q-2}\nabla\mathbf{u}_t\right) - \nu div\ \left(|\nabla\mathbf{u}|^{p-2}\nabla\mathbf{u}\right) + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla\pi -$$

$$\int\limits_0^t e^{-(t-\tau)}\Delta\mathbf{u}(x,\tau)d\tau = \gamma|\mathbf{u}|^{m-2}\mathbf{u} + f(x,t), \ \text{ in } \ Q_T, \tag{1}$$

$$div\ \mathbf{u} = 0, \qquad (x,t) \in Q_T \tag{2}$$

and the initial-boundary conditions

$$\mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}_0(x) \text{ in } \Omega, \tag{3}$$

$$\mathbf{u}(x,t) = 0 \ \text{ on } \ \Gamma_T. \tag{4}$$

Here the functions $\mathbf{u}_0(x)$ and $f(x,t)$ are given. The coefficients $\varkappa$, ν and γ, exponents q, p and m are given positive numbers, such that

$$1 < q, \ p, \ m < \infty. \tag{5}$$

In this work the unique solvability of the initial-boundary value problem (1)–(4), under suitable assumptions on the data of problem.

This work was supported by the Grants no. AP08052425 of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (MES RK), Kazakhstan.

On the stability of the second order nonlinear differential equations perturbed by white noise

Shumafov M.M.[a], Panesh T.A.[b], Havaja M.A.[c]

ASU, Maykop, Russia; [a]magomet_shumaf@mail.ru, [b]tpanesh@yandex.ru, [c]nblm600@gmail.com

In the last 60 years, since K. Ito introduced his stochastic calculus the theory of stochastic differential equations (SDE) had a very quick development. Many fundamental results concerning the stability property of SDE were obtained by Kushner [1], Khasminskii [2], Arnold [3], Friedman [4], Mao [5] and others (see also surveys [6, 7]).

In this talk sufficient conditions of asymptotic stability in probability for the second-order nonlinear differential equations perturbed by «white noise» are presented. The motivation to study such equations came from the theory of nonlinear oscillations.

Let us present one of our results.

Consider the Lienard equation disturbed by white-noise random process

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = \sigma(x)\dot{w}(t) \tag{1}$$

where f, g and σ are scalar functions defined on $\mathbb{R}$, $\dot{w}(t)$ is a Gaussian «white noise» process.

The equation (1) is interpreted in the sense of Ito stochastic differential equation. By setting $y(t) = \dot{x}(t)$ the equation (1) can be written as a system of Ito stochastic differential equations for two-dimensional process $(x(t,\omega), y(t,\omega))^T$ (ω is a stochastic parameter)

$$dx(t) = [y(t) - F(x(t))]dt, \quad dy(t) = -g(x(t)) + \sigma(x(t))dw(t), \tag{2}$$

where $F(x) = \int_0^x f(s)ds$, $w(t)$ is a scalar Wiener process.

Assume that $f(x)$, $g(x)$ and $\sigma(x)$ satisfy the local Lipschitz condition, and $f(0) = g(0) = \sigma(0) = 0$.

Theorem. *Suppose the following conditions are satisfied for system (2): there exist numbers c_1, c_2 and c such that*

a) $g(x)/x > c_1 > 0$ for all $x \neq 0$,

b) $F(x)/x > c_2 > 0$ for all $x \neq 0$,

c) $0 < \sigma(x)/x < c$ $\forall x \neq 0$, and $c^2 < 2c_1c_2$.

Then the zero solution $(x(t,\omega) \equiv 0, y(t,\omega) \equiv 0)$ of the system (2) is globally asymptotically stable in probability.

Analogous sufficient conditions for stochastic stability are obtained for other second-order differential equations driven by white noise.

References

1. *Kushner H.J.* Stochastic stability and control. Academic Press, New York, 1967. 198 p.

2. *Khasminskii R.Z.* Stochastic stability of differential equations. 2nd ed. Springer: Heidelberg Dordrecht London New York, 2012. 339 p. (Translation from the Russian edition, Moscow, Nauka, 1969).

3. *Arnold L.* Stochastic differential equations: theory and applications. John Wiley and Sons: New York, 1974. 228 p.

4. *Friedman A.* Stochastic differential equations and applications, vol. I. Academic Press, 1975. 248 p.

5. *Mao X.* Stochastic differential equations and applications. 2nd ed. Horwood Publishing Limited, Chichester, UK, 2007. 422 p.

6. *Visentin F.* A survey on stability for stochastic differential equations // Scientiae Mathematicae Japonicae. 2013, vol. 76, no. 1, pp. 147–152.

7. *Shumafov M.M.* Second-order stochastic differential equations: stability, dissipativity, periodicity. V. – A Survey // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser. «Natural-Mathematical and Technical Sciences». 2021, no. 3, pp. 11–27.

Green's function method for time-fractional diffusion equation on the star graph with equal bonds

Sobirov Z.A.[a], **Rakhimov K.U.**[b]

UGF, NUUz, Tashkent, Uzbekistan;

[a]*sobirovzar@gmail.com*, [b]*kamoliddin_ ru@mail.ru*

In this work we use the Riemann – Liouville fractional derivative defined by $D^{\alpha}_{\eta t}g(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\eta}^{t}\frac{g(\xi)}{|t-\xi|^{\alpha}}d\xi, \quad 0<\alpha<1,$ [see 1] where $\Gamma(x)$ is the Gamma function. We consider the star graph which has $m=k+l$ bonds connected in one point O. The bonds of the graph are denoted by $B_j, j=\overline{1,m}$.

On each bond B_j of the graph we consider the time-fractional subdiffusion equation $D^{\alpha}_{0t}u_j(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u_j(x,t) - f_j(x,t),\ 0<x<L,\ 0<t<T,\ j=\overline{1,m}$ with the initial conditions $\lim\limits_{t\to 0}D^{\alpha-1}_{0t}u_j(x,t) = \varphi_j(x), \quad 0\le x\le L,\ \ j=\overline{1,m}$. At the inner vertex of the graph we use the gluing conditions $u_1(0,t)=u_2(0,t)=...=u_m(0,t)$, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sum\limits_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x}u_i(x,t)\right)=0$ for all $t\in[0,T]$. These conditions ensure the local flow conservation at the branching point of the graph. At the boundary vertices we will use boundary conditions (BC) given by $u_i(L,t)=\gamma_i(t), \quad i=\overline{1,k}, \quad \frac{\partial}{\partial x}u_j(L,t) = \gamma_j(t), \quad j=\overline{k+1,m}$. The problem is to find a regular solution of considered equation which satisfy the above conditions.

The uniqueness of the solution of the considered problem were proved by the method of energy integrals.

Theorem. *Let* $\beta_i(x)\in C[0,L], \gamma_i(t)\in C[0,T]$ *and* $f_i(x,t)\in C^{0,1}\{(x,t): 0\le x\le L, 0<t<T,\}(i=\overline{1,m}, T>0)$. *Then the considered problem has unique solution in the form*

$$u(x,t)=\int_0^t (G^{(N)}(x,t;L,\tau)\frac{\partial u_N(\xi,\tau)}{\partial}|_{\xi=L} - G^{(D)}_{\xi}(x,L;t,\tau)u_D(L,\tau))d\tau -$$

$$-\int_0^L \beta(t)G(x,t;\xi,\tau)d\xi - \int_0^t\int_0^L G(x,t;\xi,\tau)F(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

where $G^{(N)}, G^{(D)}$ *are constant matrices,* G *is Green's function and* u, u_D, u_N, F *are matrices of functions.*

References

1. *Pskhu A.V.* Fractional partial differential equations. Moscow: Nauka, 2005, 200 p.

Direct and inverse Cauchy problems for generalized space-time fractional differential equations

Suragan D.

Nazarbayev University, Nur-Sultan, Kazakhstan; durvudkhan.suragan@nu.edu.kz

In this talk, explicit solutions of a class of generalized space-time fractional Cauchy problems with time-variable coefficients are given. The representation of a solution involves kernels given by convergent infinite series of fractional integro-differential operators, which can be extensively and efficiently applied for analytic and computational goals. Further, we study inverse Cauchy problems of finding time dependent coefficients for fractional wave and heat type equations, which involve the explicit representation of the solution of the direct Cauchy problem and a recent method to recover variable coefficients for the considered inverse problems. Concrete examples and particular cases of the obtained results are discussed. This talk is based on our joint work with Joel Restrepo [1].

References

1. *Restrepo J.E., Suragan D.* Direct and inverse Cauchy problems for generalized space-time fractional differential equations // Advances in Differential Equations, vol. 26, no. 7-8, pp. 305–339.

This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP09058317) and by the Nazarbayev University Program 091019CRP2120.

On the mathematical model of the spread of coronavirus disease (COVID-19)

***Takhirov J.O.*[1], *Djumanazarova Z.K.*[2]**

IMASUz, Tashkent, Uzbekistan; prof.takhirov@yahoo.com[1]

Environmental change, climate warming, an increase in population density, high migration activity of the population and other factors provoke the emergence and spread of new infections around the world. Therefore, monitoring and predicting infection has become extremely important for organizing healthcare and controlling the spread of COVID-19.

Currently, given the important role of the intervention strategy, scientists are proposing new epidemic model systems with different intervention strategies in connection with COVID-19. The overall goal is to obtain important epidemiological by investigating the role of social distancing, lockdown, quarantine, and isolation for the proposed epidemic system.

In many cases, mathematical models are proposed that consist of nonlinear systems of ODEs (see, for example, [1]). But mathematical modeling with spatial effects plays an important role in characterizing and understanding the spread of a particular infectious disease. Understanding the spatial distribution of COVID-19 is essential to elucidate transmission mechanisms and targeted control measures [2]. More precisely, spatial heterogeneity affects the transmission of dynamics, and spatially explicit models are more effective in evaluating control strategies. To understand the exact impact of spatial heterogeneity on the dynamics of COVID-19, we needed to build a mathematical model consisting of systems of nonlinear parabolic equations using a multipoint approach with various intervention strategies.

First, the proposed system is described, then the non-negativity and boundedness of the solution is established, then the dynamics of the model system is discussed, including the number of reproducible, local and global stable painless and endemic equilibrium states and at the end some qualitative properties of the solution to the system are investigated.

References

1. *Wang S., Tang W. et al.* Mathematical modeling of transmission dynamics of COVID-19 // Big Data and Information Analytics. 2021, 6, pp. 12–25.

2. *Guo Z.G. et al.* Spatial dynamics of an epidemic model with nonlocal infection // Appl. Math. Comput. 2020, vol. 377, pp. 125–158.

The structure of essential spectra and discrete spectrum of four electron systems in the impurity Hubbard model. Four electron quintet state

Tashpulatov S.M., Parmanova R.T.

INP, Tashkent, Uzbekistan; sadullatashpulatov@yandex.ru, toshpul@mail.ru, togaymurodota@gmail.com

The spectrum and wave functions of the system four electrons in a crystal described by the Hubbard Hamiltonian in the quintet and singlet states and triplet states were studied in [1,2]. Here, we consider the energy operator of four electron systems in the impurity Hubbard model and describe the structure of essential and discrete spectra of the system for quintet state. The Hamiltonian of the chosen model has the form

$H = A\sum_{m,\gamma} a^{+}_{m,\gamma}a_{m,\gamma} + B\sum_{m,\tau,\gamma} a^{+}_{m,\gamma}a_{m+\tau,\gamma} + U\sum_{m} a^{+}_{m,\uparrow}a_{m,\uparrow}a^{+}_{m,\downarrow}a_{m,\downarrow} + (A_0-A)\sum_{\gamma} a^{+}_{0,\gamma}a_{0,\gamma} + (B_0-B)\sum_{\tau,\gamma}(a^{+}_{0,\gamma}a_{\tau,\gamma} + a^{+}_{\tau,\gamma}a_{0,\gamma}) + (U_0-U)a^{+}_{0,\uparrow}a_{0,\uparrow}a^{+}_{0,\downarrow}a_{0,\downarrow}$.

Here A (A_0) is the electron energy at a regular (impurity) lattice site, B (B_0) is the transfer integral between (between electron and impurities) neighboring sites (we assume that $B > 0$ $(B_0 > 0)$ for convenience), and the summation over τ ranges the nearest neighbors, U (U_0) is the parameter of the on-site Coulomb interaction of two electrons in the regular (impurity), γ is the spin index, and $a^{+}_{m,\gamma}$ and $a_{m,\gamma}$ are the respective electron creation and annihilation operators at a site $m \in Z^{\nu}$. The Hamiltonian H acts in the antisymmetric Fo'ck space $\mathcal{H}_{as}$. Let φ_0 by the vacuum vector in the space $\mathcal{H}_{as}$. The quintet state corresponds to the free motion of four electrons over the lattice with the basic functions $q^{2}_{m,n,k,l\in Z^{\nu}} = a^{+}_{m,\uparrow}a^{+}_{n,\uparrow}a^{+}_{k,\uparrow}a^{+}_{l,\uparrow}\varphi_0$. The subspace $\mathcal{H}^{q}_{2}$, corresponding to the quintet state is the set all vectors of the form $\psi^{q}_{2} = \sum_{m,n,k,l\in Z^{\nu}} f(m,n,k,l)q^{2}_{m,n,k,l\in Z^{\nu}}$, $f \in l^{as}_{2}$, where l^{as}_{2} is the subspace of antisymmetric functions in the space $l_2((Z^{\nu})^4)$. Denote by H^{q}_{2} the restriction of H to the subspace $\mathcal{H}^{q}_{2}$. We let $\varepsilon_1 = A_0 - A$, $\varepsilon_2 = B_0 - B$, and $\varepsilon_3 = U_0 - U$.

Theorem 1. *Let $\nu = 1$, and $\varepsilon_2 = -B$, and $\varepsilon_1 < -2B$ (respectively, $\varepsilon_2 = -B$, and $\varepsilon_1 > 2B$). Then the essential spectrum of the operator H^{q}_{2} is consists of the union of four segments $\sigma_{ess}(H^{q}_{2}) = [4A-8B, 4A+8B] \cup [3A-6B+z, 3A-6B+z] \cup [2A-4B+2z, 2A+4B+2z] \cup [A-2B+3z, A+2B+3z]$ and discrete spectrum of the operator H^{q}_{2} is consists of a single eigenvalue, $\sigma_{disc}(H^{q}_{2}) = \{4z\}$, where $z = A + \varepsilon_1$.*

Theorem 2. *Let $\nu = 1$, and $\varepsilon_2 > 0$, and $-\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B} < \varepsilon_1 < \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$, then the essential spectrum of the operator H^{q}_{2} is consists of the union of the ten segment $\sigma_{ess}(H^{q}_{2}) = [4A-8B, 4A+8B] \cup [3A-6B+z_1, 3A-6B+z_1] \cup [3A-6B+z_2, 3A-6B+z_2] \cup [2A-4B+2z_1, 2A+4B+2z_1] \cup [2A-4B+2z_2, 2A+4B+2z_2] \cup [2A-4B+z_1+z_2, 2A+4B+z_1+z_2] \cup [A-2B+3z_1, A+2B+3z_1] \cup [A-2B+3z_2, A+2B+3z_2] \cup [A-2B+2z_1+z_2, A+2B+2z_1+z_2] \cup [A-2B+z_1+2z_2, A+2B+z_1+2z_2]$, and discrete spectrum of the operator H^{q}_{2} is consists of five eigenvalues, $\sigma_{disc}(H^{q}_{2}) = \{4z_1, 4z_2, 3z_1+z_2, z_1+3z_2, 2z_1+2z_2\}$.*

Theorem 3. *If $-2B < \varepsilon_2 < 0$, then the essential spectrum of the operator $\widetilde{H}^{t}_{2}$ is consists of a single segment $\sigma_{ess}(\widetilde{H}^{t}_{2}) = [2A-4B, 2A+4B]$, and discrete spectrum of the operator $\widetilde{H}^{t}_{2}$ is empty set.*

References

1. *Tashpulatov S.M.* The structure of essential spectra and discrete spectrum of four-electron systems in the Hubbard model in a singlet state // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2017, vol. 38, no. 3, pp. 530–541.

2. *Tashpulatov S.M.* Spectra of the energy operator of four-electron systems in the triplet state in the Hubbard model // Journal of Physics: Conference Series, 2016, vol. 697, p. 012025. doi:10.1088/1742-6596/697/1/012025.

Global existence and blow-up of solutions to the time-space fractional semilinear diffusion equation

Torebek B.T.

IMMM, Almaty, Kazakhstan; torebek@math.kz

In this note, we consider a time-space fractional semilinear diffusion equation on a bounded or unbounded domains. We establish a blow-up phenomena in a finite time and global existence of solution of the considered problems. The proof of main results are based on the comparison principle and test function methods.

Optimal range for the Hilbert transform among fully symmetric spaces

Tulenov K.S.

IMMM, Almaty, Kazakhstan; tulenov@math.kz

In this work, we deal with characterizing optimal range for the Calderón operator and the Hilbert transform in Marcinkiewicz function spaces. These results are further used as a sufficient condition to obtain Lipschitz estimates for commuting tuples in fully symmetric (quasi-) Banach operator spaces.

On one relaxation version of the nonlinear Maxwell problem

Umirkhonov M.T.

Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan, masudxonumirxonov@mail.ru

The paper investigates Maxwell's equations used for modelling nonlinear optical phenomena.The wave propagation in an isotropic medium is described by Maxwell's system in the form:

$$D_t - curl H = 0,$$

$$B_t + curl E = 0,$$

$$div D = div B = 0.$$

The field quantities E and H represent the electric and magnetic fields, D and B the electric and magnetic displacements. We consider the constitutive relations for a nonlinear Kerr medium: $B = \mu_0 H$, $D = \epsilon_0 E + P$, where P is the nonlinear polarization. Let us suppose that

$$D(x, y, z) = (0, d(x), 0),$$

$$H(x, y, z) = (0, 0, h(x)).$$

Once nondimensionalized the Kerr model, denoted by (K), becomes:

$$\begin{cases} d_t + h_x = 0, \\ h_t + e_x + h = 0, \\ d = (1 + e^2)e \end{cases}$$

for $(x, t) \in R^+ \times R^+$. We suppose that the initial data vanishes

$$d(0, x) = h(0, x) = 0, \qquad x > 0$$

and that we have the boundary condition

$$h(t, 0) + ae(t, 0) = g(t), \qquad t > 0)$$

where a is a non negative constant. The system (K) is quasi-linear hyperbolic. It is a p-system where p is the reciproque function of $e \to (1 + e^2)e$, and it is strictly hyperbolic with eigenvalues

$$\lambda_1 = -\sqrt{p'(d)} < 0 < \lambda_2 = \sqrt{p'(d)}$$

The goal of this paper is to analyse the behaviour of the regular solutions for the (K) boundary value problem.

Difference schemes of the finite element method of higher accuracy for solving nonstationary equations

Utebaev D., Utepbergenova G.Kh., Kazimbetova M.M.

Karakalpak State University named after Berdakh, Nukus, Uzbekistan; utebaev_56@mail.ru, utepbergenovagu@gmail.com, q.muxabbat-1511@mail.ru

In the spatial approximation of the initial-boundary value problems for nonstationary partial differential equations, we obtain a system of ordinary differential equations (Cauchy problem) of the following form

$$D\ddot{u} + B\dot{u} + Au = f(t), \quad u(0) = u_0 \quad \dot{u}(0) = u_1, \quad t \in (0, T), \tag{1}$$

where $\dot{u} = du/dt$, $u = u(t) \in H$, $f = f(t) \in H$, and D, B, A are the operators from H to H.

In this article, a new three-parameter family of schemes of the fourth and sixth orders of accuracy is constructed and investigated for (1)

$$D_\gamma \dot{y}_t + By_t + Ay^{(0.5)} = \phi_1, \; D_\alpha y_t - \tau^2 \gamma B \dot{y}_t - D_\beta \dot{y}^{(0.5)} = \phi_2 \tag{2}$$

$$y^0 = u_0, \; \dot{y}^0 = u_1.$$

Here $y = y^n = y(t_n)$, $\hat{y} = y^{n+1}$, $\dot{y} = \dot{y}^n = dy(t_n)/dt$, $n = 0, 1, ..., y^n$, $\dot{y}^n \in H_h$, $D_\lambda = D - \lambda\tau^2 A$, $\lambda = \alpha, \beta, \gamma$, $\phi_k \approx f$, $k = 1, 2$, $y_t = (\hat{y} - y)/\tau$, $\dot{y}_t = (\overset{\wedge}{\dot{y}} - \dot{y})/\tau$, $y^{(0.5)} = (\hat{y} + y)/2$, $\dot{y}^{(0.5)} = (\overset{\wedge}{\dot{y}} + \dot{y})/2$. H_h is the discrete analogue of space H for any point in time t; operators D, B, A operate from H_h to H_h. Parameters α, β, γ obey the condition of the fourth-order of approximation $\alpha + \gamma = \beta + 1/6$, with the additional fulfillment of the condition $\beta - 6\alpha\gamma + 1/40 = 0$, they obey the sixth-order of approximation. The accuracy is proved and an effective algorithm for the implementation of the scheme (2) is proposed. Equations of hyperbolic, parabolic types, nonclassical equations of Sobolev type [1] and loaded equations with local and nonlocal boundary conditions [2] are considered as nonstationary equations.

References

1. *Sveshnikov A.G., Alshin A.B., Korpusov M.O., Pletner Yu.D.* Linear and nonlinear Sobolev type equations. Moscow: Fizmatlit, 2007. 736 p.

2. *Nakhushev A.M.* Loaded equations and their application. Moscow: Nauka, 2012. 232 p.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

АГУ – Абхазский государственный университет
АГУ* – Астраханский государственный университет
АГУНП – Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности
АндГУ – Андижанский государственный университет имени Захириддин Мухаммад Бабура
АН ЧР – Академия наук Чеченской республики
АРУ им. К. Жубанова – Актюбинский региональный университет имени К. Жубанова
БГУ – Бакинский государственный университет
ВГПУ – Воронежский государственный педагогический университет
ВГТУ – Воронежский государственный технический университет
ВГУ – Воронежский государственный университет
ВлГУ – Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
ГБОУ ВО СГПИ – Ставропольский государственный педагогический институт
ГулГУ – Гулистанский государственный университет
ДГУ – Дагестанский государственный университет
ДГУНХ – Дагестанский государственный университет народного хозяйства
ДФИЦ РАН – Дагестанский федеральный исследовательский центр Российской академии наук
ИИПРУ КБНЦ РАН – Институт информатики и проблем регионального управления Кабардино-Балкарского научного центра РАН
ИКИР ДВО РАН – Институт космофизических исследований и распространения радиоволн Дальневосточного отделения РАН
ИМ АН РУз – Институт математики им. В.И. Романовского АН Республики Узбекистан
ИММ УрО РАН – Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук
ИММ НАНА – Институт математики и механики НАНА
ИМММ – Институт математики и математического моделирования
ИМ НАНТ – Институт математики им. А. Джураева Национальной академии наук Таджикистана
ИМ СО РАН – Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук
ИПГВЭ ОИВТ РАН – Институт проблем геотермии и возобновляемой энергетики – филиал Объединённого Института высоких температур Российской академии наук
ИПМА КБНЦ РАН – Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН
ИПУ РАН – Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН – Институт радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова РАН

ИСИ – Институт стратегических исследований Республики Башкортостан
ИСУ НАНА – Институт систем управления НАН Азербайджана
ИФТТ РАН – Институт физики твердого тела Российской академии наук
КазНУ им. аль-Фараби – Казахский национальный университет имени Аль-Фараби
КамГУ им. Витуса Беринга – Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга
КамчатГТУ – Камчатский государственный технический университет
КарУ им. Е.А. Букетова – Карагандинский государственный университет имени академика Е.А. Букетова
КБГУ – Кабардино-Балкарский государственный университет имени Х.М. Бербекова
КГПИ – Кокандский государственный педагогический институт
КГУ – Каракалпакский государственный университет
КИМРТ (филиал ВГУВТ) – Каспийский институт морского и речного транспорта филиал ФГБОУ ВО «Волжский государственный университет водного транспорта
КФУ – Казанский (Приволжский) федеральный университет
ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского – Липецкий государственный педагогический университет имени П.П. Семенова-Тян-Шанского
МГУ – Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
МПГУ – Московский педагогический государственный университет
МТУСИ – Ордена Трудового Красного Знамени федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский технический университет связи и информатики»
НамГУ – Наманганский государственный университет
НамИСИ – Наманганский инженерно-строительный институт
НГУ – Новосибирский государственный университет
НИУ «БелГУ» – Белгородский государственный национальный исследовательский университет
НИУ ВШЭ – Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
НУУз – Национальный университет Узбекистана
ПГУ – Пятигорский государственный университет
Самарский университет – Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева
СамГТУ – Самарский государственный технический университет
СПб ФИЦ РАН – Санкт-Петербургский Федеральный исследовательский центр РАН
СФ БашГУ – Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета
ТГПУ – Ташкентский государственный педагогический университет имени Низами
ТГТУ – Ташкентский государственный транспортный университет
ТГУВ – Ташкентский государственный университет востоковедения
ТГУПБП – Таджикский государственный университет права, бизнеса и

политики
ТИИИМСХ – Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства
ТНУ – Таджикский национальный университет
ТУИТ – Ташкентский университет информационных технологий имени Мухаммада ал-Хоразмий
ТФИ – Ташкентский финансовый институт
УГАТУ – Уфимский государственный авиационный технический университет
УлГТУ – Ульяновский государственный технический университет
УдГУ – Удмуртский государственный университет
ФерГУ – Ферганский государственный университет
ФИЦ ИВТ – Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий
ХГУ – Худжандский государственный университет имени Бободжона Гафурова
ЧГПИТО – Чирчикский государственный педагогический институт Ташкентской области
ЧГПУ – Чеченский государственный педагогический университет
ЧГУ – Чеченский государственный университет имени Ахмата Абдулхамидовича Кадырова
ЧелГУ – Челябинский государственный университет
ЮГУ – Югорский государственный университет
ЯрГУ – Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
ASOIU – Azerbaijan State Oil and Industry University
ASU – Adyghe State University
ASU* – Andijan State University
Al-Farabi KazNU – Al-Farabi Kazakh National University
HMASRU – Higher Military Aviation School of the Republic of Uzbekistan
ICS ANAS – Institute of Control Systems of Azerbaijan National Academy of Sciences
IM AS RUz – Institute of Mathematics named after V.I. Romanovskiy of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan
IMMM – Institute of Mathematics and Mathematical Modeling
INP – Institute of Nuclear Physics, Academy of Sciences of Uzbekistan
KarSU – Academician E.A. Buketov Karaganda State University
NamSU – Namangan State University
Nazarbayev University – The autonomous organization of education «Nazarbayev University»
NOSU – North-Ossetia State University
NUUz – National University of Uzbekistan
SMI VSC RAS – Southern Mathematical Institute of the Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences
TSTU – Tashkent State Transport University

Научное издание

МАТЕРИАЛЫ

VI Международной научной конференции «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики»

Макет выполнен в Институте прикладной математики
и автоматизации – филиале Федерального государственного
бюджетного научного учреждения «Федеральный научный центр
«Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук»

Подписано в печать 30.11.2021
Бумага офсетная. Формат бумаги 84×108 1/32.
Гарнитура Таймс. 27,4 усл. печ. л. Тираж 200 экз.