300 лет

Российская Академия Наук

# Избранные главы теории краевых задач со смещением, теории нагруженных уравнений и дробного исчисления

Москва 2024

УДК 517
ББК 22
И 32

**Научные редакторы:**
Т. Ш. Кальменов, А. П. Солдатов

**Составители:**
А. В. Псху, М. О. Мамчуев, А. Х. Аттаев, С. Х. Геккиева

**Избранные главы теории краевых задач со смещением, теории нагруженных уравнений и дробного исчисления** / Науч. ред. Т. Ш. Кальменов, А. П. Солдатов. – М.: РАН, 2024. – 367 с.

ISBN 978-5-907645-64-6

Настоящее издание содержит избранные труды выдающегося советского и российского математика Адама Маремовича Нахушева. Представленные результаты, полученные начиная с 60-х годов прошлого века в области анализа и дифференциальных уравнений, сгруппированы по разделам: краевые задачи со смещением, нагруженные уравнения, задачи в многомерных областях, уравнения смешанного типа и дробное исчисление. Вступительная глава содержит обзор основных результатов А. М. Нахушева.

Результаты, полученные в работах, вошедших в данное издание, актуальны и активно используются в современных научных исследованиях. Книга будет полезна научным работникам, аспирантам и студентам.

ISBN 978-5-907645-64-6 

# Оглавление

# О научном наследии Адама Маремовича Нахушева

## Введение

Настоящая работа посвящена обзору ряда результатов, полученных в работах выдающегося советского и российского математика Адама Маремовича Нахушева.

Становление А. М. Нахушева как ученого пришлось на годы учебы в аспирантуре Новосибирского государственного университета под научным руководством Андрея Васильевича Бицадзе. Тему своей кандидатской диссертации А. М. Нахушев получил во время Советско-Американского симпозиума, проходившего в Академгородке в 1963 году. Как вспоминал сам Адам Маремович: «два замечательных математика А. В. Бицадзе (СССР) и M. H. Protter (США) предложили мне, тогда еще аспиранту Новосибирского государственного университета, заняться проблемой корректной постановки краевых задач для уравнения смешанного типа с двумя непересекающимися линиями параболического вырождения».

Первые фундаментальные результаты А. М. Нахушева относились к теории уравнений смешанного типа. В 1966 году он успешно защитил кандидатскую диссертацию, в которой построил теорию краевых задач для уравнений смешанного типа с параллельными линиями вырождения. В те годы к актуальным проблемам теории уравнений в частных производных относились вопросы постановки краевых задач для уравнений гиперболического и смешанного типов в многомерных областях, которые казались трудно решаемыми. Подход, предложенный Адамом Маремовичем и легший в основу его докторской диссертации, успешно защищенной в 1971 году, оказался весьма эффективным и дал начало новому направлению в теории уравнений в частных производных — теории краевых задач со смещением.

Вернувшись в начале 70-х годов прошлого века в родную Кабардино-Балкарию, Адам Маремович продолжил свою научную и начал активную организационную деятельность. По его инициативе в Кабардино-Балкарском государственном университете были созданы три кафедры (кафедра теории функций и функционального анализа, кафедра вычислительной математики и кафедра информатики и математического обеспечения автоматизированных систем), а также организован НИИ прикладной математики и механики при КБГУ.

Уже тогда имя Адама Маремовича Нахушева было хорошо известно в математическом сообществе. Активная научная и гражданская позиция талантливого ученого, искренне радеющего за науку, смогла убедить многих, что в Кабардино-Балкарии создана и работает научная школа, и здесь есть все условия для создания и успешного функционирования научно-исследовательского математического института.

Поддержка таких выдающихся ученых, как Андрей Васильевич Бицадзе, Александр Андреевич Самарский, Михаил Чоккаевич Залиханов, Абдулах Касбулатович Микитаев, сделала возможным тот факт, что 26 августа 1991 года заместителем Председателя Правительства России, председателем Госкомитета РСФСР по делам науки и высшей школы Н. Г. Малышевым было подписано постановление о создании в Кабардино-Балкарской Республике Научно-исследовательского института прикладной математики и автоматизации и назначении его директором Нахушева Адама Маремовича. В 1993 году НИИ ПМА вошел в состав Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук, благодаря чему был преобразован в академический институт.

«Вы … стали Меккой для россиян, занимающихся дробными производными» – эти слова одного из ведущих специалистов в области применения дробного исчисления Владимира Васильевича Учайкина как нельзя лучше подчеркивают роль и место созданной А. М. Нахушевым в Кабардино-Балкарии научной инфраструктуры и воспитанной им математической школы.

В наши дни научная школа Адама Маремовича Нахушева объединяет более сотни ученых, активно работающих в науке и образовании во многих регионах России, Казахстане, Узбекистане и в других странах ближнего и дальнего зарубежья.

А. М. Нахушев обладал удивительной интуицией, прозорливостью и даром научного предвидения, его идеи оказывали существенное влияние на развитие уже существующих направлений и появлению новых. Так была развита теория нелокальных задач, появилась теория нагруженных уравнений, получило переосмысление дробное исчисление.

Адаму Маремовичу было свойственно видеть то, что было скрыто от глаз многих, замечать важные детали, которые другим казались малозначительными. Благодаря этим удивительным качествам науке стали известны корректные постановки краевых задач в многомерных областях, условия разрешимости краевых задач для вырождающихся гиперболических уравнений, эффект неравноправия характеристик и эффект локализации особенности градиента, критерий разрешимости задачи Дирихле для уравнений смешанного типа и многие другие важные результаты, которым и посвящен данный обзор.

Завершить вводную часть мы хотим словами Тынысбека Шариповича Кальменова [55, с. 188]: «Адам Маремович Нахушев вошел в золотой фонд дифференциальных уравнений и как крупный ученый, решивший классические проблемы, и как автор новых оригинальных краевых задач для уравнений гиперболического и смешанного типов, определивший направления исследований на многие годы».

Представленный обзор разбит на разделы: задачи со смещением, нагруженные уравнения, краевые задачи в многомерных областях, вырождающиеся гиперболические уравнения, уравнения смешанного типа и дробное исчисление. Мы постарались осветить результаты А. М. Нахушева, относящиеся к данным научным направлениям, и такая структура сделана для удобства восприятия. При этом следует иметь в виду, что многие работы содержат результаты, относящиеся к разным разделам, и потому могут упоминаться в каждом из них.

## Задачи со смещением

А. М. Нахушев разработал метод постановки и исследования качественно новых краевых задач для гиперболических и смешанного типа уравнений, названных им задачами со смещением. В современной научной литературе эти задачи называются **задачами Нахушева**.

**1.** Исследование **задач со смещением** началось с работ [83], [84]. Как известно, в задаче Трикоми одна из характеристик свободна от граничных условий, и следовательно, участки границы гиперболической части области неравноправны как носители граничных данных. Этот факт затруднял поиск аналога задачи Трикоми для уравнений смешанного типа в многомерных областях. В связи с этим в шестидесятых годах прошлого века А. В. Бицадзе была выдвинута проблема поиска корректно поставленных краевых задач для уравнений смешанного типа с двумя независимыми переменными, когда все точки характеристической части границы равноправны как носители граничных данных (см. [111]). Задачи со смещением, предложенные А. М. Нахушевым в работах [83] и [84], как раз давали подход к решению данной проблемы.

**2.** Для волнового уравнения

$$u_{xx} - u_{yy} = 0 \tag{1}$$

задача со смещением ставится следующим образом. Пусть $\Delta$ — область, ограниченная характеристиками $AC\colon\ x + y = 0$ и $BC\colon\ x - y = 1$ уравнения (1), и отрезком $AB$ оси $y = 0$. Ищется регулярное решение, удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x, 0) = \tau(x) \tag{2}$$

и

$$\alpha(x)u\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right) + \beta(x)u\left(\frac{1+x}{2}, \frac{x-1}{2}\right) = \delta(x). \tag{3}$$

Условие смещения (3) связывает значения искомого решения в вершинах характеристического четырехугольника, лежащих на отрезке $AB$ и характеристиках $AC$ и $BC$.

Вместо условия (2), на отрезке $AB$, также может быть задано условие
$$u_y(x,0)=\nu(x). \tag{4}$$
И, кроме того, рассматривалось условие смещения вида
$$\alpha(x)\frac{d}{dx}u\left(\frac{x}{2},-\frac{x}{2}\right)+\beta(x)\frac{d}{dx}u\left(\frac{1+x}{2},\frac{x-1}{2}\right)=\delta(x).$$
При $\alpha(x)\equiv 1$ и $\beta(x)\equiv 0$ условие (3) примет вид
$$u\left(\frac{x}{2},-\frac{x}{2}\right)=\delta(x),$$
и вместе с условием (2) (или (4)) мы приходим к первой (или второй) задаче Дарбу, которая, таким образом, оказывается частным случаем задачи со смещением.

**3.** В [83], [84] задачи со смещением были рассмотрены и для более общих уравнений, в том числе для уравнений смешанного типа и вырождающихся гиперболических уравнений.

Для модельного вырождающегося гиперболического уравнения
$$y^m u_{xx}-u_{yy}=0 \qquad (m>0) \tag{5}$$
условие смещения, задаваемое на характеристиках
$$AC\colon\ x+\frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}=0, \qquad BC\colon\ x-\frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}=1,$$
принимает вид
$$\alpha(x)D_{0x}^{1-\varepsilon}u[\theta_0(x)]+\beta(x)D_{1x}^{1-\varepsilon}u[\theta_1(x)]=\gamma(x), \tag{6}$$
где $D_{0x}^{1-\varepsilon}$ и $D_{1x}^{1-\varepsilon}$ — дробные производные в смысле Римана–Лиувилля порядка $1-\varepsilon$ с началом в точке $x=0$ и точке $x=1$, соответственно; $\varepsilon=m/(2m+4)$; $\theta_0(x)$ и $\theta_1(x)$ — точки пересечения характеристик $AC$ и $BC$ с характеристиками, выпущенными из точки $(x,0)$:
$$\theta_0(x)=\left(\frac{x}{2},(2-4\varepsilon)^{2\varepsilon-1}x^{1-2\varepsilon}\right),$$
$$\theta_1(x)=\left(\frac{1-x}{2},(2-4\varepsilon)^{2\varepsilon-1}(1-x)^{1-2\varepsilon}\right).$$

Нелокальное условие (6) при $\alpha(x)\equiv 1$ и $\beta(x)\equiv 0$ можно записать в виде
$$u[\theta_0(x)]=D_{0x}^{\varepsilon-1}\gamma(x),$$

и мы приходим к задаче Дарбу для уравнения (5).

**4.** В работе [84] было предложено непосредственное обобщение условия (3) в виде

$$\alpha(x)u\left(\frac{x}{2},\frac{x}{2}\right)+\beta(x)u\left(\frac{1+\theta(x)}{2},\frac{1-\theta(x)}{2}\right)=\delta(x), \tag{7}$$

где $\theta(x)$ — отображение отрезка $[0,1]$ в себя, оставляющее неподвижными его концы. Здесь условие (7) выписано для случая, когда уравнение (1) рассматривается в верхнем характеристическом треугольнике, т. е. в области $\{(x,y)\colon\ 0<y<\min(x,1-x)\}$.

**5.** Одним из направлений дальнейшего развития этих задач стала предложенная А. М. Нахушевым в работе [86] **методика постановки корректных нелокальных краевых задач** для линейных гиперболических уравнений второго порядка

$$u_{xx}-u_{yy}+a(x,y)u_x+b(x,y)u_y+c(x,y)u=0. \tag{8}$$

Пусть $\Delta$ — треугольная область, ограниченная характеристиками $|x|=1-y$ и линией $y=0$. В [86], в частности, показано, что след любого решения уравнения (8) на границе области $\partial\Delta$ удовлетворяет соотношению

$$A_{-1x}u\left[\theta_{-1}(x)\right]+A_{1x}u\left[\theta_1(x)\right]=A_{-1x}U\left[u(x),\theta_{-1}(x)\right]+A_{1x}U\left[u(x),\theta_1(x)\right]. \tag{9}$$

Здесь оператор $A_{jx}$ — интегро-дифференциальный оператор, обратный к интегральному оператору

$$A_{jx}^{-1}\left[f(x)\right]=\int\limits_j^x R\left(\theta_j(x);\xi,0\right)f(\xi)\,d\xi,$$

$R(x,y;\xi,\eta)$ — функция Римана уравнения (8), $\theta_j(x)$ — точка пересечения характеристик, проходящих через точки $(x,0)$ и $(j,0)$ $(j=\pm1)$, лежащая на $\partial\Delta$, и

$$U\left[f(x);x,y\right]=\frac{1}{2}\left[R(x,y;x+y,0)f(x+y)+R(x,y;x-y,0)f(x-y)\right]-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}\left[R_\eta(x,y;\xi,0)+b(\xi)R(x,y;\xi,0)\right]f(\xi)\,d\xi.$$

Для уравнения (8) рассмотрим краевую задачу

$$B_\omega u=\psi(t),\qquad t\in\omega\subset\partial\Delta, \tag{10}$$

где $B_\omega$ — заданный граничный оператор, определенный на $\omega$, подмножестве границы области $\Delta$.

В [86] также установлено, что для корректности краевой задачи (8), (10) граничный оператор $B_\omega$ надо задавать так, чтобы система (9) и (10) имела единственное решение $u_{\omega_0}(t)$ на некотором подмножестве $\omega_0 \in \omega$, таком, что задача

$$u\Big|_{\omega_0} = u_{\omega_0}(t), \qquad t \in \omega_0,$$

для уравнения (8) однозначно разрешима.

**6.** Дальнейшее развитие задачи со смещением получили в работе [111]. Здесь эти задачи были рассмотрены как часть более широкого класса нелокальных краевых задач. Была установлена прямая **взаимосвязь между нелокальными задачами и нагруженными уравнениями**. В этой работе осуществлена формализация и даны определения понятий нелокального оператора, нелокальных внутренних, краевых и внутреннекраевых задач, краевых, внутреннекраевых условий и задач с локальным (нелокальным) смещением (или сдвигом) для дифференциальных уравнений и систем основных типов.

Как отмечал сам А. М. Нахушев [111], термин «нелокальное условие», по всей видимости, впервые появился в работе А. А. Дезина [34].

**7.** Отметим также, что в работе [111] был доказан **аналог теоремы о среднем** для уравнения Геллерстедта

$$T_m u \equiv \operatorname{sign} y \cdot |y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0. \tag{11}$$

Обозначим через $\Omega_m^-$ область, ограниченную отрезком

$$AB = \{(x, y)\colon\ 0 < x < 1,\ y = 0\}$$

и характеристиками уравнения (11)

$$AC_m\colon\ (m+2)x = 2(-y)^{(m+2)/2},$$

$$BC_m\colon\ (m+2)(1-x) = 2(-y)^{(m+2)/2}.$$

В [111] показано, что для любого $x \in (0,1)$ решение уравнения (11) удовлетворяет соотношениям ($\varepsilon \neq 0$)

$$|x-j|^\varepsilon D_{jx}^{1-\varepsilon} u[\Theta_j^m(x)] =$$

$$= \frac{\Gamma(2\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon)} D_{jx}^{1-2\varepsilon} u(x,0) - (2-4\varepsilon)^{2\varepsilon-1} \frac{\Gamma(2-2\varepsilon)}{\Gamma(1-\varepsilon)} u_y(x,0) \tag{12}$$

и

$$x^\varepsilon D_{0x}^{1-\varepsilon} u[\Theta_0^m(x)] - (1-x)^\varepsilon D_{1x}^{1-\varepsilon} u[\Theta_1^m(x)] = \frac{1}{\Gamma(\varepsilon)} \frac{d}{dx} \int\limits_0^1 \frac{u(t,0)\,dt}{|x-t|^{1-2\varepsilon}}. \tag{13}$$

Здесь $D_{jx}^{\mu}$ — дробная производная Римана–Лиувилля порядка $\mu$ с началом в точке $x = j$, $j = 0, 1$, $\varepsilon = m/(2m+4)$, и

$$\Theta_{\xi}^{m}(\eta) = \left( \frac{\xi+\eta}{2}, -\left[ \frac{|\xi-\eta|(m+2)}{4} \right]^{2/(m+2)} \right)$$

— точка пересечения характеристик уравнения (11), выходящих из точек $(\xi, 0)$ и $(\eta, 0)$.

Соотношение (13) является аналогом теоремы о среднем для волнового уравнения.

В случае, когда $m = 0$ ($\varepsilon = 0$), соотношения (12) и (13) принимают вид

$$2\frac{d}{dx}u\left[\Theta_{j}^{0}(x)\right] = u_x(x,0) - (-1)^j u_y(x,0)$$

и

$$\frac{d}{dx}\left\{u\left[\Theta_{0}^{0}(x)\right] + u\left[\Theta_{1}^{0}(x)\right]\right\} = u_x(x,0).$$

**8.** Равенства (12) и (13) играют важную роль при описании как прямых, так и обратных задач для уравнений, содержащих оператор Геллерстедта $T_m$ в главной части. В частности, с помощью этих соотношений доказывается критерий однозначной разрешимости следующей **коэффициентной обратной задачи** [111]: *найти порядок вырождения m уравнения* (11), *если известно существование хотя бы одного его обобщенного решения* $u(x, y)$, *удовлетворяющего нелокальному условию*

$$x^{\varepsilon}D_{0x}^{1-\varepsilon}u[\Theta_{0}^{m}(x)] - (1-x)^{\varepsilon}D_{1x}^{1-\varepsilon}u[\Theta_{1}^{m}(x)] = \lambda\frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)}I_{01}^{1-2\varepsilon}u(x,0),$$

*и обладающего тем свойством, что* $I_{01}^{1-2\varepsilon}u(x,0) \neq 0$.

Здесь

$$I_{01}^{\alpha}\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_{0}^{1}\frac{\varphi(t)}{|x-t|^{\alpha}}dt.$$

**9.** Следует отметить, что в работе В. И. Жегалова [43] для уравнения Лаврентьева–Бицадзе

$$u_{xx} + \operatorname{sign} y \cdot u_{yy} = 0$$

была рассмотрена краевая задача с данными Дирихле на границе эллиптической части области и с граничными условиями, заданными на обеих характеристиках, в гиперболической части, т. е.

$$a(x)u(x,-x) + b(x)u(x+1/2, x-1/2) = c(x).$$

Таким образом, эту задачу следует отнести к задачам с локальным смещением. Отметим также, что в этой работе были рассмотрены разрывные условия склеивания на линии изменения типа.

**10.** Краевые задачи со смещением для уравнений в частных производных гиперболического и смешанного типов уравнений, за которыми в научной литературе закрепилось название **задачи Нахушева** ( [151], [152]), остаются объектом пристального внимания исследователей последние десятилетия. Развитие данного направления, а также его более полная библиография, отражены в монографиях [160], [28], [148], [161], [39], [117], [149], [54], [87], [156], [44], [64], [124], [42], [155], [125], [126], [131], [154], [88], [56], [70].

Отметим также работы [163], [164], [165], [166], [167], в которых нелокальные краевые задачи, которые следует отнести к задачам со смещением, рассматривались для эллиптических уравнений и систем.

## Нагруженные уравнения

Начиная с 1976 года среди научных интересов Адама Маремовича доминирующее положение занимают нагруженные уравнения и их приложения.

**11.** Понятие **нагруженного дифференциального уравнения** было введено в работе [101]. К классу нагруженных были отнесены уравнения, содержащие слагаемые вида $A\left(u\big|_{\omega_k}\right)$, где $A$ — заданный оператор, действующий на сужение $u\big|_{\omega_k}$ искомой функции $u = u(x)$ на многообразие $\omega_k$.

Статья [101], вместе с работой [40], послужила отправной точкой для дальнейших исследований **нагруженных уравнений**. Впоследствии, в работах [109] и [110] было дано общее определение нагруженных интегральных, функциональных и дифференциальных уравнений.

Заданное в $n$-мерной области $\Omega$ евклидова пространства точек $z = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ уравнение $Lw = f(z)$ называется нагруженным, если оно содержит некоторые операции от следа искомого решения $w = w(z)$ на принадлежащих замыканию $\overline{\Omega}$ многообразиях размерности $< n$ [110].

Отметим, что понятие нагруженного уравнения применительно к интегральным уравнениям встречается (по всей видимости, впервые) в работе A. Kneser [210] (см. также [159, с. 156]). Термин «нагруженное дифференциальное уравнение» ранее был использован (в несколько более узком смысле) в работе А. Д. Искендерова [45].

**12.** В работе [101] методом функции Грина–Адамара была решена вторая задача Дарбу для нагруженного вырождающегося гиперболического уравнения с оператором Геллерстедта в главной части

$$T_m u + a u_x + b u_y + \sum_{i=1}^{n} a_i D_{0\xi}^{\alpha_i} u\,(x,\,0) + cu = d,$$

где $D_{0\xi}^{\alpha_i}$ — оператор дробного интегро-дифференцирования Римана–Лиувилля порядка $\alpha_i$, $T_m$ — оператор Геллерстедта (см. (11)).

В этой работе впервые продемонстрирован **эффект регуляризующего влияния нагрузки**. На примере нагруженного уравнения Бицадзе–Лыкова

$$u_{yy} - y^2 u_{xx} + u_x + 4\lambda D_{0\xi}^{\alpha} u(x,0) = d(x,y)$$

было показано, что наличие нагрузки устраняет **неравноправие характеристик**, как носителей данных второй задачи Дарбу.

**13.** Началом исследований **нагруженных параболических уравнений** послужила работа [40]. В этой статье для нагруженного уравнения теплопроводности

$$u_t - u_{xx} - \lambda u(0,t) = 0 \qquad (14)$$

в прямоугольной области решена смешанная краевая задача.

Уравнение (14) описывает процесс распространения тепла в ограниченной среде, на одном из концов которой имеется источник тепла, мощность которого пропорциональна значению температуры.

**14.** Исследования, начатые в [40], получили дальнейшее развитие в статье [102]. В этой работе изучались краевые задачи в прямоугольной области для неоднородного нагруженного параболического уравнения

$$u_y - \varkappa u_{xx} + \sum_{i,j=1}^{n,m} a_i(x,y) D_{0y}^{\alpha_i} k_j(x,y) u(x^j,y) + c(x,y)u = f(x,y), \qquad (15)$$

где $\alpha_n < \alpha_{n-1} < \cdots < \alpha_1$, $0 \leqslant x^1 < x^2 < \cdots < x^m < l$, $\varkappa = \mathrm{const} > 0$, $D_{0y}^{\alpha_i}$ — оператор дробного интегро-дифференцирования порядка $\alpha_i$.

В случае, когда максимальный порядок, входящих в уравнение (15) дробных производных меньше $1/2$, а коэффициент $c(x,y)$ не положителен, доказана теорема об однозначной разрешимости первой, второй и смешанной краевых задач. Для доказательства использована редукция к интегральному уравнению Вольтерра второго рода.

Кроме того, метод редукции интегральных уравнений Вольтерра с вырожденным ядром к обыкновенным дифференциальным уравнениям позволил выписать общее представление всех решений уравнения (15) при дополнительном предположении, что коэффициенты уравнения не зависят от пространственной переменной.

В работе [102] также обсуждались некоторые вопросы математического моделирования плоскопараллельного неустановившегося движения грунтовых вод, при описании которых естественным образом возникают нагруженные уравнения.

**15.** Исследование **нагруженных гиперболических уравнений** было продолжено в работах [105] и [106]. В этих работах найдены условия однозначной разрешимости ряда нелокальных краевых задач и задачи Гурса для интегро-дифференциальных уравнений вида

$$Lu = \sum_{i=1}^{3} B_i u + f(z), \qquad u = u(z) \equiv u(x, y), \tag{16}$$

где

$$Lu \equiv u_{xy} + A(z)\, u_x + B(z)\, u_y + C(z)\, u;$$

$$B_1 u \equiv a(z) \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y \alpha(z;\, \eta)\, u(x,\, \eta) d\eta +$$

$$+ b(z) \frac{\partial}{\partial y} \int_0^x \beta(z;\, \xi)\, u(\xi,\, y) d\xi + \int_0^x d\xi \int_0^y c(z;\, \zeta)\, u(\zeta) d\eta;$$

$$B_2 u \equiv \int_0^y \alpha^i(z;\, \eta) u(x_i,\, \eta) d\eta + \int_0^x \beta^j(z;\, \xi) u(\xi,\, y_j) d\xi;$$

$$B_3 u \equiv c^{ij}(z) u(x_i,\, y_j), \qquad \zeta = (\xi,\, \eta).$$

Здесь по повторяющимся индексам $i = 1, \ldots, m$ и $j = 1, \ldots, n$ подразумевается суммирование. (В [105] рассматривался случай, когда все коэффициенты $c(z; \zeta)$, $\alpha_i$, $\beta^j$ и $c^{i,j}$ равны нулю.)

**16.** Известно, что многие задачи, связанные с динамикой почвенной влаги и грунтовой воды, редуцируются к локальным и нелокальным краевым задачам для различных частных случаев уравнения (16). Так, например, линеаризованное уравнение Аллера

$$u_y = \frac{\partial}{\partial x}\left(Du_x + Au_{xy}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\Pi(x, y), \tag{17}$$

где $A$ и $D$ — достаточно гладкие положительные функции, $\Pi(x,\, y)$ — поток почвенной влаги в точке $x$ в момент времени $y > 0$, можно переписать в виде

$$Au_{xy} + Du_x = \frac{\partial}{\partial y} \int_0^x u(\xi, y)\, d\xi + f(y), \tag{18}$$

в случае, если известен поток $\Pi(0,\, y) = f(y)$ влаги на поверхности $x = 0$ почвы для любого момента времени $y$. Уравнение (18), очевидно, относится к частным случаям уравнения (16), и решение краевых задач для уравнения (17) сводится к задачам, изученным в работах [105] и [106].

**17.** К важным результатам работы [106] следует отнести обнаружение **спектра задачи Гурса** для нагруженных гиперболических уравнений вида (16).

В [106], в частности, показано, что однородная задача Гурса

$$u(x,0) = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant h), \qquad u(0,y) = 0 \quad (0 \leqslant y \leqslant T), \tag{19}$$

для уравнения

$$u_{xy} = \lambda \left[ \int\limits_0^x u(\xi, x_0)\, d\xi + \int\limits_0^y u(x_0, \eta)\, d\eta \right] \qquad (\lambda = \mathrm{const}\,, \quad x_0 > 0), \tag{20}$$

не имеет решений, отличных от тривиального, тогда и только тогда, когда

$$\lambda \neq -\frac{\pi^2 k^2}{x_0^3}, \qquad k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Собственные функции задачи (19) и (20), соответствующие собственному значению $\lambda_k = -\pi^2 k^2 / x_0^3$, имеют вид

$$u_k(x,y) = y \sin \frac{\pi k x}{x_0} - x \sin \frac{\pi k y}{x_0}.$$

**18.** В работе [109] был предложен новый метод поиска приближенных решений краевых задач для дифференциальных уравнений, названный автором **методом редукции к нагруженным уравнениям**.

Пусть $L$ — дифференциальный (интегро-дифференциальный) оператор с областью определения $D(L)$, а $\tilde{L}$ — нагруженный оператор такого же типа и порядка, что и $L$, который с определенной степенью точностью аппроксимирует $L$. Предлагаемый метод отыскания приближенного решения $\tilde{u} \in D(L)$ уравнения

$$Lu = f, \qquad \tilde{u} \in D(L),$$

состоит в замене этого уравнения аппроксимирующим уравнением

$$\tilde{L}u = f, \qquad \tilde{u} \in D(\tilde{L}) = D(L).$$

Суть метода продемонстрирована на некоторых модельных задачах, важных в теоретическом и прикладном аспектах. В частности, рассмотрены задачи отыскания приближенных решений краевых задач для уравнения Буссинеска, решений уравнения Кортевега де Фриза, применительно к задачам долгосрочного прогноза уровня грунтовых вод, задаче фильтрации и др.

**19.** В работе [110] впервые было указано о **связи нелокальных задач с нагруженными уравнениями** (см. также [111]), что способствовало росту интереса к данному направлению.

В [110] приведены примеры эквивалентности задачи Дирихле для двумерного уравнения Лапласа в ее классической постановке задаче отыскания решения соответствующего нагруженного уравнения, а также редукции нелокальной задачи для уравнения теплопроводности к локальной задаче для нагруженного уравнения теплопроводности.

Также в [110], на примере уравнения Лаврентьева–Бицадзе, показано, что задачи поиска решений нагруженных дифференциальных уравнений в наперед заданных классах могут привести к новым краевым задачам для ненагруженных уравнений.

**20.** В статье [110] А. М. Нахушев, по всей видимости впервые, употребил словосочетание «**уравнения математической биологии**» и прозорливо написал «*... если сопоставить историю развития математической физики с происходящим процессом зарождения теоретической биологии, особенно математической экологии, то можно с определенной уверенностью утверждать, что в ближайшие десятилетия будут заложены основы теории уравнения математической биологии, предметом которой станет исследование дифференциальных уравнений, описывающих модели различных биологических процессов и явлений*».

Через 12 лет после выхода статьи [110] в издательстве «Высшая школа» вышла его книга [87] под названием «Уравнения математической биологии», рекомендованная Государственным комитетом Российской Федерации по высшему образованию в качестве учебного пособия для студентов математических и биологических специальностей университетов. Эта книга долгие годы была практически единственным и незаменимым подспорьем (и остается во многом таковой и сейчас) для тех, кто осваивал основы дробного исчисления, теории локальных и нелокальных краевых задач для уравнений основных и смешанных типов, теории нагруженных уравнений, основы всех тех направлений, которые лежат в основе математического моделирования биологических, физико-биологических и социально-экономических процессов.

**21.** Работы А. М. Нахушева по теории нагруженных уравнений, начиная с самых первых, получили отклик со стороны научной общественности и дали толчок к развитию этого актуального научного направления. Рассматривались краевые задачи для нагруженных гиперболических уравнений [49], [51], [150], [133], [134], эллиптических [22], [23], [24], и параболических уравнений [37], [68], [71], [72], [73], [74], [206], [193], [223], а также уравнений смешанного типа [50], [63], [218], [205], [47], [48], [46], [12], [170], [80], исследовались начальные задачи для нагруженных эволюционных уравнений [26], [27], [25], решались внутренне-краевые задачи для псевдопараболических уравнений [82], характеристические задачи и задачи граничного управления для нагруженных волновых уравнений и уравнений первого порядка [7], [192], [9], [10], [11], [191], [8], разрабатывались разностные методы решения нагруженных параболических уравнений [181], [182] и задач оптимального управления нагруженными сосредоточенными системами [1], изучались спектральные свойства нагруженных дифференциальных операторов второго порядка [65], [66], и др.

В настоящее время исследования в области нагруженных уравнений и их приложений успешно продолжаются. Этапы интенсивного развития теории нагруженных уравнений за последние десятилетия отражают монографии [87], [88], [36], [158], [13], [144], [131], [38], [70].

## Краевые задачи в многомерных областях

Работы А. М. Нахушева внесли существенный вклад в решение **проблемы поиска корректных краевых задач в многомерных областях** для гиперболических и смешанного типа уравнений, и оказали весомое влияние на дальнейшее развитие данного направления.

**22.** Одной из первых работ А. М. Нахушева в данном направлении была статья [90]. В этой работе был исследован **трехмерный аналог задачи Геллерстедта**.

Пусть $D = \Omega \times \mathbb{R}$ — односвязная цилиндрическая область трехмерного евклидова пространства переменных $x$, $y$ и $z$, ограниченная поверхностью $\Gamma = \sum\limits_{n=0}^{4} \Gamma_n$, где

$$\Gamma_0\colon x^2 + \frac{4}{9}y^3 = a^2, \qquad y \geqslant 0,$$

и

$$\Gamma_1\colon \frac{2}{3}(-y)^{3/2} - x = -x_0, \qquad \Gamma_2\colon \frac{2}{3}(-y)^{3/2} + x = x_0,$$

$$\Gamma_3\colon \frac{2}{3}(-y)^{3/2} + x = a, \qquad \Gamma_4\colon \frac{2}{3}(-y)^{3/2} - x = a, \quad y \leqslant 0,$$

$|x_0| \leqslant a > 0$; соответственно, область $\Omega$, лежащая в плоскости переменных $x$ и $y$, ограничена кривыми $\sigma_n$, $\sigma_n = \Gamma_n \cap \{z = 0\}$, $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

Исследуется следующий трехмерный аналог задачи Геллерстедта: *найти регулярное в области $D$ решение $\hat{u}(x,\, y,\, z)$ уравнения*

$$y\,(\hat{u}_{xx}+\hat{u}_{zz})+\hat{u}_{yy}=\hat{f}(x,\, y,\, z),$$

*непрерывное в замкнутой области $\overline{D}$ и обращающееся в ноль на поверхностях $\Gamma_0$, $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$.*

Задача эквивалентно редуцируется к плоской задаче Геллерстедта для уравнения

$$yu_{xx}+u_{yy}-\lambda^2 yu=f(x,\, y,\, \lambda).$$

Далее, для доказательства единственности ее решения устанавливаются принцип экстремума и принцип Зарембы–Жиро. Для доказательства существования решения решаются две вспомогательные задачи Дарбу в каждой из характеристических подобластей гиперболической части области $\Omega$ и задача Хольмгрена в эллиптической. При этом с помощью функций Грина–Адамара второй задачи Дарбу и функции Грина задачи Хольмгрена получены основные функциональные соотношения, связывающие данные задачи Коши из гиперболической и эллиптической частей смешанной области.

**23.** Исследования краевых задач в многомерных областях были продолжены в работах [85], [92], [95]. Здесь были исследованы **многомерные аналоги задач Дарбу и Трикоми** (задача А. В. Бицадзе) для гиперболического

$$Lu\equiv u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}-u_{tt}+a^i u_{x_i}+bu_t+cu=f$$

и смешанных типов уравнений

$$Lu\equiv\ \operatorname{sign} z u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=f(x,y,z),$$

$$Lu\equiv\ \operatorname{sign} x_m u_{x_0x_0}+\triangle_x u=f(x_0,x),$$

рассматриваемых в областях ограниченных характеристическими конусами в гиперболической и кусочно гладкой поверхностью в эллиптической части смешанной области.

В этих работах, на основе полученных априорных оценок, доказаны единственность сильных решений и существование полусильных решений задач Бицадзе и Дарбу.

**24.** Впервые задача Трикоми для двумерного волнового уравнения сформулирована А. В. Бицадзе [18] и является исключительным случаем задачи, исследованной С. Л. Соболевым [162] для многомерного волнового уравнения, когда данные задаются на времяобразно ориентированной конической поверхности.

В дальнейшем для более общих гиперболических уравнений при некоторых ограничениях на коэффициенты и на правую часть В. Н. Врагов [30] доказал существование решения из $W_2^2(\Omega)$, а Н. И. Попиванов [137] обосновал существование и единственность сильного решения из $W_2^1(\Omega)$. В работе [53] Т. Ш. Кальменов в явном виде выписал решение задачи для многомерного волнового уравнения с группой младших членов.

**25.** Решение **проблемы поиска корректных краевых задач в многомерных областях** получило дальнейшее развитие в серии работ А. В. Бицадзе и А. М. Нахушева [19], [20], [21], посвященной исследованию многомерного вырождающегося гиперболического уравнения

$$x_0^{2m}\Delta_x u - x_0 u_{x_0x_0} + (m-1/2)\,u_{x_0} = 0, \tag{21}$$

где $m$ — неотрицательное целое число, $\Delta_x$ — оператор Лапласа по переменным $x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n$, а $u\,(x,\, x_0)$ — искомое решение.

В статье [19] (см. также [20], [21]) был определен оператор усреднения $B_n^x$, в терминах которого был сформулирован и доказан **многомерный аналог теоремы о среднем значении** для уравнения (21)

$$u\,(\alpha,\, 0) + u\left[0,\; (r/\beta)^\beta\right] = B_n^\alpha u \quad \forall\alpha,\; |\alpha| < r. \tag{22}$$

Отметим, что при $m = 1/2$ и $n = 1$ уравнение (21) переходит в одномерное волновое уравнение, а оператор $B_n^x$ принимает вид

$$B_1^{x_1}u \equiv u\left(\frac{x_1 - r}{2},\, \frac{x_1 + r}{2}\right) + u\left(\frac{x_1 + r}{2},\, \frac{r - x_1}{2}\right),$$

и в этом случае соотношение (22) представляет собой классическую теорему о среднем для волнового уравнения.

Свойство (22) позволило найти ряд корректных задач для уравнения (21), в том числе и в смешанной области, ограниченной поверхностью Ляпунова $\sigma$ в эллиптической части и характеристическим коноидом в гиперболической.

Также был доказан принцип экстремума, в соответствии с которым положительный максимум и отрицательный минимум в замыкании эллиптической части области достигаются на поверхности $\sigma$.

Дальнейшее развитие эти результаты нашли в работах С. А. Алдашева [3], С. С. Харибегашвили [207], М. А. Нурмамедова [132], И. П. Половинкина [135], [81], [136].

## Вырождающиеся гиперболические уравнения

Существенное влияние на развитие теории вырождающихся уравнений оказали результаты А. М. Нахушева, относящиеся к исследованиям классических задач Дарбу.

**26.** В 1970 году в Докладах академии наук СССР была опубликована статья [93] А. М. Нахушева, посвященная исследованию вопросов корректности **первой и второй задач Дарбу** для уравнения

$$Lu \equiv u_{yy} - k(y)u_{xx} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y), \qquad (23)$$

где $k(y) > 0$ при $y \neq 0$ и может обращаться в нуль при $y = 0$, $k$, $b \in C(\overline{D})$ и $a$, $c$, $a_x$, $c_x \in C(D)$, $D$ – характеристический треугольник ограниченный характеристиками $AC$ и $BC$ и отрезком $AB : 0 < x < 1$ прямой $y = 0$.

Ранее, в работе [203] С. Геллерстедтом были установлены единственность и существование неоднородной задачи Дарбу для уравнения (23) в случае, когда $k(y) = -y^m$, ($m$ – нечетное число), $a, b \in C^3(\overline{D})$, $c$, $f \in C^1(\overline{D})$ и, кроме того, при $m > 2$ функция $a$ представима в виде $a = |y|^n a_1(x,y)$ с $a_1 \in C(\overline{D})$ и $n > \frac{m}{2} - 1$.

В [93] доказана

**Теорема.** *Пусть коэффициенты уравнения* (23) *удовлетворяют одному из следующих условий:*

*1.* $k(y) \neq 0$ *или* $a(x,0) > 0$ *при* $0 \leqslant x \leqslant 1$*;*

*2.* $a/k,\ b^2/k \in C(\overline{D})$, $c(x,0) < 0$ *при* $0 \leqslant x \leqslant 1$*;*

*3.* $a/k,\ b^2/k,\ c/k,\ a_x/k,\ c_x/k \in C(\overline{D})$*;*

*4.* $k/a,\ b^2/a \in C(\overline{D})$, $a > 0$, $c(x,0) < 0$ *при* $y \neq 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$*;*

*5.* $k/a,\ b^2/a,\ c/k,\ c_x/k \in C(\overline{D})$, $a > 0$, *при* $y \neq 0$, $a_x \geqslant 0$.

*Тогда имеет место априорная оценка вида*

$$\|u\|_{++} \leqslant C\|Lu\|_{+} \quad \forall u \in W,$$

*где*

$$W = C(\overline{D}) \cap C^2(D) \cap W_2^1(D) \cap W_2^1(\partial D),$$

$\|\cdot\|_{++}$, $\|\cdot\|_{+}$ *– некоторые позитивные нормы, а* $C$ *– независящая от* $u$ *положительная постоянная.*

Из этой теоремы следует единственность регулярного решения задачи Дарбу и существование слабого решения сопряженной задачи в функциональных пространствах, соответствующих априорной оценке.

**27.** Результаты работы [93] и на сегодняшний день являются наиболее общими. Кроме того, условия, указанные в приведенной выше теореме, являются существенными и *их нарушение может привести к* ***неединственности решения задачи Дарбу***.

В связи с этим в [93] приведен пример уравнения

$$u_{yy} - y^2 u_{xx} - u_x = 0, \tag{24}$$

для которого однородная задача, соответствующая неоднородной задаче Дарбу: $u_y|_{AB} = \nu(x)$, $u|_{BC} = \psi(x)$ *имеет бесчисленное множество линейно независимых решений, а неоднородная разрешима тогда и только тогда, когда*

$$\nu(x) = \psi'\left(\frac{1+x}{2}\right).$$

В то же время задача Дарбу для уравнения (24) оказывается корректно поставленной, когда данные задаются не на характеристике $BC$, а на $AC$. Это говорит о **неравноправии характеристик** уравнения (24) как носителей граничных данных.

**28.** Развернутый вариант статьи [93] был опубликован в первом номере журнала «Дифференциальные уравнения» 1971 года (см. [94]). В этом же номере опубликована работа Т. Ш. Кальменова (см. [52]), в которой установлен критерий единственности задачи Дарбу для уравнения

$$y^2 u_{xx} - u_{yy} + a u_x = 0, \quad a > 0, \tag{25}$$

коэффициенты которого не удовлетворяют ни условиям Геллерстедта ([203], см. выше), ни условиям теоремы А. М. Нахушева [93].

Из теоремы А. М. Нахушева следует единственность регулярных решений первой и второй задач Дарбу для уравнения (25) при $a < 0$. Т. Ш. Кальменов установил, что в случае уравнения (25) условия

$$a \neq 4n + 3 \quad \text{и} \quad a \neq 4n + 1 \quad (n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots) \tag{26}$$

являются необходимыми и достаточными для единственности решения первой и второй задач Дарбу, соответственно, в классе функций

$$u(x,\, y) \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D} \setminus A \cup B) \cap C(\overline{D}).$$

**29.** В 1959 году А. В. Бицадзе привел уравнение (25) в качестве примера уравнения, не удовлетворяющего условию Геллерстеда, для которого задача Коши с данными на линии параболического вырождения корректна по Адамару [17, с. 47].

Вместе с результатами работы [93], это позволяет сделать вывод, что «*в отличие от строго гиперболических уравнений, или от вырождающихся уравнений с нехарактеристическим степенным вырождением порядка меньшего двух, из корректности задачи Коши не следует, вообще говоря, корректность соответствующих задач Дарбу, если порядок вырождения больше либо равен двум*» [94].

Результаты работ [93] и [94] также позволяют ответить на вопрос, *может ли неединственность решения задачи Дарбу повлиять на единственность решения известной задачи Трикоми.* Пример уравнения

$$\operatorname{sign} y \cdot y^2 u_{xx} + u_{yy} - u_x = 0$$

показывает, что ответ отрицательный: *«неединственность решения задачи Дарбу не влияет на единственность решения задачи Трикоми»* [94].

**30.** Уравнение (25), известное как уравнение влагопереноса, было выведено А. В. Лыковым в 1965 году в работе [67] методами термодинамики необратимых процессов для описания процесса переноса влаги в капиллярно-пористых средах.

В монографии А. М. Нахушева [87] уравнение (25) приведено в качестве модельного, описывающего одномерный поток биомассы микробной популяции и названо **уравнением Бицадзе–Лыкова**.

**31.** В дальнейшем в работе [107] было показано, что при $|a| < 1$ первая и вторая задачи Дарбу для уравнения (25), а также сопряженные к ним задачи разрешимы единственным образом в классе функций $C^2(D) \cap C^1(D \cup AB) \cap C(\overline{D})$.

Также, в случае $a \leqslant -1$ показано, что выполнение для коэффициента $-a$ в уравнении (25) условий (26) является необходимым и достаточным для единственности решений задач Дарбу в соответствующих классах функций. При этом в случае второй задачи Дарбу появляется дополнительное условие, что производная по $\eta$ от сужения $u|_{AC} = \psi(\eta)$, $0 < \eta < 1$, при $\eta \to 1$ не обращается в бесконечность неинтегрируемого порядка при $-3 < a < -1$.

**32.** Традиционно считается, что решения гиперболических уравнений с достаточно гладкой правой частью не могут иметь изолированных особых точек, так как любая особенность должна уноситься вдоль характеристики, проходящей через эти точки. Однако, как показал А. М. Нахушев в работах [115] и [116], это правило имеет исключения.

Работы [115] и [116] посвящены исследованию проблемы об особенностях градиента решения задачи Дарбу для неоднородного уравнения Геллерстедта

$$u_{yy} - (-y)^m u_{xx} = f(x, y) \tag{27}$$

в области $D$ ограниченной характеристиками $AC_m$, $BC_m$, и отрезком $AB\colon 0 \leqslant x \leqslant l$ прямой $y = 0$, с однородными данными на $AB \cup AC_m$.

В частности, в [115] и [116] установлен **эффект локализации особенности градиента** $\nabla u$ решения задачи Дарбу для уравнения (27).

Доказано, что если

$$2 < m < 4, \quad f \in C^1(\overline{D}) \quad \text{и} \quad f(0,0) \neq 0,$$

то первая компонента градиента непрерывна всюду в $\overline{D}$ за исключением точки $(0,0)$, где она обращается в $\infty$, а вторая непрерывна в $\overline{D}$. При $m < 2$ условие $f(0,0) \neq 0$ является лишним.

**33.** Также в [115] и [116] доказан **критерий непрерывности градиента** решения задачи Дарбу для уравнения (27): *при выполнении условий*

$$2k \leqslant m < 2(k+1), \quad f \in C^k(\overline{D}), \quad k = 1,\, 2,\, \ldots$$

*решение* $u(x,y)$ *задачи Дарбу для уравнения* (27) *в области* $D$ *будет принадлежать пространству* $C^1(\overline{D})$ *тогда и только тогда, когда*

$$\partial^i f / \partial y^i (0,0) = 0 \quad \forall\, i = 0, 1, \ldots, k-1.$$

**34.** История проблемы об особенностях градиента решения задачи Трикоми и Дарбу началась с работы Ф. Трикоми [173, с. 181], в которой изучался вопрос об изолированных особенностях решений уравнения

$$y u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

лежащих в области его эллиптичности вплоть до параболической линии $y = 0$, и получено необходимое и достаточное условие существования конечного предела при $x \to 0$ или $l$ функции $\nu(x)$ — следа производной по $y$ от решения $u(x,y)$ задачи Трикоми для этого уравнения.

Для уравнения же вида

$$u_{yy} + \operatorname{sign} y \cdot |y|^m u_{xx} = f(x,y), \quad 0 < x < l,$$

этот вопрос и связанная с ним проблема ограниченности градиента решения задачи Трикоми и ее сингулярного варианта – первой задачи Дарбу в гиперболической части смешанной области, до выхода работ [115] и [116], оставались открытыми.

Ранее в работе [94], опубликованной в 1971 году, А. М. Нахушевым было обнаружено, что оценка

$$||u||_1 \leqslant C||f||_0,$$

которая справедлива для общего линейного уравнения с волновым оператором, не имеет места для уравнения

$$u_{yy} - y^2 u_{xx} + u_x = 1.$$

Чуть позже, в работе [96] А. М. Нахушев доказал, что если $f \in C^2(\overline{D})$ и $m < 2$, то справедливо неравенство

$$\|u\|_1 \leqslant C\|f\|_2.$$

В этой же работе приведен пример Т. Ш. Кальменова, показывающий, что если $m > 2$, то решение $u$ задачи Дарбу для уравнения (27) не принадлежит $C^1(\overline{D})$ даже в случае, когда $f = \text{const} \neq 0$.

**35.** Работы А. М. Нахушева, посвященные изучению свойств решений задачи Дарбу для вырождающихся гиперболических уравнений, тесно связаны с исследованиями, проведенными в работах С. Геллерстедта [202] В. В. Коврижкина [61], В. Н. Врагова [30], Н. И. Попиванова [137], Н. Ю. Капустина [57].

Отметим также работы [32] и [33], в которых было продолжено исследование свойств решений первой и второй задач Дарбу для уравнений с оператором Геллерстедта в главной части.

## Уравнения смешанного типа

А. М. Нахушев получил ряд важных результатов, имеющих фундаментальное значение для теории уравнений смешанного типа.

**36.** Ф. И. Франкль в работе [175] впервые показал, что некоторые задачи трансзвуковой газовой динамики приводят к задаче Дирихле для уравнений смешанного типа. В статье [16] А. В. Бицадзе указал класс смешанных областей для уравнения

$$u_{xx} + \operatorname{sign} y \cdot u_{yy} = 0,$$

для которых задача Дирихле некорректна. В связи с этим возникла проблема поиска смешанных областей, для которых задача Дирихле является корректно поставленной.

**37.** В работе [91] А. М. Нахушев рассмотрел уравнение смешанного типа

$$k\,(y)\,\left[a^{ij}\,(x)\,u_{x_i}\right]_{x_j} - u_{yy} + c\,(x)\,k\,(y)\,u = 0 \tag{28}$$

(здесь и ниже по повторяющимся индексам $i$ и $j$ подразумевается суммирование от 1 до $n$) в цилиндрической области

$$\Omega_{\alpha\beta} = \{(x, y)\colon x \in D \subset \mathbb{R}^n,\ y \in (\alpha, \beta)\}, \quad \alpha < 0,$$

где

$$k\,(y) \in C^1[\alpha,\,0] \cap C^1[0,\,\beta], \quad a^{ij}\,(x)\,, \quad c\,(x) \in C\left(\overline{D}\right);$$

$$yk\,(y) > 0 \ \ \forall\, y \neq 0; \quad k'\,(y) \geqslant 0 \ \ \forall\, y \geqslant 0; \quad c\,(x) \leqslant 0;$$

$$a^{ij}\,(x)\,\xi_i\xi_j \geqslant \gamma\,|\xi|^2 \quad \forall\, x \in D, \quad \gamma = \text{const} > 0.$$

В [91] доказан следующий **критерий единственности решения задачи Дирихле** для уравнения (28): *если $\partial\Omega_{\alpha\beta}$, $a^{ij}(x)$ и $c(x)$ обладают тем свойством, что система собственных функций $\{v_m\,(x)\}$, со-*

*ответствующих собственным значениям* $\lambda_m$ *однородной задачи Дирихле* $v|_{\partial D} = 0$ *для уравнения*

$$\left[a^{ij}(x)\, v_{x_i}\right]_{x_j} + [c(x) + \lambda]\, v = 0, \quad x \in D,$$

*полна в пространстве* $L_2(D)$, *и* $v_m \in C^1\left(\overline{D}\right) \cap C^2(D)\ \forall\, m$, *то задача Дирихле для уравнения* (28) *имеет единственное решение тогда и только тогда, когда*

$$\omega_m(\beta) \neq 0 \ \ \forall\, m, \tag{29}$$

*где* $\omega_m(y)$ *— решение уравнения*

$$\omega_m'' + \lambda_m k(y)\, \omega_m = 0$$

*из класса* $C^1[\alpha, \beta]$, *удовлетворяющее условию* $\omega_m(\alpha) = 0$.

Следует отметить, что нарушение условия (29) хотя бы для одного $m$, приводит к существованию нетривиального решения однородной задачи Дирихле.

**38.** Впоследствии в работе [127] результаты статьи [91] были перенесены на задачу Дирихле в цилиндрической области для уравнения смешанного типа с дробной производной

$$k(y)\left[\frac{\partial}{\partial x_j} a^{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x) u\right] - \partial_{0y}^{\gamma} u(x, \eta) = 0,$$

где $yk(y) > 0$ при $y \neq 0$, $u = u(x, y)$, $1 < \gamma = \mathrm{const} < 2$. Здесь $\partial_{0y}^{\gamma} u$ — производная дробного порядка (в смысле Герасимова–Капуто).

**39.** В дальнейшем задача Дирихле для уравнений смешанного типа изучалась в работах М. М. Хачева [176], [177], [178], А. П. Солдатова [168], [169], К. Б. Сабитова [153], С. А. Алдашева [2] и др. (см. также библиографию в этих работах).

В работе [35] предложенный А. М. Нахушевым [91] подход был использован для установления критерия единственности смешанной задачи для уравнения (28).

Отметим также работы [76], [78], в которых исследованы краевые задачи с данными на всей границе для обобщенных волновых и смешанного типа уравнений с дробными производными.

**40.** В работах А. М. Нахушева [89], [97] впервые было обращено внимание на существенность условия отрицательности коэффициента $c(x)$ при свободном члене ($c(x) < 0$) в параболических уравнениях и на невозможность замены этого условия на более слабое условие $c(x) \leqslant 0$. Позже к этому пришел и В. Н. Врагов [31] на примере уравнения эллиптического типа.

В частности был построен пример, который показал, что первая краевая задача для уравнения с неотрицательной характеристической формой

$$Lu = a^{ij}(x)u_{x_i x_j} + b^j(x)u_{x_j} + c(x)u = f(x),$$

(по повторяющимся индексам предполагается суммирование от 1 до $n$) может оказаться недоопределенной, неправильно поставленной, если нарушено условие $c\,(x) < 0$.

После доклада А. М. Нахушева на I республиканской конференции математиков по дифференциальным уравнениям в 1972 году в г. Ашхабаде [89] и выхода работы [97] начались интенсивные исследования краевых задач для параболических уравнений с меняющимся направлением времени [171], [60], [220], [189].

Задачи Жевре для сингулярных уравнений параболического типа рассматривались в работах И. Е. Егорова [41], Н. В. Кислова [60], а также работы учеников А. М. Нахушева: А. А. Керефова [58], [59], А. А. Токовой [172], Ф. Г. Хуштовой [180] и других.

**41.** В работе [104] А. М. Нахушев предложил простой и элегантный прием, позволяющий правильно формулировать краевую задачу для гиперболо-параболического уравнения

$$u_{yy} - k(z)u_{xx} + a(z)u_x + b(z)u_y + c(z)u = f(z)$$

в произвольной ограниченной области $\Omega$ евклидовой плоскости точек $z = (x, y)$, указав части границы смешанной области, которые должны быть освобождены от граничных условий, а также и приведя необходимое условие разрешимости в виде априорной оценки.

**42.** В работе [108] А. М. Нахушевым получен фундаментальный результат об **априорных оценках, учитывающих тип дифференциального оператора**.

В области $Q \subset \mathbb{R}^n$ рассмотрим дифференциальный оператор

$$Lu \equiv a^{ij}(x)u_{x_i x_j} + b^i(x)u_{x_i} + c(x)u, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

где $a^{ij}(x)$, $b^i(x)$ и $c(x)$ — достаточно гладкие в замыкании $\overline{Q}$ функции, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$; по повторяющимся индексам $i$ и $j$ подразумевается суммирование от 1 до $n$. Обозначим через $\|u\|_s$ норму функции $u = u(x)$ в пространстве $W_2^s(Q)$, $s \in \mathbb{Z}$ (см. [14, с. 66]). Пусть также $\Omega$ — строго внутренняя подобласть области $Q$ (т. е. $\overline{\Omega} \subset Q$).

В [108] доказано, что *если для некоторого $s$ и любой функции $u \in C_0^\infty(\Omega)$ имеет место априорная оценка*

$$\|u\|_{s+2} \leqslant c_0 \|Lu\|_s, \tag{30}$$

*где $c_0$ — не зависящая от и положительная постоянная, то оператор $L$ в области $\Omega$ является эллиптическим.*

Из этого утверждения в частности следует, что априорные оценки в смешанных нормах, завышающие гладкость на две единицы, для эллиптико-гиперболических уравнений возможны лишь в строго внутренних подобластях эллиптической части смешанной области. И, следовательно, оценка (30) не может иметь места, если оператор $L$ является оператором смешанного эллиптико-гиперболического типа [108].

## Дробное исчисление

Особое место в научном творчестве Адама Маремовича Нахушева занимают результаты, относящихся к теории дробного исчисления, вопросам его применения в теории дифференциальных уравнений целого и дробного порядка, а также при моделировании различных физических и социально-исторических процессов и явлений.

**43.** В 1968 году Адам Маремович обратил внимание (см. [124, с. 7]) на то, «что поток газа Трикоми на звуковой линии прямо пропорционален дробной производной порядка 2/3 от функции тока». Тогда же «стало ясно, что необходимые нелокальные краевые условия для уравнения Трикоми могут быть описаны только с помощью операции дробного интегродифференцирования».

По всей видимости, именно это послужило отправной точкой для последующего этапа развития **дробного исчисления** как эффективного инструмента в теории уравнений в частных производных. Дальнейшие исследования в области уравнений смешанного типа, вырождающихся и нагруженных уравнений привели к установлению А. М. Нахушевым ряда качественно новых свойств для таких уравнений и их решений, которые были доказаны и сформулированы на языке дробного интегродифференцирования. Все это, в свою очередь, дало толчок развитию дробного исчисления, как самостоятельно заслуживающего внимания раздела современного анализа. Были обнаружены новые свойства операторов дробного интегрирования и дифференцирования, которые заняли важное место в дробном исчислении и теории уравнений дробного порядка и оказали существенное влияние на их дальнейшее развитие.

Как отмечал сам Адам Маремович [124, с. 8]: «*В настоящее время дробное (интегральное и дифференциальное) исчисление в теории фракталов и систем с памятью приобретает такое же важное значение, как и классический анализ в физике (механике) сплошных сред*». Многочисленные исследования последних лет красноречиво подтверждают это утверждение.

**44.** В 70-х годах прошлого века А. М. Нахушев обнаружил свойство оператора дробного дифференцирования в смысле Римана–Лиувилля, связанное с его поведением в точке экстремума, и которое является **аналогом теоремы Ферма в дробном исчислении** (см. [98]). Это утверждение может быть сформулировано следующим образом.

*Пусть* $\alpha \in (0,1)$ *и* $f(x) \in L(a,y) \cap H^{\lambda}(y-\delta, y]$ *для некоторого* $\lambda > \alpha$ *и* $\delta > 0$. *Если* $f(y) \geqslant f(x)$ *для всех* $x \in (a,y)$, *то*

$$\left(D^{\alpha}_{ax} f\right)(y) \geqslant f(y) \frac{(y-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}. \tag{31}$$

Здесь $L(a,y)$ и $H^{\lambda}(y-\delta, y]$, как обычно, обозначают, соответственно, множества интегрируемых (по Лебегу) и гельдеровых функций. Через $D^{\alpha}_{ax}$ обозначена дробная производная Римана–Лиувилля порядка $\alpha$ с началом в точке $x = a$, определяемая равенством

$$\left(D^{\alpha}_{ax} f\right)(y) = \frac{d}{dx} \int\limits_a^x f(t) \frac{(x-t)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\, dt.$$

Аналогичное (31) соотношение имеет место и в случае правосторонней дробной производной $D^{\alpha}_{bx}$, имеющей начало в точке $x = b$ при $y < x < b$. Кроме того, если $f(x) \not\equiv \mathrm{const}$ (почти всюду), то неравенство (31) оказывается строгим.

Из неравенства (31), в частности, следует **принцип экстремума для оператора дробного дифференцирования Римана–Лиувилля**, постулирующий его знакоопределенность в точке положительного максимума (отрицательного минимума).

**45.** Принцип экстремума для операторов дробного дифференцирования был доказан в работе [98] (см. также [113]) именно для нужд теории вырождающихся уравнений в частных производных. Однако он оказался востребованным в различных областях, в том числе при решении задач для уравнений смешанного типа [100], [161], [151], в теории нагруженных интегральных и дифференциальных уравнений [88], [128], [179], в задачах со смещением [126], [129].

И, конечно же, этот принцип нашел широкое применение и развитие в дробном исчислении и теории дифференциальных уравнений с производными дробного порядка, в частности, при исследовании обыкновенных уравнений дробного и распределенного порядка [103], [141], [183]; уравнений в частных производных первого порядка [146]; уравнений дробной диффузии и их обобщений [214], [69], [186], [215], [196]; обобщенных уравнений Лапласа [75], [77], [79]; и классов нелинейных уравнений в частных производных дробного порядка и уравнений с производными Адамара [195], [209].

**46.** Впервые доказанное в [98] свойство (31) операторов дробного дифференцирования легло в основу многих важных результатов, полученных в последующих работах А. М. Нахушева. Так, например, на его основе доказан принцип экстремума для вырождающихся эллиптических уравнений [100], получен аналог критерия второй производной в дробном исчислении (дающий оценки дробным производным порядка между 1 и 2 в точках экстремума) [113], найдены аналоги принципов Хопфа и Зарембы–Жиро для дифференциальных операторов распределенного порядка [113], а также для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, содержащих операторы дробного дифференцирования в группе младших членов [103], установлен принцип экстремума типа принципа Агмона–Ниренберга–Проттера для модельных нагруженных интегральных уравнений, в терминах которых определяются обобщенные решения уравнения Геллерстедта [128], и др.

Отметим также, что свойство операторов дробного дифференцирования, отраженное в неравенстве (31), получило обобщение для интегро-дифференциальных операторов общего вида, которое в современной научной литературе названо **принципом экстремума Нахушева** [221].

**47.** В работе [103] для уравнения

$$y''+a_0(x)y'+\sum_{j=1}^{m} a_j(x)D_{0x}^{\alpha_j}\omega_j(x)y+a_{m+1}(x)y=f(x) \qquad (0<\alpha_j<1) \quad (32)$$

была исследована задача Штурма–Лиувилля

$$p_0y'(0)+q_0y(0)=r_0, \qquad p_1y'(1)+q_1y(1)=r_1. \quad (33)$$

К задачам вида (32), (33), как указано в [103], «эквивалентно редуцируются многие прямые и обратные краевые задачи, ассоциированные с вырождающимся гиперболическим уравнением и уравнением смешанного гиперболо-параболического типа» (см. [15], [98], [99], [101]).

Как уже отмечено выше, для уравнения (32) были доказаны **аналоги принципов Хопфа и Зарембы–Жиро**, позволяющие доказать единственность и существование решения (33).

**48.** Кроме того, в [103] А. М. Нахушев поставил вопрос о спектре оператора

$$D_{0x}^{-\alpha}\frac{d^2}{dx^2},$$

который сводится к вопросу о собственных значениях задачи

$$y''(x)+\lambda D_{0x}^{\alpha}y(x)=0, \qquad y(0)=y(1)=0. \quad (34)$$

Было показано, что число $\lambda$ является собственным значением задачи (34) тогда и только тогда, когда $-\lambda$ является нулем функции типа

Миттаг-Леффлера, т. е.

$$E_{2-\alpha,2}(-\lambda) = 0.$$

Это послужило толчком к развитию той ветви спектральной теории, в которой рассматриваются дифференциальные операторы с участием дробных производных, и теории распределения нулей функций Миттаг-Леффлера $E_{\beta,\mu}(z)$, в частности.

Следует отметить, что поставленный в [103] **вопрос о вещественных нулях функции Миттаг-Леффлера** получил свое дальнейшее развитие, стал источником новых результатов в теории функции Миттаг-Леффлера (см., в частности, [4], [138], [157], [143], [139], [140], [198], [188] и др.), и пока еще не нашел своего окончательного решения.

Отметим также, что в [103] был предложен, по всей видимости, один из первых численных алгоритмов нахождения границ вещественных нулей функции Миттаг-Леффлера.

**49.** Исследуя вопрос о спектре оператора $D_{ax}^{-\alpha} d^2/dx^2$ А. М. Нахушев доказал теорему о представлении всех регулярных решений обыкновенного дифференциального уравнения (см. [124, с. 120])

$$u''(x) = \lambda D_{ax}^{\alpha} u(t), \quad 0 < \alpha < 2.$$

На основании этой теоремы было установлено, что в случае $\alpha \in (1, 2)$ классическая задача Коши ($u(a) = \tau$, $u'(a) = \nu$) для рассматриваемого уравнения оказывается некорректной, а корректна **видоизмененная задача Коши**

$$u(a) = \tau, \qquad \lim_{x \to a} \left[ u'(x) - \lambda D_{ax}^{\alpha-1} u(t) \right] = \nu.$$

Таким образом, показано, что корректная форма начальных данных в этом случае ($1 < \alpha < 2$) зависит от младших членов.

В дальнейшем этот эффект был продемонстрирован для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка в работе [145] и для диффузионно-волновых уравнений в работе [72].

**50.** В дробном исчислении всегда была актуальной проблема поиска различных **законов композиции для операторов дробного интегрирования и дифференцирования**. Важность этой проблемы усиливалась в том числе и нуждами теории краевых задач для вырождающихся уравнений и уравнений смешанного типа.

В работе [111] доказано следующее свойство операторов дробного интегро-дифференцирования, которое А. М. Нахушев назвал **законом взвешенной композиции**:

*Пусть* $\varphi(x) \in L(x_0, x_1) \cup C(x_0, x_1)$, $a \in [x_0, x_1]$. *Тогда для любых* $\beta < 0$, $\alpha \in [0, 1)$ *и* $|\alpha + \beta| < 1$ *справедлива формула*

$$D_{ax}^{\alpha} |x - a|^{\alpha+\beta} D_{ax}^{\beta} \varphi(x) = |x - a|^{\beta} D_{ax}^{\alpha+\beta} |x - a|^{\alpha} \varphi(x).$$

С помощью этого соотношения удалось получить ряд важных утверждений, касающихся структурных свойств решений вырождающихся уравнений гиперболического и смешанного типа (с оператором Геллерстедта в главной части), а также описать и решить класс прямых и обратных краевых задач, относящихся к задачам со смещением (см. выше раздел ).

**51.** Непосредственным обобщением закона взвешенной композиции является найденное в работе [123] **представление дробного интеграла Мегуми Сайго**

$$I_{0x}^{\alpha,\,\beta,\gamma}\varphi = \frac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1}F\left(\alpha+\beta,-\gamma,\alpha;1-\frac{t}{x}\right)\varphi(t)\,dt$$

в терминах композиции дробных интегралов Римана–Лиувилля:

$$I_{0x}^{\alpha,\beta,\gamma}\varphi = D_{0x}^{\gamma}\,x^{-\alpha-\beta}D_{0x}^{-\alpha-\gamma}\varphi(x) \qquad (\alpha+\beta<1,\ \gamma<0,\ \alpha>-\gamma). \tag{35}$$

С помощью данного представления удалось, в частности, найти обращения для уравнения

$$I_{0x}^{\alpha,\beta,\gamma}\varphi = \psi(x).$$

Кроме того, представление (35) оказалось весьма полезным при исследовании краевых задач со смещением для уравнений в частных производных, когда граничные условия задаются посредством операторов обобщенного дробного интегрирования и дифференцирования (см., например, [152], [208], [130]).

**52.** Важным вкладом в решение проблемы поиска законов композиции для операторов дробного интегрирования и дифференцирования была работа [112], написанная совместно М. С. Салахитдиновым и А. М. Нахушевым, в которой были найдены **законы композиции дробных операторов с различными началами**.

Определив оператор

$$D_{cx,a}^{\alpha,\beta}\varphi(x) \equiv \operatorname{sign}(x-c)|x-a|^{-\alpha-1}\Gamma^{-1}(-\alpha)\Gamma^{-1}(1-\beta)\times$$

$$\times\int\limits_c^x F\left(\alpha+1,1;1-\beta;\left|\frac{t-a}{x-a}\right|^{\operatorname{sign}(x-c)}\right)\varphi(t)\,dt,$$

где $\alpha+\beta<0$, $\alpha,\ \beta-1\neq 0,\,1,\,2,\,\ldots$, $c\in[A,B]$, $F\,(a,b;c;z)$ – гипергеометрическая функция Гаусса, доказаны следующие формулы:

$$D_{ax}^{\alpha}D_{bx}^{\beta}\varphi(x) = D_{ax,a}^{\alpha,\,\beta}(x-a)^{-\beta}\varphi(x) + (x-a)^{\beta-\alpha+1}D_{bx,a}^{\beta,\alpha}(x-a)^{-\beta-1}\varphi(x);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}D_{ax}^{\alpha}D_{bx}^{\beta}\varphi(x) = D_{ax,a}^{\alpha+1,\beta}(x-a)^{-\beta}\varphi(x) + (x-a)^{\beta-\alpha}D_{bx,a}^{\beta,\alpha+1}(x-a)^{-\beta-1}\varphi(x);$$

и

$$D^{\alpha}_{ax}\frac{\partial}{\partial x}D^{\beta}_{bx}\varphi(x) = D^{\alpha+1,\beta}_{ax,a}(x-a)^{-\beta}\varphi(x) + (x-a)^{\beta-\alpha}D^{\beta,\alpha+1}_{bx,a}(x-a)^{-\beta-1}\varphi(x) +$$

$$+ \sin\pi\alpha\, R^{\alpha,\beta}_{ab}\varphi(x),$$

где $\alpha < 0$, $\beta < 0$, и

$$R^{\alpha,\beta}_{ab}\varphi(x) = -\frac{(x-a)^{-\alpha-1}}{\sin\pi\alpha\,\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\beta)}\int\limits_a^b (t-a)^{-\beta-1}\varphi(t)dt.$$

Законы композиции операторов дробного интегрирования и дифференцирования с различными началами, по утверждению самого А. М. Нахушева [124, с. 23], востребованы в первую очередь краевыми задачами, в особенности задачами со смещением, нелокальными краевыми задачами с локальным и нелокальным сдвигами.

**53.** В работе [114] были доказаны **законы композиции для дробных операторов с различными началами**, связывающие композицию левосторонней производной и правостороннего интеграла порядка $\alpha \in (0,1)$ с сингулярным оператором

$$S^{\alpha}_{ab}\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_a^b \left(\frac{t-a}{x-a}\right)^{\alpha}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-x},$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Показано, что *для функции $\varphi(x)$, удовлетворяющей условию Гельдера и интегрируемой на $(a,b)$, имеет место равенство*

$$D^{\alpha}_{ax}D^{-\alpha}_{bx}\varphi(x) = \cos\pi\alpha\,\varphi(x) + \sin\pi\alpha\, S^{\alpha}_{ab}\varphi(x). \qquad (36)$$

Как отмечал А. М. Нахушев, «связь между интегралами Римана–Лиувилля и интегралом в смысле главного значения по Коши легко просматривается при реализации метода интегральных уравнений решения задачи Трикоми для уравнения смешанного типа» [124, с. 23]. Позднее, утверждение, выраженное формулой (36), А. М. Нахушев назвал **теоремой Трикоми–Геллерстедта** [87, с. 50].

**54.** Как известно, понятие положительной определенности операторов оказывается весьма полезным при изучении различных свойств интегральных и дифференциальных уравнений, в частности, при исследовании вопросов разрешимости краевых задач, доказательстве априорных оценок, изучении спектральных свойств и др.

В работах [120] и [121] А. М. Нахушев выделил класс функций, выступающих **ядрами положительно определенных интегральных и дифференциальных операторов**.

Рассмотрим оператор

$$\mathcal{P}_{ab}^{\varphi}u(x) = \int\limits_a^b \varphi(|x-t|)u(t)\,dt.$$

Будем говорить, что функция $\varphi(x) \in C^1]0, b-a] \cap L[0, b-a]$ удовлетворяет **условию монотонности M**, если

$$\varphi(x) \geqslant 0, \qquad \varphi'(x) \leqslant 0, \qquad \varphi'(x) < \varphi'(y) \quad \forall x < y.$$

В [120] (см. также [121]) доказано, что *если функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условию монотонности* **M**, *то для любой суммируемой функции $u(x)$ справедливо неравенство*

$$(u, \mathcal{P}_{ab}^{\varphi}u) \geqslant 0. \tag{37}$$

*Причем $(u, \mathcal{P}_{ab}^{\varphi}u) = 0$ тогда и только тогда, когда $u \equiv 0$.*

Здесь и далее

$$(u, v) = \int\limits_a^b u(t)v(t)\,dt.$$

Нетрудно заметить, в силу симметричности ядра оператора $\mathcal{P}_{ab}^{\varphi}$, неравенства, аналогичные (37), будут иметь место и для операторов свертки

$$\mathcal{P}_{ax}^{\varphi}u(x) = \int\limits_a^x \varphi(x-t)u(t)\,dt \qquad \text{и} \qquad \mathcal{P}_{bx}^{\varphi}u(x) = \int\limits_x^b \varphi(t-x)u(t)\,dt.$$

Это следует из простых равенств

$$(u, \mathcal{P}_{ab}^{\varphi}u) = (u, \mathcal{P}_{ax}^{\varphi}u) + (u, \mathcal{P}_{bx}^{\varphi}u) = 2\,(u, \mathcal{P}_{ax}^{\varphi}u) = 2\,(u, \mathcal{P}_{bx}^{\varphi}u)\,.$$

**55.** К классу ядер, удовлетворяющих условию монотонности **M**, относятся и ядра операторов дробного и сегментного интегрирования и дифференцирования.

Имеет место **положительность операторов интегрирования дробного и континуального (сегментного) порядка**, а именно, справедливы неравенства [121]

$$(u, D_{ax}^{\alpha}u) > 0, \qquad (u, I_{ab}^{\alpha}u) > 0, \qquad \left(u, D_{ax}^{[\alpha,\beta]}u\right) > 0,$$

если $-1 < \alpha < \beta < 0$ и $u \not\equiv 0$, где

$$I^{\alpha}_{ab}u \equiv D^{\alpha}_{ax}u + D^{\alpha}_{bx}u = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int\limits_a^b u(t)|x-t|^{-\alpha-1}\,dt.$$

Также, в работе [121] доказана **положительность операторов дифференцирования дробного и сегментного порядка**.

Обозначим через $AC[a,b]$ множество абсолютно непрерывных на $[a,b]$ функций, и пусть

$$A^{\alpha}_0[a,b] = \left\{u \in L[a,b]\colon\ D^{\alpha-1}_{ax}u \in AC[a,b],\ \left[D^{\alpha-1}_{ax}u\right]_{x=a} = 0\right\}.$$

*Для любого* $\alpha \in [0,1[$ *и любой функции* $u(x) \in A^{\alpha}_0[a,b]$ *справедливо неравенство*

$$(u, D^{\alpha}_{ax}u) \geqslant 0,$$

*при этом* $(u, D^{\alpha}_{ax}u) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $u \equiv 0$.

Также, *если* $u(x) \in A^{t}_0[a,b]$ *для любого* $t \in [\alpha,\beta]$, *где* $0 \le \alpha < \beta \le 1$, *то*

$$\left(u, D^{[\alpha,\beta]}_{ax}u\right) \geqslant 0,$$

$\left(u, D^{[\alpha,\beta]}_{ax}u\right) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $u \equiv 0$.

Отметим работы [5], [62], [212], [6], [190], в которых результаты работ [120], [121] были распространены на более широкие классы интегро-дифференциальных операторов.

**56.** Работы [113] и [114] стали знаковыми для развития дробного исчисления и определи ход его дальнейшего развития на годы вперед. В этих работах были введены ряд новых операторов дробного дифференцирования и интегрирования, изучены их структурные свойства, получены соотношения, связывающие эти операторы с другими операторами дробного интегро-дифференцирования, найдены законы композиции и формулы обращения.

В работе [113] (см. также [114]), по всей видимости впервые в математической литературе, были рассмотрены дифференциальные уравнения с операторами, содержащими интегрирование по порядку дифференцирования, а именно было рассмотрено уравнение

$$M^{\alpha,\beta}_{ax}y(x) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m(x) D^{\alpha_m}_{ax}y(t) = f(x), \tag{38}$$

где

$$M^{\alpha,\beta}_{ax}y(x) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} a_{\xi}(x) D^{\xi}_{ax}y(t)d\xi. \tag{39}$$

Отсылая к В. Вольтерра [29, с. 100], такие уравнения А. М. Нахушев назвал **непрерывными дифференциальными уравнениями**.

За операторами (39) в настоящее время закрепилось название **операторы распределенного порядка**.

**57.** В [114] показано, что к уравнениям вида (38) приводит задача обращения оператора

$$H^{\alpha}_{ax} \equiv D^{\alpha}_{ax} H^{0}_{ax}, \tag{40}$$

где

$$H^{0}_{ax}\varphi(x) = \int\limits_{0}^{x} \varphi(t) \ln(x-t)\, dt$$

— **дробный интеграл бесконечно малого порядка**.

В частности, показано, что оператор $H^{\alpha}_{ax}$ может быть представлен в виде

$$H^{\alpha}_{ax}\varphi(x) = -a_{-\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha} a_{\alpha} D^{\alpha-1}_{ax}\varphi(x),$$

где $a_{\mu} = \exp\left[-\mu\Gamma'(1)\right]$, а решение уравнения

$$H^{0}_{ax}\varphi(x) = f(x)$$

дается формулой

$$\varphi(x) = -\int\limits_{-\infty}^{1} a_{\xi-1} D^{\xi}_{ax} f(x)\, d\xi = a_{-1} M^{-\infty,1}_{ax} f(x). \tag{41}$$

Из (40) и (41) следует, что формула обращения уравнения

$$H^{\alpha}_{ax}u(x) = v(x) \qquad (0 < \alpha < 1)$$

имеет вид [124, с. 81]

$$u(x) = -a_{\alpha-1}\int\limits_{-\infty}^{1-\alpha} a_{\eta} D^{\eta}_{ax} v\, d\eta.$$

**58.** Отдельное внимание было уделено оператору (39) в случае, когда $a_{\xi}(x) \equiv 1$. В работе [121] был рассмотрен оператор

$$D^{[\alpha,\beta]}_{ax} u = \int\limits_{\alpha}^{\beta} D^{t}_{ax} u\, dt, \tag{42}$$

который, в зависимости от знаков $\alpha$ и $\beta$, был назван оператором **непрерывного интегрирования (дифференцирования)** или **континуальной производной**. Позднее А. М. Нахушев использовал также название **операторы дробного интегрирования и дифференцирования сегментного порядка**.

В частности, доказана положительная определенность оператора (42) (см. выше стр. 34), доказаны формулы дробного интегрирования по частям, построено решение **континуального аналога интегрального уравнения Абеля** [122], [124, с. 83]

$$D_{ax}^{[-\alpha,0]}u = v(x).$$

**59.** Теория операторов распределенного порядка получила свое дальнейшее развитие и сегодня является неотъемлемой, интенсивно развивающейся частью современного анализа, и вместе с другими разделами дробного исчисления находит многочисленные приложения в физике и моделировании.

Последние годы для операторов распределенного интегрирования и дифференцирования изучаются качественные и структурные свойства [142], [222], [185], обыкновенные дифференциальные уравнения с операторами распределенного порядка в главной части, а также в группе младших членов, включая операторы дискретно-распределенного порядка [219], [194], [187], [145], [201], [183], [184], диффузионные и диффузионно-волновые уравнения [217], [211], [225], [204], [147], псевдодифференциальные уравнения [228] и уравнения в банаховых пространствах [199], [200], [224], развиваются численные методы решения уравнений распределенного порядка [197], а также обсуждаются различные приложения операторов дробного и распределенного дифференцирования [118], [119], [216], [174], [226], [213], [227].

Отметим, что в работе [227] оператор (42) был назван **дробным интегралом (производной) Нахушева**.

## Вместо заключения

Разумеется, многое из того, чего касалась творческая мысль Адама Маремовича Нахушева, осталось за пределами данного обзора. Авторы не ставили перед собой цель охватить все, считая это практически невыполнимым. Как известно, единственным истинным критерием значимости того или иного творческого достижения является время.

Идеи, мысли и открытия Адама Маремовича живут своей самостоятельной жизнью, развиваясь, меняясь, время от времени открывая свои неожиданные стороны и давая жизнь новым красивым научным результатам.

## Литература


1. Абдуллаев В. М., Айда-заде К. Р. Численное решение задач оптимального управления нагруженными сосредоточенными системами // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 2006. Т. 46, № 9. С. 1566–1581.
2. Алдашев С. А. Корректность задач Дирихле и Пуанкаре в цилиндрической области для многомерного уравнения Чаплыгина // Владикавказский математический журнал. 2013. Т. 15, № 2. С. 3–11.
3. Алдашев С. А. Необходимое и достаточное условие выполнения теоремы о среднем значении для многомерных гиперболических уравнений с вырождением типа и порядка // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2005. Т. 7, № 2. С. 9–12.
4. Алероев Т. С. К проблеме о нулях функции Миттаг-Лефлера и спектре одного дифференциального оператора дробного порядка // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 9. С. 1278–1279.
5. Асхабов С. Н. Уравнения типа свертки с монотонной нелинейностью на отрезке // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 9. С. 1182–1188.
6. Асхабов С. Н. О критериях положительности интегро-дифференциальных операторов свертки // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук 2020. Т. 19. № 1. С. 16–21.
7. Аттаев А. Х. Характеристические задачи для нагруженного волнового уравнения с особым сдвигом // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2015. Т. 2, № 11. С. 7–12
8. Аттаев А. Х. О некоторых задачах для нагруженного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2016. Т. 4-1, № 16. С. 9–14.
9. Аттаев А. Х. Характеристическая задача для нагруженного вдоль одной из своих характеристик гиперболического уравнения второго порядка // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2018. Т. 3, № 23. С. 14–18.
10. Аттаев А. Х. Задача граничного управления для одного вырождающегося уравнения гиперболического типа // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2019. Т. 29, № 4. С. 19–27.
11. Аттаев А. Х. Задача граничного управления для нагруженного уравнения колебания струны. Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56, № 5. С. 646–651.
12. Балтаева У. И., Исломов Б. И. Краевые задачи для нагруженных дифференциальных уравнений гиперболического и смешанного типов третьего порядка // Уфимск. матем. журн. 2011. Т. 3, № 3. С. 15–25.
13. Барсегян В. Р. Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями. М.: Наука, 2016. 230 с.
14. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наукова думка, 1965. 799 с.
15. Бжихатлов Х. Г., Нахушев А. М. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа // Доклады АН СССР. 1968. Т. 183, № 2. С. 261–264.
16. Бицадзе А. В. Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа в смешанных областях // ДАН СССР. 1958. Т. 122, № 2. С. 167–170.
17. Бицадзе А. В. Уравнения смешенного типа. М.: Изд-во АН СССР. 1959. 134 с.
18. Бицадзе А. В. Об уравнениях смешанного типа в трехмерных областях // Докл. АН СССР. 1962. Т. 143, № 5. С. 1017–1019.
19. Бицадзе А. В., Нахушев А. М. К теории вырождающихся гиперболических уравнений в многомерных областях // Доклады АН СССР. 1972. Т. 204, № 6. С. 1289–1291.
20. Бицадзе А. В., Нахушев А. М. О корректной постановке задач для уравнений смешанного типа в многомерных областях // Доклады АН СССР. 1972. Т. 205, № 1. С. 9–12.

21. Бицадзе А. В., Нахушев А. М. К теории уравнений смешанного типа в многомерных областях // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10, № 12. С. 2184–2191.
22. Бородин А. В. Об одной оценке для эллиптических уравнений и ее приложении к нагруженным уравнениям // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 1. С. 17–22.
23. Бородин А. В. Дифференцируемость по параметру решений нелинейно нагруженных краевых задач для уравнений в частных производных второго порядка. I-II // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 1. С. 18–25; 1980. Т. 16, № 1. С. 20–33.
24. Бородин А. В. Решение нелинейных зависящих от параметра краевых задач для систем уравнений в частных производных второго порядка // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, № 2. С. 270–277.
25. Борок В. М. 0-решения и единственность решения задачи Коши для нагруженных уравнений // Изв. вузов. Матем. 1986. № 4. С. 8–13.
26. Борок В. М., Житомирский Я. И. Задача Коши для одного класса нагруженных уравнений // УМН. 1979. Т. 34, № 1(205). С. 221–222.
27. Борок В. М., Житомирский Я. И. Задача Коши для линейных нагруженных дифференциальных уравнений, I. Единственность, II. Корректность // Изв. вузов. Матем. 1981. № 9, 10. С. 5–12, 3–9.
28. Волкодавов В. Ф., Николаев Н. Я. Краевые задачи для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу: учеб. пособие. Куйбышев, 1984. 80 с.
29. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений. М.: Наука, 1982. 304 с.
30. Врагов В. Н. О задачах Гурса и Дарбу для одного класса гиперболических уравнений // Дифференциальные уравнения. 1972. Т. 8, № 1. С. 7–16.
31. Врагов В. Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: НГУ, 1983.
32. Гербекова М. А. О локализации особенности градиента решения первой задачи Дарбу для уравнения с оператором Геллерстедта в главной части // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2005. Т. 8, № 1. С. 23–27.
33. Гербекова М. А. Об одном свойстве решения второй задачи Дарбу для уравнения Геллерстедта // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2005. Т. 8, № 2. С. 14–17.
34. Дезин А. А. Простейшие разрешимые расширения для ультрагиперболического и псевдопараболического операторов // Доклады АН СССР. 1963. Т. 148, № 5. С. 1013–1016.
35. Демина Т. И. Критерий единственности решения смешанной задачи для уравнения гиперболо-эллиптического типа в цилиндрической области // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2005. Т. 7, № 2. С. 18–20.
36. Дженалиев М. Т. К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алматы: Компьютерный центр ИТПМ, 1995. 270 с.
37. Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И. О граничной задаче для спектрально-нагруженного оператора теплопроводности // Сиб. матем. журн. 2006. Т. 47, № 3. С. 527–547.
38. Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И. Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений. Алматы: Ғылым, 2010. 334 с.
39. Джураев Т. Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. Ташкент: Фан, 1986. 220 с.
40. Дикинов Х. Ж., Керефов А. А.,Нахушев А. М. Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения теплопроводности // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 1. С. 177–179.
41. Егоров И. Е. Об одной краевой задаче для системы сингулярных параболических уравнений // Динамика сплошной среды. Ин-т гидродинамики СО АН СССР. Новосибирск, 1980. Вып. 14. С. 100–105.

42. Елеев В. А., Лесев В. Н. Задачи со смещением для вырождающихся гиперболических и смешанных уравнений. Нальчик: Каб.-Балк. ун-т, 2003. 109 с.
43. Жегалов В. И. Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничными условиями на обеих характеристиках и с разрывами на переходной линии // Учен. зап. Казан. госун-та. 1962. Т. 122, кн. 3. С. 3–16.
44. Жегалов В. И., Миронов А. Н. Дифференциальные уравнения со старшими частными производными. Казань: Казан. мат. об-во, 2001. 226 с.
45. Искендеров А. Д. О первой краевой задаче для нагруженной системы квазилинейных параболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, № 10. С. 1911–1913.
46. Исломов Б. И., Абдуллаев О. Х. Задачи типа Геллерстедта для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа с операторами Капуто и Эрдейли–Кобера дробного порядка // Изв. вузов. Матем. 2020. № 10. С. 33–46.
47. Исломов Б. И., Жураев Ф. М. Локальные краевые задачи для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа, вырождающегося внутри области // Уфимск. матем. журн. 2022. Т. 14, № 1. С. 41–56.
48. Исломов Б. И., Холбеков Ж. А. Об одной нелокальной краевой задаче для нагруженного параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. 2021. Т. 25, № 3. С. 407–422.
49. Казиев В. М. О задаче Дарбу для одного нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14, № 1. С. 181–184.
50. Казиев В. М. Задача Трикоми для нагруженного уравнения Лаврентьева–Бицадзе // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 1. С. 173–175.
51. Казиев В. М. Задача Гурса для одного нагруженного интегро-дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, № 2. С. 313–319 .
52. Кальменов Т. Ш. Критерий единственности решения задачи Дарбу для одного вырождающегося гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, № 1. С. 178–181.
53. Кальменов Т. Ш. О многомерных регулярных краевых задачах для волнового уравнения // Изв. АН КазССР. 1982. № 3. С. 18–25.
54. Кальменов Т. Ш. Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа. Шымкент: Гылым, 1993. 328 с.
55. Кальменов Т. Ш. Научные труды, воспоминания и размышления в начале века. Алматы. 2006. 212 с.
56. Кальменов Т. Ш. К теории начально-краевых задач для дифференциальных уравнений. Алматы: Инст-т математики и математического моделирования, 2013. 406 с.
57. Капустин Н. Ю. К теории краевых задач с граничными функциями из $L_2$ // Докл. АН СССР. 1989. Т. 307, № 6. С. 1318–1322.
58. Керефов А. А. Об одной краевой задаче Жевре для параболического уравнения со знакопеременным разрывом первого рода у коэффициента при производной по времени // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10, № 1. С. 66–77
59. Керефов А. А. Задача Жевре для одного смешанно-параболического уравнения // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 1. С. 76–83.
60. Кислов Н. В. Краевые задачи для уравнения смешанного типа в прямоугольной области // ДАН СССР. 1980. Т. 255, № 1. С. 26–30.
61. Коврижкин В. В. О слабых решениях задачи Дарбу // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8, № 1. С. 68–75.
62. Кукушкин М. В. О некоторых качественных свойствах оператора дробного дифференцирования Киприянова // Вестн. СамУ. Естественнонаучн. сер. 2017. № 2. С. 32–43.
63. Ланин И. Н. Краевая задача для одного нагруженного гиперболо-параболического уравнения третьего порядка // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, № 1. С. 97–106.

64. Лернер М. Е. Принцип максимума и краевые задачи для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа в неклассических областях. Самара: Самар, гос. техн. ун-т, 2001. 194 с.
65. Ломов И. С. Свойство базисности корневых векторов нагруженных дифференциальных операторов второго порядка на интервале // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 1. С. 80–93.
66. Ломов И. С. Теорема о безусловной базисности корневых векторов нагруженных дифференциальных операторов второго порядка // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 9. С. 1550–1563.
67. Лыков А. В. Применение методов термодинамики необратимых процессов с исследованием тепло и массообмена // Инж.-физ. журн., 1965. Т. 9, № 3. С. 287–304.
68. Мамчуев М. О. Необходимые нелокальные условия и задача Самарского для диффузионно-волнового уравнения // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук 2007. Т. 9. № 2. С. 59–61.
69. Мамчуев М. О. Аналог принципа Зарембы–Жиро для уравнения дробной диффузии // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2010. Т. 12, № 2. С. 32–35.
70. Мамчуев М. О. Краевые задачи для уравнений и систем уравнений с частными производными дробного порядка. Нальчик: КБНЦ РАН, 2013. 200 с.
71. Мамчуев М. О. Фундаментальное решение нагруженного параболического уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 5. С. 611–620.
72. Мамчуев М. О. Видоизмененная задача Коши для нагруженного параболического уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 9. С. 1147-1153.
73. Мамчуев М. О. Решения основных краевых задач для нагруженного параболического уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52, № 6. С. 811–819.
74. Мамчуев М. О. О постановке корректных краевых задач для дробного диффузионно-волнового уравнения и одном подходе к их решению // Дифференц. уравнения, 2020. Т. 56, № 6. С. 768–772.
75. Масаева О. Х. Задача Дирихле для обобщенного уравнения Лапласа с производной Капуто // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 3. С. 442–447.
76. Масаева О. Х. Задача Дирихле для нелокального волнового уравнения // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49, № 12. С. 1554–1559.
77. Масаева О. Х. Принцип экстремума для фрактального эллиптического уравнения // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2014. Т. 16, № 4. С. 31–35.
78. Масаева О. Х. Задача Дирихле для обобщенного уравнения Лаврентьева - Бицадзе с дробной производной Герасимова–Капуто // Прикладная математика и физика. 2020. Т. 52, № 4. С. 246–254 .
79. Масаева О. Х. Единственность решения задачи Дирихле для многомерного дифференциального уравнения дробного порядка // Матем. заметки. 2021. Т. 109, № 1. С. 101–106.
80. Мелишева Е. П. Задача Дирихле для нагруженного уравнения Лаврентьева–Бицадзе // Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер. 2010. Т. 6, № 80. С. 39–47.
81. Мешков В. З., Половинкин И. П. О получении новых формул среднего значения для линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 12. С. 1724–1731.
82. Напсо А. Ф., Канчукоев В. З. Нелокальная задача с внутренним условием для нагруженного псевдопараболического уравнения // Владикавк. матем. журн. 2002. Т. 4, № 2. С. 44–49.

83. Нахушев А. М. О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5, № 1. С. 44–59.
84. Нахушев А. М. Новая краевая задача для одного вырождающегося гиперболического уравнения // Доклады АН СССР. 1969. Т. 187, № 4. С. 736–739.
85. Нахушев А. М. Многомерный аналог задачи Дарбу для гиперболических уравнений // Доклады АН СССР. 1970. Т. 194, № 1. С. 31–34.
86. Нахушев А. М. Методика постановки корректных задач для линейных гиперболических уравнений второго порядка на плоскости // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6, № 1. С. 192–195.
87. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М.: Высш. шк., 1995. 301 с.
88. Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их применения. М.: Наука, 2012. 232 с.
89. Нахушев А. М. О корректной постановке краевых задач для параболических уравнений со знакопеременной характеристической формой // Тезисы I республиканской конференции математиков по дифференциальным уравнениям. Ашхабад, 1972. С. 19–22
90. Нахушев А. М. Об одном трехмерном аналоге задачи Геллерстедта // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, № 1. С. 52–62.
91. Нахушев А. М. Критерий единственности задачи Дирихле для уравнения смешанного типа в цилиндрической области // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6, № 1. С. 190–191.
92. Нахушев А. М. Об одной задаче А. В. Бицадзе // Доклады АН СССР. 1970. Т. 192, № 3. С. 499–502.
93. Нахушев А. М. О задаче Дарбу для гиперболических уравнений // Доклады АН СССР. 1970. Т. 195, № 4. С. 776–779.
94. Нахушев А. М. О задаче Дарбу для вырождающихся гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, № 1. С. 49–56.
95. Нахушев А. М., Пашковский В. И. О задаче А. В. Бицадзе для уравнения смешанного типа в многомерных областях // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, № 1. С. 57–63.
96. Нахушев А. М. К априорным оценкам для задач Трикоми и Дарбу // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8, № 1. С. 107–117.
97. Нахушев А. М. О правильной постановке краевых задач для параболических уравнений со знакопеременной характеристической формой // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9, № 1. С. 130–135.
98. Нахушев А. М. Обратные задачи для вырождающихся уравнений и интегральные уравнения Вольтерра третьего рода // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10, № 1. С. 100–111.
99. Нахушев А. М. К теории краевых задач для вырождающихся гиперболических уравнений // Сообщение АН Гр. ССР. 1975. Т. 77, № 3. С. 545–548.
100. Нахушев А. М. Об одной смешанной задаче для вырождающихся эллиптических уравнений // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11, № 1. С. 192–195.
101. Нахушев А. М. О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 1. С. 103–108.
102. Нахушев А. М., Борисов В. Н. Краевые задачи для нагруженных параболических уравнений и их приложения к прогнозу уровня грунтовых вод // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 1. С. 105–110.
103. Нахушев А. М. Задача Штурма–Лиувилля для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с дробными производными в младших членах // Доклады АН СССР. 1977. Т. 234, № 2. С. 308–311.
104. Нахушев А. М. К теории линейных краевых задач для уравнения второго порядка смешанного гиперболо-параболического типа // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14, № 1. С. 66–73.

105. Нахушев А. М. Нелокальная задача и задача Гурса для нагруженного уравнения гиперболического типа и их приложения к прогнозу почвенной влаги // Доклады АН СССР. 1978. Т. 242, № 5. С. 1008–1011.

106. Нахушев А. М. Краевые задачи для нагруженных интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа и некоторые их приложения к прогнозу почвенной влаги // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 1. С. 96–105.

107. Нахушев А. М. Критерий единственности решения задачи Дарбу для одного вырождающегося гиперболического уравнения влагопереноса // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16, № 9. С. 1643–1649.

108. Нахушев А. М. О справедливости одной априорной оценки // Доклады АН СССР. 1981. Т. 257, № 1. С. 45–47.

109. Нахушев А. М. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 1. С. 72–81.

110. Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их приложения // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 1. С. 86–94.

111. Нахушев А. М. О нелокальных краевых задачах со смещением и их связи с нагруженными уравнениями // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 1. С. 92–101.

112. Нахушев А. М., Салахитдинов М. С. О законе композиции операторов дробного интегро-дифференцирования с различными началами // Доклады АН СССР. 1988. Т. 299, № 6. С. 1313–1316.

113. Нахушев А. М. О непрерывных дифференциальных уравнениях и их разностных аналогах // Доклады АН СССР. 1988. Т. 300, № 4. С. 796–799.

114. Нахушев А. М. К теории дробного исчисления // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 2. С. 313–324.

115. Нахушев А. М. Эффект локализации особенности градиента решения задачи Дарбу для уравнения Геллерстедта и критерий его непрерывности // Доклады РАН. 1992. Т. 323, № 5. С. 834–837.

116. Нахушев А. М. Критерий непрерывности градиента решения задачи Дарбу для уравнения Геллерстедта // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, № 10. С. 1770–1785.

117. Нахушев А. М. Об одном классе линейных краевых задач для гиперболического и смешанного типов уравнений второго порядка. Нальчик: Эльбрус, 1992. 155 с.

118. Нахушев А. М. Об уравнениях состояния непрерывных одномерных систем и их аналогах в дробном исчислении // Доклады АМАН. 1994. Т. 1, № 1. С. 22–26.

119. Нахушев А. М., Тхакахов Р. Б. О континуальных аналогах реологических уравнений состояния и логическом законе изменения вязкоупругих свойств полимера // Доклады АМАН. 1995. Т. 1. № 2. С. 6–11.

120. Нахушев А. М. О положительности интегральных операторов, весьма важных в дробном исчислении и в теории уравнений смешанного типа // Доклады АМАН. 1997. Т. 2, № 2. С. 10–12.

121. Нахушев А. М. О положительности операторов непрерывного и дискретного дифференцирования и интегрирования весьма важных в дробном исчислении и в теории уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 1. С. 101–109.

122. Нахушев А. М. Об одной формуле обращения интегрального уравнения Абеля // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 1998. Т. 3, № 2. С. 10–11.

123. Нахушев А. М., Нахушева З. А. Дробный интеграл Мегуми Сайго и его связь с законом взвешенной композиции операторов дробного интегрирования в смысле Римана–Лиувилля // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2000. Т. 5, № 1. С. 36–39.

124. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

125. Нахушев А. М. Некоторые факты из теории краевых задач со смещением. Нальчик: КБНЦ РАН, 2005. 63 с.
126. Нахушев А. М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006. 287 с.
127. Нахушев А. М. Задача Дирихле для нагруженного уравнения смешанного типа в цилиндрической области // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2011. Т. 13, № 1. С. 83–89.
128. Нахушев А. М. К теории краевых задач для нагруженных интегральных уравнений // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2014. Т. 16, № 3. С. 30–34.
129. Нахушев А. М. О внутреннекраевых условиях со смещением, возникающих при дискретизации краевых задач для уравнений в частных производных второго порядка // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2014. Т. 16, № 2. С. 52–57.
130. Нахушева З. А. Об одной нелокальной краевой задаче для вырождающегося гиперболического уравнения второго порядка со спектральным параметром // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 10. С. 451–465.
131. Нахушева В. А. Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов. М.: Наука, 2006. 174 с.
132. Нурмамедов М. А. О корректности одной нелокальной задачи для системы уравнений неклассического типа в многомерной области // Вестник Дагестанского научного центра РАН. 2009. № 36. С. 9–14.
133. Огородников Е. Н. Некоторые характеристические задачи для систем нагруженных дифференциальных уравнений и их связь с нелокальными краевыми задачами // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. Самара: СамГТУ, 2003. Т. 19. С. 22–28.
134. Огородников Е. Н. Корректность задачи Коши–Гурса для системы вырождающихся нагруженных гиперболических уравнений в некоторых специальных случаях и ее равносильность задачам с нелокальными краевыми условиями // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2004. № 26. С. 26–38.
135. Половинкин И. П. К свойствам решений линейных уравнений в частных производных // Вестник Челябинского государственного университета. 2010. № 23 (204). С. 59–66.
136. Половинкин И. П. Об одном следствии из теоремы о среднем А. В. Бицадзе и А. М. Нахушева // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2011. Т. 13, № 2. С. 49–56.
137. Попиванов Н. И. Многомерный аналог задачи Дарбу для вырождающихся гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14, № 1. С. 80–93.
138. Попов А. Ю. О спектральных значениях одной краевой задачи и нулях функций Миттаг-Леффлера // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38, № 5. С. 611–621.
139. Попов А.Ю. О количестве вещественных собственных значений одной краевой задачи для уравнения второго порядка с дробной производной // Фундамент. и прикл. матем. 2006. Т. 12, № 6. С. 137–155.
140. Попов А. Ю., Седлецкий А. М. Распределение корней функций Миттаг-Леффлера // Современная математика. Фундаментальные направления. 2011. Т. 40. С. 3–171.
141. Псху А. В. Об операторах типа свертки и их приложении к теории оператора интегро-дифференцирования континуального порядка // Доклады Адыгской (Черкесской) международной академии наук. 2001. Т. 5, № 2. С. 49–55.
142. Псху А. В. К теории оператора интегро-дифференцирования континуального порядка // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 1. С. 120–127.
143. Псху А. В. О вещественных нулях функции типа Миттаг-Леффлера // Матем. заметки. 2005. Т. 77, № 4. С. 592–599.

144. Псху А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.
145. Псху А. В. Начальная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка // Матем. сб. 2011. Т. 202, № 4. С. 111–122.
146. Псху А. В. О краевой задаче для уравнения в частных производных дробного порядка в области с криволинейной границей // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51, № 8. С. 1076–1082.
147. Псху А. В. Уравнение дробной диффузии с оператором дискретно распределенного дифференцирования // Сиб. электрон. матем. изв. 2016. № 13. С. 1078–1098.
148. Пташник Б. И. Некоторые граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. Киев: Наук. думка, 1984. 264 с.
149. Репин О. А. Краевые задачи со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типов. Самара: Самар, фил. Сарат. ун-та, 1992. 161 с.
150. Репин О. А. Смешаннная задача для нагруженного уравнения Геллерстедта с оператором М. Сайго в краевом условии // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2000. № 9. С. 13–18.
151. Репин О. А. Нелокальная задача А. М. Нахушева для уравнения смешанного типа // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2001, № 12. С. 5–9.
152. Репин О. А. Аналог задачи Нахушева для уравнения Бицадзе–Лыкова // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38, № 10. С. 1412–1417.
153. Сабитов К. Б. Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области // Доклады академии наук. 2007. Т. 413, № 1. С. 23–26.
154. Салахитдинов М. С., Исломов Б. И. Уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения. Ташкент, 2009. 264 с.
155. Салахитдинов М. С., Мирсабуров М. Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами. Ташкент, 2005. 224 с.
156. Салахитдинов М. С., Уринов А. К. Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром. Ташкент: Фан, 1997. 165 с.
157. Седлецкий А. М. Неасимптотические свойства корней функции типа Миттаг-Леффлера // Матем. заметки. 2004. Т. 75, № 3. С. 405–420.
158. Сербина Л. И. Нелокальные математические модели переноса в водоносных системах. М.: Наука, 2007. 167 с.
159. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Том четвертый, часть первая. М.: Наука, 1974. 336 с.
160. Смирнов М. М. Вырождающиеся гиперболические уравнения. Минск: Вышейш. шк., 1977. 158 с.
161. Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа. М.: Высш. шк., 1985. 304 с.
162. Соболев С. Л. Некоторые новые задачи теории уравнений в частных производных гиперболического типа // Матем. сб. 1942. Т. 53, № 3. С. 155–203.
163. Солдатов А. П. Условие нормальности для нелокальных задач // Современные проблемы матем. физики. Труды Всес. Симп. Тбилиси. 1987. Т. 1. С. 365–371.
164. Солдатов А. П. Общая краевая задача теории функций // Докл. АН СССР. 1988. Т. 299, № 4. С. 825–828.
165. Солдатов А. П. Общая краевая задача теории функций в областях с гладкой границей // Доклады расширенных заседаний семинара института прикладной математики им. И. Н. Векуа. 1989. Т. 4, № 1. С. 99–103.
166. Солдатов А. П. Контактная задача Римана // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 10. С. 1828–1830.
167. Солдатов А.П. О задаче типа Карлемана для эллиптических систем // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, № 1. С. 143–151.

168. Солдатов А. П. Задачи типа Дирихле для уравнения Лаврентьева–Бицадзе. I. Теоремы единственности // Доклады академии наук. 1993. Т. 332, № 6. С. 696–698.
169. Солдатов А. П. Задачи типа Дирихле для уравнения Лаврентьева–Бицадзе. II. Теоремы существования // Доклады академии наук. 1993. Т. 333, № 1. С. 16–18.
170. Тарасенко А. В. Краевая задача для нагруженного уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. 2010. Т. 5, № 21. С. 263–267.
171. Терсенов С. А. Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Наука, 1985.
172. Токова А. А. Об одной нелокальной краевой задаче для нагруженного дифференциального уравнения со знакопеременной характеристической формой // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2011. № 2 (23). С. 40–45.
173. Трикоми Ф. О линейных уравнениях смешанного типа. М.–Л: ГИТТЛ, 1947. 192 с.
174. Учайкин В. В. Метод дробных производных. Ульяновск, 2008. 510 с.
175. Франкль Ф. И. Об одной новой задаче теории околозвуковых течений // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12, № 1 (73). С. 245.
176. Хачев М. М. Задача Дирихле для уравнения Трикоми в прямоугольнике // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11, № 1. С. 151–160.
177. Хачев М. М. О задаче Дирихле для одного уравнения смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 1. С. 137–143.
178. Хачев М. М. Первая краевая задача для линейных уравнений смешанного типа. Нальчик: Эльбрус, 1998.
179. Хубиев К. У. О принципе экстремума для нагруженных уравнений // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2014. Т. 16, № 3. С. 47–50.
180. Хуштова Ф. Г. Краевые задачи для нагруженного уравнения параболического типа со знакопеременной характеристической формой // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2010. Т. 12, № 2. С. 88–92.
181. Шхануков М. Х. Разностный метод решения одного нагруженного уравнения параболического типа // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 1. С. 163–167.
182. Шхануков-Лафишев М. Х. Локально-одномерная схема для нагруженного уравнения теплопроводности с краевыми условиями III рода // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 2009. Т. 49, № 7. С. 1223–1231.
183. Эфендиев Б. И. Задача Дирихле для обыкновенного непрерывного дифференциального уравнения второго порядка // Матем. заметки. 2018. Т. 103, № 2. С. 295–302.
184. Эфендиев Б. И. Задача с условиями типа Штурма для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с оператором распределенного дифференцирования // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58, № 12. С. 1596–1605.
185. Эфендиев Б. И. Неравенство Ляпунова для уравнения второго порядка с оператором распределенного дифференцирования // Матем. заметки. 2023. Т. 113, № 6. С. 950–953.
186. Al-Refai M., Luchko Y. Maximum principle for the fractional diffusion equations with the Riemann–Liouville fractional derivative and its applications // Fract. Calc. Appl. Anal. 2014. Vol. 17, no. 2. Pp. 483–498.
187. Atanacković T. M., Oparnica L., Pilipović S. On a nonlinear distributed order fractional differential equation // J. Math. Anal. Appl. 2007. Vol. 328. Pp. 590–608.
188. Antunes P. R. S., Ferreira R. A. C. An augmented-Rbf method for solving fractional Sturm–Liouville eigenvalue problems // SIAM J. Sci. Comput. 2015. Vol. 37, no. 1. Pp. A515–A535.
189. Arena O. On a degenerate elliptic-parabolic equation // Consilio Nasional delle Riserche Centro di abalisi globale. Firenze, 1977.
190. Askhabov S. N. Positivity conditions for operators with difference kernels in reflexive spaces // J. Math. Sci. 2020. No. 250. Pp. 717–727.

191. Attaev A. Kh. The Cauchy problem for the Mc Kendrick-Von Foerster loaded equation // International Journal of Pure and Applied Mathematics. 2017. Vol. 113, no. 4. Pp. 47–52.

192. Attaev A. Kh. On a characteristic problem for a loaded hyperbolic equation // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. 2019. No. 4 (96). Pp. 15–21.

193. Attaev A. Kh., Ramazanov M. I., Omarov M. T. On the correctness of boundary value problems for the two-dimensional loaded parabolic equation // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. 2022. No. 4 (108). Pp. 34–41.

194. Bagley R. L., Torvik P. J. On the existence of the order domain and the solution of distributed order equations, I-II // Int. J. Appl. Math. 2000. Vol. 2. Pp. 865–882, 965–987.

195. Borikhanov M., Kirane M., Torebek B. T. Maximum principle and its application for the nonlinear time-fractional diffusion equations with Cauchy-Dirichlet conditions // Math. Letters. 2018. No. 81. Pp. 14–20.

196. Cao L., Kong H., Zeng Sh.-D. Maximum principles for time-fractional Caputo-Katugampola diffusion equations // J. of Nonlin. Sci. and Appl. 2017. Vol. 10, no. 4. Pp. 676–695.

197. Diethelm K., Ford N. J. Numerical analysis for distributed-order differential equations // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2009. No. 225. Pp. 96–104.

198. Duan J.-Sh., Wang Zh., Liu Yu.-L., Qiu X. Eigenvalue problems for fractional ordinary differential equations // Chaos Solitons Fractals. 2013. No. 46 (2013). Pp. 46–53.

199. Fedorov V. E. Generators of analytic resolving families for distributed order equations and perturbations // Mathematics. 2020. Vol. 8, no. 8. P. 1306.

200. Fedorov V. E., Filin N. V. On strongly continuous resolving families of operators for fractional distributed order equations // Fractal Fract. 2021. Vol. 5, no. 1. P. 20.

201. Gadzova L. Kh. Boundary-value problem with shift for a linear ordinary differential equation with the operator of discretely distributed differentiation // Journal of Mathematical Sciences. 2020. Vol. 250, no. 5. Pp. 740–745.

202. Gellerstedt S. Sur un probleme aux limites pour une equation lineaire aux derivees partielles du second ordere de tupe mixte // Thesis. Uppsola, 1935.

203. Gellerstedt S. Sur une equation lineaire aux derivees partielles de type mixte // Arkiv Mat., Astron. och Fysik. 1937, 25 A, 29.

204. Gorenflo R., Luchko Yu., Stojanovic M. Fundamental solution of a distributed order time-fractional diffusion-wave equation as probability density // Fract. Calc. Appl. Anal. 2013. Vol. 16, no. 2.

205. Islomov B., Baltaeva U. I. Boundary value problems for a third-order loaded parabolic-hyperbolic equation with variable coefficients // EJDE. 2015. Vol. 221. Pp. 1–10.

206. Jenaliyev M. T., Ramazanov M. I., Attaev A. Kh., Gulmanov N. K. Stabilization of a solution for two-dimensional loaded parabolic equation // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. 2020. No. 4 (100). Pp. 55–70.

207. Kharibegashvili S. Some multidimensional problems for hyperbolic partial differential equations and systems // Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics. 2006. Vol. 37. Pp. 1–136.

208. Kilbas A. A., Repin O. A., Saigo M. Nonlocal problem for the hyperbolic equation with fractional derivatives in the boundary condition // Fukuoka Univ. Sci. Rep. 2003. Vol. 33, no. 2. Pp. 1–8.

209. Kirane M., Torebek B. T. Extremum principle for the Hadamard derivatives and its application to nonlinear fractional partial differential equations // Fract. Calc. Appl. Anal. 2019. Vol. 22, no. 2. Pp. 358–378.

210. Kneser A. Belastete integralgleichungen // Rend. Circ. Matem. Palermo. 1914. Vol. 37. Pp. 169–197.

211. Kochubei A. N. Distributed order calculus and equations of ultraslow diffusion // J. Math. Anal. Appl. 2008. Vol. 340, no. 1. Pp. 252–281.

212. Kukushkin M. V. Asymptotics of eigenvalues for differential operators of fractional order // Fract. Calc. Appl. Anal. 2019. Vol. 22, no. 3. Pp. 658–680.
213. Konjik S., Oparnica L., Zorica D. Distributed-order fractional constitutive stress-strain relation in wave propagation modeling // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. 2019. Vol. 70, no. 51.
214. Luchko Yu. Maximum principle for the generalized time-fractional diffusion equation // J. Math. Anal. Appl. 2009. Vol. 351, no. 1. Pp. 218–223.
215. Luchko Yu., Yamamoto M. General time-fractional diffusion equation: some uniqueness and existence results for the initial-boundary-value problems // Fract. Calc. Appl. Anal. 2016. Vol. 19, no. 3 (2016). Pp. 676–695.
216. Mainardi F., Mura A., Pagnini G., Gorenflo R. Time-fractional Diffusion of Distributed Order // Journal of Vibration and Control. 2008. No. 14.
217. Naber M. Distributed order fractional sub-diffusion // Fractals. 2004. Vol. 12, no. 1. Pp. 23–32.
218. Nakhushev A. M., Nakhusheva V. A. On some classes of loaded equations and their applications // Caspian Journal of Applied Mathematics, Economics and Ecology. 2013. Vol. 1, no. 1. Pp. 82–88.
219. Ozturk I. On the theory of fractional differential equation // Докл. Адыг. (Черкес.) Междунар. академии наук. 1998. Т. 3, № 1. С. 35–39.
220. Pagani C.D. On the parabolic equation and arelated one // Ann. mat. pura ed appl. 1974. Vol. 99, no. 4. Pp. 333–399.
221. Pskhu A. V. Nakhushev extremum principle for a class of integro-differential operators // Fract. Calc. Appl. Anal. 2020, Vol. 23. Pp. 1712–1722.
222. Pskhu A. V. Transmutations for Multi-Term Fractional Operators. In: Kravchenko, V.F., Sitnik, S.M. (Eds.) Transmutation Operators and Applications. Trends in Mathematics. 2020. Springer Nature: Cham, Switzerland. Pp. 603–614.
223. Pskhu A. V., Ramazanov M. I., Kosmakova M. T. Boundary value problem for a loaded fractional diffusion equation // Turkish Journal of Mathematics. 2023. Vol. 47, no. 5. Pp. 1585–1594.
224. Sitnik S. M., Fedorov V. E., Filin N. V., Polunin V. A. On the Solvability of Equations with a Distributed Fractional Derivative Given by the Stieltjes Integral // Mathematics. 2022. Vol. 10. P. 2979.
225. Stojanovic M. N. Well-posedness of diffusion-wave problem with arbitrary finite number of time fractional derivatives in Sobolev spaces // Fract. Calc. Appl. Anal. 2010. Vol. 13, no. 1. Pp. 21–42.
226. Su N., Nelson P. N., Connor S.: The distributed-order fractional diffusion-wave equation of groundwater flow: Theory and application to pumping and slug tests // Journal of Hydrology. 2015. No. 529.
227. Tarasov V.E., Tarasova S.S. Fractional derivatives and integrals: what are they needed for? // Mathematics. 2020. No. 8(2). P. 164.
228. Umarov S., Gorenflo R.: Cauchy and nonlocal multi-point problems for distributed order pseudo-differential equations // J. Anal. Appl. 2005. Vol. 24, no. 3. Pp. 449–466.

# Задачи со смещением

## Новая краевая задача для одного вырождающегося гиперболического уравнения

В качестве модельного вырождающегося гиперболического уравнения первого рода второго порядка от двух независимых переменных рассмотрим уравнение

$$y^m u_{xx} - u_{yy} = 0, \quad m = \text{const } > 0. \tag{1}$$

Пусть $\Delta$ – конечная односвязная область плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная характеристиками $AC$ и $BC$ уравнения (1), выходящими из точек $A(0,0)$, $B(1,0)$, и отрезком $AB$ прямой $y = 0$; $I$ – единичный интервал, $0 < x < 1$; $z = \theta_0(x)$ и $z = \theta_1(x)$ – точки пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $z = x \in I$, с характеристиками $AC$ и $BC$ соответственно;

$$D^l_{0x} f(x) \equiv \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(-l)} \displaystyle\int\limits_0^x \dfrac{f(t)dt}{(x-t)^{1+l}}, & l < 0, \\ \dfrac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} D^{l-(n+1)}_{0x} f(x), & l > 0, \end{cases} \tag{2}$$

$$D^l_{x1} f(x) \equiv (-1)^k D^l_{0y} f(1-y), \quad y = 1 - x, \tag{3}$$

где $l$ – любое действительное число, $n$ – целая часть $l \geqslant n$, $\Gamma(z)$ – гамма-функция, $k = 0$ $(k = n)$ при $l < 0$ $(l > 0)$.

Очевидно, $D^l_{0x}$ и $D^l_{x1}$ представляют собой операторы дробного интегрирования порядка $(-l)$ при $l < 0$ и обобщенные производные (в смысле Лиувилля) порядка $l$ при $l > 0$ [1].

**Задача 1.** *Найти функцию $u(x,y) \equiv u(z)$ со следующими свойствами:*

1) $u(z) \in C(\overline{\Delta}) \cap C^1(\Delta \cup I)$, $\displaystyle\int\limits_0^1 u_y(x,0)\,[x(1-x)]^{-\varepsilon}\,dx < \infty.$

2) $u(z)$ *– регулярное в области $\Delta$ решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям*

$$u(x) = \tau(x) \quad \forall\, x \in \overline{I}, \tag{4}$$

$$\alpha(x) D^{1-\varepsilon}_{0x} u\,[\theta_0(x)] + \beta(x) D^{1-\varepsilon}_{x1} u\,[\theta_1(x)] = \gamma(x), \tag{5}$$

Нахушев А. М. Докл. АН СССР. 1969, **187**:4, 736–739.
Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 31.12.1968

$\forall\, x \in I,$ *где* $2(m+2)\varepsilon = m,$ $u\,[\theta_k(x)] = u\,(\mathrm{Re}\,\theta_\mathrm{k},\, \mathrm{Im}\,\theta_\mathrm{k}),$

$$\tau(x) \in C^1(\overline{I}) \cap C^3(I), \tag{6}$$

$$\alpha(x),\ \beta(x),\ \gamma(x) \in C(\overline{I}) \cap C^2(I), \tag{7}$$

$$\alpha(x)(1-x)^\varepsilon + \beta(x)x^\varepsilon \neq 0 \quad \forall\, x \in \overline{I}. \tag{8}$$

Докажем, что эта задача является корректно поставленной.

Опираясь на однозначную разрешимость задачи Коши для уравнения (1) с данными на линии вырождения $y = 0$ (см. [2]), легко убедиться, что любое решение $u(z)$ задачи 1, если оно существует, представимо в виде

$$u(z) = \frac{\Gamma\,(2\varepsilon)}{\Gamma^2\,(\varepsilon)} \int\limits_0^1 \tau\left[x + \frac{2}{m+2}\, y^{(m+2)/2}(2t-1)\right] [t(1-t)]^{\varepsilon-1}\, dt \,+$$

$$+\,\frac{\Gamma\,(2-2\varepsilon)}{\Gamma^2\,(1-\varepsilon)}\, y \int\limits_0^1 \nu\left[x + \frac{2}{m+2}\, y^{(m+2)/2}(2t-1)\right] [t(1-t)]^{-\varepsilon}\, dt, \tag{9}$$

где $\nu(x) = u_y(x,0)$.

Из (9) в силу (2) и (3) после простых преобразований имеем

$$u\,[\theta_0(x)] = \frac{\Gamma\,(2\varepsilon)}{\Gamma\,(\varepsilon)} x^{1-2\varepsilon} D_{0x}^{-\varepsilon} x^{\varepsilon-1}\tau(x) \,-$$

$$-\left(\frac{m+2}{4}\right)^{1-2\varepsilon} \frac{\Gamma\,(2-2\varepsilon)}{\Gamma\,(1-\varepsilon)} D_{0x}^{\varepsilon-1} x^{-\varepsilon}\nu(x), \tag{10}$$

$$u\,[\theta_1(x)] = \frac{\Gamma\,(2\varepsilon)}{\Gamma\,(\varepsilon)} (1-x)^{1-2\varepsilon} D_{x1}^{-\varepsilon} (1-x)^{\varepsilon-1}\tau(x) \,-$$

$$-\left(\frac{m+2}{4}\right)^{1-2\varepsilon} \frac{\Gamma\,(2-2\varepsilon)}{\Gamma\,(1-\varepsilon)} D_{x1}^{\varepsilon-1} (1-x)^{-\varepsilon}\nu(x). \tag{11}$$

Подставляя (10) и (11) в краевое условие (5) и учитывая тот факт, что

$$D_{0x}^{1-\varepsilon} D_{0x}^{\varepsilon-1} = D_{x1}^{1-\varepsilon} D_{x1}^{\varepsilon-1} = D^0,$$

где $D^0$ – единичный оператор, получаем

$$\left(\frac{m+2}{4}\right)^{1-2\varepsilon} \frac{\Gamma\,(2-2\varepsilon)}{\Gamma\,(1-\varepsilon)} \left[\alpha(x)(1-x)^\varepsilon + \beta(x)\, x^\varepsilon\right] \nu(x) =$$

$$= \frac{\Gamma\,(2\varepsilon)}{\Gamma\,(\varepsilon)} \left[x(1-x)\right]^\varepsilon \Big[\alpha(x) D_{0x}^{1-\varepsilon}\, x^{1-2\varepsilon} D_{0x}^{-\varepsilon} x^{\varepsilon-1}\tau(x) \,+$$

$$+ \ \beta(x) D_{x1}^{1-\varepsilon}(1-x)^{1-2\varepsilon} D_{x1}^{-\varepsilon}(1-x)^{\varepsilon-1}\tau(x) - \frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(2\varepsilon)}\,\gamma(x)\Bigg]. \tag{12}$$

Далее, принимая во внимание (2), можно записать

$$D_{0x}^{1-\varepsilon} x^{1-2\varepsilon} D_{0x}^{-\varepsilon} x^{\varepsilon-1}\tau(x) = \tau_1(x) = \frac{1}{\Gamma^2(\varepsilon)}\,\frac{d}{dx}\int\limits_0^x \frac{t^{1-2\varepsilon}dt}{(x-t)^{1-\varepsilon}}\int\limits_0^1 \frac{\tau(\xi)d\xi}{[\xi(t-\xi)]^{1-\varepsilon}} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(2\varepsilon-1)}\,\frac{d}{dx}\int\limits_0^1 \frac{x^{\varepsilon}\,\tau(xt)}{t^{1-\varepsilon}(1-t)^{1-2\varepsilon}}\,F\,(2\varepsilon-1,\,\varepsilon,\,2\varepsilon;\,1-t)\,dt, \tag{13}$$

где $F$ – гипергеометрическая функция Гаусса.

Из равенств (13) на основании условия (6) заключаем, что функция $\tau_1(x) \in C(I \cup B) \cap C^2(I)$, и она в точке $x = 0$ может обращаться в бесконечность порядка не выше $1-\varepsilon$.

Совершенно аналогично убеждаемся в том, что функция

$$D_{x1}^{1-\varepsilon}(1-x)^{1-2\varepsilon} D_{x1}^{-\varepsilon}(1-x)^{\varepsilon-1}\tau(x) \in C(I \cup A) \cap C^2(I),$$

причем в точке $x = 1$ она может обращаться в бесконечность порядка не выше $1-\varepsilon$.

Теперь, если учесть условия (8), легко видеть, что функция $\nu(x)$ однозначно определяется из соотношения (12), и она в силу (7) дважды непрерывно дифференцируема в интервале $I$, обращаясь, быть может, в бесконечность порядка не выше $1-2\varepsilon$ на его концах.

Следовательно, задача 1 разрешима однозначно и безусловно, и ее решение $u(z)$ дается формулой Дарбу (9), где $\nu(x)$ определяется из (12).

Из задачи 1 при $\beta(x) \equiv 0$, $\alpha(x) \equiv 1$ получается известная смешанная задача Дарбу [3]:

$$u(x) = \tau(x), \quad u\,[\theta_0(x)] = D_{0x}^{\varepsilon-1}\gamma(x) \quad \forall\, x \in \overline{I}.$$

Пусть для всех $x \in I$ нарушено условие (8), т. е.

$$\beta(x)x^{\varepsilon} + \alpha(x)(1-x)^{\varepsilon} \equiv 0 \ \text{ и } \ \alpha(x) \neq 0.$$

Тогда из (12), принимая во внимание (5), будем иметь

$$x^{\varepsilon} D_{0x}^{1-\varepsilon} u\,[\theta_0(x)] - (1-x)^{\varepsilon} D_{x1}^{1-\varepsilon} u\,[\theta_1(x)] = \frac{\Gamma\,(2\varepsilon)}{\Gamma\,(\varepsilon)}\left[x^{\varepsilon} D_{0x}^{1-\varepsilon} x^{1-2\varepsilon} D_{0x}^{-\varepsilon} x^{\varepsilon-1} u(x) - \right.$$

$$\left. - \,(1-x)^{\varepsilon} D_{x1}^{1-\varepsilon}(1-x)^{1-2\varepsilon} D_{x1}^{-\varepsilon}(1-x)^{\varepsilon-1} u(x)\right]. \tag{14}$$

Известно [3], что любое регулярное в области $\Delta$ решение $u(z)$ уравнения (1) при $m=0$, т. е. волнового уравнения

$$u_{xx}-u_{yy}=0, \tag{15}$$

удовлетворяющее условию 1 задачи 1 при $\varepsilon=0$, обладает следующим весьма важным свойством (среднего значения):

$$\frac{d}{dx}u\left[\theta_0(x)\right]+\frac{d}{dx}u\left[\theta_1(x)\right]=\frac{d}{dx}\left[u(x)+u\left(\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}\right)\right], \tag{16}$$

где $\theta_k(x)$ $(k=0,1)$ совпадают с определенной выше функцией $\theta_k(x)$ при $m=0$.

Можно считать, что формула (14) выражает аналогичное свойство всех регулярных решений уравнения (1) (удовлетворяющих условию 1 задачи 1).

Непосредственным обобщением задачи 1, очевидно, является краевая задача, в которой условие (5) заменено условием, поточечно связывающим значения обобщенных производных порядка $l\geqslant 0$ на $AC\cup BC$.

Здесь мы ограничимся исследованием одной краевой задачи такого рода для уравнения (15) в области $\Delta$, ограниченной прямыми $y=x$, $y=1-x$, $y=0$.

Ниже под решением уравнения (15) в области $\Delta$ понимается любая функция $u(z)$, представимая в виде

$$u(z)=\varphi(x+y)+\psi(x-y), \tag{17}$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)\in C(I)$.

**Задача 2.** *Найти решение $u(z)$ уравнения* (15), *непрерывное в $\overline{\Delta}$ и удовлетворяющее краевым условиям*

$$u(x)=\tau(x)\quad\forall\,x\in\overline{I}, \tag{18}$$

$$u\left(\frac{x}{2},\,\frac{x}{2}\right)+\beta(x)u\left(\frac{1+\theta(x)}{2},\,\frac{1-\theta(x)}{2}\right)=\gamma(x)\quad\forall\,x\in\overline{I}, \tag{19}$$

*где $\tau(x)$, $\beta(x)$, $\theta(x)$ и $\gamma(x)$ – заданные функции из класса $C(\overline{I})$, причем $0\leqslant\theta(x)\leqslant 1$.*

Задача 2 разрешима и притом единственным образом, если выполнены следующие условия:

1. Функция $y=\theta(x)$ осуществляет топологическое отображение сегмента $\overline{I}$ в самого себя, оставляя неподвижными точки $x=0,1$;

2. $\beta(x)\neq 1\quad\forall\,x\in\overline{I},\qquad\gamma(0)=0;$ (20)

3. $\tau(0) = 0, \quad \gamma(1) = \beta(1)\tau(1).$ (21)

Принимая во внимание (18) и (19), замечаем, что при соблюдении требований 1 и 3 условие $\gamma(0) = 0$ является необходимым для разрешимости задачи 2.

Опираясь на свойства (среднего значения) (16) решения (17) и соотношения (18)–(21), нетрудно убедиться в эквивалентности задачи 2 двухточечной краевой задаче

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 0 \tag{22}$$

для функционального уравнения

$$Af \equiv \beta(x) f\,[\theta(x)] + \mu(x) = f(x) \quad \forall\, x \in \overline{I}, \tag{23}$$

где $f(x) = u(x/2, x/2)$, $\mu(x) = \gamma(x) - \beta(x)\tau\,[\theta(x)]$.

Рассмотрим пространство $C_0(\overline{I})$ функций

$$f(x) \in C(\overline{I}), \quad \|f\| = \max_{\overline{J}} |f(x)|,$$

и удовлетворяющих условию (22), которое является банаховым.

Легко видеть, что оператор $A$ из (23) отображает пространство $C_0(\overline{I})$ в самого себя и в случае, когда $\|\beta\| < 1$ (см. (20)), в силу очевидного неравенства

$$\|Af_1 + Af_2\| \leqslant \|\beta\|\, \|f_1\,[\theta(x)] - f_2\,[\theta(x)]\,\| = \|\beta\|\, \|f_1 - f_2\|,$$

справедливого для любых $f_1$ и $f_2$ из $C_0(\overline{I})$, является оператором сжатия. Следовательно, по теореме Банаха [4], уравнение (23) имеет решение, притом единственное, и его можно построить методом последовательных приближений.

Случай $\|\beta\| > 1$ заменой $x$ на $\theta^{-1}(x)$ в уравнении (23) сводится к исследованному.

Можно привести примеры, убеждающие в том, что нарушение одного из двух первых условий, наложенных на заданные функции, влияет на корректность (в смысле Адамара) задачи 2 (см. [5]).

**Литература**

1. Hardy B., Littlewood J. Mathematische zeitschrift. 1928. Vol. 27, no. 1. Pp. 565–606.
2. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М.: Изд. АН СССР, 1959.
3. Гурса Э. Курс математического анализа. Т. 3, ч. 2. М., 1934.
4. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., 1959.
5. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5, № 1.

Поступила в редакцию
20 декабря 1968 г.

Институт математики
СО АН СССР

# Методика постановки корректных задач для линейных гиперболических уравнений второго порядка на плоскости

В односвязанной области $\Delta$ плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченной двумя линиями $|x| = 1 - y$ и $y = 0$, рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{xx} - u_{yy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = 0 \tag{1}$$

с коэффициентами $a$, $b$ и $c$ из класса $C^1(\overline{\Delta}) \cap C^2(\Delta)$.

Примем следующие обозначения: $J$ – интервал $|x| < 1$ вещественной оси $y = 0$; $\Gamma = \partial\Delta \setminus J$ – характеристическая часть границы $\partial\Delta$ области $\Delta$; $\Gamma_1$ – часть $\Gamma$, где

$$x + y = 1, \quad \Gamma_{-1} = \Gamma \setminus \Gamma_1,$$

$$\theta_{-1}(x) = \frac{x-1}{2} + i\frac{x+1}{2}, \quad \theta_1(x) = \frac{1+x}{2} + i\frac{1-x}{2}$$

– аффиксы точек пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $x = (x,\, 0) \in J$ с $\Gamma_{-1}$ и $\Gamma_1$ соответственно; $D(A_{jx}^{-1})$ – множество функций $f(x) \in C(J)$ и таких, что $f(x)$ при $x \to -1$ или 1 может обращаться в бесконечность интегрируемого порядка; $D(A_{jx})$ – множество функций $f(x) \in C(\overline{J}) \cap C^1(J)$, производная $f'(x)$ которых при $x \to -1$ или 1 могут обращаться в бесконечность интегрируемого порядка и удовлетворяющих условию $f(j) = 0$, где $j$ равен $-1$ либо 1 в зависимости от того, какое множество берется $D(A_{-1x})$ или $D(A_{1x})$.

В дальнейшем под решением уравнения (1) в области $\Delta$ будем понимать любую функцию $u(x,\, y) = u(z)$ из класса

$$C(\overline{\Delta}) \cap C^1(\Delta \cup J) \cap C^2(\Delta),$$

удовлетворяющую уравнению (1) в $\Delta$ и такую, что

$$u_y(x,\, 0) \equiv u_y(x) \in D(A_{jx}^{-1}).$$

Через $R(z;\, \xi,\, \eta) \equiv R(x,\, y;\, \xi,\, \eta)$ будем обозначать функцию Римана уравнения (1), которая, как хорошо известно, однозначно определяется двумя требованиями: 1) $R(z;\, \xi,\, \eta)$ по переменным $x$, $y$ является решением уравнения $L^*R = 0$, сопряженного, по Лагранжу, уравнению (1); 2) на характеристических кривых $|x - \xi| = |y - \eta|$ удовлетворяет условиям

$$R(\xi,\, \eta;\, \xi,\, \eta) = 1, \tag{2}$$

Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1970, **6**:1, 192–195.

$$2\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\right)R-(a+b)R=0, \quad x+y=\xi+\eta, \tag{3}$$

$$2\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)R-(a-b)R=0, \quad x-y=\xi-\eta. \tag{4}$$

Известно также, что функция $R$ в области $\Delta$ по переменным $x$, $y$ или $\xi$, $\eta$ имеет по крайней мере такую же гладкость, что и коэффициенты уравнения (1) (см., например, [1] или [2]).

Интегрируя выражение

$$RLu-uL^*R=\frac{\partial}{\partial x}(Ru_x-uR_x+auR)+\frac{\partial}{\partial y}(-Ru_y+uR_y+buR)$$

по подобласти области $\Delta$, ограниченной прямой $y=0$ и характеристической кривой $|x-\xi|=\eta-y$ с учетом свойств функции Римана, обычным способом нетрудно убедиться в том, что для любого решения $u(z)$ уравнения (1) в области $\Delta$ справедливо тождество

$$u(z)-\frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}R(z;\,\xi,\,0)u_y(\xi)d\xi=U[u(x);\,z]=\frac{1}{2}R(z;\,x+y,\,0)u(x+y)+$$

$$+\frac{1}{2}R(z,\,x-y,\,0)u(x-y)-\frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}[R_\eta(z;\,\xi,\,0)+b(\xi)R(z;\,\xi,\,0)]u(\xi)d\xi. \tag{5}$$

Из формулы (5) при $z\to\theta_j(x)$ имеем

$$u[\theta_j(x)]=U[u(x);\,\theta_j(x)]-(j/2)A_{jx}^{-1}[u_y(x)], \tag{6}$$

где $A_{jx}^{-1}$ – оператор, действующий из $D(A_{jx}^{-1})$ в $D(A_{jx})$ по формуле

$$A_{jx}^{-1}[f(x)]\equiv\int\limits_{j}^{x}R(\theta_j(x);\,\xi,\,0)f(\xi)d\xi. \tag{7}$$

Оператор $A_{jx}^{-1}$ есть оператор Вольтерра первого рода. Поскольку точки $z=\theta_j(x)$ и $z=x\in J$ лежат на одной характеристике, то из свойств (2), (3) и (4) функции Римана следует, что

$$R(\theta_j(x);\,x,\,0)>0, \quad \forall\,x\in\overline{J}. \tag{8}$$

В силу (8) оператор $A_{jx}^{-1}$ однократным дифференцированием по $x$ сводится к оператору Вольтерра второго рода и, стало быть, имеет обратный оператор $A_{jx}$ с областью определения $D(A_{jx})$.

Замечая, что оператор $A_{jx}$ имеет смысл и на множестве функций $f(x)$, удовлетворяющих всем условиям, гарантирующим их принадлежность множеству $D(A_{jx})$, за исключением, быть может, одного $f(j)=0$, из (6) заключаем

$$A_\Gamma u \equiv A_{-1x}u[\theta_{-1}(x)] + A_{1x}u[\theta_1(x)] =$$
$$= A_j u \equiv A_{-1x}U[u(x);\, \theta_{-1}(x)] + A_{1x}U[u(x);\, \theta_1(x)]. \tag{9}$$

Равенство (6) выражает интегро-функциональную связь между следом $u(t)$ на $\partial\Delta$ любого решения $u(z)$ уравнения (1) и следом $u_y(t)$ на $J$ его нормальной производной $u_y(z)$, из которой нетрудно усмотреть, что задача Коши:

$$u(x)=\tau(x), \quad u_y(x)=\nu(x), \quad x\in J$$

редуцируется к задаче Гурса:

$$u[\theta_j(x)] = \psi_j(x), \quad j=\pm 1, \quad \forall\, x \in \overline{J},$$

а задача Дарбу:

$$u[\theta_1(x)] = \psi_1(x), \quad u(x)=\tau(x) \quad (\text{или} \;\; u_y(x)=\nu(x))$$

– к задаче Коши.

Равенство же (9) представляет собой *операторно-функциональное* уравнение, которому удовлетворяет след $u(t)$, $t\in\partial\Delta$, любого решения $u(z)$ уравнения (1) в области $\Delta$.

Очевидно, никакая краевая задача для уравнения (1) в области $\Delta$ типа

$$B_\omega u = \psi(t) \quad \forall\, t\in\omega\subseteq\partial\Delta, \tag{10}$$

где $\psi(t)$ – заданная на $\omega$ действительная функция комплексного переменного $t$, а $B_\omega$ – заданный граничный оператор, действующий на функцию $u(t)$, определенный на подмножестве $\omega$ множества точек $\partial\Delta$, не будет корректно поставленной, если условие (10) будет противоречить условию (9).

Таким образом, получаем следующую методику постановки корректных задач типа (10) для уравнения (1): *граничный оператор $B_\omega$ надо задавать так, чтобы непротиворечивая система двух операторно-функциональных уравнений*

$$\begin{cases} A_\Gamma u = A_j u, \\ B_\omega u = \psi(t), \quad \forall\, t\in\omega \end{cases} \tag{11}$$

*имела единственное решение $u_{\omega_0}(t)$ на некотором подмножестве $\omega_0\subseteq\omega$, обладающем тем свойством, что задача $u(t)=u_{\omega_0}(t)$ $\forall\, t\in\omega_0$ для уравнения (1) в области $\Delta$ однозначно разрешима.*

Например, в качестве $B_\omega$ можно взять единичный оператор $E_\omega\colon E_\omega u \equiv u(t)$, $\forall\, t \in \omega$, где $\omega = \Gamma_j \cup J$, т. е. оператор, соответствующий задаче Дарбу.

Вопрос однозначной разрешимости краевой задачи (10) в случае, когда $B_\omega = E_\omega$ (и система (11) непротиворечивая) устанавливается довольно легко, исходя из соотношения (9).

Частным случаем задачи (10) является следующая

**Задача A.** *В области* $\Delta$ *найти решение уравнения* (1), *удовлетворяющее краевым условиям:*

$$u(x) = \tau(x) \quad \forall\, x \in \overline{J},$$

$$\alpha(x) A_{-1x} u[\theta_{-1}(x)] + \beta(x) A_{1x} u[\theta_1(x)] = \gamma(x) \quad \forall\, x \in J,$$

*где*

$$\tau(x) \in D(A_{jx}) \cap C^2(J),\ \alpha(x),\ \beta(x),\ \gamma(x) \in D(A_{jx}),\ \alpha(x) \neq \beta(x),\ \forall\, x \in \overline{J}.$$

Корректность этой задачи просто следует из уравнения (9).

Поскольку при $a(x,\, y) \equiv b(x,\, y) \equiv 0$ и $c(x,\, y) \equiv \lambda^2 = \mathrm{const}$ функция Римана $R(z;\, \xi,\, \eta) = J_0(\lambda\sqrt{|x-\xi|^2 - |y-\eta|^2})$, где $J_0(z)$ – функция Бесселя нулевого порядка, то оператор $A_{jx}$ обратен оператору

$$A_{jx}^{-1}[f(x)] \equiv \int\limits_j^x J_0(\lambda\sqrt{(\xi - j)(\xi - x)}) f(\xi) d\xi. \tag{12}$$

Для любой функции $f(x) \in D(A_{jx}^{-1})$ функция

$$v(z) = \int\limits_0^y \frac{F(x,\, r) r dr}{\sqrt{y^2 - r^2}}, \tag{13}$$

где

$$F(x,\, r) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{\lambda r \sin t} f(x + r\cos t) dt,$$

представляет собой решение задачи Коши:

$$v(x) = 0, \quad v_y(x) = f(x), \quad \forall\, x \in J$$

для телеграфного уравнения

$$u_{xx} - u_{yy} + \lambda^2 u = 0$$

в области $\Delta$. Из единственности решения этой задачи и, стало быть, его следа $v[\theta_j(x)]$ на кривой $\Gamma$ в силу (6) заключаем, что тождество (12) можно переписать в виде

$$A_{jx}^{-1}[f(x)] \equiv -\frac{j}{2}\int\limits_0^{\mathrm{Im}\theta_j} \frac{F(\mathrm{Re}\,\theta_j,\, r)r\,dr}{\sqrt{\mathrm{Im}^2\theta_j - r^2}}.$$

Оператор в правой части (13) есть оператор дробного (в смысле Римана–Лиувилля) интегрирования по переменной $r$ функции $F(x,\, r)$, а $A_{jx}^{-1}$ – его «след» на кривой $\Gamma$.

При $\lambda = 0$, как легко видеть из (5) и (12)

$$A_{jx} = d/dx, \quad 2U[u(x);\, \theta_j(x)] = u(x) + u(j).$$

Следовательно, тождество (9) принимает вид

$$\frac{d}{dx}u[\theta_{-1}(x)] + \frac{d}{dx}u[\theta_1(x)] = \frac{d}{dx}u(x) \quad \forall\, x \in J, \tag{14}$$

из которого после интегрирования получаем известную теорему о среднем значении (или принцип Асгейрссона)

$$u[\theta_{-1}(x)] + u[\theta_1(x)] = u(x) + u(i)$$

для одномерного волнового уравнения

$$u_{xx} - u_{yy} = 0. \tag{15}$$

Известно, что классические задачи (Коши, Гурса, Дарбу) для невырождающихся гиперболических уравнений, в отличие от краевых задач для равномерно эллиптических уравнений, обладают тем свойством, что на их корректность не оказывают никакого влияния коэффициенты $(a,\, b,\, c)$ при младших производных.

В данной заметке для каждого уравнения вида (1) формулируется заведомо корректная для него краевая задача. Поэтому вполне естественно ожидать, что на корректность такого рода задач существенное влияние могут оказывать коэффициенты при младших производных.

Действительно, однородная краевая задача

$$u(x) = 0 \quad \forall\, x \in \overline{J},$$

$$\cos\frac{1-x}{2}\frac{d}{dx}u[\theta_{-1}(x)] + \cos\frac{1+x}{2}\frac{d}{dx}u[\theta_1(x)] = 0 \quad \forall\, x \in J$$

для уравнения (15) в силу (14) не имеет решений, отличных от тривиального $u(z) \equiv 0$, в то время как эта же задача для уравнения

$$u_{xx} - u_{yy} - u = 0$$

имеет в качестве нетривиального решения функцию $u(z) = \sin y$.

В заключение отметим, что совершенно аналогично (см. [3]) можно сформулировать заведомо корректные краевые задачи для линейных вырождающихся гиперболических уравнений вида

$$|y|^m u_{xx} - u_{yy} + a(x,\, y) u_x + b(x,\, y) u_y + c(x,\, y) u = 0.$$

**Литература**


1. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М.: Изд. АН СССР, 1959.
2. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.
3. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5, № 1.


Поступила в редакцию
19 мая 1969 г.

Институт математики
СО АН СССР

# О нелокальных краевых задачах со смещением и их связи с нагруженными уравнениями

**1. Определение нелокальных задач и их классификация.** Нелокальным задачам и особенно краевым задачам со смещением за последние пятнадцать лет уделяется пристальное внимание, и это в первую очередь благодаря теории уравнений смешанного типа, которая достигла значительных результатов [1].

Пусть $\Omega$ – $n$-мерная область евклидова пространства $R^n$ точек $z = (x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n)$ с границей $\partial\Omega$; $w$ – принадлежащее замыканию $\overline{\Omega}$ непустое множество, а $\{j\}$ – индексное множество точек числовой прямой.

В области $\Omega$ рассмотрим матричное, вообще говоря, нагруженное интегро-дифференциальное уравнение

$$Lu = f(z). \tag{1}$$

**Определение 1.** *Задачу отыскания решения $u = u(z)$ уравнения (1) в области $\Omega$, удовлетворяющего на множестве $w$ условиям вида*

$$B_j u(z) = \psi_j,\ j \in \{j\}, \tag{2}$$

*назовем локальной задачей для уравнения (1), если образ $\psi_j$ отображения $B_j u\colon z \to \psi_i(z)$ в любой точке $z \in w$ однозначно определяется значением $u$ или ее производных до определенных порядков в этой же точке $z$.*

Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1985, **21**:1, 92–101.

Участвующие в определении 1 условия (2) и операторы $B_j$ назовем локальными, а множество $w$ – носителем локальных условий. Задачи для уравнения (1), соответствующие условия и операторы, которые не являются локальными, естественно называть нелокальными.

**Определение 2.** *Локальную задачу для уравнения* (1) *в области* $\Omega$ *назовем внутренней, если замыкание* $\overline{w}$ *носителя локальных условий принадлежит* $\Omega$*, краевой, если* $w \subseteq \partial\Omega$*, и внутреннекраевой, если* $\overline{w}$ *содержит как точки области* $\Omega$*, так и ее границы.*

Аналогично вводятся определения нелокальной краевой (или граничной), внутренней, внутреннекраевой задач для уравнений и систем вида (1).

Задача об охлаждении неоднородного изогнутого стержня [2, с. 63] при определенной ее схематизации редуцируется к задаче отыскания решения $u(z)$, $z = (x,\, y) \in R^2$, уравнения

$$gu_y - (k_0 u_x)_x + m_0 u = 0 \tag{3}$$

в области $\Omega = \{z\colon 0 < x < l,\, 0 < y < T\}$, удовлетворяющего краевым условиям:

$$B_1 u(z) \equiv u(x,\, 0) = \psi_1(x),\ 0 \leqslant x \leqslant l,$$

$$B_j u(z) \equiv a_1^j u(0,\, y) + a_2^j u_x(0,\, y) + a_3^j u(l,\, y) + a_4^j u_x(l,\, y) = 0,\ 0 < y < T,$$

где $j = 2, 3$; $g$, $k_0$, $m_0$ – параметры тонкого стержня длины $l$, отсчитываемой от концевой точки $x = 0$; $a_k^j$ – заданные постоянные величины. Эта задача, которая является локальной лишь при $a_3^2 = a_4^2 = a_1^3 = a_2^3 = 0$ или $a_1^2 = a_2^2 = a_3^3 = a_4^3 = 0$, предложена В. А. Стекловым как обобщение следующих двух краевых задач:

$$u_x(x_j,\, y) = a_1^j u(0,\, y) + a_3^j u(l,\, y),\ u(x,\, 0) = \psi_1,\ x_2 = 0,\ x_3 = l,$$

$$u_x(l,\, y) = a_2^1 u_x(0,\, y) + a_1^1 u(0,\, y),$$
$$u(l,\, y) = a_1^2 u(0,\, y),\ u(x, 0) = \psi_1,$$

для уравнения (3), названных им задачами первого и второго классов соответственно [2, с. 67].

К краевым задачам с локальным $B_1 u = \psi_1(x)$ и нелокальным

$$B_j u(z) = \sum_{i=1}^{2} \left[ \alpha_{ij}(y) \frac{\partial^{i-1} u}{\partial x^{i-1}} \bigg|_{x=0} + \beta_{ij}(y) \frac{\partial^{i-1} u}{\partial x^{i-1}} \bigg|_{x=l} \right] =$$
$$= \gamma_j(y),\ 0 < y < T,\ j = 1,\, 2, \tag{4}$$

условиями для параболического типа уравнений вида

$$u_y + A_1(z) u_{xx} + A_2(z)(u^2)_{xx} + B(z) u_x + C(z) = f(z)$$

сводятся многие проблемы физики плазмы [3], уровенного и солевого прогнозов в капиллярно-пористых средах [4].

**Определение 3.** *Нелокальное условие*

$$\sum_{k=1}^{p} B_j^k u(z) = \beta_j(z), \ z \in w, \tag{5}$$

*назовем условием локального смещения (сдвига) или условием первого класса для уравнения* (1), *если оператор* $B_j^k$ *является локальным для любого* $k = 1, 2, \ldots, p$ *и* $j \in \{j\}$.

Интуитивно ясно, как теперь следует ввести понятие краевых, внутренних, внутреннекраевых условий и задач с локальным (нелокальным) смещением, сдвигом или задач первого (второго) класса.

Здесь уместно отметить, что термин «нелокальное условие», по-видимому, впервые прозвучал в следующем предложении А. А. Дезина [5]: «Есть основания подозревать, что использование «нелокальных» условий вида (1)*, по крайней мере по одному из переменных, неизбежно при описании разрешимых расширений для некоторых классов операторов».

Нетрудно видеть, что предложенные А. А. Дезиным для ультрагиперболического и псевдопараболического операторов нелокальные условия, как и (4), представляют собой краевые условия первого класса.

Рассмотрим теперь уравнение

$$T_m u \equiv \operatorname{sign} y \cdot |y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \ m = \text{const} \geqslant 0 \tag{6}$$

в области $\Omega_m$, ограниченной кривой Жордана $\sigma_m \subset \{z \colon y > 0\}$ с концами в точках $A(0,0)$, $B(1,0)$ и характеристиками

$$AC_m \colon (m+2)x = 2(-y)^{(m+2)/2}, \quad BC_m \colon (m+2)(1-x) = 2(-y)^{(m+2)/2}.$$

Задача Трикоми – задача отыскания регулярного в области $\Omega_m$ при $y \neq 0$ решения $u = u(x,y)$ уравнения (6) из класса $C(\overline{\Omega}_m) \cap C^1(\Omega_m)^{**}$, удовлетворяющего условиям:

$$u|_{\sigma_m} = \varphi; \quad u|_{AC_m} = \psi(y),$$

является локальной. Однако при хорошо известных (см. [1, с. 295]) ограничениях на гладкость функции $\psi$ и характер поведения производной $u_y$ искомого решения в точках $A$ и $B$ эта задача при $m \neq 0$ редуцируется

* Граничное условие вида $\gamma_1[u(s_1)] + \gamma_2[u(s_2)] = 0$, где $\gamma_1$ и $\gamma_2$ – некоторые линейные операторы, а $s_1$ и $s_2$ – различные точки границы. «Для классических операторов граничные условия всегда могут быть заданы в виде $\gamma_1[u(s_1)] = 0$», – пишется в [5].

** При $m = 0$ задача Трикоми будет некорректной, если ее решение искать в классе $C^2(\Omega_0)$.

к существенно новой нелокальной краевой задаче для эллиптического в области $\Omega_m^+ = \Omega_m \cap \{z\colon y > 0\}$ уравнения

$$y^m u_{xx} + y_{yy} = 0,$$

когда на $\sigma_m$ задано локальное условие

$$u|_{\sigma_m} = \varphi,$$

а на $AB = \{z\colon y - 0,\ 0 < x < 1\}$ – нелокальное условие

$$u_y(x,0) = \gamma_m D_{0x}^{\alpha_m} u(x,0) + \psi_1(x),$$

которое линейно связывает $u_y(x,0)$ с дробной производной $D_{0x}^{\alpha_m} u(x,0)$ порядка $\alpha_m = 2/(m+2)$ и не является условием первого класса.

Если $m = 0$, $\sigma_0 = \{z\colon |z - 1/2| = 1/2,\ y > 0\}$, то задача Трикоми приводит к следующей нелокальной краевой задаче [1, с. 304]:

$$u|_{AC_0} = \psi(y),\ u(x,0) - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 u_y(t,0)\log\left|\frac{t-x}{t+x-2tx}\right| dt = \varphi_*(x)$$

для гиперболического в области $\Omega_0^- = \{z\colon y < 0\} \cap \Omega_0$ уравнения $u_{xx} = u_{yy}$.

В задаче Трикоми часть $BC_m$ характеристического многообразия $AC_m \cup BC_m$ свободна от граничных условий. Следовательно, точки гиперболической части границы $\partial\Omega_m$ не являются равноправными как носители граничных данных. Этот факт не позволяет найти непосредственный аналог задачи Трикоми для уравнений смешанного типа в многомерных областях, особенно в случае, когда поверхность изменения типа пространственно ориентирована.

В связи с этим в шестидесятых годах А. В. Бицадзе была выдвинута проблема поиска корректно поставленных краевых задач для уравнений смешанного типа с двумя независимыми переменными, когда все точки характеристической части границы равноправны как носители граничных данных. Этой проблеме посвящены работы [6], [7], где предложен ряд нового типа нелокальных задач, вошедших в математическую литературу под названием краевых задач со смещением. Такая терминология заимствована автором из теории граничных задач сопряжения со смещением (см. [8]) для аналитических функций $\Phi(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$.

К граничным задачам сопряжения со смещением относят и задачу Карлемана: найти аналитическую в области $\Omega$ функцию $\Phi(z)$ из класса $C(\overline{\Omega})$, удовлетворяющую граничному условию

$$\Phi[\Theta(t)] = G(t)\Phi(t) + g(t),\ t \in \partial\Omega, \tag{7}$$

где $\Theta(t)$ – гомеоморфизм границы $\partial\Omega$ на себя с изменением направления обхода контура $\partial\Omega$, $\Theta[\Theta(t)] = t$.

Условие (7) является краевым условием первого класса, и оно с помощью локальных операторов связывает значение $\Phi[\Theta(t)]$ и $\Phi(t)$ искомой функции $\Phi(z)$ в гомеоморфных точках $\Theta(t)$ и $t$ из $\partial\Omega$.

В краевых задачах со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типов характеристическая часть границы является носителем нелокальных условий, связывающих значение искомого решения или его дробных производных определенных порядков в гомеоморфных точках ([6], [7], [9], [10]), и они, как правило, относятся к классу задач с нелокальным смещением.

Задача Бицадзе–Самарского [11] является нелокальной внутреннекраевой задачей.

Нелокальное условие вида (5) разумно назвать условием со смешанным сдвигом, если среди операторов $B_j^k$ найдется по крайней мере один оператор с локальным сдвигом и один – с нелокальным.

Многие математические модели энерго- и массообмена в среде обитания растений сводятся (см. [12]) к задаче отыскания неизвестных коэффициентов уравнения в частных производных вида

$$u_y = Au_{xxy} + Bu_{xx} + au_x + bu$$

и решения $u(z) = u(x, y)$, удовлетворяющего начальному условию $u(x, 0) = \tau(x)$, $x \in [0, l]$, и локальным и нелокальным условиям следующих видов:

$$u(0, y) = \varphi_0(y), \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = \psi_0(y), \quad y \in [0, T],$$

$$\sum_{i=1}^{2} \left[ \sum_{j=0}^{m} \alpha_{ki}^{j}(y) \frac{\partial^{i-1} u}{\partial x^{i-1}}\Big|_{x=x_j} + \sum_{j=0}^{n} \beta_{ki}^{j} \frac{\partial^{i-1} u}{\partial y^{i-1}}\Big|_{y=y_j} \right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \int_{\alpha}^{\beta} \beta_k(x, y) u(x, y) dx = \gamma_k(x, y), \quad k = 1, 2, \ldots, k_0. \tag{8}$$

Здесь $m$ и $n$ – заданные числа, $0 \leqslant x_0 < x < \ldots < x_m \leqslant l$, $0 \leqslant y_0 < y_1 < \ldots \leqslant y_n \leqslant T$, $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant l$, $k_0$ – число условий, которое существенно зависит от числа неизвестных коэффициентов. Условия (8) представляют собой нелокальные условия со смешанными сдвигами.

Следует обратить внимание на то, что во многих весьма важных в приложении задачах нелокальные условия означают не что иное, как требование к искомому решению $u(z)$ уравнения (1) быть решением заданных в $\overline{\Omega}$ нагруженных уравнений [13]. Например, на условия (8) можно смотреть как на заданные в прямоугольнике $[0,l]\times[0,T]$ нагруженные уравнения относительно $u(z)$.

Интерес к полному описанию краевых задач со смещением даже для модельного уравнения (6) объясняется не только тем, что они представляют собой существенное обобщение задачи Трикоми и имеют многомерные аналоги [14], [15], но и тем, что содержат широкий класс корректных самосопряженных задач [16], [17].

**2. Об одном свойстве нелокальных операторов дробного интегро-дифференцирования.** При описании корректно поставленных краевых задач для уравнения (6) позитивную роль играет следующее свойство операторов дробного интегро-дифференцирования.

Пусть $\alpha$ – любое действительное число, $[\alpha]$ – целая часть $\alpha$, $[\alpha] \leqslant \alpha \leqslant [\alpha]+1$, $\Gamma(z)$ – гамма-функция.

Оператор $D^{\alpha}_{ax}$ дробного интегрирования (при $\alpha<0$) и дробного дифференцирования (при $\alpha>0$) порядка $|\alpha|$ с началом в точке $t=a$ определим, как и принято, формулой

$$D^{\alpha}_{ax}\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sign}(x-a)}{\Gamma(-\alpha)}\displaystyle\int\limits_a^x\frac{\varphi(t)\,dt}{|x-t|^{\alpha+1}}, & \alpha<0,\\ \varphi(x), \quad \alpha=0,\\ \operatorname{sign}(x-a)\dfrac{\partial^{[\alpha]+1}}{\partial x^{[\alpha]+1}}D^{\alpha-[\alpha]-1}_{ax}\varphi(x), & \alpha>0.\end{cases} \tag{9}$$

**Лемма 1.** *Пусть функция $\varphi(x)$ интегрируема и непрерывна в интервале $x_0<x<x_1$, $a\in[x_0,\,x_1]$. Тогда для любого $\beta<0$, $\alpha\in[0,\,1[$ и $|\alpha+\beta|<1$ справедлива формула*

$$D^{\alpha}_{ax}|x-a|^{\alpha+\beta}D^{\beta}_{ax}\varphi(x)=|x-a|^{\beta}D^{\alpha+\beta}_{ax}|x-a|^{\alpha}\varphi(x). \tag{10}$$

Действительно, в силу (9) имеем

$$\Gamma(1-\alpha)\Gamma(-\beta)\,\operatorname{sign}(x-a)D^{\alpha}_{ax}|a-x|^{\alpha+\beta}D^{\beta}_{ax}\varphi(x)=\frac{d}{dx}\int\limits_x^a\frac{|a-t|^{\alpha+\beta}}{|t-x|^{\alpha}}dt\times$$

$$\times\int\limits_t^a\frac{\varphi(\xi)d\xi}{|\xi-t|^{\beta+1}}=\frac{d}{dx}\int\limits_x^a\varphi(\xi)d\xi\int\limits_x^{\xi}|t-x|^{-\alpha}|\xi-t|^{-\beta-1}|a-t|^{\alpha+\beta}dt. \tag{11}$$

Произведем замену переменной интегрирования $t$ по формуле $t = x + (\xi - x)\eta$ и воспользуемся следующими свойствами гипергеометрической функции $F(\alpha,\,\beta,\,\gamma;z)$:

$$F(\alpha,\,\beta,\,\gamma;z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int\limits_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-zt)^{-\alpha}dt,$$

$$\mathrm{Re}\,(\gamma) > \mathrm{Re}\,(\beta) > 0, \quad |z| < 1,$$

$$\frac{d}{dz}z^{\gamma-1}F(\alpha,\,\beta,\,\gamma;z) = (\gamma-1)z^{\gamma-2}F(\alpha,\,\beta,\,\gamma-1;z),$$

$$F(\alpha,\,\beta,\,\alpha;z) = (1-z)^{-\beta}, \quad |\arg(1-z)| < \pi.$$

В результате можно записать

$$J^\alpha_\beta(a,x,\,\xi) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(-\beta)}\int\limits_x^\xi |t-x|^{-\alpha}|\xi-t|^{-\beta-1}|a-t|^{\alpha+\beta}dt =$$

$$= \frac{\mathrm{sign}\,(\xi-x)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(-\beta)}\left|\frac{a-x}{\xi-x}\right|^{\alpha+\beta}\int\limits_0^1 \eta^{-\alpha}(1-\eta)^{-\beta-1}\left(1-\frac{\xi-x}{a-x}\eta\right)^{\alpha+\beta}d\eta =$$

$$= \frac{\mathrm{sign}\,(a-x)}{\Gamma(1-\alpha-\beta)}\left(\frac{a-x}{\xi-x}\right)^{\alpha+\beta}F\left(-\alpha-\beta,\,1-\alpha,\,1-\alpha-\beta;\frac{\xi-x}{a-x}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}J^\alpha_\beta(a,x,\,\xi) = -\frac{(\alpha+\beta)\ \mathrm{sign}\,(a-x)}{\Gamma(1-\alpha-\beta)}\frac{\xi-a}{(a-x)^2}\left(\frac{a-x}{\xi-x}\right)^{\alpha+\beta+1}\times$$

$$\times F\left(-\alpha-\beta,1-\alpha,-\alpha-\beta;\frac{\xi-x}{a-x}\right) = \frac{\mathrm{sign}\,(a-x)}{\Gamma(-\alpha-\beta)}\left(\frac{a-x}{a-\xi}\right)^{1-\alpha}\times$$

$$\times\left(\frac{a-x}{\xi-x}\right)^{\alpha+\beta+1}\frac{\xi-a}{(a-x)^2} = -\Gamma^{-1}(-\alpha-\beta)|a-x|^\beta|a-\xi|^\alpha|x-\xi|^{-\alpha-\beta-1}. \tag{12}$$

Из (11) и (12) нетрудно видеть, что если $\delta$ – бесконечно малая положительная величина, $x \pm \delta = x + \delta\,\mathrm{sign}\,(x-a)$, то

$$\mathrm{sign}\,(x-a)D^\alpha_{ax}|x-a|^{\alpha+\beta}D^\beta_{ax}\varphi(x) = \lim_{\delta\to0}\frac{d}{dx}\int\limits_{x\pm\delta}^a \varphi(\xi)J^\alpha_\beta(a,x,\,\xi)d\xi =$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\left[\int\limits_{x\pm\delta}^{a} \varphi(\xi)\frac{\partial}{\partial x}J_\beta^\alpha(a,x,\,\xi)d\xi - \varphi(x\pm\delta)J_\beta^\alpha(a,x,x\pm\delta)\right] =$$

$$= -\lim_{\delta\to 0}\left[\frac{|a-x|^\beta}{\Gamma(-\alpha-\beta)}\int\limits_{x\pm\delta}^{a}\frac{|a-\xi|^\alpha\varphi(\xi)}{|x-\xi|^{\alpha+\beta+1}}d\xi + \right.$$

$$\left. + \frac{\operatorname{sign}(x-a)}{\Gamma(1-\alpha-\beta)}\left|\frac{a-x}{\delta}\right|^{\alpha+\beta}F\left(\alpha-\beta,\,1-\alpha,\,1-\alpha-\beta;\,\frac{\delta}{|a-x|}\right)\varphi(x\pm\delta)\right].$$

Отсюда, принимая во внимание, что $(-\alpha-\beta)\Gamma(-\alpha-\beta)=\Gamma(1-\alpha-\beta)$,

$$\int\limits_{x\pm\delta}^{a}|a-\xi|^\alpha|x-\xi|^{-\alpha-\beta-1}\varphi(\xi)d\xi = \frac{\operatorname{sign}(a-x)}{(\alpha+\beta)}\frac{d}{dx}\int\limits_{x\pm\delta}^{a}|a-\xi|^\alpha|x-\xi|^{-\alpha-\beta}\varphi(\xi)d\xi +$$

$$+\frac{(|a-x|-\delta)^\alpha\varphi(x\pm\delta)}{\delta^{\alpha+\beta}(\alpha+\beta)\operatorname{sign}(\alpha-x)},$$

$$F\left(-\alpha-\beta,\,1-\alpha,\,1-\alpha-\beta;\,\frac{\delta}{|a-x|}\right) =$$

$$= \left(\frac{|x-a|-\delta}{|x-a|}\right)^\alpha F\left(1,-\beta,\,1-\alpha-\beta;\,\frac{\delta}{|x-a|}\right),$$

находим

$$D_{ax}^\alpha|x-a|^{\alpha+\beta}D_{ax}^\beta\varphi(x) = \frac{|x-a|^\beta}{\Gamma(1-\alpha-\beta)}\lim_{\delta\to 0}\left\{\frac{d}{dx}\int\limits_{a}^{x\pm\delta}\frac{|x-\xi|^\alpha\varphi(\xi)d\xi}{|x-\xi|^{\alpha+\beta}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\varphi(x\pm\delta)(|a-x|-\delta)^\alpha}{\delta^{\alpha+\beta}}\left[F\left(1,-\beta,\,1-\alpha-\beta;\,\frac{\delta}{|x-a|}\right)-1\right]\right\}. \tag{13}$$

Так как $F\left(1,-\beta,\,1-\alpha-\beta;\,\frac{\delta}{|x-a|}\right) = O(\delta)$ и $\alpha+\beta<1$, то из (13) вытекает справедливость леммы.

Пусть теперь $\alpha=1$. Докажем, что (см. (10))

$$\frac{d}{dx}|x-a|^{\beta+1}D_{ax}^\beta\varphi(x) = |x-a|^\beta D_{ax}^{\beta+1}(x-a)\varphi(x).$$

В самом деле, если $-1\leqslant\beta<0$, то

$$D(\varphi)\equiv|x-a|^{-\beta}\operatorname{sign}(x-a)\frac{d}{dx}|x-a|^{\beta+1}D_{ax}^\beta\varphi = (\beta+1)D_{ax}^\beta\varphi +$$

$$+|x-a|D_{ax}^{\beta+1}\varphi = \frac{1}{\Gamma(-\beta)}\frac{d}{dx}\int\limits_a^x \frac{|a-x|-|t-x|}{|x-t|^{\beta+1}}\varphi(t)dt = D_{ax}^{\beta+1}|x-a|\varphi.$$

Если же $-2 \leqslant \beta < -1$, то

$$D(\varphi) = (\beta+1)D_{ax}^{\beta}\varphi - (\beta+1)\frac{x-a}{\Gamma(-\beta)}\int\limits_a^x \frac{\varphi(t)dt}{|x-t|^{\beta+2}} =$$

$$= \frac{\operatorname{sign}(x-a)}{\Gamma(-\beta-1)}\int\limits_a^x \frac{|a-x|-|t-x|}{|x-t|^{\beta+2}}\varphi(t)dt = D_{ax}^{\beta+1}|x-a|\varphi.$$

**3. Структурно-функциональная связь между значениями решений уравнения (6) на вершинах характеристического четырехугольника.** Пусть

$$\Omega_m^- = \Omega_m \backslash \Omega_m^+,\ N_\varepsilon^1 = \left\{ u(z) \in C(\overline{\Omega}_m^-) \cap C(\Omega_m^-),\ \int\limits_0^1 u_y(x)|x-x^2|^{-\varepsilon}dx < \infty \right\}.$$

Обобщенным решением уравнения (6) в области $\Omega_m^-$ назовем любое принадлежащее классу $N_\varepsilon^1$ решение $u(z)=u[z]$ нагруженного уравнения

$$u[z] = \frac{\Gamma(2\varepsilon)}{\Gamma^2(\varepsilon)}\int\limits_0^1 u\left[x+\frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}(2t-1)\right](t-t^2)^{\varepsilon-1}dt +$$

$$+\frac{\Gamma(2-2\varepsilon)}{\Gamma^2(1-\varepsilon)}y\int\limits_0^1 u_y\left[x+\frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}(2t-1)\right](t-t^2)^{-\varepsilon}dt, \qquad (14)$$

если $\varepsilon = m/(2m+4) \neq 0$, и уравнения

$$2u[z] = u[x+y] + u[x-y] + \int\limits_{x-y}^{x+y} u_y[t]dt, \qquad (15)$$

если $\varepsilon = 0$.

Примем следующие обозначения:

$$J = \{z\colon 0 < x < 1,\ y = 0\}, \quad I_{ab}^{\alpha}\varphi(x) = (D_{ax}^{\alpha} - D_{bx}^{\alpha})\varphi(x), \quad a < x < b,$$

$$\Theta_\xi^m(\eta) = \frac{\eta+\xi}{2} - i\left[\frac{m+2}{4}|\eta-\xi|\right]^{2/(m+2)}.$$

Очевидно, что если $0 < a < 1$, то

$$I_{ab}^{\alpha}\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int\limits_a^b \frac{\varphi(t)dt}{|x-t|^{\alpha}}. \tag{16}$$

Легко установить, что $\Theta_0^m(\eta) = \Theta_\xi^m(\eta)|_{\xi=0}$ и $\Theta_1^m(\eta) = \Theta_\xi^m(\eta)|_{\xi=1}$ для любого $\eta \in J$ представляют собой точки пересечения характеристик $2(-y)^{1+m/2} = (m+2)(\eta - x)$, $2(-y)^{1+m/2} = (m+2)(x-\eta)$ уравнения (6) с характеристиками $AC_m$ и $BC_m$ соответственно. Поэтому точки $\eta$, $\Theta_0^m(\eta)$, $\Theta_0^m(1) = C_m$ и $\Theta_1^m(\eta)$ являются вершинами характеристического четырехугольника.

**Лемма 2.** *Пусть $u[z]$ – обобщенное решение уравнения* (6) *в области $\Omega_m^-$ и $m \neq 0$. Тогда*

$$u[\Theta_j^m(x)] = \Gamma(2\varepsilon)\Gamma^{-1}(\varepsilon)|x-j|^{1-2\varepsilon}D_{jx}^{-\varepsilon}|x-j|^{\varepsilon-1}u[x] -$$

$$- \left(\frac{1}{2-4\varepsilon}\right)^{1-2\varepsilon}\frac{\Gamma(2-2\varepsilon)}{\Gamma(1-\varepsilon)}D_{jx}^{\varepsilon-1}|x-j|^{-\varepsilon}u_y[x],\ j=0,\,1. \tag{17}$$

Свойство (17), устанавливающее структурно-функциональную связь между $u[\Theta_j^m(x)]$, $u[x] = \tau(x)$ и $u_y[x] = \nu(x)$, непосредственно получается из (14) (см. [7]).

Справедлива

**Теорема.** *Пусть $u[z]$ – обобщенное решение уравнения* (6) *в области $\Omega_m^-$ обладающее тем свойством, что $I_{01}^{1-2\varepsilon}u[x]$ и $D_{jx}^{1-\varepsilon}u[\Theta_j^m(x)]$, $j = 0,1$, существуют и непрерывны в интервале $J$. Тогда для всех $x \in J$*

$$|x-j|^{\varepsilon}D_{jx}^{1-\varepsilon}u[\Theta_j^m(x)] =$$

$$= \Gamma(2\varepsilon)\Gamma^{-1}(\varepsilon)D_{jx}^{1-2\varepsilon}u[x] - (2-4\varepsilon)^{2\varepsilon-1}\Gamma(2-2\varepsilon)\Gamma^{-1}(1-\varepsilon)u_y[x], \tag{18}$$

$$\Gamma(\varepsilon)\sum_{j=0}^{1}(-1)^j|x-j|^{\varepsilon}D_{jx}^{1-\varepsilon}u[\Theta_j^m(x)] = \Gamma(2\varepsilon)I_{01}^{1-2\varepsilon}u[x], \tag{19}$$

*если $\varepsilon \neq 0$, и*

$$2\frac{d}{dx}u[\Theta_j^0(x)] = \frac{d}{dx}u[x] - (-1)^j u_y[x], \tag{20}$$

$$\frac{d}{dx}\{u[\Theta_0^0(x)] + u[\Theta_1^0(x)]\} = \frac{d}{dx}u[x], \tag{21}$$

*если $\varepsilon = 0$.*

Действительно, в силу леммы 2 левую часть соотношения (18) можно переписать в виде

$$\Gamma(2\varepsilon)\Gamma^{-1}(\varepsilon)|x-j|^{\varepsilon}D_{jx}^{1-\varepsilon}|x-j|^{1-2\varepsilon}D_{jx}^{-\varepsilon}|x-j|^{\varepsilon-1}u[x]-$$
$$-(2-4\varepsilon)^{2\varepsilon-1}\Gamma(2-2\varepsilon)\Gamma^{-1}(1-\varepsilon)|x-j|^{\varepsilon}D_{jx}^{1-\varepsilon}D_{jx}^{\varepsilon-1}|x-j|^{-\varepsilon}u_y[x].$$

Теперь, воспользовавшись леммой 1, легко убедиться в достоверности формулы (18).

Свойство (20) следует из (15). Формулы (19) (см. (16)) и (21) прямо вытекают из (18) и (21) соответственно.

Утверждение (19) является аналогом хорошо известной теоремы о среднем значении

$$u[\Theta_0^0(x)]+u[\Theta_1^0(x)]=u[x]+u[\Theta_0^0(1)]$$

для волнового уравнения, и его доказательство, по существу, содержится в работах [17], [18].

**4. Об одном классе задач с нелокальным смещением.** Многие гиперболические краевые задачи как с локальным, так и нелокальным смещением, изученные с большой полнотой и общностью, в случае уравнения (6) можно охватить следующей постановкой: в области $\Omega_m^-$ найти обобщенное решение $u[z]$ уравнения (6), удовлетворяющее краевым условиям

$$A(x)u_x[x]+B(x)u_y[x]+C(x)u[x]=D(x), \tag{22}$$

$$A_i(x)D_{0x}^{\alpha_i}u[\Theta_0^m(x)]+B_i(x)D_{1x}^{\beta_i}u[\Theta_1^m(x)]+[a_j(x)D_{0x}^{\alpha_j}+\beta_j(x)D_{1x}^{\beta_j}]u[x]+$$
$$+[C_k(x)D_{0x}^{\alpha_k}+\alpha_k(x)D_{1x}^{\beta_k}]u_y[x]=\psi(x), \quad x\in J, \tag{23}$$

где $\alpha_i$, $\beta_i\leqslant 2$, по повторяющимся индексам $i$, $j$, $k$ подразумевается суммирование, и заданные функции считаются достаточно гладкими.

Условие (22) является локальным, а (23) – нелокальным.

Непосредственным и существенным обобщением задачи Трикоми является следующая внутреннекраевая задача со смешанным сдвигом: в области $\Omega_m$ найти решение $u[z]$ уравнения

$$T_mu+a[z]u_x+b[z]u_y+c[z]u=f[z] \tag{24}$$

из класса $C(\overline{\Omega}_m)\cap C^1(\Omega_m)$ , удовлетворяющее условию (23) и локальному условию вида

$$A[z]u_x[z]+B[z]u_y[z]+C[z]u[z]=D[z], \quad z\in\sigma_m. \tag{25}$$

Теорема и лемма 2 играют весьма важную роль при описании как прямых, так и обратных задач для уравнений вида (24). В случае уравнения (6) эти утверждения позволяют легко свести задачу (6), (22),

(23) к системе двух интегро-дифференциальных уравнений относительно $\tau(x) = u[x]$ и $\nu(x) = u_y[x]$. В частности, опираясь на свойства (19), можно показать, что краевая задача со смещением

$$u[\Theta_1^m(x)] = \psi_1(x), \quad x \in \overline{J}, \tag{26}$$

$$D_{0x}^{1-\varepsilon} u[\Theta_0^m(x)] + G(x) I_{01}^{1-2\varepsilon} u[x] = g(x), \quad x \in J, \tag{27}$$

для уравнения (6) в области $\Omega_m^-$ однозначно разрешима, если заданные непрерывные в $\overline{J}$ функции таковы, что $\psi_1(x) \in C^2(\overline{J})$, $D_{0x}^{\varepsilon-1} g(x)$, $D_{0x}^{\varepsilon-1} G(x) \in C^2(\overline{J})$, $G_\varepsilon(x) = \Gamma(2\varepsilon)/\Gamma(\varepsilon) + x^\varepsilon G(x) \neq 0$ для всех $x \in \overline{J}$. Действительно, из (19), (26) и (27) видим, что

$$u[\Theta_0^m(x)] = D_{0x}^{\varepsilon-1} \left[ \frac{\Gamma(2\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon)} g(x) + G(x)(1-x)^\varepsilon D_{1x}^{1-\varepsilon} \psi_1(x) \right] G_\varepsilon^{-1}(x).$$

Стало быть, задача редуцируется к задаче Гурса: $u|_{AC_m} = u[\Theta_0^m(x)]$, $u|_{BC_m} = \psi_1(x)$, $x \in J$ для уравнения (6).

С помощью теоремы можно сформулировать критерий однозначной разрешимости следующей обратной (коэффициентной) задачи.

**Задача.** *Найти порядок вырождения $m$ уравнения* (6), *если известно существование хотя бы одного его обобщенного решения $u[z]$, удовлетворяющего нелокальному условию*

$$\Gamma(1-2\varepsilon) \sum_{j=0}^{1} (-1)^j |x-j|^\varepsilon D_{jx}^{1-\varepsilon} u[\Theta_j^m(x)] = \lambda \Gamma(1-\varepsilon) I_{01}^{1-2\varepsilon} u[x],$$

*и обладающего тем свойством, что $I_{01}^{1-2\varepsilon} u[x] \neq 0$.*

В самом деле, из свойства (19) всех обобщенных решений уравнения (6) заключаем, что

$$\lambda \Gamma(1-\varepsilon)/\Gamma(1-2\varepsilon) = \Gamma(2\varepsilon)/\Gamma(\varepsilon). \tag{28}$$

Поскольку (см. [19, с. 13])

$$\Gamma(\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon) = \pi/\sin \pi\varepsilon, \quad \lambda\Gamma(\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon) = \Gamma(2\varepsilon)\Gamma(1-2\varepsilon) \quad \Leftrightarrow$$

$$\lambda \sin 2\pi\varepsilon = \sin \pi\varepsilon \quad \Rightarrow \quad 2\lambda \cos \pi\varepsilon = 1 \quad \Rightarrow \quad |\lambda| \geqslant 1/2,$$

то уравнение (28) однозначно разрешимо тогда и только тогда, когда $\lambda > 1/2$. Пусть $\varepsilon_0 = 1/\pi \arccos(1/(2\lambda))$ – решение (28), тогда единственное решение задачи задается формулой $m = 4\varepsilon_0/(1-2\varepsilon_0)$.

В настоящее время исследованы лишь различные частные случаи задачи (23), (24) и в основном для уравнений, которые в характеристических координатах редуцируются к уравнению Эйлера–Дарбу–Пуассона.

Все еще остается нерешенным вопрос о фредгольмовости краевых задач даже с локальным смещением и в случае уравнения (24). Среди работ, посвященных задачам со смещением вида (23), следует отметить работы [20–23].

Наиболее простой, но вместе с тем интересной задачей является краевая задача с нелокальным сдвигом, которая состоит в отыскании решения $u[z]$ уравнения (6) из класса $C(\overline{\Omega}_m)\cap C^1(\Omega_m)$, удовлетворяющего (25) и условию

$$\frac{d}{dx}\left\{x^\varepsilon D_{0x}^{1-\varepsilon}u[\Theta_0^m(x)]+(1-x)^\varepsilon D_{1x}^{1-\varepsilon}u[\Theta_1^m(x)]\right\}=\Psi_\varepsilon(x)$$

при $\varepsilon\neq 0$ и

$$\frac{d^2}{dx^2}\left\{u[\Theta_0^0(x)]+u[\Theta_1^0(x)]\right\}=\Psi_0(x),\ 0<x<1,$$

при $\varepsilon=0$. Если в этой задаче нелокальное условие заменить условием (см. (18))

$$\Gamma(\varepsilon)x^\varepsilon D_{0x}^{1-\varepsilon}u\left[\Theta_0^m(x)\right]-\Gamma(2\varepsilon)D_{0x}^{1-2\varepsilon}u[x]=\Psi_\varepsilon(x),\ \varepsilon\neq 0,\ 0<x<1,$$

то придем к задаче типа Бицадзе–Самарского [11], [24].

Задачи типа задачи Бицадзе–Самарского имеют непосредственную связь с задачами со смещением, и это хорошо видно на примере задачи (25), (27) для уравнения (6) в смешанной области $\Omega_m$, потому, что условие (27) в силу (19) редуцируется к краевому условию с нелокальным смещением

$$G_\varepsilon(x)D_{0x}^{1-\varepsilon}u[\Theta_0^m(x)]-(1-x)^\varepsilon G(x)D_{1x}^{1-\varepsilon}u[\Theta_1^m(x)]=g(x)\Gamma(2\varepsilon)/\Gamma(\varepsilon).$$

В заключение отметим, что изложенные здесь результаты были доложены на Международной конференции по дифференциальным уравнениям с частными производными (Новосибирск, 10–14 октября 1983 г.).

## Литература


1. Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.
2. Стеклов В. А. Основные задачи математической физики. М.: Наука, 1983. 432 с.
3. Самарский А. А. Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16, № 11. С. 1925–1935.
4. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 1. С. 72–81.
5. Дезин А. А. Докл. АН СССР. 1963. Т. 148, № 5. С. 1013–1016.
6. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5, № 1. С. 44–59.
7. Нахушев А. М. Докл. АН СССР. 1969. Т. 187, № 4. С. 736–739.
8. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962. 600 с.
9. Бицадзе А. В. В кн.: Некоторые проблемы математики и механики. Л.: Наука, 1970. С. 112–119.

10. Смирнов М. М. Вырождающиеся гиперболические уравнения. Минск: Вышэйш. шк., 1977. 160 с.
11. Бицадзе А. В., Самарский А. А. Докл. АН СССР. 1969. Т. 185, № 4. С. 739–740.
12. Нахушев А. М., Карданов Р. Г. В межвед. сб.: САПР и АСПР в мелиорации. Нальчик, 1983. С. 3–19.
13. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 1. С. 86–94.
14. Бицадзе А. В., Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10, № 1. С. 2184–2191.
15. Алдашев С. А. Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 1. С. 3–14.
16. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8, № 1. С. 107–117.
17. Кальменов Т. Ш. Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 1. С. 66–75.
18. Кумыкова С. К. Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10, № 1. С. 78–88.
19. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М. – Л.: Физматгиз, 1963. 359 с.
20. Салахитдинов М. С. Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 1. С. 116–127.
21. Салахитдинов М. С. Докл. АН СССР. 1982. Т. 262, № 3. С. 539–541.
22. Saigo M. Mathematica Japonica. 1981. Vol. 26, no. 1. Pp. 103–119.
23. Жегалов В. И. В кн.: Труды семинара по краевым задачам. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1974. Вып. 11. С. 43–52.
24. Абрегов М. Х. Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10, № 1. С. 3–6.


Поступила в редакцию
6 августа 1984 г.

Кабардино-Балкарский
государственный университет

# О внутреннекраевых условиях со смещением, возникающих при дискретизации краевых задач для уравнений в частных производных второго порядка

Предлагаемый метод организации вычислительного процесса, основанный на замене локальных краевых условий и условий сопряжения в дифференциальной задаче нелокальными внутреннекраевыми условиями, продемонстрируем на модельных уравнениях в частных производных.

Рассмотрим следующие весьма важные в математической физике и биологии уравнения в частных производных второго порядка с неизвестной функцией $u = u(x, y)$:

$$u_{yy} = a^2 u_{xx}, \quad a = \text{const} > 0, \quad (x, y) \in \Omega^-, \tag{1}$$

$$u_y = b^2 u_{xx}, \quad b = \text{const} > 0, \quad (x, y) \in \Omega_r^+, \ \ 0 < r = \text{const} \leqslant \infty, \tag{2}$$

$$u_{yy} + u_{xx} = 0, \quad (x, y) \in \Omega_r^+, \tag{3}$$

$$u_y = \operatorname{sign} x u_{xx}, \quad |x| < r, \quad 0 < y < T. \tag{4}$$

Нахушев А. М. Доклады АМАН. 2014, **16**:2, 52–57.

Здесь:

1) $\Omega_r^+ = \{z\colon 0 < x < r,\, 0 < y < T\}$ – область евклидовой плоскости точек $z = (x, y)$;

2) $\Omega^-$ – область, ограниченная отрезком $A_0B_0 = \{(0, y) :\ 0 \leqslant y \leqslant T\}$, $A_0 = (0, 0)$, $B_0 = (0, T)$, отрезком $A_0C_0$ прямой $x + ay = 0$, $C_0 = (-aT/2, T/2)$ и отрезком $B_0C_0$ прямой $x - ay = -aT$;

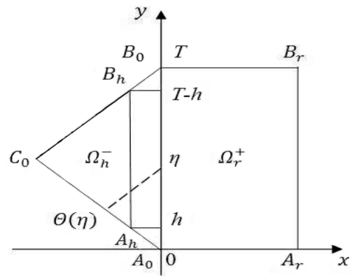


Рис. 1

3) $\Omega = \Omega_r^+ \cup \Omega^- \cup \{(0, y)\colon 0 < y < T\}$, $\overline{\Omega}$ – замыкание области $\Omega$;

4) $A_r = (r, 0)$, $B_r = (r, T)$, $h$ – шаг по оси $x$, $A_h = (-ah, h)$, $B_h = (-ah, T - h)$; $\Omega_h^-$ – треугольник с вершинами в точках $A_h$, $B_h$ и $C_0$, $\Omega_h^- \to \Omega^-$ при $h \to 0$ (см. рис. 1).

1. Под решением уравнения (1) в области $\Omega^-$ будем понимать любую функцию $u(z) = u(x, y) \in C(\overline{\Omega}^-)$, удовлетворяющую нагруженному уравнению

$$2u(z) = u\left(0, y + \frac{x}{a}\right) + u\left(0, y - \frac{x}{a}\right) + a \int\limits_{y-x/a}^{y+x/a} \frac{\partial u(0, \eta)}{\partial x} d\eta, \quad z \in \Omega^-.$$

Пусть: $\Theta(\eta) = \big(-a\eta/2, \eta/2\big)$ – точка пересечения характеристики $x - ay = -a\eta$ уравнения (1), выходящей из точки $(0, \eta) \in A_0B_0$, с характеристикой $x + ay = 0$, $0 < \eta < T$;

$$u[\Theta(y)] = \psi(y) \in C^1[0, T]; \tag{5}$$

$$u(0, y) = \tau(y) \in C[0, T] \cap C^1]0, T[; \quad u_x(0, y) = \nu(y) \in C]0, T[\, \cap L[0, T]. \tag{6}$$

Любое решение $u(z)$ уравнения (1) в области $\Omega^-$ в силу (5) и (6) подчиняется необходимому динамическому краевому условию

$$\tau'(y) = a\,\nu(y) + 2\psi'(y), \quad 0 < y < T. \tag{7}$$

К этому условию присоединим условие

$$p\,\tau'(y) + q\,\nu(y) = \varphi_0(y), \quad 0 < y < T, \quad p^2 + q^2 \neq 0, \tag{8}$$

где $p$ и $q$ – заданные числа, $\varphi_0(y)$ – заданная функция, непрерывная на сегменте $[0, T]$, которое совместимо с условием (7).

Из системы (7), (8) следует, что

$$(ap + q)\nu(y) = \varphi_0(y) - 2p\,\psi'(y), \quad 0 < y < T, \tag{9}$$

$$(ap + q)\tau'(y) = 2q\psi'(y) - a\varphi_0(y). \tag{10}$$

В равенстве (9) заменим $\nu(y)$ левой разностной производной, положив

$$\nu(y) \approx [\tau(y) - u(-h, y)]/h,$$

где $0 < h$ – шаг по оси $x$. В результате при $ap + q \neq 0$ приходим к следующему внутреннекраевому условию Бицадзе–Самарского [1] для уравнения (1) в области $\Omega^-$:

$$u(0, y) = u(-h, y) + h\,[\varphi_0(y) - 2\,p\,\psi'(y)]/(ap + q). \tag{11}$$

Условие (11) и решение

$$u(0, y) = \psi(0) + \frac{1}{ap + q}\int\limits_0^y [2q\psi'(\eta) - a\varphi_0(\eta)]\,d\eta \equiv f(y)$$

задачи Коши $\tau(0) = \psi(0)$ для уравнения (10) дают основание записать

$$u(-h, y) = f(y) - h\,[\varphi_0(y) - 2p\psi'(y)]\,/(ap + q), \quad h \leqslant y \leqslant T - h.$$

Следовательно, задача (5), (11) для уравнения (1) в области $\Omega^-$ свелась к задаче Дарбу для этого же уравнения в области $\Omega_h^-$ с граничными данными на $A_hB_h \cup A_hC_0$.

2. Пусть $u(z)$ – решение уравнения (2) в области $\Omega_\infty^+$, удовлетворяющее условиям:

$$u(x, 0) = \varphi(x) \in C[0, \infty[, \;\; \lim_{x\to\infty} \varphi(x)\exp\left(-\varepsilon x^2\right) = 0, \;\; \varepsilon = \mathrm{const}{>}0;$$

$$pu_y(0, y) + qu_x(0, y) = \varphi_0(y) \in C[0, T];$$

$$\lim_{x\to\infty}\max_{[0,T]} |u(x, y)|\exp\left(-\varepsilon x^2\right) = 0; \;\; \tau(y) = u(0, y) \in C[0, T] \cap C^1]0, T[;$$

$$\nu(y) = u_x(0, y) \in C]0, T[\,\cap L^2[0, T].$$

Тогда на части $A_0B_0 \cup \{(x, 0)\colon 0 \leqslant x < \infty\}$ границы $\partial\Omega_\infty^+$ области $\Omega_\infty^+$ функции $\tau(y)$, $\nu(y)$ и $\varphi(x)$ связаны необходимым краевым условием

$$\tau(y) = -\frac{b}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^y \frac{\nu(\eta)d\eta}{(y - \eta)^{1/2}} + \frac{1}{b\sqrt{\pi y}}\int\limits_0^\infty \varphi(\xi)\exp\frac{-\xi^2}{4b^2y}d\xi, \;\; 0 \leqslant y \leqslant T. \tag{12}$$

Условие (12) является следствием представления

$$u(z) = -\frac{b}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^y \nu(\eta)(y - \eta)^{-1/2}\exp\left[-\frac{x^2}{4(y - \eta)b^2}\right]d\eta +$$

$$+\frac{1}{2b\sqrt{\pi y}}\int\limits_0^\infty \varphi(\xi)\left[\exp\frac{(x-\xi)^2}{-4yb^2}+\exp\frac{(x+\xi)^2}{-4yb^2}\right]d\xi,$$

которое справедливо для любого решения уравнения (1) из указанного класса [2].

Сущность предлагаемого приема дискретизации локального краевого условия (8) для уравнения Фурье (2) раскроем в случае, когда $\varphi(x)\equiv 0$. Это не нарушает общности рассуждения. Из (12) при $\varphi(x)\equiv 0$ получаем

$$\tau(y)=-bD_{0y}^{-1/2}\nu(\eta),\quad 0<y<T, \tag{13}$$

$$\tau'(y)=-bD_{0y}^{1/2}\nu(\eta),\quad 0<y<T, \tag{14}$$

где $D_{0y}^{\alpha}$ – оператор Римана–Лиувилля.

Из равенств (8) и (14) имеем

$$pb\,D_{0y}^{1/2}\nu(\eta)-q\nu(y)=-\varphi_0(y),\quad 0<y<T. \tag{15}$$

При $p\neq 0$ уравнение (15) представляет собой дифференциальное уравнение порядка, 1/2 и его единственное решение $\nu(y)$ из пространства $L^2[0,T]$ задается формулой [3, с. 93]:

$$\nu(y)=\Phi(y)=-\frac{1}{p\,b}D_{0y}^{-1/2}\varphi_0(\eta)-\frac{q}{(p\,b)^2}\int\limits_0^y\varphi_0(\eta)E_2\left[\frac{q}{p\,b}(y-\eta)^{1/2};1\right]d\eta, \tag{16}$$

где $E_2[z;1]=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(1+k/2)}$ – функция Миттаг-Леффлера, $z=x+iy$.

В равенстве (16) заменим $\nu(y)$ правой разностной производной, положив

$$\nu(y)\approx[u(h,y)-\tau(y)]/h. \tag{17}$$

В результате получим условие Бицадзе–Самарского для уравнения (2) в области $\Omega_\infty^+$:

$$u(0,y)=u(h,y)-h\Phi(y),\quad 0<y<T. \tag{18}$$

Из условия (18) в силу (13) и (16) получаем

$$u(h,y)=h\Phi(y)-bD_{0y}^{-1/2}\Phi(\eta).$$

3. Пусть $u=u(z)$ – ограниченное решение задачи сопряжения уравнений (1) и (2) в области $\Omega=\Omega^-\cup\Omega_\infty^+\cup\{(0,y)\colon\ 0<y<T\}$, удовлетворяющее условиям:

$$u(-0,y)=u(+0,y)\in C[0,T],\quad u_x(-0,y)=u_x(+0,y)\in L^2[0,T]\cap C\,]0,T[,$$

$$u(-ay/2, y/2) = \psi(y) \in C^1[0,T]; \quad u(x,0) = 0 \ \text{ при } \ 0 \leqslant x < \infty.$$

Тогда

$$\tau'(y) = a\nu(y) + 2\psi'(y) = -bD_{0y}^{1/2}\nu(\eta), \quad \tau(0) = u(0,0) = \psi(0) = 0,$$

$$\nu(y) = \Psi(y) = -\frac{2}{b}D_{0y}^{1/2}\psi(\eta) - \frac{a}{b^2}\int\limits_0^y \psi'(\eta)E_2\left[-\frac{a}{b}(y-\eta)^{1/2}; 1\right]d\eta. \qquad (19)$$

Равенство (19), после замены $\nu(y)$ центральной разностной производной $[u(h,y) - u(-h,y)]/(2h)$, приводит к условию

$$u(h,y) = u(-h,y) + 2h\Psi(y), \quad h \leqslant y \leqslant T - h.$$

4. Пусть $u = u(z)$ – решение уравнения (2) в области $\Omega_r$, $r < \infty$, удовлетворяющее условиям задачи Самарского [4, с. 140]:

$$u(0,y) = \tau(y) \in C[0,T], \quad u(x,0) = \varphi(x) \in C[0,r],$$

$$\int\limits_0^r u(x,y)dx = \int\limits_0^r \varphi(x)dx.$$

Тогда $u_x(0,y) = \nu(y) = \nu_r(y) = u_x(r,y) \in L^2[0,r] \cap C]0,r[$.

Равенство $\nu(y) = \nu_r(y)$, $0 < y < T$, после замены $\nu_r(y)$ левой разностной производной, а $\nu(y)$ – правой (17), приводит к следующему внутреннекраевому условию типа нелокального условия Бицадзе–Самарского [1]

$$u(r,y) = u(h,y) + u(r-h,y) - \tau(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant T.$$

5. Пусть $u = u(z)$ – решение смешанной краевой задачи:

$$u(x,0) = \varphi(x) \in C[0,r], \quad u(x,T) = \psi(x) \in C[0,r],$$

$$u(r,y) = \tau_r(y) \in C[0,T], \quad u_x(0,y) = \nu_0(y) \in C]0,T[\cap L[0,T]$$

для уравнения Лапласа (3) в области $\Omega_r^+$. Если в этой задаче $u_x(0,y)$ аппроксимировать правой разностной производной $[u(h,y) - u(0,y)]/h$, то получим задачу Бицадзе–Самарского с нелокальным условием

$$u(0,y) = u(h,y) - h\nu(y) \ \text{ при } \ 0 \leqslant y \leqslant T.$$

6. Пусть $u = u(z)$ – решение уравнения

$$u_{yy} + [H(y) - a^2H(-y)]u_{xx} = 0 \qquad (20)$$

в области $\Omega = \{z\colon 0 < x < r,\ |y| < T\}$, из класса $C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, удовлетворяющее условиям задачи А. А. Дезина [5, с. 8]:

$$u(x,T) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant r, \qquad (21)$$

$$u_y(x,-T) = \lambda u(x,0), \quad 0 \leqslant x \leqslant r, \tag{22}$$

$$u(0,y) = u(r,y), \quad -T \leqslant y \leqslant T, \tag{23}$$

где $H(y)$ – функция Хевисайда, $\varphi(x) \in C[0,r]$, $\varphi(0) = \varphi(r)$.

Во внутреннекраевом условии (22) заменим $u_y(x,-T)$ разностной производной, положив $u_y(x,-T) \approx [u(x,h-T) - u(x,-T)]/h$, $0 < h$ – шаг по оси $y$. Тогда будем иметь

$$u(x,-T) = u(x,h-T) - \lambda h u(x,0), \quad 0 \leqslant x \leqslant r. \tag{24}$$

Условие (24) является внутреннекраевым условием с локальным смещением. Задача (21), (23), (24) относится к классу нелокальных задач для уравнений смешанного типа (20).

7. Пусть $u = u(z)$ – решение уравнения (4) в области $\Omega = \{z\colon |x| < r, 0 < y < T\}$ из класса $C(\overline{\Omega})$, удовлетворяющее условиям:

$$u(x,0) = \varphi_0(x) \in C[0,r], \quad u(x,T) = \varphi_{T}(x) \in C[-r,0], \tag{25}$$

$$u_x(-0,y) = q\, u_x(+0,y), \quad q = \text{const} \neq 0, \quad 0 < y < T, \tag{26}$$

где $\varphi_0(x)$, $\varphi_{T}(x)$ – заданные функции, $q$ – заданное число.

Уравнение (4) является моделью уравнений в частных производных второго порядка параболического типа со знакопеременной характеристической формой [5, с. 49].

В условии сопряжения (26) положим

$$u_x(-0,y) \approx [u(0,y) - u(-h,y)]/h, \;\; u_x(+0,y) \approx [u(h,y) - u(0,y)]/h.$$

Результат этой операции запишется в виде

$$(1+q)u(0,y) = u(-h,y) + qu(h,y). \tag{27}$$

Из (27) при $q \neq -1$ получаем

$$u(0,y) = \frac{u(-h,y) + qu(h,y)}{1+q}, \quad 0 < y < T. \tag{28}$$

Если же $q = -1$, то $u(-h,y) = u(h,y)$.

Из (28) при $q = 1$ заключаем, что значение $u(0,y)$ совпадает со средним арифметическим значений в узлах $(-h,y)$ и $(h,y)$ для любого $y \in [0,T]$. Известно [6, с. 363], что если в прямоугольной сетке стороны прямоугольников, параллельные оси $x$, имеют длину $h$, а стороны, параллельные оси $y$, – длину $h^2/2$, то в уравнении в конечных разностях, соответствующем уравнению Фурье (2), значение $u(z)$ в любом узле сетки совпадает со средним арифметическим значений в предшествующем и последующем узлах ближайшей нижележащей строки.

Для уравнения (4) с краевыми условиями (25) равенство (27) играет роль условия линейного сопряжения.

А. А. Самарский в своих фундаментальных работах обращал внимание на важность дискретных аналогов непрерывных краевых условий, которым удовлетворяют все решения дифференциального уравнения из заданного класса.

### Литература


1. Бицадзе А. В., Самарский А. А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // ДАН СССР. 1969. Т. 185, № 4. С. 739–740.
2. Нахушев А. М., Нахушева В. А. Об одной задаче начально-граничного управления для дифференциального уравнения смешанного типа // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2013. Т. 15, № 1. С. 9–17.
3. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
4. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. 301 с.
5. Нахушев А. М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006. 287 с.
6. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М.: Изд-во ин. литературы, 1957. 444 с.


Научно-исследовательский институт
прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН

# Нагруженные уравнения

## Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения теплопроводности

Рассмотрим одномерную ограниченную среду, на одном из концов которой имеется источник тепла, мощность которого пропорциональна значению температуры. Тогда процесс распространения тепла в этой среде описывается следующим нагруженным уравнением теплопроводности:

$$u_t - u_{xx} - \lambda u(0,t) = 0, \tag{1}$$

где $t$ и $x$ – соответственно временная и пространственная координаты, $u(x,t)$ – температура точки $x$ рассматриваемой среды в момент времени $t$, $\lambda > 0$ – некоторый параметр, характеризующий термические свойства среды. Заметим, что $\lambda$ может быть функцией от $t$.

Уравнение (1) относится к классу уравнений, предложенных в [1].

Для уравнения (1) в односвязной области $D$ плоскости независимых переменных $t$, $x$, ограниченной отрезками $AA_0$, $BB_0$ прямых $x = 0$, $x = l = \mathrm{const}$ и отрезками $AB$, $A_0B_0$ характеристик $t = 0$, $t = T = \mathrm{const}$ уравнения (1), ставится следующая

**Задача.** *Найти функцию $u(x,t) \in C(\overline{D})$ такую, что $u(x,t)$ – регулярное в области $D$ решение уравнения* (1), *удовлетворяющее начальному*

$$u(x,t)\big|_{t=0} = f(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{2}$$

*и граничным условиям*

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = q(t), \qquad u(x,t)\big|_{x=l} = \varphi(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3}$$

где $f(x)$, $q(t)$ и $\varphi(t)$ – заданные непрерывные функции при $0 \leqslant x \leqslant l$ и $0 \leqslant t \leqslant T$ соответственно, причем $f(l) = \varphi(0)$, $f'(0) = q(0)$.

Известно [2], что функция источника задачи (2), (3) для уравнения теплопроводности $u_t = u_{xx}$ имеет вид

$$G(\xi,\eta;x,t) = \frac{\pi^{-1/2}}{2}(t-\eta)^{-1/2}\times$$

$$\times \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2nl)^2}{4(t-\eta)}} + e^{-\frac{(x+\xi+2nl)^2}{4(t-\eta)}} - e^{-\frac{(x-\xi-2l+2nl)^2}{4(t-\eta)}} - e^{-\frac{(x+\xi-2l+2nl)^2}{4(t-\eta)}}\right].$$

Через $\tau(t)$ обозначим след искомого распределения температуры $u(x,t)$ при $x = 0$.

---

Дикинов Х. Ж., Керефов А. А., Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1976, **12**:1, 177–179.

Принимая во внимание свойства функции Грина $G(\xi,\eta;x,t)$ нетрудно заметить, что функция $u(x,t)$ связана с $\tau(t)$ начальной и граничными функциями следующим образом:

$$u(x,t)=\int\limits_0^t q(\eta)G(0,\eta;x,t)d\eta+\int\limits_0^l f(\xi)G(\xi,0;x,t)d\xi-$$

$$-\int\limits_0^t \varphi(\eta)G_\xi(l,\eta;x,t)d\eta-\lambda\int\limits_0^t \tau(\eta)d\eta\int\limits_0^l G(\xi,\eta;x,t)d\xi. \tag{4}$$

Из этой связи при $x\to 0$ для функции $\tau(t)$ получаем интегральное уравнение

$$\tau(t)-\lambda\int\limits_0^t \tau(\eta)\frac{k(t,\eta)}{(t-\eta)^{1/2}}d\eta=F(t) \tag{5}$$

с ядром

$$k(t,\eta)=-\frac{\pi^{-1/2}}{2l}\times$$

$$\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int\limits_0^l\left[e^{-\frac{(-\xi+2nl)^2}{4(t-\eta)}}+e^{-\frac{(\xi+2nl)^2}{4(t-\eta)}}-e^{-\frac{(-\xi-2l+2nl)^2}{4(t-\eta)}}-e^{-\frac{(\xi-2l+2nl)^2}{4(t-\eta)}}\right]d\xi$$

и правой частью

$$F(t)=\int\limits_0^t q(\eta)\,G(0,\eta;0,t)d\eta+$$

$$+\int\limits_0^l f(\xi)\,G(\xi,0;0,t)d\xi-\int\limits_0^t \varphi(\eta)\,G_\xi(l,\eta;0,t)d\eta. \tag{6}$$

Нетрудно заметить, что уравнение (5) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода и оно безусловно разрешимо в пространстве $C[0,T]$.

Пусть $R(t,\eta,\lambda)$ – резольвента ядра $k(t,\eta)(t-\eta)^{-1/2}$, тогда, как хорошо известно [3],

$$\tau(t)=F(t)+\lambda\int\limits_0^t R(t,\eta,\lambda)F(\eta)d\eta. \tag{7}$$

Отсюда с учетом (6) имеем

$$\|\,\tau\,\|\leqslant(1-c_1\lambda)\,\|\,F\,\|\leqslant c_2(1+c_1\lambda)(\|\,q\,\|+\|\,\varphi\,\|+\|\,f\,\|), \tag{8}$$

$c_1$ и $c_2$ – положительные постоянные, не зависящие от $q$, $\varphi$ и $f$, $\| \cdot \|$ – норма в пространстве $C$.

Принимая во внимание (7), из (4) получаем, что единственное решение задачи (1)–(3) дается формулой

$$u(x,t) = \int\limits_0^t q(\eta)G(0,\eta;x,t)d\eta + \int\limits_0^l \varphi(\xi)G(\xi,0;x,t)d\xi -$$

$$-\int\limits_0^t \varphi(\eta)G_\xi(l,\eta;x,t)d\eta - \lambda\int\limits_0^t F(\eta)d\eta\int\limits_0^l G(\xi,\eta;x,t)d\xi -$$

$$-\lambda^2\int\limits_0^t d\eta\int\limits_0^\eta R(t,s,\lambda)F(s)ds\int\limits_0^l G(\xi,\eta;x,t)d\xi. \tag{9}$$

В силу (8) из (4) заключаем

$$\| u \|_* \leqslant (a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2)(\| q \| + \| \varphi \| + \| f \|),$$

где $\| u \|_*$ – норма в пространстве $C([0,T]\times[0,l])$, $a_j$, $j = 0,1,2$ – положительные постоянные, не зависящие от $q$, $\varphi$ и $f$. Из этой оценки вытекает устойчивость решения задачи (1)–(3).

При численной реализации задачи (1)–(3) на ЭВМ для малых значений параметра $\lambda$ можно в формуле (9) пренебречь членами, содержащими $\lambda^j$, где $j \geqslant 2$, а остальные интегралы вычислить одним из известных приближенных методов. Поскольку для рассматриваемых значений на основании (7) можно положить

$$\tau(t) = F(t) + \lambda\int\limits_0^t \frac{k(t,\eta)}{(t-\eta)^{1/2}}F(\eta)d\eta,$$

то другим алгоритмом численной реализации задачи (1)–(3) является замена уравнения (1) уравнением

$$u_t - u_{xx} = \lambda F(t), \tag{10}$$

условий (2) и (3) – условиями

$$u(x,0) = f(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l,$$

$$u(0,t) = F(t) + \lambda\int\limits_0^t \frac{k(t,\eta)}{(t-\eta)^{1/2}}F(\eta)d\eta, \quad u(l,t) = \varphi(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{11}$$

Полученную дифференциальную задачу можно теперь реализовать на ЭВМ хорошо известными конечно-разностными схемами, например, методом прогонки [4]. Уравнение (1) в стационарном случае сводится к уравнению $u'' = -\lambda u(0)$, и его решение $u(x)$ дается формулой

$$u(x) = \frac{\lambda(\varphi_l - q_0 l)}{2 - \lambda l^2}(l^2 - x^2) + q_0(x - l) + \varphi_l = f(x),$$

где

$$q_0 = u'(0), \qquad \varphi_l = u(l).$$

**Литература**

1. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 1.
2. Зоммерфельд А. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: ИЛ, 1950.
3. Гурса Э. Курс математического анализа. Т. 2, ч. 2. М.–Л.: ГОНТИ, 1934.
4. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.

Поступила в редакцию
17 апреля 1975 г.

Кабардино-Балкарский
государственный университет

# О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка

Пусть $\Omega$ – конечная область евклидовой плоскости независимых переменных $x$ и $y$, ограниченная характеристиками $AC\colon \xi = 0$, $BC\colon \eta = 1$, где

$$\xi = x - \frac{2}{m+2}\,(-y)^{\frac{m+2}{2}}, \quad \eta = x + \frac{2}{m+2}\,(-y)^{\frac{m+2}{2}},$$

оператора

$$T_m = \frac{\partial^2}{\partial y^2} - (-y)^m\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad m = \mathrm{const} > 0$$

и отрезком $AB\colon 0 \leqslant x \leqslant 1$ прямой $y = 0$.

В области $\Omega$ рассмотрим линейное нагруженное интегродифференциальное уравнение

$$T_m u + a u_x + b u_y + \sum_{i=1}^{n} a_i D_{0\xi}^{\alpha_i} u\,(x,\,0) + cu = d, \tag{1}$$

где $D_{0\xi}^{\alpha_i}$ – оператор дробного (в смысле Римана–Лиувилля) интегрирования порядка $-\alpha_i$ при $\alpha_i < 0$ и дробного дифференцирования порядка

Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1976, **12**:1, 103–108.

$\alpha_i$, при $\alpha_i > 0$. Этот оператор в случае, когда $\alpha_i < 1$, задается формулой

$$D_{0\xi}^{\alpha_i} f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(-\alpha_i)} \displaystyle\int_0^\xi \dfrac{f(t)\,dt}{(\xi - t)^{1+\alpha_i}}, & \alpha_i < 0, \\ \dfrac{d}{d\xi} D_{0\xi}^{\alpha_i - 1} f(x), & \alpha_i > 0 \end{cases}$$

и хорошо известно, что $D_{0\xi}^{-\alpha_i} D_{0\xi}^{\alpha_i} f \equiv D_{0\xi}^{0} f \equiv f(\xi)$.

**Задача Дарбу.** *Определить регулярное в области* $\Omega$ *решение уравнения* (1) *из класса* $C\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^1(\Omega \cup J)$, *удовлетворяющее краевым условиям*

$$u_y(x, 0) = \nu(x), \quad 0 < x < 1; \qquad u|_{AC} = \varphi(\eta), \quad 0 \leqslant \eta \leqslant 1, \tag{2}$$

*где* $\overline{\Omega}$ – *замыкание* $\Omega$, $J$ – *интервал* $0 < x < 1$ *прямой* $y = 0$.

Предполагается, что $\alpha_n < \alpha_{n-1} < \ldots < \alpha_1 = \alpha < 1$ – коэффициенты $b = b(x, y)$, $a_i = a_i(x, y)$, $c = c(x, y)$ и правая часть $d = d(x, y)$ уравнения (1) принадлежит классу $C^1\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^3(\Omega)$, $\nu(x) \in C\left(\overline{J}\right) \cap C^3(J)$, $\varphi(\eta) \in C^1\left(\overline{J}\right) \cap C^3(J)$.

Имеет место следующая

**Теорема 1.** *Пусть коэффициент* $a = a(x, y)$ *представим в виде*

$$a = a_0(x, y)(-y)^{\varkappa(m)}, \quad a_0 \in C^1\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^3(\Omega), \tag{3}$$

*где* $\varkappa(m) = 0$ *при* $m < 2$ *и* $\varkappa(m) = \mathrm{const} > m/2 - 1$ *при* $m \geqslant 2$ *и*

$$\alpha < \frac{4}{m+2}. \tag{4}$$

*Тогда задача Дарбу всегда разрешима, и притом единственным образом.*

Приведем доказательство теоремы сначала в случае, когда $a(x, y) = b(x, y) = c(x, y) \equiv 0$, т. е. для уравнения

$$T_m u + a_i D_{0\xi}^{\alpha_i} u(x, 0) = d. \tag{5}$$

Здесь и ниже по повторяющемуся индексу $i$ подразумевается суммирование от 1 до $n$.

Уравнение (5) и краевые условия (2) в характеристических координатах $\xi$ и $\eta$ принимают вид

$$Eu \equiv u_{\xi\eta} + \frac{\beta}{\eta - \xi}(u_\xi - u_\eta) = \frac{1}{(\eta - \xi)^{4\beta}}\left[A_i D_{0\xi}^{\alpha_i} \tau + f\right], \tag{6}$$

$$\left[(\eta-\xi)^{2\beta}\left(u_\eta-u_\xi\right)\right]_{\eta=\xi}=-\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta}\nu\left(\xi\right),\quad 0<\xi<1, \tag{7}$$

$$u|_{\xi=0}=\varphi\left(\eta\right),\quad 0\leqslant\eta\leqslant 1, \tag{8}$$

где $\beta=m/\left(2m+4\right)$,

$$A_i=\frac{1}{4}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{4\beta}a_i\left(\frac{\xi+\eta}{2},-\left(\frac{m+2}{4}\right)^{1-2\beta}(\eta-\xi)^{1-2\beta}\right),$$

$$f=\frac{1}{4}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{4\beta}d\left(\frac{\xi+\eta}{2},-\left(\frac{m+2}{4}\right)^{1-2\beta}(\eta-\xi)^{1-2\beta}\right),$$

$\tau\left(\xi\right)\equiv u\left(\xi,\,\xi\right)$ – след искомого решения $u$ на участке $\eta=\xi$, $0\leqslant\xi\leqslant 1$, границы области $\Delta=\{(\xi,\,\eta)\colon 0<\xi<\eta<1\}$, которая является образом области $\Omega$.

Ниже, для удобства, вместо переменных $\xi$, $\eta$ будем употреблять переменные $x$, $y$, а вместо функции $u\left(\frac{x+y}{2},\,-\left(\frac{m+2}{4}\right)^{1-2\beta}(y-x)^{1-2\beta}\right)$ – функцию $u\left(x,\,y\right)$. Как известно [1], функция Грина–Адамара $H\left(\xi,\,\eta;\,x,\,y\right)$ задачи (7), (8) для оператора $E$ задается формулой

$$H\left(\xi,\,\eta;\,x,\,y\right)=\begin{cases}R\left(\xi,\,\eta;\,x,\,y\right), & \eta\geqslant x,\\ \overline{R}\left(\xi,\,\eta;\,x,\,y\right), & \eta\leqslant x,\end{cases}$$

$$R\left(\xi,\,\eta;\,x,\,y\right)=(\eta-\xi)^{\beta}(y-x)^{-\beta}F\left(\beta,\,1-\beta,\,1;\,\sigma\right),$$

$$\overline{R}\left(\xi,\,\eta;\,x,\,y\right)=\gamma\,(\eta-\xi)^{2\beta}(x-\xi)^{-\beta}(y-\eta)^{-\beta}F\left(\beta,\,\beta,\,2\beta;\,1/\sigma\right),$$

$$\sigma=\frac{x-\xi}{\eta-\xi}\,\frac{y-\eta}{y-x},\quad \gamma=\frac{\Gamma\left(\beta\right)}{\Gamma\left(2\beta\right)\Gamma\left(1-\beta\right)}.$$

Пусть существует решение $u\left(x,\,y\right)$ задачи Дарбу (7), (8) для интегро-дифференциального уравнения (6) в области $\Delta$. Тогда из свойств функции Грина–Адамара заключаем, что $u\left(x,\,y\right)$ является решением следующего уравнения

$$u(x, y) - \int\limits_0^x d\xi \int\limits_\xi^y \frac{A_i(\xi, \eta)\, D_{0\xi}^{\alpha_i}\tau}{(\eta-\xi)^{4\beta}} H(\xi, \eta; x, y)\, d\eta =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta} \gamma \int\limits_0^x \nu(\xi)(x-\xi)^{-\beta}(y-\xi)^{-\beta} d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^y \left[\varphi'(\eta) + \beta\frac{\varphi(\eta)}{\eta}\right] H(0, \eta; x, y)\, d\eta +$$

$$+ \int\limits_0^x d\xi \int\limits_\xi^y \frac{f(\xi, \eta)}{(\eta-\xi)^{4\beta}} H(\xi, \eta; x, y)\, d\eta.$$

Отсюда, переходя к пределу при $(x, y) \to (x, x)$, $0 < x < 1$ и принимая во внимание, что $u(x, x) \equiv \tau(x)$, будем иметь

$$\tau(x) - \gamma \int\limits_0^x \frac{D_{0\xi}^{\alpha_i}\tau}{(x-\xi)^{\beta}} d\xi \int\limits_\xi^x \frac{A_i(\xi, \eta)\, d\eta}{(\eta-\xi)^{2\beta}(x-\eta)^{\beta}} = \Psi(x), \qquad (9)$$

где

$$\Psi(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta} \gamma \int\limits_0^x \frac{\nu(\xi)\, d\xi}{(x-\xi)^{2\beta}} + \gamma \int\limits_0^x \frac{d\xi}{(x-\xi)^{\beta}} \int\limits_\xi^x \frac{f(\xi, \eta)\, d\eta}{(\eta-\xi)^{2\beta}(x-\eta)^{\beta}} +$$

$$+ \gamma x^{-\beta} \int\limits_0^x \left[\varphi'(\eta) + \beta\frac{\varphi(\eta)}{\eta}\right] \eta^{2\beta}(x-\eta)^{-\beta} d\eta.$$

Очевидно, $\Psi(x) \in C\left(\overline{J}\right) \cap C^2(J)$.

Вводя обозначения

$$k_i(x, \xi) = \int\limits_0^1 \frac{A_i(\xi, \xi + xt - \xi t)\, dt}{t^{2\beta}(1-t)^{\beta}},$$

уравнение (9) можно переписать в виде

$$\tau(x) - \gamma \int\limits_0^x \frac{k_i(x, \xi)\, D_{0\xi}^{\alpha_i}\tau}{(x-\xi)^{4\beta-1}} d\xi \equiv \tau(x) - \gamma V\tau = \Psi(x). \qquad (10)$$

Пусть $\alpha_i > 0$, тогда нетрудно видеть, что

$$\Gamma(1-\alpha_i) V\tau = \int\limits_0^x \frac{k_i(x,\,\xi)\,d\xi}{(x-\xi)^{4\beta-1}} \frac{d}{d\xi} \int\limits_0^\xi \frac{\tau(t)\,dt}{(\xi-t)^{\alpha_i}} =$$

$$= -\int\limits_0^x \tau(t)\,dt \frac{d}{dt} \int\limits_t^x \frac{k_i(x,\,\xi)\,d\xi}{(x-\xi)^{4\beta-1}(\xi-t)^{\alpha_i}} =$$

$$= -\int\limits_0^x \tau(t)\,dt \frac{d}{dt}(x-t)^{2-\alpha_i-4\beta} \int\limits_0^1 \frac{k_i(x,\,t+xs-ts)\,ds}{s^{\alpha_i}(1-s)^{4\beta-1}}.$$

Отсюда в силу (4) заключаем, что оператор $V$ является оператором Вольтерра в пространстве $C\left(\overline{J}\right)$ функции $\tau(x)$ с обычной нормой $\|\tau\| = \max\limits_{\overline{J}} \tau(x)$. Следовательно, уравнение (10) однозначно и безусловно разрешимо в пространстве $C\left(\overline{J}\right)$, и его решение $\tau(x) \in C^2(J)$.

Таким образом, задача Дарбу эквивалентно редуцирована к задаче Коши

$$u(x,\,0) = \tau(x)\,, \quad u_y(x,\,0) = \nu(x)\,, \quad 0 < x < 1, \tag{11}$$

для уравнения

$$T_m u = d(x,\,y) - a_i(x,\,y)\, D_{0\xi}^{\alpha_i}\tau.$$

Как хорошо известно [2], решение этой задачи выписывается в явном виде через функцию Римана $R(\xi,\,\eta;\,x,\,y)$.

Справедливость теоремы в общем случае устанавливается по предложенной здесь схеме, используя вместо функции $H(x,\,y;\,\xi,\,\eta)$ функцию Грина–Адамара $G(x,\,y;\,\xi,\,\eta)$ задачи Дарбу (7), (8) для уравнений

$$Eu - \frac{A(\xi,\,\eta)}{(\eta-\xi)^{4\beta}}(u_\xi + u^\eta) - \frac{B(\xi,\,\eta)}{(\eta-\xi)^{2/\beta}}(u_\xi - u^\eta) -$$

$$-\frac{C(\xi,\,\eta)}{(\eta-\xi)^{4\beta}} u = \frac{f(\xi,\,\eta)}{(\eta-\xi)^{4\beta}},$$

где $A$, $B$ и $C$ определяются через $a$, $b$ и $c$ точно так же, как $A_i$ через $a_i$. При выполнении условия (3) функция $G(x,\,y;\,\xi,\,\eta)$ существует и она на особых линиях ведет себя не хуже, чем $H(x,\,y;\,\xi,\,\eta)$ (см. [1]).

Интегральное уравнение для $\tau(x)$ имеет вид

$$\tau(x) = -\int\limits_0^x d\xi \int\limits_\xi^x \frac{A_i(\xi,\,\eta)\, D_{0\xi}^{\alpha_i}\tau}{(\eta-\xi)^{4\beta}} G(\xi,\,\eta;\,x,\,x)\,d\eta = \Psi_1(x)\,. \tag{12}$$

Условие (3) гарантирует существование, единственность и устойчивость решения задачи Коши (11) для уравнения

$$L_m u \equiv T_m u + a u_x + b u_y + c u = d\,(x,\,y) - a_i\,(x,\,y)\,D_{0\xi}^{\alpha_i}\tau,$$

где $\tau\,(x)$ – решение (12).

Известно [3], что условие Геллерстедта (3) является существенным для корректности задачи Дарбу для уравнения $L_m u = d$.

Как было замечено в [3], функция $u\,(x,\,y) = \mu\,(x - 1/2y^2) - \mu\,(0)$, где $\mu\,(x)$ – любая функция из класса $C\left(\overline{J}\right) \cap C^2\,(J)$, является решением однородной задачи Дарбу

$$u|_{AC} = 0, \quad u_y\,(x,\,0) = 0,$$

для уравнения

$$u_{yy} - y^2 u_{xx} + u_x = 0.$$

Имеет место следующая

**Теорема 2.** *Если существует решение задачи Дарбу* (2) *для уравнения*

$$u_{yy} - y^2 u_{xx} + u_x + 4\lambda D_{0\xi}^{\alpha} u\,(x,\,0) = d\,(x,\,y)\,, \tag{13}$$

*то оно единственно. Решение существует, если* $D_{0x}^{1/2-\alpha}\mu \in C\left(\overline{J}\right)$, *где*

$$\mu\,(x) = \sqrt{x}\varphi'\,(x) + \frac{1}{2}\nu\,(x) + \frac{1}{4}\int\limits_0^x (x-\xi)^{-1/2}\,d\left(\frac{\xi + x}{2},\,-\sqrt{x-\xi}\right)d\xi.$$

Действительно, принимая во внимание, что функция

$$v\,(\xi,\,\eta) = -\int\limits_{\xi}^{\eta} d\xi_1 \int\limits_{\xi_1}^{\eta} \sqrt{\frac{\eta_1 - \xi_1}{\eta_1 - \xi}}F\,(\xi_1,\,\eta_1)\,d\eta_1$$

является единственным решением уравнения

$$u_{\xi\eta} - \frac{1/2}{\eta - \xi}u_\eta = F\,(\xi,\,\eta)\,, \tag{14}$$

удовлетворяющим условию

$$\left[\sqrt{\eta - \xi}\,(v_\eta - v_\xi)\right]_{\eta=\xi} = 0, \quad v\,(0,\,\eta) = 0,$$

нетрудно заметить, что задача (2), (13) эквивалентна уравнению

$$u\,(x,\,y) = \tau\,(\xi) - \frac{1}{2}\int\limits_{\xi}^{\eta}\frac{\nu\,(t)\,dt}{\sqrt{t-\xi}} + \lambda\int\limits_{\xi}^{\eta} d\xi_1 \int\limits_{\xi_1}^{\eta}\sqrt{\frac{\eta_1 - \xi_1}{\eta_1 - \xi}}\frac{D_{0\xi_1}^{\alpha}\tau\,(\xi_1)\,d\eta_1}{\eta_1 - \xi_1} -$$

$$-\frac{1}{4}\int\limits_{\xi}^{\eta} d\xi_1 \int\limits_{\xi_1}^{\eta} (\eta_1-\xi_1)^{-1/2}(\eta_1-\xi)^{-1/2} d\left(\frac{\xi_1+\eta_1}{2},\, -\sqrt{\eta_1-\xi_1}\right) d\eta_1, \quad (15)$$

где $\xi = x - 1/2y^2$, $\eta = x + 1/2y^2$, $\tau(x) = u(x, 0)$.

При выводе (15) воспользовались тем, что уравнение (13) в переменных $\xi$ и $\eta$ записывается в виде (14), где

$$4(\xi-\eta)F(\xi,\eta) = d\left(\frac{\xi+\eta}{2},\, -\sqrt{\eta-\xi}\right) - 4\lambda D_{0\xi}^{\alpha}\tau(x).$$

Из уравнения (15) при $\xi = 0$ получаем

$$\lambda\int\limits_0^x D_{0\xi}^{\alpha}\tau d\xi \int\limits_{\xi}^{x} \eta^{-1/2}(\eta-\xi)^{-1/2} d\eta = \Psi(x), \quad 0 < x < 1, \quad (16)$$

где

$$\Psi(x) = \varphi(x) - \varphi(0) + \frac{1}{2}\int\limits_0^x \frac{\nu(t)\,dt}{\sqrt{t}} +$$

$$+\frac{1}{4}\int\limits_0^x d\xi \int\limits_{\xi}^{x} \eta^{-1/2}(\eta-\xi)^{-1/2} d\left(\frac{\xi+\eta}{2},\, -\sqrt{\eta-\xi}\right) d\eta.$$

Из (16) после законного дифференцирования будем иметь

$$\lambda\int\limits_0^x \frac{D_{0\xi}^{\alpha}\tau d\xi}{\sqrt{x-\xi}} \equiv \lambda\Gamma(1/2)\, D_{0x}^{-1/2} D_{0x}^{\alpha}\tau = \mu(x). \quad (17)$$

Поскольку $D_{0x}^{-\varepsilon} D_{0x}^{\alpha} \equiv D_{0x}^{\alpha-\varepsilon}$ $\forall\, \alpha < \varepsilon > 0$, то из (17) в силу условия $\alpha < 1/2$ имеем

$$\lambda\Gamma(1/2)\, D_{0x}^{\alpha-1/2}\tau = \mu(x).$$

Следовательно,

$$\tau(x) = \frac{1}{\lambda\Gamma(1/2)} D_{0x}^{1/2-\alpha}\mu.$$

Очевидно, $\tau(x) \in C\left(\overline{J}\right) \cap C^2(J)$.

При $\alpha = 0$, т. е. в случае нагруженного дифференциального уравнения

$$u_{yy} - y^2 u_{xx} + 4\lambda u(x, 0) = d(x, y),$$

имеем

$$\tau(x) = \frac{1}{\lambda\Gamma^2(1/2)}\frac{d}{dx}\int\limits_0^x \frac{\mu(t)\,dt}{\sqrt{x-t}}.$$

Поэтому если

$$\nu(x) = \sqrt{x}\nu_0(x), \quad \text{где } \nu_0(x) \in C\left(\overline{J}\right) \cap C^3(J),$$

то $\tau(x) \in C(\overline{J}) \cap C^2(J)$.

Пусть $\Omega_n$ – $n$-мерная область евклидова пространства $R^n$ точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\omega_k$ – принадлежащее $\overline{\Omega}_n = \Omega_n \cup \partial\Omega_n$ многообразие размерности $k < n$.

Уравнение (1), названное нагруженным по аналогии с нагруженными интегральными уравнениями, очевидно, относится к классу уравнений вида

$$\sum_{|\alpha| \leqslant r} a_\alpha(x) D^\alpha u + A(u \mid \omega_k) = f(x), \tag{18}$$

где

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}, \quad D_j = \partial/\partial x_i, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n,$$

$A$ – заданный оператор (в частности, интегродифференциальный), действующий на сужение $u \mid \omega_k$ искомой функции $u = u(x)$ на многообразие $\omega_k \colon u \mid \omega_k = u(x)\ \forall\, x \in \omega_k$.

В заключение отметим, что частным случаем уравнения (18) является встречающееся в приложениях [4] нагруженное параболическое уравнение

$$u_{x_1x_1} - u_{x_2} = c(x)\,u(0, x_2), \quad x = (x_1, x_2),$$

которое рассматривается в области $\Omega = \{x \colon 0 < x_1 < l,\ 0 < x_2 < T\}$.

## Литература

1. Gellerstedt S. Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik. 1937. Vol. 25 A, no. 29. Pp. 1–23.
2. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959.
3. Нахушев А. М. ДАН СССР. 1970. Т. 195, № 4.
4. Дикинов Х. Ж., Керефов А. А., Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 1.

Поступила в редакцию
20 февраля 1975 г.

Кабардино-Балкарский
государственный университет

# Краевые задачи для нагруженных параболических уравнений и их приложения к прогнозу уровня грунтовых вод

**1. Первая, вторая и смешанная краевые задачи для линейных нагруженных уравнений параболического типа.** В области $\Omega = \{(x, y)\colon 0 < x < l,\ 0 < y < T\}$ евклидовой плоскости независимых переменных $x$ и $y$ рассмотрим нагруженное уравнение параболического типа

$$Lu + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i(x, y) D_{0y}^{\alpha_i} k_j(x, y) u(x^j, y) = f(x, y), \tag{1}$$

где

$$\alpha_n < \alpha_{n-1} < \dots < \alpha_1 = \alpha,\ 0 \leqslant x^1 < x^2 < \dots < x^m < l,$$

$$L = \frac{\partial}{\partial y} - \varkappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c(x, y), \quad \varkappa = \text{const} > 0,$$

а $D_{0y}^{\alpha_i}$ – оператор дробного интегрирования порядка $-\alpha_i$ при $\alpha_i < 0$ и дробного дифференцирования порядка $\alpha_i$ при $\alpha_i > 0$. Предполагается, что функции $k_i(x, y)$, $f(x, y)$, $c(x, y)$ непрерывны, а $a_i(x, y)$ непрерывно дифференцируемы по Гельдеру в замыкании $\overline{\Omega}$ области $\Omega$.

Оператор $D_{0y}^{\alpha_i}$ в случае, когда $\alpha_i < 1$ задается формулой

$$D_{0y}^{\alpha_i} f = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(-\alpha_i)} \displaystyle\int_0^y \frac{f(t)dt}{(y-t)^{1+\alpha_i}},\ \alpha_i < 0, \\ \dfrac{d}{dy} D_{0y}^{\alpha_i - 1} f(y),\ \alpha_i > 0, \end{cases}$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера.

Уравнение (1) относится к классу уравнений, предложенных в [1]. Нагруженным дифференциальным уравнениям, нагруженная часть которых содержит лишь значения искомого решения в фиксированных точках области их задания, посвящены работы [2], [3].

**Задача A.** *Найти регулярное в области* $\Omega$ *решение* $u(x, y)$ *уравнения* (1) *из класса* $C(\bar{\Omega})$, *удовлетворяющее начальному условию*

$$u|_{y=0} = \tau(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{2}$$

*и одному из следующих граничных условий:*

$$u|_{x=0} = \varphi_0(y), \quad u|_{x=l} = \varphi_l(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant T; \tag{3}$$

---

Нахушев А. М., Борисов В. Н. Дифференц. уравнения. 1977, **13**:1, 105–110.

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = \nu_0(y), \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = \nu_l(y), \quad 0 < y < T; \tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = \nu_0(y), \quad u|_{x=l} = \varphi_l(y), \tag{5}$$

*$\varphi_0$, $\varphi_l$, $\nu_0$ и $\nu_l$ – заданные функции, для которых соблюдены обычные условия гладкости и согласованности* [4].

Задача (5) для нагруженного уравнения теплопроводности

$$u_t - u_{xx} - \lambda u(0,t) = 0$$

исследована в работе [5].

Имеет место следующая

**Теорема.** *Пусть $\alpha < 1/2$ и $c(x,y) \leqslant 0$, тогда задача А безусловно и однозначно разрешима.*

Приведем весьма простое доказательство справедливости утверждения этой теоремы.

Функция Грина $G(x,y;\xi,\,\eta)$ задачи (2), $(j)$, $j=3,4,5$, для уравнения $Lu=0$ представима в виде

$$G(x,y;\xi,\,\eta) = (y-\eta)^{-1/2} G_0(x,y;\xi,\,\eta),$$

где $G_0(x,y;\xi,\,\eta)$ – достаточно гладкая функция (см. [4]).

Обозначим через $\psi^j(y)$ след искомого решения $u(x,y)$ задачи А при $x=x^j$, $0 \leqslant y \leqslant T$, а через $v(x,y)$ – решение задачи (2)–$(j)$ для уравнения

$$Lv = f(x,y) \tag{6}$$

в области $\Omega$.

Принимая во внимание свойства функции Грина, нетрудно убедиться, что любое решение $u(x,y)$ задачи А является решением интегрального уравнения

$$u(x,y) - v(x,y) = \int\limits_0^y \frac{d\eta}{(y-\eta)^{1/2}} \int\limits_0^l G_i(x,y;\xi,\,\eta) D_{0\eta}^{\alpha_i} k_j(\xi,\,\eta)\psi^j(\eta)d\xi, \tag{7}$$

где

$$G_i(x,y;\xi,\,\eta) = a_i(\xi,\,\eta) G_0(x,y;\xi,\,\eta)$$

и по повторяющимся индексам $i=1,\,\ldots,\,n$, $j=1,\,\ldots,\,m$ подразумевается суммирование.

Непосредственным вычислением можно показать, что выражение

$$\int\limits_0^y (y-\eta)^{-1/2} G_i(x,y;\xi,\,\eta) D_{0\eta}^{\alpha_i} k_j(\xi,\,\eta)\psi^j(\eta)d\eta$$

при $\alpha_i < 0$ равно

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha_i)}\int\limits_0^y k_j(\xi,\,\eta_1)\psi^j(\eta_1)(y-\eta_1)^{-\alpha_i-1/2}d\eta_1\times$$

$$\times\int\limits_0^1 G_i[x,y;\xi,\,\eta_1\,+\,(y-\eta_1)t]t^{-1-\alpha_i}(1-t)^{-1/2}dt,$$

а при $0 < \alpha_i < 1/2$ равно

$$-\frac{1}{\Gamma(1-\alpha_i)}\int\limits_0^y k_j(\xi,\,\eta_1)\psi^j(\eta_1)d\eta_1\frac{d}{d\eta_1}(y-\eta_1)^{1/2-\alpha_i}\times$$

$$\times\int\limits_0^1 G_i[x,y;\xi,\,\eta_1\,+\,(y-\eta_1)t]t^{-\alpha_i}(1-t)^{-1/2}dt.$$

С учетом этого уравнение (7) эквивалентно редуцируется к уравнению

$$u(x,y)=\int\limits_0^y\frac{k_{ij}(x,y,t)\psi^j(t)}{(y-t)^{\alpha_i+1/2}}dt+v(x,y), \tag{8}$$

где $k_{ij}(x,\,y,\,t)$ очевидным образом выражается через известные функции $k_j(x,\,y)$ и $G_i(x,y;\xi,\,\eta)$.

Из (8) при $x=x^\mu$, $\mu=1,\,\ldots,\,m$, имеем

$$\psi^\mu(y)=\int\limits_0^y\frac{k_{ij}(x^\mu,\,y,\,t)}{(y-t)^{\alpha_i+1/2}}\psi^i(t)dt+v(x^\mu,y). \tag{9}$$

При $\alpha < 1/2$ система (9) является системой интегральных уравнений Вольтерра второго рода, стало быть, она безусловно и однозначно разрешима.

Таким образом, единственное решение задачи А задается формулой (8), где $\psi^1,\,\ldots,\,\psi^m$ – решение системы (9).

Хорошо известный прием редукции интегральных уравнений Вольтерра с вырожденным ядром к обыкновенным дифференциальным уравнениям позволяет выписать общее представление всех решений нагруженного параболического уравнения

$$u_y-\varkappa u_{xx}+c(y)u+a_i(y)D_{0y}^{\alpha_i}k_j(y)u(x^j,y)=f(x,y), \tag{10}$$

которое получается из (1), если предположить, что функции $a_i$ и $k_j$ не зависят от $x$.

Действительно, любое решение $u(x,y)$ уравнения (10) является решением уравнения составного типа

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[u_y - \varkappa u_{xx} + c(y)u - f(x,y)\right] = 0.$$

Принимая это во внимание, легко показать, что

$$u(x,y) = v(x,y) + \omega(y), \tag{11}$$

где $v(x,y)$ и $\omega(y)$ означают общие решения уравнений

$$v_y - \varkappa v_{xx} + c(y)v = f(x,y) \tag{12}$$

и

$$\omega' + c(y)\omega + \sum_{j=1}^{m} a_i(y) D_{0y}^{\alpha_i} k_j(y)\omega = -a_i(y) D_{0y}^{\alpha_i} k_j(y) v(x^j, y), \tag{13}$$

соответственно. При этом предполагается, что

$$\omega(y) \in C(0 \leqslant y \leqslant T) \cap C^1(0 < y < T).$$

Очевидно, задача Коши $\omega|_{y=0} = \omega_0$ для интегро-дифференциального уравнения (13) эквивалентно редуцируется к интегральному уравнению Вольтерра второго рода и поэтому всегда разрешима и притом единственным образом.

Указанный прием получения представления вида (11) успешно использован в работе [6], где исследован ряд краевых задач для нагруженных уравнений эллиптического типа.

Представление (1) может оказаться весьма полезным при численной реализации задачи A на ЭВМ.

Например, поскольку задача (2), (4) для уравнения (10) в силу доказанной выше теоремы имеет не более одного решения $u(x,y)$, то нетрудно заметить, что $u(x,y)$ задается формулой (11), где $v(x,y)$ представляет собой решение уравнения (12), удовлетворяющее условиям

$$v|_{y=0} = \tau(x), \qquad \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=0} = \nu_0(y), \qquad \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=l} = \nu_l(y),$$

а $\omega(y)$ – является решением однородной задачи Коши $\omega_0 = 0$ для уравнения (13).

В заключение этого параграфа отметим, что многие задачи, связанные с прогнозом режима уровня и минерализации грунтовых вод в условиях орошения сводятся к краевым задачам для нагруженных уравнений параболического типа.

**2. О некоторых математических моделях плоскопараллельного неустановившегося движения грунтовых вод.** Хорошо известно [7], что неустановившееся плоскопараллельное движение грунтовых вод со слабоизменяющейся свободной поверхностью и с непроницаемым горизонтальным водоупором описывается уравнением Буссинеска

$$\sigma\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{k}{2}\,\frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} + W(x,y,h), \tag{14}$$

где $\sigma$ – водоотдача, $k$ – коэффициент фильтрации, $W$ – интенсивность фильтрации, $h = h(x,y)$ – ордината свободной поверхности, отсчитываемая от водоупора в момент времени $y$.

Интенсивность фильтрации $W$ определяется по формуле

$$W = W_i(x,y,h) - W_l(x,y,h),$$

где $W_i$ – часть от осадков, поливов или промывок, попадающая на поверхность грунтовых вод, а $W_l$ – суммарная интенсивность расходования грунтовых вод на эвапотранспирацию.

Обозначим через $H$ осредненное расстояние от поверхности почвы до водоупора.

Пусть $x^1$, $x^2$, …, $x^m$ – характерные точки (отметки) мелиорируемой территории $0 \leqslant x \leqslant l$. Характерными точками могут быть, например, точки, где измеряется уровень грунтовых вод или точки, где

$$H - h(x^j,\, y) = \min_{0\leqslant x\leqslant l}[H - h(x,y)].$$

Предположим, что зависимость интенсивности испарения от глубины состояния грунтовых вод задается формулой

$$W_l(x,y,h) = \varepsilon_0\left[1 - \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{H - h(x^j,\, y)}{h^*}\right]^{\lambda}, \tag{15}$$

где $\varepsilon_0$ – максимальная интенсивность испарения с поверхности почвы, $h^*$ – критическая глубина, отсчитываемая от поверхности почвы, ниже которой $W_l = 0$, $\lambda$ – показатель степени, определяемый каждый раз для конкретных условий.

Формула (15) является некоторым дискретным аналогом известной эмпирической формулы, предложенной С. Ф. Аверьяновым [8] (см. также [7]).

В дальнейшем будем считать, что $\sigma$, $k$, $\varepsilon_0$ и $h^*$ – известные постоянные, $\lambda = 1$, а $W_i$ – заданная функция, зависящая только от $x$ и $y$.

Линеаризуя уравнение (14) одним из известных способов [6] и принимая во внимание (15), получим для $h(x, y) \equiv u(x, y)$ нагруженное параболическое уравнение

$$u_y - au_{xx} + a_j u(x^j,\, y) = f(x, y), \quad j = 1,\, \ldots,\, m, \tag{16}$$

где $a = \text{const} > 0$ – коэффициент уровнепроводности,

$$a_j = \frac{\varepsilon_0}{m\sigma h^*}, \quad f(x, y) = \frac{W_i(x, y)}{\sigma} - \frac{\varepsilon_0}{\sigma}\left(1 - \frac{H}{h^*}\right).$$

Уравнение (16) относится к классу уравнений, исследованных в п. 1. К краевым задачам для этого уравнения сводятся многие задачи, связанные с прогнозом и регулированием уровня грунтовых вод.

Например, задача растекания бугра грунтовых вод с начальным уровнем $\tau(x)$, обладающим тем свойством, что

$$H - \tau(0) = \min_{0 \leqslant x \leqslant l}[H - \tau(x)], \quad \tau'(0) = \tau'(l) = 0, \quad \tau'(x) \leqslant 0,$$

сводится к задаче

$$u|_{y=0} = \tau(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = 0, \tag{17}$$

для уравнения вида (16) с $m = 1$, $x^1 = 0$.

В этом случае на сегменте $0 \leqslant x \leqslant l$ имеется лишь одна характерная точка $x = 0$.

Решение задачи (17) для уравнения (16) задается формулой

$$u(x, y) = v(x, y) - \int_0^y a_j v(x^j,\, s) \exp\left[\frac{\varepsilon_0}{\sigma h^*}(s - y)\right] ds,$$

где $v(x, y)$ – решение уравнения

$$v_y - av_{xx} = f(x, y), \tag{18}$$

удовлетворяющее условиям

$$v|_{y=0} = \tau(x), \quad \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=l} = 0. \tag{19}$$

Задачу (18), (19) можно реализовать на ЭВМ хорошо известными методами, например, методом прогонки.

В заключение отметим, что исследованная в работе [9] Н. Н. Кочиной (см. также [10], [11]) весьма важная задача периодического изменения уровня грунтовых вод при поливах с интенсивностью полива $mc$ и интенсивностью испарения $md$ сводится к краевым задачам для уравнения вида

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \varkappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F[u(x^0, y)], \quad 0 < x < l, \tag{20}$$

где

$$F[u(x^0, y)] = \begin{cases} c & \text{при}\, u(x^0, y) < u_*, \\ -d & \text{при}\, u(x^0, y) > u_{**}, \end{cases}$$

причем $0 < x^0 < l$ и постоянные величины $u_*$, $u_{**}$ таковы, что $u_* > u_{**}$.

Уравнение (20) относится к классу нагруженных уравнений, предложенных в работе [1].

### Литература


1. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 1.
2. Будак Б. М., Искендеров А. Д. ДАН СССР. 1967. Т. 176, № 1.
3. Искендеров А. Д. Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, № 10.
4. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968.
5. Дикинов Х. Ж., Керефов А. А., Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 1.
6. Бородин А. В. Матем. сб., вып. III, 15–23. Орджоникидзе: Изд-во СОГУ, 1976.
7. Полубаринова-Кочина П. Я, Пряжеиская В. Г., Эмих В. Н. Математические методы в вопросах орошения. М.: Наука, 1969.
8. Аверьянов С. Ф., Костяков А. Н., Хаврин Н. Н. Влияния оросительных систем на режим грунтовых вод. М.: Изд-во АН СССР, 1956.
9. Кочина Н. Н. ПМТФ. 1971. № 4.
10. Кочина Н. Н. ПМТФ. 1972. № 3.
11. Кочина Н. Н. ДАН СССР. 1973. Т. 213, № 1.


Поступила в редакцию
3 июня 1976 г.

Кабардино-Балкарский
государственный университет

Северо-Кавказский государственный институт
по проектированию водохозяйственного
и мелиоративного строительства

# Нелокальная задача и задача Гурса для нагруженного уравнения гиперболического типа и их приложения к прогнозу почвенной влаги

В области $\Omega = \{z \mid 0 < x < l,\ 0 < y < T\}$ евклидовой плоскости точек $z = (x, y)$ рассмотрим нагруженное [1] уравнение гиперболического

Нахушев А. М. Доклады АН СССР. 1978, **242**:5, 1008–1011.
Представлено академиком А. Н. Тихоновым 12.04.1978

типа

$$Lu = a(z)\frac{\partial}{\partial x}\int_0^y \alpha(z,\eta)u(x,\eta)d\eta + b(z)\frac{\partial}{\partial y}\int_0^x \beta(z,\xi)u(\xi,y)d\xi + f(z), \quad (1)$$

где

$$u(z) \equiv u(x,y), \quad Lu \equiv u_{xy} + A(z)u_x + B(z)u_y + C(z)u.$$

Предполагается, что $a_x$, $b_y$, $\alpha_x$, $\beta_y$, $A_x$, $B_y$, $C$ и $f$ непрерывны в замыкании $\overline{\Omega}^2$ области $\Omega^2 = \Omega \times \Omega$.

**Задача Гурса.** *Найти регулярное в области* $\Omega$ *решение* $u(z)$ *уравнения* (1) *из класса* $C(\overline{\Omega})$, *удовлетворяющее условиям*

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad (2)$$

$$u(0,y) = \psi(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant T. \quad (3)$$

Пусть $R(\xi,\, \eta; z)$ – функция Римана, которая однозначно определяется как решение задачи Гурса:

$$R(\xi,\, \eta; z) = \exp\left(\int_\eta^y A(x,\, t)dt\right), \quad R(\xi,\, y; z) = \exp\left(\int_\xi^x B(t,\, y)dt\right), \quad (4)$$

для уравнения

$$R_{\xi\eta} - (AR)_\xi - (BR)_\eta + CR = 0.$$

Введем следующие обозначения:

$$K_\alpha^\beta(z;\zeta) = \int_\eta^y \alpha(\xi,\, \eta_1;\eta)[a(\xi,\, \eta_1)R(\xi,\, \eta_1; z)]_\xi d\eta_1 +$$

$$+\int_\xi^x \beta(\xi_1,\, \eta;\xi)[b(\xi_1,\, \eta)R(\xi_1,\, \eta; z)]_\eta d\xi_1, \quad \zeta = (\xi,\, \eta);$$

$$K_\alpha(z;\eta) = \int_\eta^y \alpha(x,\eta_1;\eta)a(x,\eta_1)R(x,\eta_1;z)d\eta_1;$$

$$K^\beta(z;\xi) = \int_\xi^x \beta(\xi_1,y;\xi)b(\xi_1,\, y)R(\xi_1,\, y;z)d\xi_1;$$

$$\Phi(z;\varphi) = R(x,0;z)\varphi(x) - R(0,0;z)\varphi(0) + \int_0^x \Bigg[ B(\xi,0)R(\xi,0;z) -$$

$$-R_\xi(\xi,0;z)-\int_\xi^x \beta(\xi_1;0,\xi)b(\xi_1,0)R(\xi_1,0;z)d\xi_1\Bigg]\varphi(\xi)d\xi;$$

$$\Psi(z;\psi)=R(0,y;z)\psi(y)+\int_0^y\Bigg[A(0;\eta)R(0,\eta;z)-R_\eta(0,\eta;z)-$$

$$-\int_\eta^y \alpha(0,\eta_1;\eta)a(0;\eta_1)R(0,\eta_1;z)d\eta_1\Bigg]\psi(\eta)d\eta;$$

$$F(z;f)=\int_0^x d\xi\int_0^y R(\zeta;z)f(\zeta)d\eta;\quad f_\alpha^\beta=\Phi(z;\varphi)+\Psi(z;\psi)+F(z;f).$$

Справедлива

**Теорема 1.** *Задача Гурса* (2), (3) *для уравнения* (1) *эквивалентна нагруженному интегральному уравнению Вольтерра второго рода*

$$u(z)+\int_0^x d\xi\int_0^y K_\alpha^\beta(z;\zeta)U(\xi,\eta)d\eta=f_\alpha^\beta(z)+$$

$$+\int_0^x K^\beta(z;\xi)u(\xi,\,y)d\xi+\int_0^y K_\alpha(z;\eta)u(x,\,\eta)d\eta, \tag{5}$$

*которое безусловно и однозначно разрешимо.*

Эквивалентность задачи Гурса уравнению (5) легко устанавливается, исходя из хорошо известных свойств функции Римана $R(\zeta,\,z)$. Уравнение (5) однозначно и безусловно разрешимо [2], [3], так как обратимая замена

$$u(z)=v(z)+\int_0^x P(z;\xi_1)v(\xi_1,\,y)d\xi_1+\int_0^y Q(z;\eta_1)v(x,\,\eta_1)d\eta_1, \tag{6}$$

где $P$ и $Q$ – соответственно являются решениями интегральных уравнений Вольтерра второго рода

$$P(z;\xi_1)-\int_{\xi_1}^x K^\beta(z;\xi)P(\xi,\,y;\xi_1)d\xi=K^\beta(z;\xi_1),$$

$$Q(z;\eta_1) - \int\limits_{\eta_1}^{y} K_\alpha(z;\eta)Q(x,\,\eta;\eta_1)d\eta = K_\alpha(z;\eta_1),$$

редуцирует его к интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$v(z) = \int\limits_0^x d\xi \int\limits_0^y r(z;\zeta)v(\zeta)d\eta + f_\alpha^\beta(z) \tag{7}$$

с ядром

$$r(z;\zeta) = P(x,\eta;\xi)K_\alpha(z;\eta) - {K_\alpha}^\beta(z;\zeta) + Q(\xi,y;\eta)K^\beta(z;\xi) -$$

$$-\int\limits_\xi^x {K_\alpha}^\beta(z;\xi_1,\eta)P(\xi_1,\eta;\xi)d\xi_1 - \int\limits_\eta^y {K_\alpha}^\beta(z;\xi,\eta_1)Q(\xi,\eta_1;\eta)d\eta_1.$$

**Нелокальная задача.** *Найти регулярное в области* $\Omega$ *решение* $u(z)$ *уравнения* (1) *из класса* $C(\overline{\Omega})$ *удовлетворяющее условиям*

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l; \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^{x_0} u(\xi,y)d\xi = \tau(y), \quad 0 \leqslant x \leqslant l; \tag{9}$$

*где* $0 < x_0 \leqslant l$, $\varphi(x)$ *и* $\tau(y)$ *– заданные непрерывные функции.*

Пользуясь общим представлением (6), (7) всех регулярных в $\Omega$ и непрерывных в $\overline{\Omega}$ решений уравнения (1), нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения.

**Теорема 2.** *Если для всех* $y \in [0,T]$

$$\int\limits_0^{x_0}\left[R(0,y;\xi,y) + \int\limits_0^{\xi} P(\xi,y;\xi_1)R(0,y;\xi_1,y)d\xi_1\right]d\xi \neq 0, \tag{10}$$

*то нелокальная задача* (8), (9) *для уравнения* (1) *всегда разрешима и притом единственным образом.*

В силу (4) можно доказать, что условие (10) имеет место в случае, когда

$$b(z)\beta(z;\xi) \geqslant 0 \ \ \forall\, z \in \overline{\Omega}, \quad \xi \geqslant 0.$$

Многие задачи, связанные с динамикой почвенной влаги и грунтовой воды, редуцируются к локальным и нелокальным краевым задачам для различных частных случаев уравнения (1). Рассмотрим, например, линеаризованное уравнение Аллера [4], [5]

$$u_y = \frac{\partial}{\partial x}(Du_x + Au_{xy}) = \frac{\partial}{\partial x}\Pi(x, y), \tag{11}$$

где $A$ и $D$ – достаточно гладкие положительные функции, $\Pi(x, y)$ – поток почвенной влаги в точке $x$ в момент времени $y \geqslant 0$. Очевидно, если известен поток $\Pi(0, y) = f(y)$ влаги на поверхности $x = 0$ почвы для любого момента времени $y \in [0, T]$, то уравнение (11) можно переписать в виде

$$Au_{xy} + Du_x = \frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^x u(\xi,\, y)d\xi + f(y).$$

Из теорем 1 и 2 вытекает, что для уравнения влагопереноса (11) корректно поставлена

**Задача А.** *Определить распределение влаги $u(x,\, y)$ в почвенном слое $0 \leqslant x \leqslant l$ для всех времен $y$, $0 \leqslant y \leqslant T$, если известны:*

1) *поток влаги на поверхности почвы*

$$\Pi(0, y) = f(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant T;$$

2) *глубинный ход влажности в начальный момент*

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l;$$

3) *распределение влаги на поверхности почвы*

$$u(0, y) = \psi(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant T,$$

*или же скорость расхода влаги в слое* $0 \leqslant x \leqslant x_0$, $0 < x_0 \leqslant l$

$$\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^{x_0} u(\xi, y)d\xi = \tau(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant T.$$

При надлежащей схематизации процесса поглощения почвенной влаги корнями растений (см. [5, с. 196]) давление $u(x,\, y)$, $x = \xi^2 + \eta^2$, в области корневого впитывания удовлетворяет уравнению вида

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{x}\right)(u_{xy} + \lambda u_x) = \mu u_y, \quad \lambda,\, \mu = \text{const}. \tag{12}$$

Если сделать естественное предположение об ограниченности «потока» $u_{xy} + \lambda u_x$ на оси симметрии $x = 0$ в любой момент времени $y \in [0, T]$, то уравнение (12) редуцируется к нагруженному гиперболическому уравнению с характеристическим вырождением порядка при $x = 0$:

$$x(u_{xy} + \lambda u_x) = \mu \frac{\partial}{\partial y} \int\limits_0^x \xi u(\xi, y) d\xi. \tag{13}$$

Задача Гурса (2), (3) для уравнения (13) эквивалентна нагруженному интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$u(x,y) = \mu \int\limits_0^x \xi \log \frac{x}{\xi} u(\xi,\, y) d\xi - \lambda\mu \int\limits_0^x d\xi \int\limits_0^y \exp \lambda(\eta - y) \xi \log \frac{x}{\xi} u(\xi,\, \eta) d\eta +$$

$$+ \left[ \varphi(x) - \varphi(0) - \mu \int\limits_0^x \log \frac{x}{\xi} \varphi(\xi) d\xi \right] \exp(-\lambda y) + \psi(y),$$

которое безусловно и однозначно разрешимо.

В заключение отметим, что нелокальным задачам посвящены весьма важные работы [6], [7].

**Литература**

1. Нахушев А. М. О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 1. С. 103–108.
2. Бицадзе А. В. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. 296 с.
3. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959. 164 с.
4. Чудновский А. Ф. Теплофизика почв. М.: Наука, 1976. 353 с.
5. Нерпин С. В., Чудновский А. Ф. Энерго- и массообмен в системе растение-почва-воздух. Л.: Гидрометеоиздат, 1975. 358 с.
6. Ильин В. А. О свойствах приведенной подсистемы собственных и присоединенных функций пучка М. В. Келдыша обыкновенных дифференциальных операторов // Доклады АН СССР. 1976. Т. 230, № 1. С. 30–33.
7. Ильин В. А. Необходимые и достаточные условия базисности подсистемы собственных и присоединенных функций пучка М. В. Келдыша обыкновенных дифференциальных операторов // Доклады АН СССР. 1976. Т. 227, № 4. С. 796–799.

Поступила в редакцию
22 мая 1978 г.

Кабардино-Балкарский
государственный университет

# Краевые задачи для нагруженных интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа и некоторые их приложения к прогнозу почвенной влаги

В области $\Omega = \{z\colon 0 < x < h,\, 0 < y < T\}$ евклидовой плоскости точек $z = (x,\, y)$ рассматривается нагруженное (см. [1]) (интегро-дифференциальное уравнение) уравнение гиперболического типа

$$Lu = \sum_{i=1}^{3} B_i u + f\,(z)\,, \qquad u = u\,(z) \equiv u\,(x,\, y)\,, \tag{1}$$

где

$$Lu \equiv u_{xy} + A\,(z)\,u_x + B\,(z)\,u_y + C\,(z)\,u;$$

$$B_1 u \equiv a\,(z)\,\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_0^y \alpha\,(z;\eta)\,u\,(x,\,\eta)d\eta +$$

$$+\, b\,(z)\,\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^x \beta\,(z;\xi)\,u\,(\xi,\,y)d\xi + \int\limits_0^x d\xi \int\limits_0^y c\,(z;\zeta)\,u\,(\zeta)d\eta;$$

$$B_2 u \equiv \int\limits_0^y \alpha^i(z;\eta)u(x_i,\,\eta)d\eta + \int\limits_0^x \beta^j(z;\xi)u(\xi,\,y_j)d\xi;$$

$$B_3 u \equiv c^{ij}(z)u(x_i,\, y_j), \qquad \zeta = (\xi,\,\eta).$$

Здесь и ниже под индексами $i = 1,\,\ldots,\,m$ и $j = 1,\,\ldots,\,n$ подразумевается суммирование.

В дальнейшем, если особо не оговорено, предполагается, что $a_x$, $b_y$, $\alpha_x$, $\beta_y$, $A_x$, $B_y$ и все остальные заданные функции непрерывны в $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$, где $\overline{\Omega}$ – замыкание $\Omega$.

В работе исследуются локальная и нелокальные задачи для различных важнейших частных случаев уравнения (1). Основной (локальной) краевой задачей является

**Задача Гурса.** *Найти регулярное в области $\Omega$ решение $u\,(z)$ уравнения* (1) *из класса $C\bigl(\overline{\Omega}\bigr)$, удовлетворяющее краевым условиям*

$$u\,(x,\,0) = \varphi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant h, \tag{2}$$

$$u\,(0,\,y) = \psi(y), \qquad 0 \leqslant y \leqslant T. \tag{3}$$

Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1979, **15**:1, 96–105.

В теории краевых задач для уравнения (1) фундаментальную роль играет функция Римана $R(\zeta; z) = R(\xi, \eta; x, y)$, которая однозначно определяется как решение задачи Гурса:

$$R(x, \eta; z) = \exp\left(\int\limits_{\eta}^{y} A(x, t)dt\right), \; R(\xi, y; z) = \exp\left(\int\limits_{\xi}^{x} B(t, y)dt\right) \tag{4}$$

для уравнения $R_{\xi\eta} - (AR)_{\xi} - (BR)_{\eta} + CR = 0$.

**1. Задача Гурса.** Введем следующие обозначения:

$$\mathscr{K}_{\alpha}^{\beta}(z;\zeta) = \int\limits_{\eta}^{y} \alpha(\xi, \eta_1;\eta)\left[a(\xi, \eta_1)R(\xi, \eta_1; z)\right]_{\xi} d\eta_1 +$$

$$+\int\limits_{\xi}^{x} \beta(\xi_1, \eta;\xi)\left[b(\xi_1, \eta)R(\xi_1, \eta; z)\right]_{\eta} d\xi_1 + \int\limits_{\xi}^{x} d\xi_1 \int\limits_{\eta}^{y} c(\zeta_1, \zeta)R(\zeta_1, z)d\eta_1;$$

$$\mathscr{K}_{\alpha}(z;\eta) = \int\limits_{\eta}^{y} \alpha(x, \eta_1;\eta)a(x, \eta_1)R(x, \eta_1; z)d\eta_1;$$

$$\mathscr{K}^{\beta}(z;\xi) = \int\limits_{\xi}^{x} \beta(\xi_1, y;\xi)b(\xi_1, y)R(\xi_1, y; z)d\xi_1;$$

$$\Phi(z;\varphi) = R(x, 0; z)\,\varphi(x) - R(0, 0; z)\,\varphi(0) + \int\limits_{0}^{x}\Big[B(\xi, 0)\,R(\xi, 0; z) -$$

$$-\,R_{\xi}(\xi, 0;\; z) - \int\limits_{\xi}^{x} \beta(\xi_1, 0;\xi)b(\xi_1, 0)R(\xi_1, 0; z)d\xi_1\Big]\varphi(\xi)d\xi;$$

$$\Psi(z;\psi) = R(0, y; z)\,\psi(y) + \int\limits_{0}^{y}\Big[A(0, \eta)\,R(0, \eta; z) -$$

$$-\,R_{\eta}(0, \eta; z) - \int\limits_{\eta}^{y} \alpha(0, \eta_1;\eta)a(0, \eta_1)R(0, \eta_1; z)d\eta_1\Big]\psi(\eta)\,d\eta;$$

$$F(z; f) = \int\limits_{0}^{x} d\xi \int\limits_{0}^{y} R(\zeta; z)\,f(\zeta)\,d\eta;$$

$$f_\alpha^\beta(z) = \Phi\left(z;\varphi\right) + \Psi\left(z;\psi\right) + F\left(z;f\right).$$

Имеет место

**Теорема 1.** *Задача Гурса* (2), (3) *для уравнения*

$$Lu = B_1 u + f\left(z\right) \tag{5}$$

*эквивалентна нагруженному интегральному уравнения Вольтерра второго рода*

$$u\left(z\right) + \int\limits_0^x d\xi \int\limits_0^\eta \mathscr{K}_\alpha^\beta(z;\zeta)u\left(\zeta\right)d\eta = f_\alpha^\beta(z) +$$

$$+ \int\limits_0^x \mathscr{K}^\beta(z;\xi)u\left(\xi,\, y\right)d\xi + \int\limits_0^y \mathscr{K}_\alpha(z;\eta)u\left(x,\, \eta\right)d\eta, \tag{6}$$

*которое безусловно и однозначно разрешимо.*

Уравнение (6) непосредственным вычислением получается из уравнения

$$u\left(z\right) = R\left(x,\, 0;z\right)\varphi\left(x\right) - R\left(0,\, 0;z\right)\varphi\left(0\right) + R\left(0,\, y;z\right)\psi\left(y\right) +$$

$$+ \int\limits_0^x \Big[B\left(\xi,\, 0\right)R\left(\xi,\, 0;z\right) - R_\xi(\xi,\, 0;z)\Big]\varphi(\xi)d\xi + \int\limits_0^y \Big[A\left(0,\, \eta\right)R\left(0,\, \eta;z\right) -$$

$$- R_\eta(0,\, \eta;z)\Big]\psi\left(\eta\right)d\eta + F\left(z;f\right) + \int\limits_0^x d\xi \int\limits_0^y R\left(\zeta;z\right)\left(B_1 u\right)d\eta,$$

которое в силу свойств функции Римана $R$ эквивалентно задаче (2), (3) для (5).

Уравнение (6) однозначно и безусловно разрешимо (см. [2–5]), так как обратимая замена

$$u\left(z\right) = v\left(z\right) + \int\limits_0^x P(z;\xi_1)v(\xi_1,\, y)d\xi_1 + \int\limits_0^y Q(z;\eta_1)v(x,\, \eta_1)d\eta_1, \tag{7}$$

где $P$ и $Q$ соответственно являются решениями интегральных уравнений Вольтерра второго рода

$$P(z;\xi_1) - \int\limits_{\xi_1}^x \mathscr{K}^\beta(z;\xi)P(\xi,\, y;\xi_1)d\xi = \mathscr{K}^\beta(z;\xi_1), \tag{8}$$

$$Q(z;\eta_1)-\int\limits_{\eta_1}^{y}\mathscr{K}_\alpha(z;\eta)Q(x,\,\eta;\eta_1)d\eta=\mathscr{K}_\alpha(z;\eta_1), \tag{9}$$

редуцируют его к интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$v\,(z)=\int\limits_0^x d\xi\int\limits_0^y r\,(z;\zeta)\,v\,(\zeta)\,d\eta+f_\alpha^\beta(z)$$

с ядром

$$r\,(z;\zeta)=P\,(x,\,\eta;\xi)\,\mathscr{K}_\alpha\,(z;\eta)-\mathscr{K}_\alpha^\beta\,(z;\zeta)+Q\,(\xi,\,y;\eta)\,\mathscr{K}^\beta\,(z;\xi)-$$
$$-\int\limits_\xi^x\mathscr{K}_\alpha^\beta\,(z;\xi_1,\,\eta)\,P\,(\xi_1,\,\eta;\xi)\,d\xi_1-\int\limits_\eta^y\mathscr{K}_\alpha^\beta\,(z;\xi,\,\eta_1)\,Q\,(\xi,\,\eta_1;\eta)\,d\eta_1.$$

С учетом (8) и (9) формулу (7) можно переписать в виде

$$u\,(z)=\int\limits_0^x P\,(z;\xi_1)\,f_\alpha^\beta\,(\xi_1,\,y)\,d\xi+\int\limits_0^y Q\,(z;\eta_1)\,f_\alpha^\beta\,(x;\eta_1)\,d\eta_1+$$
$$+\int\limits_0^x d\xi_1\int\limits_0^y\Gamma\,(z;\zeta_1)\,f_\alpha^\beta\,(\zeta_1)\,d\eta_1+f_\alpha^\beta\,(z)\,. \tag{10}$$

Нетрудно убедиться, что ядро $\Gamma$ однозначно определяется как решение уравнения

$$\Gamma\,(z;\zeta_1)=\int\limits_{\xi_1}^x\mathscr{K}^\beta\,(z;\xi)\,\Gamma\,(\xi,\,y;\zeta_1)\,d\xi+$$
$$+\int\limits_{\eta_1}^y\mathscr{K}_\alpha\,(z;\eta)\,\Gamma\,(x,\,\eta;\zeta_1)\,d\eta-\int\limits_{\xi_1}^x d\xi\int\limits_{\eta_1}^y\mathscr{K}_\alpha^\beta\,(z;\zeta)\,\Gamma\,(\zeta,\,\zeta_1)\,d\eta-$$
$$-\int\limits_{\xi_1}^x\mathscr{K}_\alpha^\beta\,(z;\xi,\,\eta_1)\,P\,(\xi,\,\eta_1;\xi_1)\,d\xi-\int\limits_{\eta_1}^y\mathscr{K}_\alpha^\beta\,(z;\xi_1,\,\eta)\,Q\,(\xi_1,\,\eta;\eta_1)\,d\eta+$$
$$+\mathscr{K}_\alpha\,(z;\eta_1)\,P\,(x,\,\eta_1;\xi_1)+\mathscr{K}^\beta\,(z;\xi_1)\,Q\,(\xi_1,\,y;\eta_1)\,.$$

Пусть

$$F_\alpha^\beta\,(z)=\int\limits_0^x P\,(z;\xi_1)\,f_\alpha^\beta\,(\xi_1,\,y)\,d\xi_1+f_\alpha^\beta\,(z)+$$

$$+\int_0^y Q(z;\eta_1)\, f_\alpha^\beta(x,\,\eta_1)\, d\eta_1 + \int_0^x d\xi_1 \int_0^y \Gamma(z;\zeta_1)\, f_\alpha^\beta(\zeta_1)\, d\eta_1,$$

$$P^i(z;\eta) = \int_0^x P(z;\xi_1)\, \alpha^i(\xi_1,\, y;\eta)\, d\xi_1 + \int_\eta^y Q(z;\eta_1)\, \alpha^i(x,\,\eta_1;\eta)\, d\eta_1 + \alpha^i(z;\eta) +$$

$$+\int_0^x d\xi_1 \int_\eta^y \Gamma(z;\zeta_1)\, \alpha^i(\zeta_1;\eta)\, d\eta_1,$$

$$Q^j(z;\xi) = \int_\xi^x P(z;\xi_1)\, \beta^j(\xi_1,\, y;\xi) d\xi_1 + \int_0^y Q(z;\eta_1)\, \beta^j(x,\,\eta_1;\xi)\, d\eta_1 + \beta^j(z;\xi) +$$

$$+\int_\xi^x d\xi_1 \int_0^y \Gamma(z;\zeta_1)\, \beta^j(\zeta_1;\xi)\, d\eta_1,$$

$$\Gamma^{ij}(z) = \int_0^x P(z;\xi_1)\, c^{ij}(\xi_1,\, y)\, d\xi_1 + \int_0^y Q(z;\eta_1)\, c^{ij}(x,\,\eta_1)\, d\eta_1 + c^{ij}(z) +$$

$$+\int_0^x d\xi_1 \int_0^y \Gamma(z;\zeta_1)\, c^{ij}(\zeta_1)\, d\eta_1.$$

Формула для обращения (10) для оператора $L - B_1$ позволяет доказать, что любое решение $u(z)$ задачи Гурса (2), (3) для уравнения (1) представимо в виде

$$u(z) = \int_0^y P^i(z;\eta)\, \psi_i(\eta)\, d\eta + \int_0^x Q^j(z;\xi)\, \varphi_j(\xi)\, d\xi + \Gamma^{ij}(z)\, \psi_i(y_j) + F_\alpha^\beta(z), \tag{11}$$

где

$$u(x_i,\, y) = \psi_i(y), \quad u(x,\, y_j) = \varphi_j(x).$$

Из (11) непосредственно вытекает

**Теорема 2.** *Задача Гурса* (2), (3) *для уравнения* (1) *эквивалентна системе нагруженных интегральных уравнений Фредгольма второго рода*

$$\psi_l(y) = \int_0^y P^i(x_l,\, y;\eta)\, \psi_i(\eta)\, d\eta + \int_0^{x_l} Q^j(x_l,\, y;\xi)\, \varphi_j(\xi)\, d\xi +$$

$$+\,\Gamma^{ij}(x_l,\,y)\,\psi_i(y_j)+F_\alpha^\beta(x_l,\,y)\,,\qquad l=1,\,\ldots,\,m; \tag{12}$$

$$\varphi_k(x)=\int\limits_0^{y_k}P^i(x,\,y_k;\eta)\,\psi_i(\eta)\,d\eta+\int\limits_0^{x}Q^j(x,\,y_k;\xi)\,\varphi_j(\xi)\,d\xi+$$

$$+\,\Gamma^{ij}(x,\,y_k)\,\psi_i(y_j)+F_\alpha^\beta(x,\,y_k)\,,\qquad k=1,\,\ldots,\,n.$$

Легко видеть, что если $c^{ij}(z)\equiv 0\ \forall\, i\in 1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n$ и $\alpha^i(z;\eta)\equiv 0\ \forall\, i=1,\ldots,m$ или $\beta^j(z;\xi)\equiv 0\ \forall\, j=1,\ldots,n$, то (12) переходит в систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода. При нарушении этих условий задача Гурса для уравнения (1) может не быть безусловно и однозначно разрешимой.

**Пример 1.** Однородная задача Гурса

$$u(x,\,0)=0,\quad 0\leqslant x\leqslant h;\quad u(0,\,y)=0,\quad 0\leqslant y\leqslant T \tag{13}$$

для уравнения

$$u_{xy}=\lambda\left[\int\limits_0^x u(\xi,\,x_0)\,d\xi+\int\limits_0^y u(x_0,\,\eta)\,d\eta\right],\quad \lambda=\mathrm{const},\quad x_0>0, \tag{14}$$

не имеет решений, отличных от тривиального, тогда и только тогда, когда $\lambda\neq-\pi^2k^2/x_0^3,\ k=0,\pm1,\ldots$ Все собственные функции $u_k(z)$, т. е. нетривиальные решения задачи (13), (14), соответствующие собственным значениям $\lambda_k=-\pi^2k^2/x_0^3$, имеют вид

$$u_k(z)=c_0\left(y\sin\frac{\pi kx}{x_0}-x\sin\frac{\pi ky}{x_0}\right),\quad k=\pm1,\,\pm2,\,\ldots, \tag{15}$$

где $c_0$ – произвольная постоянная.

Действительно, на основании (11) любое решение $u(z)$ задачи (13), (14) задается формулой

$$u(z)=\lambda y\int\limits_0^x(x-\xi)\,\varphi_0(\xi)\,d\xi+\lambda x\int\limits_0^y(y-\eta)\,\psi_0(\eta)\,d\eta, \tag{16}$$

где $\varphi_0(\xi)=u(\xi,\,x_0)$; $\psi_0(\eta)=u(x_0,\,\eta)$. Отсюда заключаем, что искомые функции $\varphi_0$ и $\psi_0$ удовлетворяют системе уравнений Фредгольма второго рода

$$\begin{aligned}&\varphi_0(x)-\lambda x_0\int\limits_0^x(x-\xi)\,\varphi_0(\xi)\,d\xi=\lambda x\int\limits_0^{x_0}(x_0-\xi)\,\psi_0(\xi)\,d\xi,\\&\psi_0(y)-\lambda x_0\int\limits_0^y(y-\xi)\,\psi_0(\xi)\,d\xi=\lambda y\int\limits_0^{x_0}(x_0-\xi)\,\varphi_0(\xi)\,d\xi.\end{aligned} \tag{17}$$

Система (17) не имеет решений, представимых в виде

$$\varphi_0(x) = \mu_0 \sin\left(x\sqrt{-\lambda x_0}\right), \quad \psi_0(y) = \nu_0 \sin\left(y\sqrt{-\lambda x_0}\right) \tag{18}$$

при $\lambda < 0$, и в виде

$$\varphi_0(x) = \mu_1 \operatorname{sh}\left(x\sqrt{\lambda x_0}\right), \quad \psi_0(y) = \nu_1 \operatorname{sh}\left(y\sqrt{\lambda x_0}\right) \tag{19}$$

при $\lambda > 0$, где $\mu_i$ и $\nu_i$ $(i = 0,\, 1)$ – неизвестные постоянные. Подставляя (18) и (19) в (17) и принимая во внимание, что

$$\lambda x_0 \int\limits_0^x (x-\xi)\sin\left(\xi\sqrt{-\lambda x_0}\right) d\xi = \sin\left(x\sqrt{-\lambda x_0}\right) - x\sqrt{-\lambda x_0}, \quad \lambda < 0;$$

$$\lambda x_0 \int\limits_0^x (x-\xi)\operatorname{sh}\left(\xi\sqrt{\lambda x_0}\right) d\xi = \operatorname{sh}\left(x\sqrt{\lambda x_0}\right) - x\sqrt{\lambda x_0}, \quad \lambda > 0,$$

получим

$$\left.\begin{aligned} y_0\mu_0 + (y_0 - \sin y_0)\,\nu_0 = 0,\\ y_0\nu_0 + (y_0 - \sin y_0)\,\mu_0 = 0, \end{aligned}\right\} \quad (\lambda < 0),$$

$$\left.\begin{aligned} y_0\mu_1 + (y_0 - \operatorname{sh} y_0)\,\nu_1 = 0,\\ y_0\nu_1 + (y_0 - \operatorname{sh} y_0)\,\mu_1 = 0, \end{aligned}\right\} \quad (\lambda > 0),$$

где $y_0 = x_0\sqrt{|\lambda|\, x_0}$. Из этих систем алгебраических уравнений заключаем, что $\mu_1 = \nu_1 = 0$, а $\mu_0$ и $\nu_0$ отличны от нуля тогда и только тогда, когда $y_0 = \pi k$, $k = 0,\, \pm 1,\, \ldots$ Пусть $y_0 = \pi k$, тогда, очевидно, $\mu_0 + \nu_0 = 0$. Стало быть, равенство (18) можно переписать в виде

$$\varphi_0(x) = \mu_0 \sin\frac{\pi k x}{x_0}, \quad \psi_0(y) = -\mu_0 \sin\frac{\pi k y}{x_0}. \tag{20}$$

Теперь легко заметить, что из (16) и (20) вытекает (15).

**Пример 2.** Задача Гурса (13) для уравнения

$$u_{xy} - f(z) = B_3 u \equiv c^{ij} u(x_i,\, y_j), \quad c^{ij} = \mathrm{const}, \tag{21}$$

не имеет более одного решения тогда и только тогда, когда

$$\Delta = 1 - c^{ij} x_i y_j \neq 0.$$

При $\Delta \neq 0$ единственное решение $u(z)$ задается формулой

$$u(z) = xy\left[c^{ij} F(x_i,\, y_j)\right]/\Delta + F(z),$$

где

$$F(z) = \int_0^x d\xi \int_0^y f(\xi,\, \eta)\, d\eta.$$

Действительно, задача (13), (21) эквивалентна нагруженному функциональному уравнению

$$u(z) = xyB_3u + F(z)\,.$$

Стало быть,

$$B_3u = c^{ij}x_iy_jB_3u + c^{ij}F(x_i,\, y_j)\,.$$

В заключении параграфа заметим, что и задача Коши в классической постановке

$$\left.\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\right|_{t=0} = 0, \quad j = 0,\, 1,\, \ldots,\, m-1,$$

для нагруженных дифференциальных уравнений и систем вида

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m} = Au + c^{ij}(x,\, t)\, u(x_i,\, t_j) + f(x,\, t)\,, \quad x = (x_1,\, \ldots,\, x_n)\,,$$

где $A$ – дифференциальный оператор, не содержащий производных по временной переменной $t$ порядка выше $m-1$, не будет безусловно разрешимой. Например, задача Коши

$$u(0) = u'(0) = \ldots = u^{(m-1)}(0) = 0$$

для уравнения

$$u^{(m)} = c^iu(t_i) + f(t)\,,$$

$u = u(t)\,,\ \ c^i = \mathrm{const},\ \ 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n,$ разрешима тогда и только тогда, когда $c^it_i^n \neq n!$

**2. Нелокальные задачи и их приложения.** Пусть $\alpha_j$ и $\tau(y)$ – заданные достаточно гладкие на сегменте $0 \leqslant y \leqslant T$ функции, а $x_0 > 0$, $x^j$, $j = 1,\, \ldots,\, n$ – фиксированные точки, принадлежащие промежутку $0 \leqslant x \leqslant h$.

**Задача A.** *Найти регулярное в области $\Omega$ решение $u(z)$ уравнения* (1), *непрерывное в $\Omega$ и удовлетворяющее условию* (2), *если дополнительно для всех $y \in [0,\, T]$ известно, что*

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_0^{x_0} u(\xi,\, y)\, d\xi = \tau(y) \tag{22}$$

*или*

$$\frac{\partial}{\partial y}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\left(y\right)u\left(x^j,\,y\right)=\tau\left(y\right). \tag{23}$$

Нелокальные условия (22) и (23) можно переписать в виде

$$\int\limits_0^{x_0}u\left(\xi,\,y\right)d\xi=\tau_1\left(y\right)=\int\limits_0^{y}\tau\left(t\right)dt+\int\limits_0^{x_0}\varphi\left(\xi\right)d\xi, \tag{24}$$

$$\alpha_j\left(y\right)u\left(x^j,\,y\right)=\tau_1\left(y\right)=\int\limits_0^{y}\tau\left(t\right)dt+\alpha_j\left(0\right)\varphi\left(x^j\right). \tag{25}$$

При численной реализации на ЭВМ нелокальных краевых задач с условием вида (24) может оказаться весьма полезным редукция условия (24) к условиям вида (25). Так, например, на основании квадратурной формулы Симпсона условие (24) можно приближенно заменить условием

$$u\left(0,\,y\right)+4u\left(x_0/2,\,y\right)+u\left(x_0,\,y\right)=6\tau_1\left(y\right)/x_0 \tag{26}$$

и тем самым редуцировать его к условию вида (25).

Следует отметить, что условие (25) является непосредственным обобщением условий Бизадзе–Самарского [6].

Очевидно, нельзя ожидать безусловной и однозначной разрешимости задачи (2), (22) или (2), (23) для общего уравнения (1).

Единственное решение $u\left(z\right)$ задачи (2), (22) для уравнения $u_{xy}=0$ задается формулой

$$u\left(z\right)=\varphi\left(x\right)+\frac{1}{x_0}\int\limits_0^{y}\tau\left(t\right)dt.$$

Для этого же уравнения задача (2), (22) имеет решение и притом единственное, если

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\left(y\right)\neq 0\quad\forall\,y\in\left[0,\,T\right]. \tag{27}$$

Нарушение условий (27) может вызвать некорректность задачи.

Пользуясь общим представлением (7) для всех регулярных в области $\Omega$ и непрерывных в $\overline{\Omega}$ решений уравнения (5), нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения.

**Теорема 3.** *Если для всех* $y \in [0, T]$

$$\int_0^{x_0} \left[ R\,(0,\, y; \xi,\, y) + \int_0^{\xi} P\,(\xi,\, y; \xi_1)\, R\,(0,\, y; \xi_1,\, y)\, d\xi_1 \right] d\xi \neq 0,$$

*то нелокальная задача* (2), (22) *для уравнения* (5) *всегда разрешима и притом единственным образом.*

В силу (4) $R\,(x,\, \eta; z) > 0$. Принимая это во внимание, можно доказать, что условие теоремы 3 имеет место в случае, когда $b\,(z)\, \beta\,(z; \xi) \geqslant 0$.

Рассмотрим однородную нелокальную задачу

$$u\,(0,\, x) = 0, \quad \alpha_j\,(y)\, u\left(x^j,\, y\right) = 0 \tag{28}$$

для уравнения

$$Lu = f\,(z)\,. \tag{29}$$

На основании приведенного в п. 1 общего представления всех регулярных и непрерывных в $\overline{\Omega}$ решений уравнения (29) получаем, что задача (28), (29) эквивалентна уравнению Вольтерра

$$\alpha_j\,(y)\, R\left(0,\, y; x^j,\, y\right) \psi\,(y) + \int_0^y \alpha_j\,(y) \left[A\,(0,\, \eta)\, R\left(0,\, \eta; x^j,\, y\right) - \right.$$

$$\left. - R_\eta\left(0,\, \eta; x^j,\, y\right)\right] \psi\,(\eta)\, d\eta + F\left(x^j,\, y; f\right) \alpha_j\,(y)\,,$$

где $\psi\,(y) = u\,(0,\, y)$, $0 \leqslant y \leqslant T$, которое безусловно и однозначно разрешимо, если

$$\alpha_j\,(y) \exp\left(\int_0^{x^j} B\,(t,\, y)\, dt\right) \neq 0 \quad \forall\, y \in [0,\, T]\,.$$

Многие задачи, связанные с динамикой почвенной влаги и грунтовой воды, редуцируются к локальным и нелокальным краевым задачам для различных частных случаев уравнения (1).

Рассмотрим, например, линеаризованное уравнение Аллера [7, 8]

$$u_y = \frac{\partial}{\partial x}\left(Du_x + Au_{xy}\right) \equiv \frac{\partial}{\partial x} \Pi\,(x,\, y)\,, \tag{30}$$

где $A$ и $D$ – достаточно гладкие положительные функции, $\Pi\,(x,\, y)$ – поток почвенной влаги в точке $x$ в момент времени $y \geqslant 0$.

Очевидно, если известен поток $\Pi(0,\, y) = f(y)$ влаги на поверхности $x = 0$ почвы для любого момента времени $y \in [0,\, T]$, то уравнение (30) можно переписать в виде

$$Au_{xy} + Du_x = \frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^x u(\xi,\, y)\, d\xi + f(y)\,.$$

Из теорем 1 и 3 вытекает, что для уравнения влагопереноса (30) корректно поставлена

**Задача B.** *Определить распределение влаги $u(x,\, y)$ в почвенном слое $0 \leqslant x \leqslant h$ для всех времен $y \in [0,\, T]$, если известны*

1) *поток влаги на поверхности почвы $\Pi(0,\, y) = f(y)$, $0 \leqslant y \leqslant T$;*

2) *глубинный ход влажности в начальный момент $u(x,\, 0) = \varphi(x)$, $0 \leqslant x \leqslant h$;*

3) *распределение влаги на поверхности почвы $u(0,\, y) = \psi(y)$, $0 \leqslant y \leqslant T$, или же скорость расхода влаги в слое $0 \leqslant x \leqslant x_0$, $0 < x_0 \leqslant l$:*

$$\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^{x_0} u(\xi,\, y)\, d\xi = \tau(y)\,, \quad 0 \leqslant y \leqslant T.$$

Для уравнения (30) физически содержательный смысл имеют нелокальные задачи, когда одно из классических граничных условий при $x = 0$ или $x = h$ заменено условием вида (23) или более общим условием, связывающим значения искомого решения $u(x,\, y)$ и ее производной по пространственной координате в фиксированных точках $x^j \in [0,\, h]$. Сформулируем одну из таких задач для уравнения (30) в случае, когда $D = \mathrm{const} > 0$, $A \equiv 0$.

**Задача C.** *Найти регулярное в области $\Omega$ решение $u(x,\, y)$ уравнения*

$$u_y = Du_{xx}, \tag{31}$$

*непрерывное в $\overline{\Omega}$ и удовлетворяющее условиям*

$$u(x,\, 0) = \varphi(x)\,, \quad 0 \leqslant x \leqslant h; \quad u(h,\, y) = \psi_h(y)\,, \quad 0 \leqslant y \leqslant T; \tag{32}$$

$$u(0,\, y) = \alpha_j(y)\, u\left(x^j,\, y\right) + \delta(y)\,, \quad 0 \leqslant y \leqslant T, \tag{33}$$

*где $0 < x^1 < x^2 < \ldots < x^n < h$; $\varphi(0) = \alpha_j(0)\,\varphi(x^j) + \delta(0)$.*

Для простоты записи ограничимся случаем, когда $\varphi(x) = \psi_h(y) \equiv 0$. Пусть $\psi(y) \equiv u(0,\, y)$ и $G(x,\, y; \xi,\, \eta)$ – функция Грина первой краевой задачи

$$u(x,\, 0) = 0,\;\; 0 \leqslant x \leqslant h;\;\; u(0,\, y) = \psi(y)\,,\;\; u(h,\, y) = 0,\;\; 0 \leqslant y \leqslant T,$$

для уравнения (31). Как хорошо известно

$$u\left(x,\,y\right)=D\int\limits_{0}^{y}\psi\left(\eta\right)\left[G_{\xi}\left(x,\,y;\xi,\,\eta\right)\right]_{\xi=0}d\eta. \tag{34}$$

Удовлетворяя (34) нелокальному условию (33), получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\psi\left(y\right)=D\alpha_{j}\left(y\right)\int\limits_{0}^{y}\psi\left(\eta\right)\left[G_{\xi}\left(x^{j},\,y;\xi,\,\eta\right)\right]_{\xi=0}d\eta+\delta\left(y\right),$$

из которого однозначно определяется искомая функция $\psi\left(y\right)$.

Как было отмечено выше, к нелокальным условиям типа (33) могут привести многие практически важные задачи, например, задача (см. [9, 10]) отыскания решения $u\left(x,\,y\right)$ уравнения (30) или (31) по краевым условиям (32) и (22) с $x_0=h$. Действительно, если (24) приближенно заменить условием (26), то из последнего с учетом (32) получаем нелокальное условие типа условия Бицадзе–Самарского [6]

$$u\left(0,\,y\right)+4u\left(h/2,\,y\right)=6\tau_1\left(y\right)/h-\psi_h\left(y\right)\quad\forall\,y\in\left[0,\,T\right].$$

При надлежащей схематизации процесса поглощения почвенной влаги корнями растений (см. [8, с. 196]) давление $u\left(x,\,y\right)$, $x=\xi^2+\eta^2$, в области корневого впитывания удовлетворяет уравнению вида

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{x}\right)\left(u_{xy}+\lambda u_x\right)=\mu u_y,\qquad\lambda,\,\mu=\mathrm{const}. \tag{35}$$

Если сделать естественное предположение об ограниченности «потока» $u_{xy}+\lambda u_x$ на оси симметрии $x=0$, то уравнение (35) редуцируется к нагруженному гиперболическому уравнению с характеристическим вырождением порядка при $x=0$

$$x\left(u_{xy}+\lambda u_x\right)=\mu\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{0}^{x}\xi u\left(\xi,\,y\right)d\xi. \tag{36}$$

Задача Гурса (2), (3) для уравнения (36) эквивалентна нагруженному интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$u\left(x,\,y\right)=\mu\int\limits_{0}^{x}\xi\log\frac{x}{\xi}u\left(\xi,\,y\right)d\xi-\lambda\mu\int\limits_{0}^{x}d\xi\int\limits_{0}^{y}\exp\left[\lambda\left(\eta-y\right)\right]\xi\log\left(x/\xi\right)\times$$

$$\times\, u\,(\xi,\,\eta)\,d\eta + \left[\varphi\,(x) - \varphi\,(0) - \mu \int\limits_0^x \log\,(x/\xi)\,\varphi\,(\xi)\,d\xi\right] \exp\,(-\lambda y) + \psi\,(y)\,,$$

которое безусловно и однозначно разрешимо.

### Литература


1. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 1.
2. Бицадзе А. В. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976.
3. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959.
4. Векуа И. Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. М. – Л., 1948.
5. Гурса Э. Курс математического анализа. Т. 2, ч. 3. М. – Л.: ГТТИ, 1934.
6. Бицадзе А. В., Самарский А. А. ДАН СССР. 1969. Т. 185, № 4.
7. Чудновский А. Ф. Теплофизика почв. М.: Наука, 1976.
8. Нерпин С. В., Чудновский А. Ф. Энерго- и массообмен в системе растение-почва-воздух. Л.: Гидрометеоиздат, 1975.
9. Ионкин Н. И. Дифференц. уравнения. 1977. Т. 8, № 2.
10. Дикинов Х. Ж., Сохов Т. З. Дифференциальные и интегральные уравнения // Межвуз. сб. Вып. 1. Нальчик, 1977.


Поступила в редакцию
27 июня 1978 г.

Кабардино-Балкарский
государственный университет

## Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод

Пусть $\Omega$ – $n$-мерная область евклидова пространства $R^n$ точек $x = (x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n)$. Заданное в области $\Omega$ *дифференциальное*, интегро-дифференциальное или функциональное *уравнение* $Lu = f(x)$ *называется нагруженным, если оно содержит некоторые операции от следа искомого решения* $u = u(x)$ *на принадлежащих замыканию* $\overline{\Omega}$ *многообразиях размерности* $< n$ (см. [1]).

Односкоростное уравнение переноса

$$x_2\frac{\partial u}{\partial x_1} + u = \frac{c}{2}\int\limits_{-1}^{1} u(x,\,t)dt, \quad u(x) = u(x_1,\,x_2), \quad x \in R^2,$$

с изотропным рассеянием [2], или уравнение [3]

$$x_1\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \lambda\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) = \mu\frac{\partial}{\partial x_2}\int\limits_0^{x_1} tu(t,\,x_2)dt,$$

Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1982, **18**:1, 72–81

которое описывает распределение давления почвенной влаги, поглощаемой корнями растений, представляют собой простейшие примеры нагруженных дифференциальных уравнений.

Важным классом квазилинейных нагруженных дифференциальных уравнений в частных производных, к которым сводятся задачи управления уровнем грунтовых вод при искусственном орошении больших площадей, являются уравнения вида

$$a^{ij}u_{x_ix_j} + b^i(x)u_{x_i} + c(x)u + c_k(x)u(x^k) + c_{(m)}(x)u(x^{(m)}) =$$

$$= \begin{cases} f^*(x), & \text{если } u(x^*) < u^*, \\ f_*(x), & \text{если } u(x^*) > u_*, \end{cases}$$

где по повторяющимся индексам $i,\, j = 1,\, 2,\, \ldots,\, n$; $k = 1,\, 2,\, \ldots$ и $m = 1,\, 2,\, \ldots$ подразумевается суммирование; $a^{ij}$, $b^i$, $c_k$, $c_{(m)}$, $f^*$, $f_*$ – заданные в области $\Omega$ функции точки $x$; $x^k$ и $x^*$ – фиксированные точки из $\overline{\Omega}$; $u^*$ и $u_*$ – заданные числа, $x^{(m)}$ – проекция точки $x \in \overline{\Omega}$ на заданную гиперплоскость $x_m = \mathrm{const}$.

Пусть $L$ – дифференциальный или интегро-дифференциальный оператор с областью определения $D(L)$, а $\tilde{L}$ – нагруженный дифференциальный или интегро-дифференциальный оператор такого же типа и порядка, что и $L$, который с той или иной степенью точности аппроксимирует $L$. Предлагаемый *метод* отыскания приближенного решения $\tilde{u} \in D(L)$ уравнения

$$Lu = f(x), \quad u \in D(L), \tag{1}$$

который для простоты назовем методом *редукции к нагруженным уравнениям, состоит в замене этого уравнения аппроксимирующим*

$$\tilde{L}u = f(x), \quad u \in D(\tilde{L}) = D(L). \tag{2}$$

Функция $\tilde{u} \in D(L)$ называется приближенным решением задачи (1), если оно является точным (или приближенным) решением аппроксимирующей задачи (2).

Раскроем сущность метода на некоторых модельных задачах, являющихся весьма важными как в теоретическом аспекте, так и в прикладном.

1. Хорошо известно, что основные краевые задачи для обыкновенного интегро-дифференциального уравнения второго порядка

$$a(x)u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) + \int\limits_{\alpha}^{\beta} d(x,\, t)u(t)dt = f(x) \tag{3}$$

в интервале $a < x < \beta$ охватываются следующей постановкой: *найти непрерывное на сегменте* $[\alpha, \beta]$ (вместе со своими производными до соответствующих порядков) *решение* $u = u(x)$ *уравнения* (3), *удовлетворяющее (нелокальному) условию* (см. [4]):

$$\sum_{j=1}^{2} \left[ \alpha_{ij} \frac{d^{j-1}u}{dx^{j-1}}\bigg|_{x=\alpha} + \beta_{ij} \frac{d^{j-1}u}{dx^{j-1}}\bigg|_{x=\beta} \right] = \gamma_i, \quad i = 1,\, 2, \tag{4}$$

где $\alpha_{ij}$, $\beta_{ij}$, $\gamma_i$ – заданные числа, $d^0u/dx^0 = u(x)$.

Пусть $u(x) \approx c^j(x)\ u(x_j)$, $j = 1,\, 2,\, \ldots,\ p$, – соответствующая искомой функции $u(x)$ интерполяционная формула (например, Лагранжа) с узлами интерполирования $x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_p$ из сегмента $[\alpha, \beta]$, а

$$\int_{\alpha}^{\beta} d(x,\, t)u(t)dt \approx \beta^j(x)u(x_j), \quad j = p+1,\, p+2,\, \ldots,\, q,$$

– некоторая квадратурная формула (например, Симпсона) с узлами в точках $x_{p+1},\, x_{p+2},\, \ldots,\ x_q$ из $[\alpha, \beta]$. Тогда *метод редукции к нагруженным уравнениям применительно к задаче* (3), (4) *заключается в замене интегро-дифференциального уравнения* (3) *следующим нагруженным дифференциальным уравнением второго порядка*

$$a(x)u''(x) + b(x)u'(x) + \beta^j(x)u(x_j) = f(x), \quad j = 1,\, 2,\, \ldots,\, q, \tag{5}$$

где $\beta^j(x) = c(x)c^j(x)$, и, как и ранее, по повторяющемуся индексу $j$ подразумевается суммирование от 1 до $q$. При этом *за приближенное решение* $\tilde{u}$ *задачи* (3), (4) *принимается точное решение* $u(x)$ *задачи* (4), (5).

Обращая дифференциальный оператор $a(x)d^2/dx^2 + b(x)d/dx$ с соответствующим образом подобранной областью определения, задачу (4), (5) можно эквивалентно редуцировать к *нагруженному функциональному уравнению* вида

$$u(x) + B(\beta^j)u(x_j) = B_x(f).$$

В частности, при $a(x) \equiv 1$ и в случае однородной задачи Коши

$$u|_{x=\alpha} = \frac{du}{dx}\bigg|_{x=\alpha} = 0$$

оператор $B \equiv B_x$ и

$$B(\varphi) \equiv \int_{\alpha}^{x} b^+(t)\varphi(t)dt \int_{t}^{x} \frac{d\xi}{b^+(\xi)}, \quad b^+(x) = \exp\left[\int_{\alpha}^{x} b(t)dt\right].$$

Из нагруженного функционального уравнения получим систему алгебраических уравнений

$$u(x_i) + b^{ij}u(x_j) = B_{x_i}(f), \quad b^{ij} = B(\beta^j)|_{x=x_i}, \quad i = 1,\, 2,\, \ldots,\, q,$$

из которых при естественных ограничениях на входные данные можно определить значения искомого решения $u(x)$ в узлах интерполирования $x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_p$ и в точках $x_{p+1},\, x_{p+2},\, \ldots,\, x_q$.

Если воспользоваться формулой Симпсона (см. [5])

$$\int\limits_0^1 u(t)dt \approx \frac{u(0)+u(1)}{6} + \frac{2}{3}u\left(\frac{1}{2}\right),$$

то интегро-дифференциальное уравнение

$$u''(x) + \lambda \int\limits_0^1 u(t)dt = 0, \quad \lambda = \mathrm{const}\,, \quad 0 < x < 1, \tag{6}$$

аппроксимируется нагруженным дифференциальным уравнением

$$u''(x) + \frac{2}{3}\lambda u(1/2) = -\frac{\lambda}{6}\,[u(0)+u(1)]. \tag{7}$$

Любопытно отметить, что *двухточечная задача Дирихле*

$$u(0) = u_0, \quad u(1) = u_1 \tag{8}$$

*для уравнений* (6) *и* (7) *однозначно и безусловно разрешима тогда и только тогда, когда* $\lambda \neq 12$. *Более того, решение*

$$u(x) = u_0 + (u_1 - u_0)\,x + \frac{3\lambda}{12-\lambda}(u_1+u_0)\,x(1-x)$$

*задачи* (6), (8) *в точности совпадает с решением задачи* (8) *для аппроксимирующего уравнения* (7).

2. Многие задачи уровенного и солевого прогноза в капиллярно-пористых средах сводятся к нелокальной задаче отыскания функции $u = u(x,\, t)$, если известно, что

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(x,\, t)\,\frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} + B(x,\, t)\,\frac{\partial u}{\partial x} + C(x,\, t)u + f(x,\, t),$$

$$u|_{t=0} = \tau(x), \quad \alpha < x < \beta,$$

$$\sum_{j=1}^{2}\left[\alpha_{ij}(t)\frac{\partial^{j-1}}{\partial x^{j-1}}\bigg|_{x=\alpha} + \beta_{ij}(t)\frac{\partial^{j-1}u}{\partial x^{j-1}}\bigg|_{x=\beta}\right] = \gamma_i(t), \quad 0 < t < T,$$

где $A$, $B$, $C$, $f$, $\alpha$, $\beta$, $T$, $\alpha_{ij}$, $\beta_{ij}$, $\gamma_i$ – заданные входные величины, $i = 1, 2$.

Эта задача в случае, когда $\alpha_{ij}$, $\beta_{ij}$, постоянны, $\gamma_i = 0$ и уравнение линейно $u_t = u_{xx} - q(x)u + f(x, t)$, исследована Н. И. Ионкиным и Е. И. Моисеевым в работе [6], где получены весьма интересные результаты.

Рассмотрим задачу долгосрочного прогноза уровня $u = u(x, t)$ грунтовой воды на участке $0 \leqslant x \leqslant l$ с однородными гидрогеологическими условиями, расположенном между двумя водоемами.

При определенных условиях (см. [7]) неустановившееся движение грунтовых вод со слабоизменяющейся свободной поверхностью описывается уравнением Буссинеска

$$2\sigma \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \tag{9}$$

где $\sigma$ – водоотдача, $k$ – коэффициент фильтрации, $u = u(x, t)$ – уровень грунтовой воды в точке $x \in [0, 1]$ в момент времени $t$.

Предположим, что из натурных наблюдений нам известны:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \nu(t), \quad 0 < t < T, \tag{10}$$

– закон изменения уклона потока грунтовых вод в точке $x = 0$ для всех времен от начального $t = 0$ до расчетного $t = T$ (например, $\nu(t) = Q/(kH)$, где $Q$ – расход, $H$ – вертикальный размер потока);

$$u\big|_{t=0} = \tau(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{11}$$

– уровень грунтовой воды в начальный момент времени;

$$u(0, t) = \alpha u(l, t), \quad \alpha = \text{const} > 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{12}$$

– условие, характеризующее, что водоемы, примыкающие к мелиорируемой территории $0 \leqslant x \leqslant l$ слева и справа, находятся в одинаковых условиях.

Найдем приближенное решение задачи (10), (11), (12) для нелинейного уравнения (9) методом редукции к нагруженным дифференциальным уравнениям.

Пусть

$$\delta = \overline{u} = \frac{1}{l} \int_0^l u(x, t)dx \tag{13}$$

– среднее значение $u(x, t)$ в момент времени $t$.

Один из классических методов линеаризации уравнения (9) состоит в том, что $\delta$ считается не зависящим от времени, и уравнение (9) аппроксимируется уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где $a = k\delta/\sigma$ – параметр, получивший специальное название – коэффициент уровнепроводности, который, как правило, определяется экспериментальным путем. Мы же будем считать, что $\delta = \delta(t)$ – неизвестная функция времени $t$, и уравнение (9) заменим нагруженным уравнением

$$k\delta(t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\sigma\delta'(t), \tag{14}$$

где $\delta$ связана с $u$ формулой (11).

Легко видеть, что любое решение $u = u(x,\, t)$ уравнения (12) представимо в виде

$$u(x,\, t) = \frac{\sigma\delta'}{k\delta}\,x^2 + A(t)x + B(t), \tag{15}$$

где $A(t)$ и $B(t)$ – произвольные непрерывные для всех $t \in [0,\, T]$ функции.

Удовлетворяя (15) условию (10) и соотношению (13), будем иметь:

$$A(t) = \nu(t),\ \delta = \frac{\sigma l^2\delta'}{3k\delta} + \frac{l\nu(t)}{2} + B(t).$$

Стало быть,

$$u(x,\, t) = \frac{\sigma\delta'}{k\delta}\,\left(x^2 - \frac{l^2}{3}\right) + \nu(t)\,\left(x - \frac{l}{2}\right) + \delta. \tag{16}$$

Далее из (12) в силу (16) находим

$$-\frac{\sigma l^2\delta'}{3k\delta} - \frac{\nu(t)l}{2} + \delta = \frac{3\alpha\sigma l^2\delta'}{3k\delta} + \frac{\alpha l\nu(t)}{2} + \alpha\delta,$$

или

$$\delta' = \varepsilon(t)\delta - \lambda\delta^2, \quad 0 < t < T, \tag{17}$$

где

$$\varepsilon(t) = -\frac{3k(1+\alpha)\,\nu(t)}{2\sigma\,(1+2\alpha)\,l}, \quad \lambda = \frac{3k(-1+\alpha)}{\sigma\,(1+2\alpha)\,l^2}.$$

При $\varepsilon(t) \equiv 0$ решение задачи Коши (см. [9])

$$\delta(0) = \frac{1}{l}\int\limits_0^l u(x,\, 0)\,dx = \frac{1}{l}\int\limits_0^l \tau(x)dx = \overline{\tau} \tag{18}$$

для уравнения Бернулли (17) имеет вид $\delta(t) = \overline{\tau}/(1 + \lambda\overline{\tau}t)$. Из (16), принимая во внимание, что

$$\frac{\delta'(t)}{\delta(t)} = -\frac{\lambda\overline{\tau}}{1 + \lambda\overline{\tau}t},$$

находим

$$u(x,\, t) = \frac{\overline{\tau}\,[3k - \lambda\sigma(3x^2 - l^2)]}{3k(1 + \lambda\overline{\tau}t)}.$$

Уравнение (17) хорошо известной заменой $z = 1/\delta$ сводится к уравнению $z' = \varepsilon z - \lambda$, из которого при $\varepsilon(t) \equiv \varepsilon = \mathrm{const}$ следует, что $z = C\exp(-\varepsilon t) + \lambda/\varepsilon$, где $C$ – произвольная постоянная. Отсюда на основании (18) получаем

$$\delta = \frac{\varepsilon\overline{\tau}}{\lambda\overline{\tau} + (\varepsilon - \lambda\overline{\tau})\exp(-\varepsilon t)} \quad (\overline{\tau} \neq 0). \tag{19}$$

Таким образом, установлено, что *среднее значение* $\delta(t)$ *уровня грунтовой воды на участке* $0 \leqslant x \leqslant l$ *меняется по «логистической» кривой Ферхюльста* (см. [8], с. 245), и формулы (19) с $\varepsilon = \mathrm{const}$ и $\overline{\tau} \neq 0$ представляют собой алгоритм для поиска приближенного решения и нелокальной краевой задачи (10), (11), (12) для уравнения (9).

3. При определенных физических допущениях одномерное движение почвенной влаги с учетом гравитационных сил описывается нелинейным уравнением параболического типа [7], [9]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[D(u)\,\frac{\partial u}{\partial x}\right] - \frac{\partial k(u)}{\partial x}, \tag{20}$$

где $u = u(x,\, t)$ – влажность в точке $x$ почвогрунта в момент времени $t$; $k(u)$ – коэффициент влагопроводности при влажности $u$; $D(u)$ – коэффициент диффузитивности.

Анализ натурных наблюдений и экспериментальных данных процессов инфильтрации и капиллярного подъема показывает, что движение почвенной влаги происходит с конечной скоростью (см. [10]) и, стало быть, носит волновой характер. Однако линеаризацию уравнения (20), как правило, производят методом редукции к линейным уравнениям параболического типа, которые означают, что любое возмущение с бесконечной скоростью скажется (хотя бы в ничтожной степени) на любом сколь угодно далеком расстоянии от источника. Поэтому более *естественно линеаризацию* (или квазилинеаризацию) тех или иных *уравнений параболического типа, описывающих реальные процессы тепломассообмена с конечной скоростью, произвести методом редукции к нагруженным уравнениям, как правило, гиперболического типа.*

Продемонстрируем сказанное на конкретных ситуациях. Пусть

$$D(u) \approx \alpha + \beta u, \quad \alpha,\, \beta = \text{const } > 0$$

и скорость $b(u) = dk(u)/du$ движения влаги под действием гравитационных сил является постоянной. Тогда уравнение (20) приближенно можно заменить уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2\beta}\,\frac{\partial^2(\alpha+\beta u)^2}{\partial x^2} - b\,\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{21}$$

Отсюда после почленного дифференцирования по $t$ будем иметь

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2[(\alpha+\beta u)u_t]}{\partial x^2} - b\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}.$$

Если теперь множитель $u_t = \partial u/\partial t$ в квадратной скобке заменить его средним значением $\delta'(t)$ в почвенном слое $0 \leqslant x \leqslant l$ (см. формулу [11]), то это уравнение приближенно редуцируется к нагруженному уравнению гиперболического типа

$$u_{tt} + bu_{xt} - \beta\delta'(t)u_{xx} \quad (\delta'(t) \geqslant 0).$$

Такой метод поиска приближенного решения уравнения влагопереноса (21) оказывается весьма эффективным в случае, когда задано нелокальное условие вида

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^l u(x,\, t)dx = \omega(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{22}$$

т. е. скорость $\delta'(t) = \omega(t)/l$ расхода в слое $0 \leqslant x \leqslant l$.

4. Вернемся к уравнению Буссинеска (9), которое после почленного дифференцирования по $t$ можно переписать в виде

$$\sigma\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k\frac{\partial^2(uu_t)}{\partial x^2}. \tag{23}$$

Предположим, что $u_t$ прямо пропорциональна расходу

$$\sigma\,\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^l u(x,\, t)dx, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

грунтовой воды на прогнозируемом участке $0 \leqslant x \leqslant l$ с коэффициентом пропорциональности $\gamma$, который в зависимости от начальных, нелокальных и граничных условий определяется как функция точки $x$. Если теперь, как и выше, множитель $u_t$ в уравнении (23) заменить выражением

$$\gamma(x)\sigma\,\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^l u(x,\,t)dx \approx u_t,$$

то оно редуцируется к нагруженному уравнению гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k\left[\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^l u(x,\,t)dx\right]\frac{\partial^2(\gamma u)}{\partial x^2}. \tag{24}$$

Здесь же уместно отметить, что приближенные решения уравнения Буссинеска (9) можно найти, заменив его более простым, чем (24), нагруженным уравнением параболического типа

$$\frac{k}{2}\,\frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} = \gamma(x)\sigma^2\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^l u(x,\,t)dx. \tag{25}$$

Уравнение (25) в свою очередь можно аппроксимировать линейным нагруженным дифференциальным уравнением

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \gamma(x)\sigma\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^l u(x,\,t)dx.$$

С. М. Тарг [11], строя приближенное решение следующей математической модели задачи о теплообмене в смазочном слое $0 \leqslant x \leqslant 1$ между шипом и подшипником, когда температура $u = u(x,\,t)$ шипа неизменна:

$$u_{xx} - u_t = f_0 \equiv \text{const}\,, \tag{26}$$

$$u(x,\,0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad u(0,\,t) = 0, \quad t \geqslant 0,$$

$$(u_x + \beta u_t + \gamma u)\big|_{x=1} = 0, \quad t \geqslant 0,\, \beta = \text{const} \gg 1, \quad \gamma = \text{const} \ll \beta,$$

заменял производную в (26) ее средним значением $\int\limits_0^1 u_t(x,\,t)dx$. Иначе говоря, С. М. Тарг аппроксимировал уравнения (26) нагруженным дифференциальным уравнением

$$u_{xx} - \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^1 u(\xi,\,t)d\xi = f_0.$$

И. С. Теплицкий [12], утверждая, что обычно в конкретных задачах уровенного прогноза по граничным условиям можно выяснить до некоторой степени характер распределения вдоль горизонтали величины $u_t$, полагает

$$u_t \approx \theta(t)\chi(x) \tag{27}$$

и заменяет уравнение Буссинеска (9) соотношением

$$k(u^2)_{xx} = 2\sigma\theta(t)\chi(x).$$

Очевидно,

$$\theta(t) = \frac{1}{L}\int\limits_0^l u_t(\xi,\, t)d\xi, \quad L = \int\limits_0^l \chi(\xi)d\xi \neq 0,$$

стало быть, уравнение (9) по существу, как и в [11], аппроксимируется нагруженным уравнением в частных производных

$$kL(u^2)_{xx} = 2\sigma\chi(x)\,\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^l u(\xi,\, t)d\xi. \tag{28}$$

Если, исходя из начальных, граничных и нелокальных условий, например, вида (22) или же из решения обратных (идентификационных) задач, действительно удается определить функции $\theta(t)$ и $\chi(x)$ из (27), то, как и выше, есть смысл поставить в соответствие уравнению (9) уравнение гиперболического типа

$$k\theta(t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\chi(x)u\right] = \sigma\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{29}$$

которое может более точно, чем (28), аппроксимировать (9).

Рассмотрим, в частности, задачу фильтрации из канала в сухой грунт при равномерном подъеме в нем уровня воды [7]. В качестве математической модели этой задачи предлагается (см. также [9]) следующая нелокальная краевая

**Задача А.** *В области* $\Omega = \{(x,\, t)\colon 0 < x < l(t),\ 0 < t < T\}$ *требуется найти решение* $u = u(x,\, t)$ *уравнения Буссинеска* (9) *и функцию* $l = l(t)$, *удовлетворяющую условиям*

$$u(0,\, t) = \varphi(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{30}$$

– *закон изменения уровня воды в канале* ($\varphi(t) = \alpha t,\ \alpha = \text{const} > 0$ *при равномерном подъеме в нем уровня воды);*

$$u(l,\, t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{31}$$

$$\sigma \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_0^{l(t)} u(\xi, t) d\xi = -k\varphi(t) \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{32}$$

Построим приближенное решение задачи А при $\varphi(t) = \alpha t$, аппроксимировав уравнение (9) уравнением вида (29), где $\theta(t) = \alpha$, $\chi(x) = 1$, а именно уравнением

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad c = \sqrt{\frac{\alpha k}{\sigma}}. \tag{33}$$

Передний край языка грунтовой воды перемещается вдоль непроницаемого водоупора $u = 0$, $x \geqslant 0$ на плоскости переменных $x$ и $u$ со скоростью $dx/dt = l'(t)$. На характеристике уравнения (33) $dx/dt = c$. Принимая это во внимание, естественно положить $l'(t) = c$. Так как $l(0) = 0$, то $l(t) = ct$. Теперь легко заметить, что единственное решение $u(, t)$ задачи Дарбу (30), (31) для уравнения (33) задается формулой

$$u(x, t) = (\alpha/c)\,(ct - x). \tag{34}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что найденные функции $l = ct$ и $u(x, t)$ из (34) обращают (32) в тождество.

Примечательно, что функция (34) является точным решением уравнения (9) и нагруженного уравнения Буссинеска

$$k \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} = \frac{2\sigma}{l} \int\limits_0^{l} u_t(\xi, t) d\xi,$$

которое получается из (28) при $\chi(x) \equiv 1$.

Если уровень воды в канале меняется по закону

$$u(0, t) = \varphi(t) = \frac{\alpha}{m+1} t^{m+1}, \; m = \text{const}\,,$$

то уравнение Буссинеска (9) можно аппроксимировать обобщенным уравнением Трикоми $u_{tt} = c^2 t^m u_{xx}$, общее решение которого выписывается в явном виде в [13].

Отметим также, что если уравнение влагопереноса Аллера [14]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[D(u) \frac{\partial u}{\partial x}\right] + A u_{xxt} \quad (A = \text{const}\,)$$

линеаризовать одним из приведенных выше приемов, то можно получить уравнение псевдогиперболического типа следующего вида:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + b u_{xxt},$$

которое описывает волновые процессы с диссипацией [15].

5. В заключение кратко остановимся на замечании о том, что *метод редукции к нагруженным уравнениям может оказаться весьма эффективным при отыскании приближенного решения* хорошо известного *уравнения Кортевега де Фриза*

$$u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = 0, \quad \beta = \text{const} > 0. \tag{35}$$

Уравнение (35), в частности, можно аппроксимировать одним из нагруженных дифференциальных уравнений, которое получается из него, если сомножитель $u = u(x,\, t)$ во втором слагаемом заменить одним из следующих приближенных значений:

$$\begin{gathered} u \approx c^i(x,\, t)u(x_i,\, t), \quad i = 1,\, 2,\, \ldots; \\ u \approx c^{ij}(x,\, t)u(x_i,\, t_j), \quad i,\, j = 1,\, 2,\, \ldots; \\ u \approx \frac{1}{L-l} \int\limits_l^L u(x,\, t)dx; \\ u \approx \frac{1}{T(L-l)} \int\limits_l^L dx \int\limits_0^T u(x,\, t)dt \equiv \overline{u}, \end{gathered} \tag{36}$$

где $x_i$, $(x_i,\, t_j)$ – характерные точки, выступающие в качестве узлов интерполирования; $l$, $L$ и $T$ — заданные величины.

В случае (36) уравнение Кортевега де Фриза (35) аппроксимируется нагруженным дифференциальным уравнением с кратными характеристиками

$$u_t + \overline{u}u_x + \beta u_{xxx} = 0. \tag{37}$$

Уравнение (37) заменой (см. [16], а также [17])

$$\xi = x - \overline{u}t, \quad \eta = t, \quad v = v(\xi,\, \eta) = u(\xi + \overline{u}\eta,\, \eta)$$

сводится к линеаризованному уравнению Кортевега де Фриза [16]

$$Kv \equiv v_\eta + \beta v_{\xi\xi\xi} = 0. \tag{38}$$

Неизвестная величина $\overline{u}$ может быть определена после обращения оператора $K$ в области его определения $D(K)$.

Рассмотрим, например, задачу Коши

$$u(x,\, 0) = \tau(x), \quad -\infty < x < +\infty,$$

для нагруженного уравнения (37). Если $u(x, t)$ – решение этой задачи, то функция $v(\xi, \eta)$ будет решением задачи Коши

$$v(\xi, 0) = \tau(\xi), \quad -\infty < \xi + \infty,$$

для уравнения (38). Так как (см. [16], с. 14)

$$v(\xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt[3]{3\beta\eta}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Ai\left(\frac{\xi - s}{\sqrt[3]{3\beta\eta}}\right) \tau(s)ds,$$

где $Ai(z)$ – функция Эйри, то нетрудно проверить, что неизвестная величина $\overline{u}$ должна удовлетворять уравнению

$$\overline{u} = \frac{\pi^{-1/2}(3\beta)^{-1/3}}{(L-l)T} \int\limits_{l}^{L} dx \int\limits_{0}^{T} \frac{dt}{\sqrt{t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Ai\left(\frac{x - \overline{u}t - s}{\sqrt[3]{3\beta t}}\right) \tau(s)ds.$$

**Литература**


1. Nakhushev A. M. Soviet Math. Docl. 1978. Vol. 19, no. 5.
2. Pomraning G. C , Larsen E. W. J. Math. Phys. 1980. Vol. 21, no. 7. Pp. 1603–1612.
3. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16, № 9.
4. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1958.
5. Бахвалов Н. С. Численные методы. М.: Наука, 1975.
6. Ионкин Н. И., Моисеев Е. И. Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 7.
7. Полубаринова-Кочина П. Я., Пряженская В. Г., Элих В. Н. Математические методы в вопросах орошения. М.: Наука, 1969.
8. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976.
9. Нахушев А. М. Краевые задачи для уравнений смешанного типа и родственные проблемы функционального анализа и прикладной математики (межвузовский сборник), вып. 2. Нальчик, 1979.
10. Ведерников В. В. Вестник сельскохозяйственной науки. М.: Колос, 1972.
11. Тарг С. М. Основные задачи ламинарных течений. М.–Л.: ГИТТЛ, 1951.
12. Теплицкий И. С. Некоторые вопросы расчета безнапорной неустановившейся фильтрации: автореф. дис. ... к.ф.-м.н. Ташкент, 1960.
13. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959.
14. Нерпин С. В., Чудновский А. Ф. Энерго- и массообмен в системе растение-почва-воздух. Л.: Гидрометеоиздат, 1975.
15. Виноградов М. В., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. М.: Наука, 1979.
16. Карпмон В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973.
17. Джураев Т. Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанносоставного типов. Ташкент: ФАН, 1979.


Поступила в редакцию
7 августа 1981 г.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и механики КБГУ

# Нагруженные уравнения и их приложения

За последние годы в связи с интенсивным исследованием задач оптимального управления агроэкосистемой, например, задачи долгосрочного прогнозирования и регулирования уровня грунтовых вод и почвенной влаги, существенно повысился интерес к нагруженным уравнениям [1–14].

В работах [1], [6] и [14] дано (общее) определение нагруженных интегральных, функциональных и дифференциальных уравнений.

Заданное в $n$-мерной области $\Omega$ евклидова пространства точек $z = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *уравнение* $L\omega = f(z)$ *мы назвали нагруженным, если оно содержит некоторые операции от следа искомого решения* $\omega = \omega(z)$ *на принадлежащих замыканию* $\overline{\Omega}$ *многообразиях размерности* $< n$.

Среди работ, посвященных нагруженным уравнениям и выполненных до 1976 г., особо следует отметить работы А. Кнезера [15], Л. Лихтенштейна, Н. М. Гюнтера (см. [16, с. 166]), Н. Н. Назарова [17], А. Ш. Габиб-заде [18], В. М. Будак и А. Д. Искендерова [19–21].

Простейшие нагруженные функциональные уравнения возникают при отыскании приближенного решения $\omega(z)$ интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$\omega(z) = \int\limits_{\Omega} K(z, y)\omega(y)d\Omega = f(z)$$

методом конечных сумм, когда полагают

$$\int\limits_{\Omega} K(z, y)\omega(y)d\Omega \approx \beta_j(z)\omega(z^j),$$

где $z^j$, $j = 1, 2, \ldots$ – узлы квадратурной (или кубатурной) формулы, и по повторяющемуся индексу подразумевается конечное суммирование. В результате для искомого приближенного решения получают уравнение

$$\omega(z) + \beta_j(z)\omega(z^j) = f(z),$$

которое, очевидно, является частным случаем более общего нагруженного функционального уравнения

$$\omega(z) + G(z)\omega[\alpha(z)] + \beta_j(z)\omega(z^j) = f(z),$$

где $G(z)$, $\beta_j(z)$ и $f(z)$ – заданные непрерывные в $\overline{\Omega}$ функции; $\alpha(z)$ – заданное топологическое отображение $\overline{\Omega}$ на компакт $\omega \subseteq \overline{\Omega}$; $z^j$ – фиксированные точки из $\overline{\Omega}$, $j = 1, 2, \ldots$

Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1983, **19**:1, 86–94.

В основе простейшей, но как отмечает Г. И. Марчук [22], практически интересной математической модели задачи переноса частиц в плоскопараллельной геометрии лежит уравнение

$$\frac{1}{c}\,\frac{\partial\omega(z)}{\partial z_3}+z_2\frac{\partial\omega(z)}{\partial z_1}+\sigma(z_1)\omega(z)=\frac{\sigma_s(z_1)}{2}\int\limits_{-1}^{1}\omega(z)dz_2+f(z),$$

где $\omega(z)=\omega(z_1,z_2,z_3)$ – плотность частиц в точке $z_1$ в момент времени $z_3\geqslant 0$, летящих со скоростью $c$ под углом $\theta$, $\cos\theta=z_2$, к прямой $z_3z_2=0$, $\sigma(z_1)$, $\sigma_s(z_1)$, и $f(z)$ – заданные функции. Это уравнение в трехмерной области $\Omega$ евклидова пространства точек $z=(z_1,z_2,z_3)$ представляет собой нагруженное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка.

Нагруженным является и стационарное односкоростное уравнение переноса [23]

$$\frac{1}{\alpha(z)}\sum_{j=1}^{3}y_j\,\frac{\partial\varphi(y,z)}{\partial z_j}+\varphi(y,z)=\frac{\lambda}{4\pi}\int\limits_{|\xi|=1}\theta(z,y,\xi)\varphi(\xi,z)d\xi+F(y,z)$$

в фазовой области $\left\{(y,z)\colon\ |y|=\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}=1,\ z\in\Omega\right\}$. Здесь $\varphi(y,z)$ – неизвестная функция, которая обозначает плотность частиц, летящих в направлении $y$, $|y|=1$, из точки $z=(z_1,z_2,z_3)$; $\alpha(z)$ – заданная в $\Omega$ положительная и ограниченная функция, характеризующая поглощение среды; $\lambda$ – спектральный параметр; $\theta(z,y,\xi)$ и $F(y,z)$ – заданные функции.

Если $\Omega$ – содержащая начало координат область на плоскости комплексного переменного $z=z_1+iz_2$, $\partial/\partial\overline{z}$ – оператор Коши–Римана, то уравнения вида

$$\frac{\partial\omega}{\partial\overline{z}}+A(z)\,\omega+R(z)\,\overline{\omega}+C(z)\,\omega(\mathrm{Re}\ z)+D(z)\,\omega(\mathrm{Im}\ z)+c(z)\,\overline{\omega}(\mathrm{Re}\ z)+$$
$$+d(z)\overline{\omega}\,(\mathrm{Im}\ z)+A_j(z)\,\omega(z^j)+B_j(z)\,\overline{\omega}(z^j)=f(z),\quad \omega=u+iv,$$

образуют весьма широкий класс нагруженных эллиптических систем двух уравнений с двумя неизвестными функциями $u=\mathrm{Re}\ \omega$ и $v=\mathrm{Im}\ \omega$.

Задача Дирихле для двухмерного уравнения Лапласа

$$\Delta_z u=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u(z)=0,\qquad z=x+iy,$$

в ее классической постановке и в случае круга $|z|<r$ эквивалентна задаче отыскания решения $u=u(z)$ нагруженного уравнения

$$\Delta_z u+u(r\exp(i\arg z))=f(z)$$

в классе функций, гармонических в круге $|z| < r$ и непрерывных при $|z| \leqslant r$. С другой стороны, задача поиска решений нагруженных дифференциальных уравнений в наперед заданных классах может привести к новым краевым задачам для ненагруженных уравнений. Это можно продемонстрировать на следующем примере.

Пусть $\Omega$ – соответствующая уравнению Лаврентьева–Бицадзе

$$Su \equiv \left( \operatorname{sign} y \, \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u(z) = 0$$

смешанная область, гиперболическая часть границы которой состоит из характеристик $AC\colon x + y = 0$ и $CB\colon x - y = 1$; $x_0, x_1, \ldots, x_n$ – заданные точки такие, что $1 = x_0 > x_1 > x_2 > \ldots > x_n > 0$; $2\theta_j(x) = x_j + x + i(x_j - x)$ – точка пересечения характеристики, выходящей из точки $x \in ]x_j,\, x_{j-1}[$ с характеристикой $x + y = x_j$. В области $\Omega$ рассмотрим нагруженное уравнение смешанного типа

$$Su + u[\theta_0(x)] = \sum_{j=m}^{n} \alpha_m^j(x) u[\theta_j(x)] \quad (u(z) \equiv u[z]),$$

где $m$ является целочисленной функцией от $x$, а именно $m(x) = k$ для всех $x \in ]x_k,\, x_{k-1}[$. Легко видеть, что если решения этого уравнения искать в классе $U = \{u\colon u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega),\ Su = 0,\ u|_\sigma = \varphi(z),\ u[\theta_0(x)] = \psi(x),\ 0 \leqslant x \leqslant x_n\}$, где $\sigma$ – эллиптическая часть границы $\partial\Omega$ области $\Omega$; $\varphi$ и $\psi$ – заданные достаточно гладкие функции, то мы придем к новой краевой задаче для уравнения Лаврентьева–Бицадзе с нелокальным условием вида

$$u[\theta_0(x)] = \sum_{j=m}^{n} \alpha_m^j(x) u[\theta_j(x)].$$

Заметим, что при $n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ условие $u[\theta_0(x)] = \psi(x)$, $0 \leqslant x \leqslant x_n$, может оказаться дополнительным.

При решении прикладных задач, как правило, заранее задаются точки $z^1$, $z^2$, $\ldots$, $z^m$ области, где исследователю хочется знать значение искомого решения $\omega(z)$ тех или иных задач для дифференциальных или интегро-дифференциальных уравнений, например задачи Дирихле: $\omega|_{\partial\Omega} = \varphi(z)$ для уравнения

$$\Delta_z \omega = C(z)\omega(z) + \int\limits_\Omega \lambda(z, y)\omega(y)dy$$

с оператором Лапласа по переменным $z_1$, $z_2$, $\ldots$, $z_n$ в ограниченной области с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Если в этом уравнении слагаемое

$C(z)\omega(z)$ заменить выражением $C(z)\alpha_j(z)\omega(z^j)$, где $\omega(z) \approx \alpha_j(x)\omega(z^j)$, $j = 1, 2, \ldots, m, m+1, \ldots, m^*$, – интерполяционная формула, которая не выводит за пределы допустимых (исследователем) погрешностей аппроксимации, то естественным образом придем к нагруженному интегро-дифференциальному уравнению эллиптического типа. Если же положить $\lambda(z, y) > 0$ для всех $(z, y) \in \overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$ и интеграл аппроксимировать суммой $\lambda_j(z)\omega(z^j)$, то с необходимостью возникает вопрос о спектре однородной задачи Дирихле $\omega|_{\partial\Omega} = 0$ для нагруженного уравнения

$$\Delta_z\omega - C(z)\omega = \lambda_j(z)\omega(z^j). \tag{1}$$

Оставив этот вопрос открытым, заметим, что если

$$C(z) < 0, \ \ \lambda_j(z) = \text{const } = \lambda_j > 0, \ z \in \Omega, \ \ j = 1, 2, \ldots, N, \tag{2}$$

и $\omega(z)$ – регулярное в области $\Omega$ и непрерывное в $\overline{\Omega}$ решение однородной задачи Дирихле для уравнения (1), то $\omega(z) \equiv 0$. Действительно, пусть $\max\limits_{\Omega} \omega(z) = \omega(\hat{z}) > 0$. Тогда поскольку $\Delta_{\hat{z}}\omega \leqslant 0$, то из (1) и (2) заключаем $\lambda_j\omega(z^j) < 0$. Следовательно, существует такая точка $z^k \in \Omega$, что

$$\omega(z^k) < 0. \tag{3}$$

В силу (3) в области $\Omega$ найдется точка $\check{z}$ такая, что $\min\limits_{\Omega} \omega(z) = \omega(\check{z}) < 0$. Так как $\Delta_{\check{z}}\omega \geqslant 0$, то из (1) и (2) имеем $\lambda_j\omega(z^j) > 0$. Теперь ясно, что $\omega(z) \equiv 0$.

Установленный факт безусловно остается в силе, если в (1) оператор $\Delta_z + C(z)$ заменить любым дифференциальным оператором, для которого имеют место принципы Хопфа и Заремба–Жиро [24].

Задача Дирихле $\omega(0) = \omega_0$, $\omega(1) = \omega_1$ для уравнения (1), при $n = 1$ $(z \equiv z_1)$, $C(z) \equiv \text{const } = C$, $\lambda_j(z) \equiv \text{const } = \lambda_j$, $\Omega = \{z \colon 0 < z < 1\}$, как это следует из непосредственных вычислений, выполненных В. М. Казиевым по схеме редукции к нагруженному функциональному уравнению (см. пример 2 в [10]), однозначно разрешима тогда и только тогда, когда

$$\lambda_j \operatorname{sh} \frac{z^j\sqrt{C}}{2} \operatorname{sh} \frac{(1 - z^j)\sqrt{C}}{2} \neq -\frac{C}{2} \operatorname{ch} \frac{\sqrt{C}}{2} \ (j = 1, 2, \ldots, N), \quad \text{если } \ C > 0,$$

и

$$\lambda_j \sin \frac{z^j\sqrt{-C}}{2} \sin \frac{(1 - z^j)\sqrt{-C}}{2} \neq \frac{C}{2} \cos \frac{\sqrt{-C}}{2}, \quad \text{если } \ C < 0.$$

**1. Нелокальные задачи и их связь с нагруженными уравнениями.** А. В. Бицадзе и А. А. Самарский в работе [25] предложили качественно новую краевую задачу для эллиптических уравнений в частных производных. Эта задача для двухмерного уравнения Лапласа

$$\Delta_z u \equiv u_{xx} + u_{yy} = 0, \ \ z = x + iy$$

и в случае прямоугольной области $\Omega = \{z\colon |x| < l,\ 0 < y < 1\}$ ставится следующим образом.

**Задача Бицадзе–Самарского.** *Найти гармоническую в области $\Omega$ функцию $u(z) = u(x, y)$, непрерывную в $\overline{\Omega}$ и удовлетворяющую условиям*

$$u(x) = \varphi_1(x),\ u(x+i) = \varphi_2(x),\ |x| \leqslant l,\ u(iy-l) = \varphi_3(y),\ 0 \leqslant y \leqslant 1, \quad (4)$$

$$u(l + iy) = u(iy), \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, \quad (5)$$

*где $\varphi_1$, $\varphi_2$ и $\varphi_3$ – заданные непрерывные на сегменте $[0, 1]$ функции.*

Докажем, что задача Бицадзе–Самарского редуцируется к задаче Дирихле для нагруженного уравнения

$$\Delta_z v + \frac{x+l}{2l}\,\frac{d^2}{dy^2}\,v(iy) = 0, \quad z \in \Omega. \quad (6)$$

В самом деле, пусть $u(z)$ – регулярное решение уравнения Лапласа, удовлетворяющее условиям (4) и (5). Рассмотрим функцию

$$v(z) = u(z) - \frac{x+l}{2l} u(iy). \quad (7)$$

На основании (4) и (5) легко видеть, что

$$v(x) = \varphi_1(x) - \frac{x+l}{2l}\varphi_1(0),\ v(x+i) = \varphi_2(x) - \frac{x+l}{2l}\varphi_2(0),\ |x| \leqslant l, \quad (8)$$

$$v(iy-l) = u(iy-l) = \varphi_3(y), \quad v(l+iy) = 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1. \quad (9)$$

Поскольку $v(iy) = u(iy)$, то функция (7) будет регулярным в $\Omega$ и непрерывным в $\overline{\Omega}$ решением задачи Дирихле (8), (9) для уравнения (6), что и требовалось доказать.

В этой же области $\Omega$ рассмотрим теперь (локальную краевую) задачу Дирихле, т. е. задачу (4) и (5), где нелокальное условие (5) заменено условием

$$u(l+iy) = \varphi_4(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, \quad (10)$$

для нагруженного уравнения

$$\Delta_z u = \lambda_j(y) u(x^j, y), \quad |x^j| < l \quad \forall\, j = 1, 2, \ldots, m. \quad (11)$$

Докажем, что если $\varphi_4(y) \in C^2[0, 1]$, то задача Дирихле (4), (10) для нагруженного уравнения (11) редуцируется к следующей нелокальной задаче:

$$v(iy-l) = v(iy+l) + \alpha(y), \quad 0 < y < 1, \quad (12)$$

$$\left(-\frac{d^2}{dy^2} + \lambda\right) v(iy+l) = \lambda_j(y) v(x^j + iy) + \beta(y), \quad 0 < y < 1, \quad (13)$$

$$v(x) = \varphi_1(x),\ \ v(x+i) = \varphi_2(x), \quad |x| \leqslant l, \tag{14}$$

где

$$\lambda = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(y),\ \ \alpha(y) = \varphi_3(y) - \varphi_4(y),\ \ \beta(y) = \lambda\varphi_4(y) - \varphi_4''(y), \tag{15}$$

для уравнения Лапласа

$$\Delta_z v = 0. \tag{16}$$

Действительно, любое решение $u(z)$ уравнения (11) представляет собой решение составного типа уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\Delta_z u = 0,$$

стало быть (см. [26]),

$$u(z) = v(z) + \omega(y), \quad \omega(0) = \omega(1) = 0, \tag{17}$$

где $v(z)$ – гармоническая в области $\Omega$ функция, а $\omega(y)$ в силу (4) и (10) такова, что

$$\omega(y) = \varphi_4(y) - v(iy + l) = \varphi_3(y) - v(iy - l). \tag{18}$$

Из (15) и (18) имеем первое нелокальное условие (12). Для получения второго условия (13) подставим (17) в (11). В результате будем иметь

$$\omega''(y) = \lambda_j(y)[v(x^j + iy) + \omega(y)],$$

или

$$\omega''(y) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(y)\omega(y) = \lambda_j(y)v(x^j + iy).$$

Отсюда, принимая во внимание (18) и обозначения (15), заключаем, что решение $v(z)$ уравнения (16) должно удовлетворять нелокальному условию (13). Справедливость локальных краевых условий (14) прямо вытекает из (17).

В частном случае, когда $m = 1$, $\lambda_1(y) > 0$ для всех $y \in [0, 1]$, единственность решения $u(z)$ задачи Дирихле для уравнения (1) следует из следующего принципа экстремума для решения $v(z)$ соответствующей нелокальной задачи (12)–(14) для уравнения (16): *если* $\alpha(y) \equiv 0$, $\beta(y) \equiv 0$, $v(z) \not\equiv \mathrm{const}$, *то положительный максимум и отрицательный минимум функции* $v(z)$ *в* $\overline{\Omega}$ *достигается на части* $y(y-1) = 0$, $|x| \leqslant l$ *границы* $\partial\Omega$, *которая является носительницей локальных условий* (14).

Для одномерного уравнения теплопроводности

$$u_t = u_{xx} \tag{19}$$

в области $D = \{(x,t)\colon 0 < x < 1,\ 0 < t < T\}$ рассмотрим следующую нелокальную задачу, которая исследовалась в работа [27], [28] (см. также [10]):

$$u(0,t) = \tau(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{20}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^1 u(\xi,t)d\xi = \nu(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{21}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{22}$$

Заданные функции $\tau$, $\nu$ и $\varphi$ предполагаются достаточно гладкими, а решение $u = u(x,t)$ – классическими непрерывным в $\overline{D}$.

Непосредственным вычислением можно убедиться, что замена

$$v(x,t) = (1-x)u(x,t) + \int\limits_0^x u(\xi,t)d\xi,$$

которая обращается по формуле

$$u(x,t) = \frac{v(x,t)}{1-x} + \int\limits_0^x \frac{v(\xi,t)}{(1-\xi)^2}d\xi$$

редуцирует нелокальную задачу (20)–(22) для уравнения (19) к первой краевой задаче $v(0,t) = \tau(t)$, $v(1,t) = \mu(t)$, $v(x,0) = \Phi(x)$, $t \in [0,T]$, $x \in [0,1]$, для нагруженного уравнения параболического типа

$$v_t = v_{xx} + \frac{1}{1-x}v_x + (x-1)\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^x \frac{v(\xi,t)}{(1-\xi)^2}d\xi,$$

где $\mu(t) = \int\limits_0^t \nu(s)ds + \int\limits_0^1 \varphi(x)dx$, $\Phi(x) = (1-x)\varphi(x) + \int\limits_0^x \varphi(x)dx$.

Здесь уместно отметить, что сеточные уравнения, соответствующие нагруженному уравнению теплопроводности с полностью локальными условиями и уравнению теплопроводности (19) с нелокальными условиями, приводятся по существу к одному алгоритму, который в определенном смысле можно считать одним из вариантов метода циклической прогонки (см. [4] и [27]).

Аналоги задачи (20), (22) для двухмерного уравнения теплопроводности $u_t = u_{xx} + u_{yy}$, $|x| < l$, $0 < y < 1$, естественным образом приводят к нелокальным задачам вида

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u(x,1) = \psi(x),\ u(l,y) = \tau(y),\ |x| \leqslant l,\ y \in [0,1], \qquad (23)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{-l}^{l} u(\xi, y)d\xi = \nu(y), \quad y \in [0,1], \qquad (24)$$

для уравнения

$$u_{xx} + u_{yy} = \lambda u. \qquad (25)$$

При численной реализации задачи (23), (24) для (25) может оказаться весьма полезной замена условия (24) (пользуясь одной из квадратурных формул) нелокальным условием вида

$$\alpha_j(y)u(x^j, y) = \mu(y),\ \ \mu(y) = \int\limits_0^y \nu(t)dt + \alpha_j(0)u(x^j, 0), \qquad (26)$$

которое является непосредственным обобщением нелокального условия Бицадзе–Самарского (5).

Задача (23), (26) для уравнения (25) с $\lambda \equiv 0$ посвящена работе Е. П. Ерошенкова (см. [13, с. 105]).

**2. Об одной нелокальной задаче для уравнений математической биологии.** В первую очередь хочется отметить, что если сопоставить историю развития математической физики с происходящим процессом зарождения теоретической биологии, особенно математической экологии [29–35], то можно с определенной уверенностью утверждать, что в ближайшие десятилетия будут заложены основы теории уравнения математической биологии, предметом которой станет исследование дифференциальных уравнений, описывающих модели различных биологических процессов и явлений. Достаточно, например, отметить, что в настоящее время нет удовлетворительной теории краевых задач даже для уравнения

$$u_t = \beta(y^2 - xy)u_{xy} + \gamma(1-y)u_y + \mu(x-1)u, \quad (\beta, \gamma,\ \mu = \mathrm{const}\,),$$

которое возникает в теории эпидемии [33] и относится к классу уравнений в частных производных ультрапараболического (псевдопараболического) типа.

Среди работ, посвященных краевым задачам для модельных уравнений второго порядка псевдопараболического типа, следует особо отметить работы А. А. Дезина [36], [37].

Здесь уместно отметить, что дифференциальные операторы и соответствующие им граничные условия, которые являются «патологическими» (см. [36]) в теории уравнений математической физики, могут стать типичными (не «патологическими») в теории уравнений математической биологии.

При определенных предположениях количество $u = u(x,t)$ клеток возраста $x \geqslant 0$ в единице объема и в момент времени $t$ описывается уравнением неразрывности Фон-Ферстера

$$u_t + u_x + [\alpha(t) + \beta(x,t) + \gamma(x,t)]\, u = 0, \quad 0 < x < l,\ 0 < t < T. \qquad (27)$$

Здесь (см. Н. В. Степанова [35, с. 95]) $\alpha$ – скорость притока клеток; $\beta$ и $\gamma$ – удельные скорости гибели и деления клеток, достигших возраста $x$; $l$ – продолжительность жизни клеток всех возрастов $x \leqslant l \leqslant \infty$; $T$ – расчетное время.

Для уравнения (27) естественным образом возникает [34] следующая нелокальная краевая задача: *найти регулярное в области*

$$\Omega = \{(x,t)\colon 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$$

*непрерывное в* $\overline{\Omega}$ *решение* $u(x,t)$ *уравнения* (27), *удовлетворяющее условиям*

$$u(x,0) = \tau(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \qquad (28)$$

$$u(0,t) = \varepsilon \int\limits_0^l \gamma(\xi,t) u(\xi,t) d\xi, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \qquad (29)$$

*где параметр* $\varepsilon = 1$ *для клеток, размножающихся почкованием.* Условие (28) задает начальное возрастное распределение клеток, а (29) выражает прибыль клеток в нулевой возраст при делении родительских клеток всех возрастов $x \leqslant l$.

Обратимая замена

$$v(x,t) = u(x,t) - \varepsilon \int\limits_x^l \gamma(\xi,t) u(\xi,\, t) d\xi$$

сводит нелокальную задачу (28), (29) для уравнения (27) к локальной задаче

$$v(0,t) = 0,\ \ v(x,0) = \tau(x) - \varepsilon \int\limits_x^l \gamma(\xi,0)\tau(\xi) d\xi$$

для нагруженного уравнения (относительно $v$) в частных производных первого порядка.

При численной реализации на ЭВМ условие (29) можно заменить условием

$$u(0,t) = \gamma_j(t)u(x^j,t), \quad j = 1,2,\ldots,n^*. \tag{30}$$

Стационарный вариант задачи (27)–(29) имеет вид

$$u'(x) = \lambda(x)u(x),\ \lambda(x) = \alpha + \gamma(x), \quad \alpha = \mathrm{const}\,, \tag{31}$$

$$u(0) = \varepsilon \int\limits_0^l \gamma(x)u(x)dx. \tag{32}$$

Пусть $u(x) \approx c_j(x)u(x^j)$, $j = 1,2,\ldots,p$ – соответствующая искомой функции $u(x)$ интерполяционная формула (например, Лагранжа) с узлами интерполирования $x^1$, $x^2,\ldots,x^p$ из сегмента $[0,l]$, а

$$u(0) = \gamma_j u(x^j), \quad j = p+1, p+2, \ldots, q, \tag{33}$$

– аналог (30) в случае (32). Тогда нелокальную задачу (32) для уравнения (31) можно аппроксимировать (см. [14]) задачей (33) для нагруженного дифференциального уравнения первого порядка

$$u'(x) = \lambda_j(x)u(x^j), \quad j = 1,2,\ldots,p, \tag{34}$$

где $\lambda_j(x) = \lambda(x)c_j(x)$. Из (34) с учетом (33) имеем

$$u(x) = [\beta_j(x) + \gamma_j]\, u(x^j), \quad j = 1,2,\ldots,q, \tag{35}$$

где $\beta_j(x) = \int\limits_0^x \lambda_j(\xi)d\xi$. Следовательно, задача по существу свелась к следующей системе алгебраических уравнений:

$$u_i = (\beta_{ij} + \gamma_j)u_j, \quad u_i = u(x^i), \quad \beta_{ij} = \beta_j(x^i), \quad i = 1,2,\ldots,q.$$

Нелокальное условие типа (29) для уравнения вида

$$Au \equiv u_t + u_x + c(x,t)u = 0 \tag{36}$$

возникает и при моделировании динамики популяции биологических объектов [30].

Для уравнения (36) с коэффициентом $c(x,t) \in C(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ корректна следующая

**Задача А.** *Найти регулярное всюду в области* $\Omega = \{(x,t)\colon 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$, *за исключением характеристики* $x = t$, *решение* $u = u(x,t)$ *уравнения* (36), *непрерывное в* $\overline{\Omega}$, *удовлетворяющее условию* (28) *и нелокальному краевому условию*

$$u(0,t) = \int\limits_0^t k(x,t)u(x,t)dx + \psi(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{37}$$

*$k(x,t)$ и $\psi(t)$ – заданные достаточно гладкие в $\overline{\Omega}$ функции, $\psi(0)=\tau(0)$.*

Действительно, уравнение (36) заменой $\xi = x-t$, $\eta = x+t$ редуцируется к уравнению $2u_\eta + cu = 0$. Поэтому любое решение задачи A представимо в виде

$$u(x,t) = \begin{cases} \tau(x-t)\,\omega(x,t), & x \geqslant t, \\ \chi(t-x)\,\omega(x,t), & x \leqslant t, \end{cases} \tag{38}$$

где

$$\omega(x,t) = \exp\left[-\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} c\left(\frac{s+x-t}{2}, \frac{s-x+t}{2}\right) ds\right], \tag{39}$$

$\chi(t)$ – произвольная функция из класса $C[0,T] \cap C^1]0,T[$. Из (37) на основании (38) для искомой функции $\chi(t)$ получаем интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\omega(0,t)\chi(t) = \int\limits_0^t k(t-\xi,t)\,\omega(t-\xi,t)\,\chi(\xi)d\xi + \psi(t),$$

которое, как хорошо известно, однозначно разрешимо.

Поскольку условие (28) единственным образом определяет решение $u(x,t)$ уравнения (27) в характеристической полосе $0 \leqslant x-t \leqslant l$, то нелокальное краевое условие (29) сводится к условию (37) с $k(x,t) = \varepsilon\gamma(x,t)$ и

$$\psi(t) = \varepsilon\int\limits_t^l \gamma(x,t)\,\tau(x-t)\,\omega(x,t)dx,$$

где $\omega(x,t)$ находится по формуле (39), полагая

$$c(x,t) = \alpha(t) + \beta(x,t) + \gamma(x,t).$$

Биологический содержательный смысл имеет задача A и для нагруженного дифференциального уравнения

$$Au + u(x,t)\int\limits_0^\infty c(x,t)\,u(x,t)dx = 0.$$

В частности, если $c(x,t)$ – удельная скорость деления клеток (см. [34, с. 103]), $k(x,t) = 2c(x,t)$, то этому уравнению удовлетворяет нормированное возрастное распределение непрерывной культуры.

В заключение отметим, что многие краевые задачи для уравнения математической биологии являются нелокальными. Например, при определенных условиях краевая задача

$$u(0,t) = u(1,t), \quad u_x(0,t) = u_x(1,t)$$

для уравнения вида

$$u_t = u_{xx} - \alpha \frac{u(x,t-\tau) - \beta}{\beta} u(x,t), \ \alpha, \, \beta = \text{const} \, > 0,$$

является математической моделью процесса размножения отдельной популяции в биологическом реакторе, имеющем форму достаточно длинной трубки, замкнутой в кольцо (см. [35, с. 47]).

**Литература**

1. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 1. С. 103–108.
2. Нахушев А. М., Борисов В. Н. Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 1. С. 105–110.
3. Эщдавлатов Э. Уч. зап. МВ и ССО АзССР. Сер. физ.-мат. наук. 1976. № 6. С. 29–35.
4. Шхануков М. Х. Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 1. С. 163–167.
5. Нахушев А. М. Докл. АН СССР. 1978. Т. 242, № 5. С. 1008–1011.
6. Nakhusev A. M. Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1978. Vol. 242, no. 5. Pp. 1243–1247.
7. Бородин А. В. Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14, № 1. С. 11–21.
8. Казиев В. М. Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14, № 1. С. 181–184.
9. Казиев В. М. Дифференц. уразнения. 1979. Т. 15, № 1. С. 173–175.
10. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 1. С. 96–105.
11. Ланин И. Н. Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, № 1. С. 97–106.
12. Казиев В. М. Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, № 2. С. 313–319.
13. Кадомский А. М., Нахушев А. М. и др. Некоторые математические аспекты построения САПР гидромелиоративных систем и систем сельхозводоснабжения // Математические методы в мелиорации. Межвуз. сб. Нальчик, 1981. 213 с.
14. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 1. С. 72–81.
15. Kneser A. Rendicon ti del circolo matematico di palermo. 1914. Vol. 37. Pp. 169–197.
16. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 4. М. – Л.: ГИТТЛ, 1951. 804 с.
17. Назаров Н. Н. Об одном новом классе линейных интегральных уравнений // Труды Ин-та мат. и мех. АН УзССР. 1948. Вып. 4. С. 77–106.
18. Габиб-заде А. Ш. Исследование решения одного класса линейных нагруженных интегральных уравнений // Труды Ин-та физ. и мат. АН АзССР. Сер. мат. 1959. Т. 8. С. 177–182.
19. Будак В. М., Искендеров А. Д. Докл. АН СССР. 1967. Т. 176, № 1. С. 20–23.
20. Искендеров А. Д. Докл. АН СССР. 1971. Т. 199, № 6. С. 1237–1239.
21. Искендеров А. Д. Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, № 10. С. 1911–1913.
22. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977. 455 с.
23. Владимиров В. С. Труды мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1961. Т. 61. 158 с.
24. Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.
25. Бицадзе А. В., Самарский А. А. Докл. АН СССР. 1969. Т. 185, № 4. С. 739–740.
26. Салахитдинов М. С. Уравнения смешанно-составного типа. Ташкент: Фан, 1974. 156 с.

27. Ионкин Н. И. Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 2. С. 294–304.
28. Ионкин Н. И., Моисеев Е. И. Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 7. С. 1284–1295.
29. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976. 288 с.
30. Ляпунов А. А., Багриновская Г. П., Свирежев Ю. М. и др. Математическое моделирование в биологии. М.: Наука, 1975. 156 с.
31. Свирежев Ю. М., Логофет Д. Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978. 352 с.
32. Термодинамика и кинетика биологических процессов (Коллективная монография). М.: Наука, 1980. 400 с.
33. Бейли Н. Математика в биологии и медицине. М.: Мир, 1970. 326 с.
34. Степанова Н. В. Математические модели непрерывней культуры микроорганизмов, распределенных по возрастам и размерам. Математические модели в экологии. Межвуз. сб. Горький: Изд-во ГГУ, 1980. С. 95–113.
35. Горяченко В. Д., Денисов В. А., Иванов Б. Н., Казакова Т. В. К динамике одной диффузионной системы. Математические модели в экологии. Межвуз. сб. Горький: Изд-во ГГУ, 1980. С. 47–61.
36. Дезин А. А. Докл. АН СССР. 1963. Т. 148, № 5. С. 1013–1016.
37. Дезин А. А. Изв. АН СССР. Сер. мат. 1967. Т. 31, № 1. С. 61–86.

Поступила в редакцию
7 июля 1982 г.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и механики КБГУ

# Краевые задачи в многомерных областях

## Об одном трехмерном аналоге задачи Геллерстедта

**1. Постановка задачи.** Введем следующие обозначения:

1) $D$ – односвязная цилиндрическая область трехмерного евклидова пространства переменных $x$, $y$ и $z$, ограниченная поверхностью $\Gamma = \sum\limits_{n=0}^{4} \Gamma_n$, где

$$\Gamma_0\colon x^2 + \frac{4}{9}y^3 = a^2,\ \ y \geqslant 0;\ \ \Gamma_1\colon \frac{2}{3}(-y)^{3/2} - x = -x_0;$$

$$\Gamma_2\colon \frac{2}{3}(-y)^{3/2} + x = x_0;\ \ \Gamma_3\colon \frac{2}{3}(-y)^{3/2} + x = a;$$

$$\Gamma_4\colon \frac{2}{3}(-y)^{3/2} - x = a,\ y \leqslant 0,\ |x_0| \leqslant a > 0;$$

2) $\Omega = D \cap (z = 0)$, $\ \Omega_1 = \Omega \cap (y > 0)$, $\ \Omega_2 = \Omega \cap (y < 0)$,

$\Delta_1 = \Omega_2 \cap (x > x_0)$, $\ \Delta_2 = \Omega_2 \cap (x < x_0)$, $\ \sigma_n = \Gamma_n \cap (z = 0)$, $n = 1, 2, \ldots, 4$,

$A_1 = \sigma_0 \cap \sigma_4$, $\ A_0 = \sigma_1 \cap \sigma_2$, $\ A_2 = \sigma_0 \cap \sigma_3$, $\ \overline{J} = \overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2$, $\ \overline{J}_1 = \overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Delta}_1$,

$\overline{J}_2 = \overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Delta}_2$, $\ \dot{J} = J \backslash A_0$, $\ d = \pi/[(27a^2/2)^{1/3}(a + |x_0|)^{1/3} + 3(a + |x_0|/2)]$;

3) $\Omega^*$ – прямое произведение двух областей $\Omega$ и $\Lambda = (|\lambda| < d)$, т. е. $\Omega^* = \Omega \times \Lambda$; $J^* = J \times \Lambda$, $J_n^* = J_n \times \Lambda$, $n = 1, 2$;

4) $L(-\infty, \infty)$ – множество функций, определенных в $D$ и абсолютно интегрируемых по переменной $z$ в интервале $(-\infty, \infty)$;

5) $C_{xy}^k(\Omega^*)$ – множество функций $\mu(x, y, \lambda)$, определенных на $\Omega^*$, у которых существуют и непрерывны все производные до порядка $k$ включительно по переменным $x$, $y$ при любом $\lambda$;

6) $C_{0xy}^k(\Omega^*)$ – множество всех функций из $C_{xy}^k(\Omega^*)$, носители которых компактны и лежат в $\Omega^*$.

Будем говорить, что функция $\hat{\mu}(x, y, z)$ из $L(-\infty, \infty)$ принадлежит классу $\widehat{C}_{xy}^k(D)(\widehat{C}_{0xy}^k(D))$, если ее преобразование Фурье

$$\mu(x, y, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{\mu}(x, y, z) e^{i\lambda z} dz \tag{1}$$

принадлежит $C_{xy}^k(\Omega^*)(C_{0xy}^k(\Omega^*))$.

---

Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1968, **4**:1, 52–62.

**Задача 1 (трехмерный аналог задачи Геллерстедта).** *Требуется найти регулярное в области $D$ решение $\hat{u}(x,\, y,\, z)$ уравнения*

$$y\,(\hat{u}_{xx} + \hat{u}_{zz}) + \hat{u}_{yy} = \hat{f}(x,\, y,\, z), \tag{2}$$

*непрерывное в замкнутой области $\overline{D}$ и обращающееся в нуль на поверхностях $\Gamma_0$, $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$.*

Безусловная и однозначная разрешимость задачи 1 для уравнения $y\hat{u}_{xx}+\hat{u}_{yy}+\hat{u}_{zz}=\hat{f}$ случае, когда $x_0=-a=-1$ доказана А. В. Бицадзе [1].

Для уравнения (2) М. Проттером исследован ряд краевых, в основном гиперболических, задач (см. [2]). В дальнейшем будем предполагать, что $\hat{f} \in \widehat{C}^3_{0xy}(D)$, а $f(x,\, y,\, \lambda) \in C^2_\lambda\left(\Omega \times \overline{\Lambda}\right) \cap C^1\left(\overline{\Omega}^*\right)$, где $f$ связана с $\hat{f}$ по формуле (1).

Ниже будет доказана однозначная и безусловная разрешимость задачи 1 в классе $\widehat{C}^2_{0xy}(D)$ при некоторых предположениях относительно поведения производных от искомого решения $\hat{u}$ вблизи гиперболической части границы $\Gamma$ области $D$.

Очевидно, множество $\widehat{C}^2_{0xy}(D)$ в силу известной теоремы Пэли–Винера (см. [3]) не пусто.

Нетрудно увидеть, что если $\hat{u} \in \widehat{C}^2_{0xy}(D)$ и является решением задачи 1, то его преобразование Фурье $u$ по переменному $z$ есть регулярное в области $\Omega$ решение уравнения

$$yu_{xx} + u_{yy} - \lambda^2 yu = f(x,\, y,\, \lambda), \tag{3}$$

непрерывное в $\overline{\Omega}$ и обращающееся в нуль на $\sigma_0 \cup \sigma_1 \cup \sigma_2$. Имеет место и обратное утверждение.

Таким образом, задача 1 в классе $\widehat{C}^2_{0xy}(D)$ эквивалентно редуцируется к плоской задаче Геллерстедта (задача 2) для уравнения (3).

**2. Принцип экстремума (единственность).** Имеет место следующая

**Лемма 1.** *Пусть* 1) $u(x,\, y) \in C(\overline{\Delta}_1)$ *есть регулярное в области* $\Delta_1$ *решение уравнения*

$$yu_{xx} + u_{yy} - \lambda^2 yu = 0, \qquad |\lambda| < d, \tag{4}$$

*обращающееся в нуль на* $\sigma_1$; 2) *производная от функции* $u$ *по направлению характеристик семейства* $x - \dfrac{2}{3}(-y)^{3/2} = \mathrm{const}$ *существует и непрерывна в* $\overline{\Delta}_1 \backslash \overline{J}_1$. *Тогда положительный максимум и отрицательный минимум функции*

$$v(x,\, y) = u(x,\, y) \exp\left(-\int\limits_0^y \omega(t)dt\right),$$

*где $\omega(y)$ – неположительное, регулярное на сегменте*

$$(9a^2/4)^{1/3} \geqslant y \geqslant -\alpha^2 = -[3(a+|x_0|)/4]^{2/3}$$

*решение дифференциального неравенства $\omega' + \omega^2 \leqslant \lambda^2 y$, в $\overline{\Delta}_1$ достигается на $\overline{J}_1$.*

В качестве $\omega(y)$ можно взять, например, функцию

$$\omega = -\alpha\lambda \operatorname{tg}[\alpha\lambda(y+\alpha^2)].$$

Очевидно, $v$ есть решение уравнения

$$yv_{xx} + v_{yy} + 2\omega v_y + \left(\omega' + \omega^2 - \lambda^2 y\right) v = 0 \tag{5}$$

в $\Delta_1$, удовлетворяющее всем требованиям леммы 1. Справедливость леммы 1 будет установлена по схеме, предложенной в [4], где она доказана (как увидим ниже) для случая, когда $v \in C^1\left(\overline{\Delta}_1 \backslash A_0 \backslash A_1\right)$.

В (5) перейдем к характеристическим переменным

$$\xi = x - x_0 - \frac{2}{3}(-y)^{3/2}, \quad \eta = x - x_0 + \frac{2}{3}(-y)^{3/2}. \tag{6}$$

В результате будем иметь

$$v_{\xi\eta} + b(\xi,\,\eta)(v_\xi - v_\eta) + c(\xi,\,\eta)v = 0, \tag{7}$$

где

$$b = \frac{1}{8}(-y)^{-3/2}(1+4y\omega), \;\; c = (\omega' + \omega^2 - \lambda^2 y)/(4y).$$

Уравнение (7) можно переписать в виде (см. [4])

$$(b_1 v_\eta)_\xi + (a_1 v)_\xi + c_1 v = 0, \tag{8}$$

где

$$b_1 = \exp\left(-\int b d\xi\right), \;\; a_1 = bb_1, \;\; c_1 = b_1 c - a_{1\xi}.$$

Непосредственное вычисление показывает, что

$$a_1 > 0, \;\; b_1 > 0, \;\; c_1 \leqslant 0, \;\; c \geqslant 0 \tag{9}$$

в замкнутой области $\overline{\Delta}$, которая является образом $\Delta_1$ при отображении (6).

Пусть $\max\limits_{\overline{\Delta}} v(\xi,\,\eta) = v(\xi_0,\,\eta_0) > 0$ и $\xi_0 \neq \eta_0$. Тогда точка

$$\zeta_0 = (\xi_0,\,\eta_0) \in \Delta \cup (\eta = a - x_0, \;\; 0 < \xi < a - x_0).$$

Допустим, что $\zeta_0 = (\xi_0,\, a - x_0)$. Обозначим через $\zeta_\delta^\varepsilon\zeta_\delta$ характеристический сегмент $\eta = a - x_0 - \delta$ с концами в точках $\zeta_\delta^\varepsilon = (\varepsilon,\, a - x_0 - \delta)$, $\zeta_\delta = (\xi_0,\, a - x_0 - \delta)$, где $0 < \varepsilon < \xi_0$, а $\delta$ – сколь угодно малое положительное число.

Равенство (8) после почленного интегрирования вдоль $\zeta_\delta^\varepsilon\,\zeta_\delta$ принимает вид

$$(b_1 v_\eta)\Big|_{\zeta_\delta^\varepsilon}^{\zeta_\delta} = -a_1(\zeta_\delta^\varepsilon)\,[v(\zeta_\delta) - v(\zeta_\delta^\varepsilon)] - v(\xi_\delta) \int\limits_{\zeta_\delta^\varepsilon\,\zeta_\delta} b_1 c\, d\xi + \int\limits_{\zeta_\delta^\varepsilon\,\zeta_\delta} c_1[v(\zeta_\delta) - v]d\xi.$$

Отсюда, устремляя $\varepsilon$, а затем $\delta$ к нулю и учитывая условия леммы 1, получаем

$$b_1(\zeta_0)v_\eta(\zeta_0) = -a_1(\zeta_0^0)v(\zeta_0) - v(\zeta_0) \int\limits_{\zeta_0^0\,\zeta_0} b_1 c\, d\xi + \int\limits_{\zeta_0^0\,\zeta_0} c_1[v(\zeta_0) - v]d\xi.$$

Поэтому в силу (9) имеем $v_\eta(\zeta_0) < 0$. Это противоречит нашему допущению, так как в точке $\zeta_0$ положительного максимума необходимо $v_\eta(\zeta_0) \geqslant 0$.

Совершенно аналогично доказывается, что $\zeta_0 \,\overline{\in}\, \Delta$ и отрицательный минимум $v$ в $\overline{\Delta}_1$ достигается только на $\overline{J}_1$.

**Лемма 2.** *Пусть* 1) $u(x,\, y) \in C(\overline{\Delta}_2)$ *есть регулярное в* $\Delta_2$ *решение уравнения* (4), *обращающееся в нуль на* $\sigma_2$; 2) *производная от* $u$ *по направлению семейства характеристик* $x + 2/3(-y)^{3/2} = \mathrm{const}$ *существует и непрерывна в* $\overline{\Delta}_2 \backslash \overline{J}_2$. *Тогда положительный максимум и отрицательный минимум функции* $v$ *в* $\overline{\Delta}_2$ *достигается на* $\overline{J}_2$.

**Лемма 3.** *Пусть* 1) $u(x,\, y)$ *– регулярное в* $\Delta_n$ $(n = 1,\, 2)$ *решение уравнения* (4), *обращающееся в нуль на* $\sigma_n$ $(n = 1,\, 2)$; 2) $u(x,\, y) \in C(\overline{\Delta}_n) \cap C^1(\Delta_n \cup J_n)$, *а* $u_y(x,\, 0) \in C^1(J_n)$ *и на концах интервала* $J_n$ *может иметь лишь степенную особенность порядка* $< 2/3$. *Тогда положительный максимум и отрицательный минимум* $v$ *в* $\overline{\Delta}_n$ *достигается на* $\overline{J}_n$.

Лемма 3 будет доказана в пункте 3.

**Принцип экстремума.** *Пусть* 1) $u(x,\, y)$ *удовлетворяет условиям леммы* 3 *(лемм* 1, 2*)*; 2) $u$ *– регулярное в области* $\Omega_1$ *решение уравнения* (4), *принадлежащее пересечению* $C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. *Тогда положительный максимум и отрицательный минимум функции* $v$ *в* $\overline{\Omega}_1$ *достигается на* $\overline{\sigma}_0$.

Обычным способом [5], с помощью леммы 3 (лемм 1, 2) и принципа Заремба–Жиро [6], нетрудно убедиться в справедливости этого утверждения, из которого следует единственность решения задач 1 и 2.

**3. Конструктивные и дифференциальные свойства решения задачи Дарбу.** Для уравнения (3) Геллерстедтом [7] доказана однозначная разрешимость следующей задачи Дарбу.

**Задача 3.** *Найти регулярное в* $\Delta_1$ *решение уравнения* (3) *непрерывное в* $\overline{\Delta}_1$ *и удовлетворяющее краевым условиям*

$$u(x,\, y,\, \lambda) = 0 \quad \textit{на} \quad \sigma_1, \quad u_y(x,\, 0,\, \lambda) = \nu(x,\, \lambda), \tag{10}$$

*где* $\nu(x,\, \lambda)$ *– непрерывно дифференцируемая по* $x$ *в* $J_1$ *функция, которая при* $x \to x_0$*, а может обращаться в* $\infty$ *порядка* $< 2/3$.

В характеристических координатах (6) уравнение (3) имеет вид

$$Eu - \lambda^2 u = u_{\xi\eta} + \frac{1}{6}\frac{1}{\eta - \xi}(u_\xi - u_\eta) - \lambda^2 u = \varphi(\xi,\, \eta,\, \lambda), \tag{11}$$

где

$$\varphi = -\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{2/3}(\eta - \xi)^{-2/3} f\left(\frac{2x_0 + \xi + \eta}{2},\; -\left(\frac{3}{4}\right)^{2/3}(\eta - \xi)^{2/3},\; \lambda\right).$$

Область $\Delta_1$ преобразуется в $\Delta$: $0 < \xi < \eta < a - x_0$. Краевые условия (10) принимают вид

$$u(0,\, \eta,\, \lambda) = 0, \quad \left[(\eta - \xi)^{1/3}(u_\eta - u_\xi)\right]_{\eta = \xi} = -\gamma \nu_1(\xi,\; \lambda), \tag{12}$$

если

$$\nu_1(\xi,\; \lambda) = \nu(x_0 + \xi,\, \lambda), \quad 0 < \xi < a - x_0, \quad \gamma = (4/3)^{1/3}.$$

Для удобства вместо переменных $\xi$, $\eta$ ниже будем употреблять переменные $x$, $y$.

Функция Грина–Адамара для уравнения $Eu = 0$ задается формулой (см. [7])

$$G(\xi,\, \eta; x,\, y) = \begin{cases} \left(\dfrac{\eta - \xi}{y - x}\right)^{1/6} F\left(\dfrac{1}{6},\, \dfrac{5}{6},\, 1;\, S\right), \; \eta \geqslant x, \\[2ex] \gamma_0 \left(\dfrac{\eta - \xi}{x - \xi}\right)^{1/6}\left(\dfrac{\eta - \xi}{y - \eta}\right)^{1/6} F\left(\dfrac{1}{6},\, \dfrac{1}{6},\, \dfrac{1}{3};\, \dfrac{1}{S}\right), \; \eta \leqslant x, \end{cases} \tag{13}$$

где

$$\gamma_0 = \frac{\Gamma(1/6)}{\Gamma(5/6)\,\Gamma(1/3)}, \quad S = \frac{(x - \xi)(y - \eta)}{(\eta - \xi)(y - x)}.$$

Регулярное в $\Delta$ решение $u$ уравнения (11), удовлетворяющее условиям (12), можно записать в виде (см. [8])

$$u(x,\, y,\, \lambda) = N(x,\, y,\, \lambda) + \Phi(x,\, y,\, \lambda), \tag{14}$$

где $N$ и $\Phi$ соответственно являются решениями интегральных уравнений Вольтерра

$$N(x,\,y,\,\lambda)-\lambda^2\int\limits_0^x d\xi\int\limits_\xi^y N(\xi,\,\eta,\,\lambda)G(\xi,\,\eta;\,x,\,y)d\eta=$$

$$=N_0(x,\,y,\,\lambda)=\frac{\gamma\gamma_0}{2}\int\limits_0^x \nu_1(\xi,\ \lambda)[(x-\xi)(y-\xi)]^{-1/6}d\xi, \tag{15}$$

$$\Phi(x,\,y,\,\lambda)-\lambda^2\int\limits_0^x d\xi\int\limits_\xi^y \Phi(\xi,\,\eta,\,\lambda)G(\xi,\,\eta;\,x,\,y)d\eta=$$

$$=\Phi_0(x,\,y,\,\lambda)=\int\limits_0^x d\xi\int\limits_\xi^y \varphi(\xi,\,\eta,\,\lambda)G(\xi,\,\eta;\,x,\,y)d\eta. \tag{16}$$

В работе [8] показано, что решение $N$ уравнения (15) допускает следующее интегральное представление:

$$N(x,\,y,\,\lambda)=\int\limits_0^x \nu_1(t,\,\lambda)H(x,\,y;\,t,\,\lambda)dt, \tag{17}$$

где

$$H(x,\,y;\,t,\,\lambda)+\lambda^2\int\limits_t^x d\xi\int\limits_\xi^y H(\xi,\,\eta;\,t,\,\lambda)G(\xi,\,\eta;\,x,\,y)d\eta=H(x,\,y;\,t,\,0), \tag{18}$$

и более того

$$H(x,\,y;\,t,\,\lambda)=\frac{\gamma\gamma_0}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{2n}\left[(x-t)(y-t)^{n-1/6}h_n(\zeta)\right] \tag{19}$$

при

$$h_n(\zeta)=\int\limits_0^1 d\xi_0\int\limits_{\zeta\xi_0}^1 G(t+(x-t)\xi_0,\ \ t+(y-t)\eta_0;\ x,\,y)(\xi_0\eta_0)^{n-7/6}\times$$

$$\times\, h_{n-1}(\xi_0\zeta/\eta_0)d\eta_0,\ \ h_0=1,\ \ \zeta=(x-t)/(y-t). \tag{20}$$

Из (19) при $y=x$ имеем

$$2H(x,\,x;t,\,\lambda)=\gamma\gamma_0(x-t)^{-1/3}H_0(x,\,t,\,\lambda), \tag{21}$$

если

$$H_0(x,\,t,\,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda x-\lambda t)^{2n}h_n(1). \tag{22}$$

Принимая во внимание (12), (18), (19) и (20) из (17), заключаем, что $N(x,\,y,\,\lambda)\in C^2_{0xy}(\Delta^*)\cap C^2_\lambda(\Delta\times\overline{\Lambda})$, если $\nu(x,\,\lambda)\in C^2_\lambda(J_1\times\overline{\Lambda})\cap C^1_{0x}(J_1^*)$, а $\Delta^*=\Delta\times\Lambda$, $J_1^*=J_1\times\Lambda$. Из (17) вытекает также, что $N$ имеет производную по $y$ (по характеристическому направлению $x=\text{const}$) непрерывную для всех $(x,\,y)\in\overline{\Delta}\setminus(y=x,\,0<x<a-x_0)$ при любом $\lambda$. Очевидно $N\in C(\overline{\Delta}^*)$.

Теперь легко заметить, что любая функция $u$, удовлетворяющая условиям леммы 3, удовлетворяет условиям лемм 1 и 2 соответственно. Тем самым доказана лемма 3.

Из (16) в силу (13) при $y=x$ имеем

$$\Phi_0(x,\,x,\,\lambda)=\gamma_0x^2\int\limits_0^1 d\xi_0\int\limits_{\xi_0}^1\varphi(x\xi_0,\,x\eta_0,\,\lambda)\left(\frac{\eta_0-\xi_0}{1-\xi_0}\right)^{1/3}\left(\frac{1-\xi_0}{1-\eta_0}\right)^{1/6}d\eta_0.$$

Отсюда следует, что $\Phi_0(x,\,x,\,\lambda)\in C^3_{0x}(0<x<a-x_0,\,|\lambda|<d)\;\cap C^1_{0x}(0\leqslant x\leqslant a-x_0,\,|\lambda|\leqslant d)\;\cap\;C^2_\lambda(0<x<a-x_0,\,|\lambda|\leqslant d)$, причем $\Phi_0(x,\,x,\,\lambda)$ $(\Phi_{0x}(x,\,x,\,\lambda))$ при $x\to0$ обращается в нуль порядка не ниже $4/3\,(1/3)$.

Исходя из интегрального уравнения (16), можно показать, что $\Phi(x,\,y,\,\lambda)\in C^2_{0xy}(\Delta^*)\cap C^2_\lambda(\Delta\times\overline{\Lambda})$, а $\Phi(x,\,x,\,\lambda)$ обладает всеми приведенными выше свойствами функции $\Phi_0(x,\,x,\,\lambda)$.

В (14) от характеристических координат вернемся к исходным переменным $x$, $y$ по формуле (6) и в полученном результате положим $y=0$. Тогда, согласно (17) и (21), можно записать

$$\tau(x,\,\lambda)=\frac{\gamma\gamma_0}{2}\int\limits_{x_0}^{x}\nu(t,\,\lambda)(x-t)^{-1/3}H_0(x,\,t,\,\lambda)dt+\Phi(x-x_0,\,x-x_0,\,\lambda), \tag{23}$$

где $\tau(x,\,\lambda)=u(x,\,0,\,\lambda)$, $x_0<x<a$.

**Задача 3*.** *Найти регулярное в области $\Delta_2$ решение уравнения (3), непрерывное в $\overline{\Delta}_2$ и удовлетворяющее краевым условиям $u(x,\,y,\,\lambda)=0$ на $\sigma_2$, $u_y(x,\,0,\,\lambda)=\nu(x,\,\lambda)$, $-a<x<x_0$, где $\nu$ – непрерывно дифференцируемая по $x$ функция, которая при $x\to-a$, $x_0$ может обращаться в $\infty$ порядка $<2/3$.*

Очевидно задача 3 разрешима безусловно и однозначно. Как и выше убеждаемся, что при $-a<x<x_0$

$$\tau(x,\,\lambda)=\frac{\gamma\gamma_0}{2}\int\limits_{x}^{x_0}\nu(t,\,\lambda)(t-x)^{-1/3}H_0(x,\,t,\,\lambda)dt+\Phi(x_0-x,\,x_0-x,\,\lambda). \tag{24}$$

Функция

$$\psi(x,\,\lambda) = \begin{cases} \Phi(x_0 - x,\, x_0 - x,\, \lambda), & -a \leqslant x \leqslant x_0, \\ \Phi(x - x_0,\, x - x_0,\, \lambda), & x_0 \leqslant x \leqslant a \end{cases}$$

принадлежит пересечению $C^1_{0x}(\overline{J}^*) \cap C^3_{0x}(\dot{J}^*) \cap C^2_\lambda(\dot{J} \times \overline{\Lambda})$, причем $\psi\,(\psi_x)$ при $x \to x_0$ обращается в нуль порядка не ниже $4/3\,(1/3)$.

**4. Задача Холмгрена.**

**Задача 4.** *Найти регулярное в области $\Omega_1$ решение уравнения* (3), *непрерывное в $\overline{\Omega_1}$ и удовлетворяющее краевым условиям $u(x,\,y,\,\lambda) = 0$ на $\sigma_0$, $u_y(x,\,0,\,\lambda) = \nu(x,\,\lambda)$, $|x| < a$, где $\nu$ – непрерывно дифференцируемая по $x$ функция, которая при $x \to \pm a$, $x_0$ может обращаться в $\infty$ порядка меньше* $2/3$.

Единственность решения задачи 4 непосредственно получается из принципа экстремума Заремба–Жиро [6].

Пусть $G(\xi,\,\eta; x,\,y)$ – функция Грина задачи Холмгрена для уравнения Трикоми в области $\Omega_1$ (см. [9]). Решение задачи 4 существует и его можно записать в виде (см. [8])

$$u(x,\,y,\,\lambda) = N_0(x,\,y,\,\lambda) + N(x,\,y,\,\lambda) + \Phi(x,\,y,\,\lambda), \tag{25}$$

где

$$N_0(x,\,y,\,\lambda) = -\int\limits_{-a}^{a} \nu(\xi,\,\lambda) G(\xi,\,0; x,\,y) d\xi, \tag{26}$$

$N$ допускает интегральное представление

$$N(x,\,y,\,\lambda) = -\int\limits_{-a}^{a} \nu(t,\,\lambda) H(x,\,y; t,\,\lambda) dt. \tag{27}$$

с ядром $H$, удовлетворяющим уравнению Фредгольма

$$H(x,\,y; t,\,\lambda) + \lambda^2 \int\limits_{\Omega_1} \eta\, H(\xi,\,\eta; t,\,\lambda) G(\xi,\,\eta; x,\,y) d\xi d\eta =$$

$$= \lambda^2 \int\limits_{\Omega_1} \eta\, G(t,\,0; \xi,\,\eta) G(\xi,\,\eta; x,\,y) d\xi d\eta = H_0(x,\,y; t,\,\lambda), \tag{28}$$

а $\Phi$ – решение уравнения

$$\Phi(x,\,y,\,\lambda) + \lambda^2 \int\limits_{\Omega_1} \eta\, \Phi(\xi,\,\eta,\,\lambda) G(\xi,\,\eta; x,\,y) d\xi d\eta =$$

$$= -\int\limits_{\Omega_1} f(\xi,\,\eta,\,\lambda)G(\xi,\,\eta;x,\,y)d\xi d\eta = \Phi_0(x,\,y,\,\lambda). \qquad (29)$$

Опираясь на известные свойства функции Грина $G$, нетрудно проверить, что решение $u$ задачи 4 в силу (25)–(29) принадлежит пересечению $C(\overline{\Omega}_1^*)\cap C^1(\Omega_1^*\cup\dot{J})\cap C^2_\lambda(\Omega^*\times\overline{\Lambda})\cap C^2_{0xy}(\Omega^*)$, если $\nu(x,\,\lambda)\in C^1_{0x}(\dot{J}^*)\cap C^2_\lambda(\dot{J}\times\overline{\Lambda})$.

Из (29) при $y=0$ получаем (см. [8])

$$\Phi_0(x,\,0,\,\lambda) = -\frac{\gamma\gamma_0}{2}\int\limits_{\Omega_1} f(\xi,\,\eta,\,\lambda)\left\{\left[(x-\xi)^2+\frac{4}{9}\eta^3\right]^{-1/6} - \right.$$

$$\left. - \left[\left(a-\frac{x\xi}{a}\right)^2+\left(\frac{2x}{3a}\right)^2\eta^3\right]^{-1/6}\right\}d\xi d\eta.$$

Отсюда, принимая во внимание свойства функции $f$, заключаем, что

$$\Phi_0(x,\,0,\,\lambda)\in C^3_{0x}(J^*)\cap C^2_\lambda(J\times\overline{\Lambda})\cap C^1_x(\overline{J}^*)$$

и при $x\to\pm a$ обращается в нуль порядка не ниже первого.

Нет сомнения в том, что решение $\Phi$ уравнения Фредгольма (29) принадлежит пересечению $C^2_{0xy}(\Omega_1^*)\cap C^2_\lambda(\Omega_1\times\overline{\Lambda})\cap C^1(\Omega^*\cup\dot{J}^*)$ и при $y=0$ имеет такие же свойства, что и $\Phi_0(x,\,0,\,\lambda)$.

Полагая в (25) $y=0$ и учитывая (27), будем иметь

$$\tau(x,\,\lambda) = \frac{\gamma\gamma_0}{2}\int\limits_{-a}^{a}\nu(t,\,\lambda)\left[L(x,\,t,\,\lambda)-|t-x|^{-1/3}+\left(a-\frac{xt}{a}\right)^{-1/3}\right]dt +$$

$$+\Phi(x,\,0,\,\lambda),\quad |x|<a, \qquad (30)$$

где $L(x,\,t,\,\lambda)=2H(x,\,0;t,\,\lambda)/(\gamma\gamma_0)$.

**5. Доказательство существования решения системы уравнений (23), (24), (30).** Пусть существует решение $u(x,\,y,\,\lambda)$ задачи 2. Тогда, как это показано в предыдущих двух параграфах, $\tau(x,\,\lambda)=u(x,\,0,\,\lambda)$ и $\nu(x,\,\lambda)=u_y(x,\,0,\,\lambda)$ удовлетворяют системе уравнений (23), (24), (30).

В дальнейшем исключительно для удобства будем считать, что $a=1$.

Очевидно $\nu(x,\,\lambda)$ является решением интегрального уравнения

$$\int\limits_{x_0}^{x}\nu(t,\,\lambda)(x-t)^{-1/3}H_0(x,\,t,\lambda)dt =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \nu(t,\,\lambda)[L(x,\,t,\,\lambda) + l(x,\,t)]dt + h_0(x,\,\lambda), \tag{31}$$

если

$$l(x,\,t) = (1-xt)^{-1/3} - |t-x|^{-1/3}, \;\; \gamma\gamma_0 h_0(x,\,\lambda) = 2\Phi(x,\,0,\,\lambda) - 2\psi(x,\,\lambda).$$

Уравнение (31), после сведения интегрального оператора Вольтерра первого рода к такому же, но второго рода, можно переписать в виде (см. [8])

$$\pi\sqrt{3}\,\nu(x,\lambda) + \int\limits_{x_0}^{x} \nu(t,\,\lambda)(x-t)^{1/3} H_1(x,\,t,\lambda)dt =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \nu(t,\,\lambda) L_0(x,\,t,\lambda)dt + \int\limits_{-1}^{x_0} \nu(t,\,\lambda) S^+(x,\,t)dt -$$

$$- \int\limits_{x_0}^{1} \nu(t,\,\lambda) S^-(x,\,t)dt + h_1(x,\lambda), \tag{32}$$

где

$$L_0(x,\,t,\,\lambda) = \frac{d}{dx}\int\limits_{x_0}^{x} L(\xi,\,t,\,\lambda)(x-\xi)^{-2/3}d\xi, \tag{33}$$

$$S\pm(x,t) = \left(\frac{x_0-t}{x_0-x}\right)^{2/3}\frac{1}{t-x} \pm \left(\frac{1-tx_0}{x_0-x}\right)^{2/3}\frac{1}{1-tx_0},$$

$$h_1(x,\,\lambda) = \frac{d}{dx}\int\limits_{x_0}^{x} h_0(t,\,\lambda)(x-t)^{-2/3}dt, \tag{34}$$

а $H_1(x,\,t,\,\lambda)$ – известное ядро, имеющее такую же гладкость, что и $H_0(x,\,t,\,\lambda)$.

Обращая оператор Вольтерра второго рода в правой части уравнения (32) получим

$$\pi\sqrt{3}\,\nu(x,\,\lambda) = \int\limits_{-1}^{x_0} S^+(x,\,t)\nu(t,\,\lambda)dt - \int\limits_{x_0}^{1} S^-(x,\,t)\nu(t,\,\lambda)dt +$$

$$+\int_{-1}^{1} k(x,\,t,\,\lambda)\nu(t,\,\lambda)dt + h(x,\,\lambda), \;\; |x| < 1, \;\; x \neq x_0, \tag{35}$$

если

$$\pi\sqrt{3}\,k(x,\,t,\,\lambda) = -L_0(x,\,t,\,\lambda)\pi\sqrt{3} + \int_{x_0}^{x} L_0(s,\,t,\,\lambda)(x-s)^{1/3}H_2(x,\,s,\,\lambda)ds\,\pm$$

$$\pm\int_{x_0}^{x} S^{\pm}(s,\,t)(x-s)^{1/3}H_2(x,\,s,\,\lambda)ds, \tag{36}$$

причем знак $+$ $(-)$ берется при $t < x_0$ $(t > x_0)$;

$$h(x,\,\lambda) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}}h_1(x,\,\lambda) + \frac{1}{3\pi^2}\int_{x_0}^{x} h_1(s,\,\lambda)(x-s)^{1/3}H_2(x,\,s,\,\lambda)ds, \tag{37}$$

где $(x-s)^{1/3}H_2$ – резольвента ядра $(x-t)^{1/3}H_1$ (см. [8]).

Равенства (33) и (34) можно переписать в виде

$$h_1(x,\,\lambda) = \frac{h_t(x_0,\,\lambda)}{(x-x_0)^{2/3}} + \int_{x_0}^{x} \frac{h_{0t}(t,\,\lambda)dt}{(x-t)^{2/3}}, \tag{38}$$

$$L_0(x,\,t,\,\lambda) = \frac{L(x_0,\,t,\,\lambda)}{(x-x_0)^{2/3}} + \int_{x_0}^{x} \frac{L_\xi(\xi,\,t,\,\lambda)d\xi}{(x-\xi)^{2/3}}. \tag{39}$$

Из (37) на основании (38) и свойств правой части $h_0$ уравнения (31), установленных в пунктах 3 и 4, заключаем, что

$$h(x,\,\lambda) \in C_x^1(\dot{J}\times\overline{\Lambda}) \cap C_{0x}^2(\dot{J}^*) \cap C_\lambda^2(\dot{J}\times\overline{\Lambda}),$$

причем

$$h(x,\,\lambda) = h_0(x_0,\,\lambda)(x-x_0)^{-2/3} + O(1)(x-x_0)^{1/3}. \tag{40}$$

Здесь и ниже $O(1)$ означает величину, ограниченную в замкнутой области определения.

Решение сингулярного интегрального уравнения (35) с регулярным в силу (36) и (39) ядром $k$ будем искать на множестве функций $\nu(x,\,\lambda)$, принадлежащих пересечению $C_{0x}^1(\dot{J}^*) \cap C_{0\lambda}^2(\dot{J}\times\overline{\Lambda})$ и не обращающихся при $x \to \pm 1$ $(x \to x_0)$ в $\infty$ порядка $> 1/3\,(\geqslant 2/3)$. В этом классе уравнение (35) эквивалентно (см. [8]) интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$\nu(x,\,\lambda)-\frac{1}{\pi\sqrt{3}}\int\limits_{-1}^{1}k^*(x,\,s,\,\lambda)\nu(s,\,\lambda)ds=h^*(x,\,\lambda), \tag{41}$$

где

$$k^*(x,\,s,\,\lambda)=\frac{3}{4}\left(\frac{1-sx_0}{x_0-x}\right)^{2/3}\left[1-\left(\frac{|x_0-s|}{1-x_0s}\right)^{1/3}\right]\times$$

$$\times\left[\frac{1}{1-xs}+\frac{1}{\pi\sqrt{3}}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\Gamma(x,\,t)}{1-st}dt\right]+\frac{3}{4}k(x,\,s,\,\lambda)+$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{4\pi}\int\limits_{-1}^{1}k(t,\,s,\,\lambda)\left(\frac{x_0-t}{x_0-x}\right)^{2/3}\Gamma(x,\,t)dt, \tag{42}$$

$$h^*(x,\,\lambda)=\frac{3}{4}h(x,\,\lambda)+\frac{\sqrt{3}}{4\pi}\int\limits_{-1}^{1}h(s,\,\lambda)\left(\frac{x_0-s}{x_0-x}\right)^{2/3}\Gamma(x,\,s)ds, \tag{43}$$

если

$$\Gamma(x,\,s)=\begin{cases}\left(\dfrac{|x_0-x|(1+s)}{(1+x)(x_0-s)}\right)^{1/3}\left(\dfrac{1}{s-x}+\dfrac{1}{1-sx}\right), & -1\leqslant s\leqslant x_0,\\ \left(\dfrac{|x_0-x|(1-s)}{(1-x)(s-x_0)}\right)^{1/3}\left(\dfrac{1}{1-sx}-\dfrac{1}{s-x}\right), & x_0\leqslant s\leqslant 1.\end{cases} \tag{44}$$

Изучим поведение ядра и правой части уравнения (41) в интервале $|x-x_0|<\varepsilon<1$.

Принимая во внимание (40) и (44), из (43) получаем

$$h^*(x,\,\lambda)=\frac{3}{4}h_0(x,\,\lambda)(x_0-x)^{-2/3}+O(1)|x-x_0|^{\theta}+O(1)+$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{4\pi}h_0(x_0,\,\lambda)\left[|x_0-x|(1+x)\right]^{-1/3}\int\limits_{-1}^{x_0}\left(\frac{1+s}{x_0-s}\right)^{1/3}\frac{ds}{s-x}+$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{4\pi}h_0(x_0,\,\lambda)\left[|x_0-x|(1-x)\right]^{-1/3}\int\limits_{x_0}^{1}\left(\frac{1-s}{x_0-s}\right)^{1/3}\frac{ds}{s-x},$$

где $\theta>-2/3$, а $x\in|x-x_0|\leqslant\varepsilon$. Отсюда легко увидеть, что

$$h^*(x,\,\lambda)=\frac{3}{4}h_0(x_0,\,\lambda)(x-x_0)^{-2/3}+O(1)|x-x_0|^{\theta}+O(1)+$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{4\pi}h_0(x_0,\,\lambda)|x-x_0|^{-1/3}\int\limits_{-1}^{1}(x_0-s)^{-1/3}\frac{ds}{s-x}. \tag{45}$$

Пусть $x_0-\varepsilon<x<x_0$. Известно (см. [10, § 23] ), что

$$\int\limits_{-1}^{x_0}\frac{ds}{(s-x_0)^{1/3}(s-x)}=-\frac{\pi}{\sqrt{3}}(x-x_0)^{-1/3}+O(1).$$

После замены переменной интеграции $s=1-(1-x_0)t$, воспользовавшись известными свойствами гипергеометрических функций, найдем, что

$$\int\limits_{x_0}^{1}\frac{ds}{(s-x_0)^{1/3}(s-x)}=\frac{3}{2}\frac{(1-x_0)^{2/3}}{1-x}F\left(1,\,1,\,\frac{5}{3};\frac{1-x_0}{1-x}\right)=$$

$$=\frac{3}{2}\left(\frac{1-x_0}{1-x}\right)^{2/3}(x_0-x)^{-1/3}F\left(\frac{2}{3},\,\frac{2}{3},\,\frac{5}{3};\frac{1-x_0}{1-x}\right)=$$

$$=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}(x_0-x)^{-1/3}+O(1).$$

Следовательно,

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{ds}{(x_0-s)^{1/3}(s-x)}=-\pi\sqrt{3}\,(x_0-x)^{1/3}+O(1).$$

Поэтому равенство (45) принимает вид

$$h^*(x,\,\lambda)=O(1)|x-x_0|^{\theta}+O(1). \tag{46}$$

Очевидно (46) законно и при $x>x_0$.

Из (42) с учетом (36) и (39) совершенно аналогично получаем, что

$$k^*(x,\,s,\,\lambda)-k^*(x,\,s,\,0)=O(1)|x-x_0|^{\theta}+O(1),\ \ |x-x_0|<\varepsilon.$$

Геллерстедт показал [9], что ядро $k^*(x,\,s,\,0)$ допускает мажоранту в форме $M[|x-x_0|(1-x^2)]^{-1/3}$.

Функция $h^*(x,\,\lambda)\in C^1_{0x}(\dot{J}^*)\cap C^2_{0\lambda}(\dot{J}\times\overline{\Lambda})$.

Теперь, опираясь на результаты предыдущих пунктов, обычным способом (см. [5], [8] и [11]) нетрудно убедиться в эквивалентности интегрального уравнения Фредгольма (41) краевой задаче 2 и тем самым доказать в силу единственности решения задачи 2 его безусловную разрешимость (в классе искомых решений).

Свойства функции $\nu(x,\,\lambda)$ обеспечивают принадлежность построенного по ней решения $\hat{u}(x,\,y,\,z)$ задачи 1 множеству $\widehat{C}^2_{0xy}(D)$.

**Литература**

1. Бицадзе А. В. Сибирский матем. журнал. 1962. Т. 3, № 5. С. 642–644.
2. Protter M. H. Proceedings of the conference on differential equations. Univesity of Maryland Book Store. 1956. Pp. 91–106.
3. Хермандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М.: Мир, 1965.
4. Agmon S., Nirenberg L., Protter M. Comm. pure appl. math. 1953. Vol. 6, no. 4. Pp. 455–470.
5. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959.
6. Бицадзе А. В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966.
7. Gellerstedt S. Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik. 1937. Vol. 25 A, no. 29. Pp. 1–23.
8. Нахушев А. М. Сибирский матем. журнал. 1967. Т. 8. С. 19–48.
9. Gellerstedt S. Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik. 1937. Vol. 26 A, no. 3. Pp. 1–32.
10. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962.
11. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М.: ИЛ, 1957.

Поступила в редакцию
1 июня 1967 г.

Институт математики
СО АН СССР

# Многомерный аналог задачи Дарбу для гиперболических уравнений

Пусть $D$ – односвязная область трехмерного эвклидова пространства $E_3$ точек $(x_1,\, x_2,\, t)$, ограниченная двумя поверхностями $t = |x|$, $t = r - |x|$, где $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2$, $r = \mathrm{const} > 0$, расположенными в полупространстве $x_2 \leqslant 0$, и плоскостью $x_2 = 0$; $S_1$, $S_2$ и $S_3$ – части поверхностей $t = |x|$, $t = r - |x|$ и $x_2 = 0$ соответственно, образующих границу $\partial D$ области $D$.

В области $D$ рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} - u_{tt} + a^i u_{x_i} + bu_t + cu = f \tag{1}$$

с коэффициентами $a^i = a^i(x,t)$, $i = 1, 2$, $b = b(x,t)$, $c = c(x,t)$ из класса $C^2(\overline{D})$ и правой частью $f = f(x,t)$ из пространства $L_2(D)$. Здесь и ниже повторение индекса $i$ означает суммирование по нему от 1 до 2.

Уравнение (1) заменой зависимой переменной по формуле $u = u_1 \exp(\mu t)$, где $\mu = \mathrm{const} > 0$, можно преобразовать в уравнение (относительно $u_1$) с коэффициентом при $u_1$, меньшем всюду в замыкании $\overline{D}$ любого наперед заданного отрицательного числа. Поэтому, не нарушая общности, будем считать, что

$$c < -\max_{\overline{D}} |a^i_{x_i} + b_t|. \tag{2}$$

Нахушев А. М. Доклады АН СССР. 1970, **194**:1, 31–34.
Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 10.02.1970

Аналогами (смешанной) задачи Дарбу [1] являются следующие две задачи.

**Задача B.** *Найти решение* $u(x,t)$ *уравнения* (1), *удовлетворяющее краевым условиям*

$$u|_{S_2} = 0, \quad u|_{S_3} = 0. \tag{3}$$

**Задача B$^+$.** *Найти решение* $v(x,t)$ *уравнения*

$$L^+v \equiv v_{x_1x_1} + v_{x_2x_2} - v_{tt} - (a^i v)_{x_i} - (bv)_t + cv = f, \tag{4}$$

*удовлетворяющее краевым условиям*

$$v|_{S_1} = 0, \quad v|_{S_3} = 0.$$

Эти задачи для двумерного волнового уравнения впервые были сформулированы А. В. Бицадзе [2]. Они являются исключительными случаями задачи, исследованной С. Л. Соболевым [3] для многомерного волнового уравнения, когда данные задаются на времяобразно ориентированной конической поверхности.

Введем в рассмотрение эрмитову билинейную форму

$$(u,v)_+ = \int\limits_D \left[\alpha \nabla u \nabla v + 2(b-\beta)u_t v_t + a^i u_{x_i} v_t + a^i v_{x_i} u_t + uv\right] dxdt, \tag{5}$$

где $\nabla = (\partial/\partial x_1,\, \partial/\partial x_2,\, \partial/\partial t)$, а $\alpha$ и $\beta$ – любые положительные числа, удовлетворяющие неравенству

$$\alpha > \max\left[\max_{\overline{D}}\left(1 + |b-\beta| + \sqrt{|b-\beta|^2 + |a|^2}\right),\ \max_{\overline{D}}\left|\frac{c_t}{c}\right|,\ \max_{\overline{D}}|a|^2,\right.$$

$$\left.\max_{\overline{D}}\left|\frac{c_t - a^i_{x_i t} - b_{tt}}{c - a^i_{x_i} - b_t}\right|\right], \quad |a|^2 = (a^1)^2 + (a^2)^2. \tag{6}$$

Поскольку все корни (характеристические числа) характеристического уравнения

$$(\alpha - \lambda)\left[(\alpha-\lambda)^2 + 2(b-\beta)(\alpha-\lambda) - |a|^2\right] = 0,$$

соответствующего квадратичной форме

$$\alpha|\xi|^2 + 2(b-\beta)\xi_3^2 + 2a^i\xi_i\xi_3, \quad (x,t) \in \overline{D}, \quad \xi \in E_3,$$

в силу (6) положительны, то

$$(u,u)_+ \geqslant 0, \quad (u,u)_+ = 0 \ \Leftrightarrow\ u = 0. \tag{7}$$

Следовательно, для формы (5) соблюдены все аксиомы скалярного произведения.

Примем следующие обозначения:

$w_2^k(D)$ – позитивное пространство Соболева с нормой $\|\cdot\|_k$ и со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_k$, $w_2^0(D)=L_2(D)$;

$H_+$ – гильбертово пространство суммируемых в области $D$ функций, имеющих обобщенные производные до первого порядка с конечной нормой, определяемой по скалярному произведению (5): $\|u\|_+^2=(u,u)_+$; полнота пространства $H_+$ следует из оценки $\|u\|_1\leqslant \mathrm{const}\ \|u\|_+$; очевидно, $\|u\|_0\leqslant\|u\|_+$;

$H_-$ – негативное (гильбертово) пространство, построенное по нулевому пространству $H_0=L_2(D)$ и позитивному пространству $H_+$, т. е. пополнение пространства $H_0$ по норме

$$\|\varphi\|_-=\sup_{u\in H_+}\frac{|(\varphi,u)_0|}{\|u\|_+}\leqslant\|\varphi\|_0\,;$$

$w_2^{-1}(D)$ – негативное пространство Соболева, построенное по $H_0$ и $w_2^1(D)$;

$\langle\varphi,u\rangle_0$, где $u\in H_+$ – билинейная форма на пространстве $H_-$, которая при $\varphi\in H_0$ совпадает со скалярным произведением $(\varphi,u)_0$ в $H_0$. Известно (см., например, [4]), что для этой формы справедливо обобщенное неравенство Шварца

$$|\langle\varphi,u\rangle_0|\leqslant\|\varphi\|_-\,\|u\|_+\,; \tag{8}$$

$w$ и $w^+$ – множество всех функций из класса $C(\overline{D})\cap C^2(D)\cap w_2^1(D)\cap w_2^1(\partial D)$, для которых $Lu\in H_0$ и соблюдены условия задач В и В$^+$ соответственно.

*Слабым решением задачи* В назовем любую функцию $u\in L_2(D)$, удовлетворяющую равенству

$$(u,L^+v)_0=\langle f,v\rangle_0,\quad \forall\, v\in w^+. \tag{9}$$

Ниже будем считать, что правая часть $f$ принадлежит пространству $H_-\supseteq L_2(D)$.

**Априорная оценка.** *Для любой функции $u\in w$ и $v\in w^+$ имеют место неравенства*

$$\|u\|_+\leqslant C\,\|Lu\|_0\,,\quad \|v\|_+\leqslant C\,\left\|L^+v\right\|_0\,, \tag{10}$$

*где $C$ – не зависящая от $u$ и $v$ положительная постоянная.*

Действительно, для любой функции $u\in w$ и $d=d(t)$ из класса $C^1(\overline{D})$ справедливо тождество

$$2(du_t,Lu)_0=\int\limits_D\left[d_t|\nabla u|^2+2dbu_t^2+2da^iu_{x_i}u_t-(dc)_tu^2\right]dxdt+$$

$$+\int\limits_{\partial D} dcn^3u^2dS + \int\limits_{\partial D} d(-|\nabla u|^2n^3 + 2n^iu_{x_i}u_t)dS = I_1 + I_2 + I_3, \qquad (11)$$

где $n^i = \cos(\widehat{n, x_1})$, $i = 1, 2$, $n^3 = \cos(\widehat{n, t})$ – направляющие косинусы внешней нормали $n = (n^1, n^2, n^3)$ к $\partial D$; $dS$ – элемент поверхности $\partial D$.

Пусть $d = \exp(\alpha t)$. Тогда в силу (2) и неравенства $n^3 \leqslant 0$ на $S_1$ ясно, что $I_2 \geqslant 0$. Поскольку на поверхности $S_3$ $n = (0, 1, 0)$, то на основании условия (3) можно написать

$$I_3 = \int\limits_{S_1\cup S_2} d(-|\nabla u|^2n^3 + 2n^iu_{x_i}u_t)dS = I_3(S_1) + I_3(S_2).$$

На характеристике $S_2$ уравнения (1) имеем

$$(n^1)^2 + (n^2)^2 = (n^3)^2, \quad u = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{x_i} = u_nn^i, \quad u_t = u_nn^3.$$

Следовательно, на $S_2$

$$-|\nabla u|^2n^3 + 2n^iu_{x_i}u_t = n^3u_n^2[(n^1)^2 + (n^2)^2 - (n^3)^2] = 0,$$

стало быть, $I_3(S_2) = 0$ для любой функции $d$.

Далее, принимая во внимание, что на характеристике

$$S_1\colon \sqrt{(n^1)^2 + (n^2)^2} = -n^3$$

все корни характеристического уравнения

$$\lambda(\lambda + n^3)(\lambda + 2n^3) = 0,$$

соответствующего квадратичной форме

$$-n^3|\xi|^2 + 2n^i\xi_i\xi_3, \quad (x, t) \in S_1, \quad \xi \in E_3,$$

неотрицательны, получаем $I_3(S_1) \geqslant 0$, $\forall\, d \geqslant 0$.

Из (11) с учетом того, что $d_t = \alpha d$ и

$$2(du_t, Lu)_0 \leqslant 2\beta\left\|\sqrt{d}u_t\right\|_0^2 + C_1\|Lu\|_0^2,$$

где $C_1$ – не зависящая от $u$ положительная постоянная, имеем

$$\int\limits_D d[\alpha|\nabla u|^2 + 2(b-\beta)u_t^2 + 2a^iu_{x_i}u_t]dxdt - \int\limits_D (dc)_tu^2dxdt \leqslant C_1\|Lu\|_0^2.$$

Отсюда и из неравенств (2) и (6) получаем первую априорную оценку в (10).

Совершенно аналогично доказывается вторая априорная оценка в (10), если в качестве вспомогательной функции $d$ брать функцию $d = -\exp(-\alpha t)$.

Легко видеть, что при указанных выше значениях $\alpha$ нормы $\|\cdot\|_+$ и $\|\cdot\|_1$ эквивалентны, поэтому из неравенства (11) следуют априорные оценки

$$\|u\|_1 \leqslant C\|Lu\|_0, \quad \|v\|_1 \leqslant C\|L^+v\|_0, \quad \forall\, u \in w,\, v \in w^+. \tag{12}$$

Неравенства (12) обобщают априорную оценку

$$\|u_{x_2}\|_0 \leqslant C\|\Box u\|_0, \quad \forall\, u \in w,$$

где

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

– оператор Лоренца, полученную А. В. Бицадзе [2].

Интегрированием по частям можно показать, что

$$(u, L^+v)_0 = (Lu, v)_0, \quad \forall\, u \in w,\; v \in w^+,$$

следовательно, задачи B и B$^+$ являются (формально) сопряженными.

Из априорной оценки (12) вытекает единственность регулярного (классического) решения $u \in w$ или $v \in w^+$ задач B и B$^+$. При $L \equiv \Box$ этот факт впервые установлен в [2].

Доказательство существования слабого решения задачи B проводится по стандартной схеме, которую мы воспроизводим для удобства чтения.

Согласно априорным оценкам (10), выражение $\langle f, v\rangle_0$ из (9) зависит не от $v$, а от $L^+v$, и поэтому можно положить $\langle f, v\rangle_0 = F(L^+v)$, где $F$ – однородный и аддитивный функционал над линейным множеством $L^+(w^+)$, где $L^+(w^+)$ – образ $w^+$ при отображении $v \to L^+v$. Далее, на основании (8) и (10), имеем

$$|F(L^+v)| = |\langle f, v\rangle_0| \leqslant \|f\|_- \, \|v\|_+ \leqslant C\, \|f\|_- \left\|L^+v\right\|_0,$$

т. е. при фиксированном $f$ функционал $F(\psi)$, $\psi = L^+v$, над $L^+(w^+)$ является непрерывным. Продолжая $F(\psi)$, по известной теореме Хана–Банаха, на все пространство $L_2(D)$ и пользуясь теоремой Рисса, найдем искомую функцию $u: F(\psi) = (u, \psi)_0$, $\forall\, \psi \in L_2(D)$ и, в частности, для $\psi = L^+v$, $(u, L^+v)_0 = F(L^+v) = \langle f, v\rangle_0$.

Энергетические неравенства (12) обеспечивают существование слабого решения для любой правой части $f$ из $w_2^{-1}(D)$. Если же $f \in L_2(D)$, то, как известно (см., например, [4]) они гарантируют также существование полусильного решения. Отметим также, что априорные оценки вида (12) имеют место, если условие $u|_{S_3} = 0$ заменить условием $u_{x_2}|_{S_3} = 0$.

**Литература**

1. Гурса Э. Курс математического анализа. Т. 3, ч. 1. М., 1934.
2. Бицадзе А. В. ДАН. 1962. Т. 143, № 5. С. 1017–1019.
3. Соболев С. Л. Матем. сборн., нов. сер. 1942. Т. 11 (53), № 3. С. 155–203.
4. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев, 1965.

Поступила в редакцию
2 февраля 1970 г.

Институт математики
СО АН СССР

# Об одной задаче А. В. Бицадзе

Пусть $\Omega$ – конечная односвязная область трехмерного эвклидова пространства точек $(x, y, z)$, ограниченная кусочно-гладкой поверхностью $\sigma$, расположенной в полупространстве $z > 0$, и двумя поверхностями $S_1$: $x + x_0 = \sqrt{y^2 + z^2}$ и $S_2$: $x_0 - x = \sqrt{y^2 + z^2}$, $x_0 > 0$, лежащими в полупространстве $z < 0$; $\Omega_1 = \Omega \cap (z < 0)$, $\Omega_2 = \Omega \cap (z > 0)$ ; $S_0$ – часть плоскости $z = 0$, отделяющая $\Omega_1$ от $\Omega_2$; $\partial\Omega$ – граница $\Omega$.

В области $\Omega$ рассмотрим трехмерное уравнение Лаврентьева–Бицадзе

$$Lu \equiv \operatorname{sign} z \cdot u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f(x, y, z), \tag{1}$$

которое эллиптично при $z > 0$, гиперболично при $z < 0$ и параболически вырождается при $z = 0$. Поверхности $S_1$ и $S_2$ являются характеристиками этого уравнения.

**Задача А. В. Бицадзе.** *Найти непрерывную в замкнутой области $\overline{\Omega}$ функцию $u(x, y, z)$ с непрерывными внутри $\Omega$ производными первого порядка, удовлетворяющую уравнению* (1) *в области $\Omega$ при $z \neq 0$ и краевому условию*

$$u|_\sigma = 0, \ \ u|_{S_1} = 0, \tag{2}$$

*или*

$$u|_\sigma = 0, \ \ u|_{S_2} = 0. \tag{3}$$

Примем следующие обозначения: $W_2^k(\Omega)$ – пространство Соболева с нормой $\|\cdot\|_k$ и со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle_k$, $k = 0, 1$; $W(W^*)$ – множество всех функций $u$ из класса $C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega \setminus S_0) \cap W_2^1(\Omega) \cap W_2^1(\partial\Omega)$, для которых $Lu \in W_2^0(\Omega) = L_2(\Omega)$ и соблюдено условие (2) ((3)); $n = (x_n,\, y_n,\, z_n)$ – единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega$, а $n^* = (-x_n, y_n, z_n)$ – конормаль, соответствующая оператору Лоренца

$$\Box \equiv -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

---

Нахушев А. М. Докл. АН СССР. 1970, **192**:3, 499—502.
Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 28.10.1969

$lu \equiv au + bu_x + cu_y + du_z$ – дифференциальное выражение первого порядка с коэффициентами $a(x, y, z) \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\overline{\Omega}_1) \cap C^2(\overline{\Omega}_2)$, $b(x, y, z)$, $c(x, y, z)$, $d(x, y, z) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\overline{\Omega}_1) \cap C^1(\overline{\Omega}_2)$; $A$ – множество всех четырехкомпонентных вектор-функций $(a, b, c, d)$, которые в области $\Omega$ при $z \neq 0$ удовлетворяют системе дифференциальных неравенств

$$La > 0,\ \ \operatorname{sign} z\, b_y + c_x = 0,\ \ \operatorname{sign} z\, b_z + d_x = 0,\ \ c_z + d_y = 0; \tag{4}$$

$$b_x - c_y + d_z > 2a,\ \ b_x + c_y + d_z > 2a,\ \ d(x,\, y,\, z) = 0; \tag{5}$$

$$\operatorname{sign} z\, (c_y + d_z - b_x + 2a) > 0 \,\forall\, (x, y, z) \in \overline{\Omega}, \tag{6}$$

и краевым условиям

$$a = 0,\ \ d = 0,\ \ bx_n \pm cy_n \leqslant 0,\ \ b^2 \geqslant c^2\ \forall\, (x, y, z) \in S_2. \tag{7}$$

Множество $A$ не пусто. Ему принадлежат, например, векторы, компоненты которых имеют вид

$$a = \varepsilon[y^2 + z^2 - (x - x_0)^2],\ \ b = b_1(x - x_0) + b_0,\ \ c = c_1 y,\ \ d = d(z), \tag{8}$$

где $\varepsilon$, $b_1$, $b_0$, $c_1$ – произвольные постоянные, такие что

$$\varepsilon > 0,\ \ b_0 \leqslant 0,\ \ c_1 > |2a|,\ \ b_1 > c_1 + |2a|\ \forall\, (x, y, z) \in \overline{\Omega}, \tag{9}$$

а функция $d(z) = 0$ при $z \leqslant 0$ и удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$2a + b_1 - c_1 < d'(z) < -2a + b_1 + c_1 \tag{10}$$

при $z \geqslant 0$. При $c_1 = 1$, $b_1 = \lambda$, $1 < \lambda < 2$ и достаточно малых положительных значениях $\varepsilon$ функция $d = z$ является решением соотношения (10).

Неравенства (7) прямо следуют из (8) и (9), если учесть, что на характеристической поверхности $S_2$ имеем $\sqrt{2}x_n = 1$, $\sqrt{2}(x_0 - x)y_n = y$, $\sqrt{2}(x_0 - x)z_n = z$. Справедливость соотношений (4), (5) и (6) очевидна при соблюдении условий (9) и (10).

Ниже будем предполагать, что кусочно-гладкая поверхность $\sigma$ обладает тем свойством, что хотя бы для одного вектора $(a, b, c, d) \in A$ почти везде на $\sigma$ имеет место неравенство

$$n \cdot (b, c, d) = bx_n + cy_n + dz_n \geqslant 0. \tag{11}$$

**Априорная оценка.** *Для любой функции $u \in W$ имеет место энергетическое неравенство*

$$\|u\|_1 \leqslant C\|Lu\|_0, \tag{12}$$

*где $C$ – не зависящая от $u$ постоянная.*

Действительно, для любой функции $u \in W$ и любого вектора $(a, b, c, d) \in A$ справедливо тождество

$$2\langle lu,\, Lu\rangle_0 = 2\langle lu,\, \Delta u\rangle_0 + 2\langle lu,\, \Box u\rangle_0 =$$

$$= 2\int\limits_{S_2} u^2 \frac{\partial a}{\partial n^*} dS = \int\limits_{\Omega} u^2 La d\Omega = \int\limits_{\sigma} [(bx_n - cy_n - dz_n)u_x^2 +$$

$$+ (-bx_n + cy_n - dz_n)u_y^2 + (-bx_n - cy_n + dz_n)u_z^2 + 2(cx_n + by_n)u_x u_y +$$

$$+ 2(dx_n + bz_n)u_x u_z + 2(dy_n + cz_n)u_y u_z]dS + \int\limits_{S_1 \cup S_2} [(-bx_n + cy_n + dz_n)u_x^2 +$$

$$+ (-bx_n + cy_n - dz_n)u_y^2 + (-bx_n - cy_n + dz_n)u_z^2 + 2(-cx_n + by_n)u_x u_y +$$

$$+" 2(-dx_n + bz_n)u_x u_z + 2(dy_n + cz_n)u_y u_z]dS +$$

$$+ \int\limits_{\Omega} \big[ \operatorname{sign} z(c_y + d_z - b_x - 2a)u_x^2 + (b_x - c_y + d_z - 2a)u_y^2 +$$

$$+ (b_x + c_y - d_z - 2a)u_z^2 \big]\, d\Omega = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5,\ \ I_3 = I_3(S_1) + I_3(S_2).$$

Поскольку $a = 0$ на $S_2$ и, как хорошо известно, конормаль $n^*$ лежит на характеристике $S_2$, то, очевидно, $I_1 = 0$. Поверхность $\sigma$ является поверхностью уровня, стало быть, на ней $u_x = u_n x_n$, $u_y = u_n y_n$, $u_z = u_n z_n$. Принимая это во внимание, легко видеть, что

$$I_3 = \int\limits_{\sigma} (bx_n + cy_n + dz_n)|n|^2 u_n^2 dS = \int\limits_{\sigma} (b, c, d) n u_n^2 dS,$$

из которого на основании (11) заключаем, что $I_3 \geqslant 0$.

Совершенно аналогично получаем

$$I_3(S_1) = \int\limits_{\sigma} (b, c, d)\, n(y_n^2 + z_n^2 - x_n^2)\, u_n^2 dS = 0.$$

Матрица $M$ квадратичной формы, стоящей под знаком интеграла $I_3(S_2)$, в силу (6) имеет вид

$$M = \begin{Vmatrix} cy_n - bx_n & by_n - cx_n & bz_n \\ by_n - cx_n & cy_n - bx_n & cz_n \\ bz_n & cz_n & -cy_n - bx_n \end{Vmatrix}.$$

Опираясь исключительно на тот факт, что на характеристике $S_2$ $y_n^2 + z_n^2 = x_n^2$, нетрудно показать, что при выполнении неравенства (7) все главные миноры матрицы $M$ неотрицательны:

$$\det M = 0, \quad (cy_n - bx_n)^2 - (by_n - cx_n)^2 = (b^2 - c^2)z_n^2,$$

$$-(c^2y_n^2 - b^2x_n^2) - c^2z_n^2 = (b^2 - c^2)x_n^2, \quad -(c^2y_n^2 - b^2x_n^2) - b^2z_n^2 = (b^2 - c^2)y_n^2.$$

Следовательно, согласно критерию Сильвестра, $I_3(S_2) \geqslant 0$.

Таким образом,

$$\int\limits_{\sigma} \left[u^2La + \operatorname{sign} z(c_y + d_z - b_x - 2a)u_x^2 + (b_x - c_y + d_z - 2a)u_y^2 + \right.$$

$$\left. + (b_x + c_y - d_z - 2a)u_z^2\right] d\Omega \leqslant \varepsilon\|u\|_1^2 + C_1\|Lu\|_0^2, \qquad (13)$$

где $\varepsilon$ – сколь угодно малое положительное число, $C_1$ – положительная постоянная, не зависящая от $u$.

Из энергетического неравенства (13) и условий (4)–(6) следует (12).

Совершенно идентично доказывается справедливость априорной оценки (12) для любой функции $u \in W^*$.

Неравенство (12) обобщает априорную оценку, полученную А. В. Бицадзе в работе [1].

Простым интегрированием по частям можно показать, что

$$\langle u, Lv\rangle_0 = \langle v, Lu\rangle_0, \ \forall\, u \in W, \ v \in W^*,$$

поэтому задачи (1), (2) и (1)–(3) являются (формально) взаимно сопряженными.

*Из априорной оценки* (12) *вытекает единственность регулярного (классического) решения $u \in W$ или $v \in W^*$ задачи А. В. Бицадзе.*

При $\sigma = S^*$, где $S^*$ состоит из двух конических поверхностей $S_3$: $x_0 - x = \sqrt{y^2 + z^2}$ и $S_4$: $x + x_0 = \sqrt{y^2 + z^2}$, этот факт был впервые установлен в [1].

Пусть теперь правая часть $f(x, y, z)$ уравнения (1) принадлежит гильбертову пространству $W_2^{-1}(\Omega)$ с негативной нормой $\|\cdot\|_{-1}$ и со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle_{-1}$.

*Слабым решением* задачи А. В. Бицадзе назовем любую функцию $u \in L_2(\Omega)$, удовлетворяющую равенству

$$\langle u, Lv\rangle_0 = \langle f, v\rangle_{-1}\, \forall\, v \in W^*.$$

Доказательство существования слабого решения проводится по обычной схеме (см., например, [2, с. 152]; [3, с. 107]), которую мы воспроизводим для удобства чтения.

Согласно априорной оценке (12), справедливой для любой функции $v \in W^*$, выражение $\langle f, v\rangle_{-1}$ зависит не от $v$, а от $Lv$, и поэтому можно положить $\langle f, v\rangle_{-1} = F(Lv)$, где $F$ – однородный и адитивный функционал над линейным множеством $L(W^*)$. Далее, на основании (12) и обобщенного неравенства Шварца, имеем

$$|F(Lv)| = |\langle f, v\rangle_{-1}| \leqslant \|f\|_{-1}\|v\|_1 \leqslant C\|f\|_{-1}\|Lv\|_0,$$

т. е. при фиксированном $f \in W_2^{-1}(\Omega)$ функционал $F(\varphi)$, $\varphi = Lv$, над $L(W^*)$ является непрерывным. Продолжая $F(\varphi)$ по известной теореме Хана–Банаха на все пространство $L_2(\Omega)$ и пользуясь теоремой Рисса, найдем искомую функцию $u$: $F(\varphi) = \langle \varphi, u\rangle_0$, $\forall\, \varphi \in L_2(\Omega)$ и, в частности, для $\varphi = Lv$ $\langle Lv, u\rangle_0 = F(Lv) = \langle f, v\rangle_{-1}$.

*Энергетическое неравенство* (12)

$$\|u\|_1 \leqslant C\|Lu\|_0\, \forall\, u \in W \cup W^*$$

*обеспечивает также существование полусильного решения задачи А. В. Бицадзе* (см. [3, с. 98–99]).

Среди работ, посвященных исследованию краевых задач для уравнения смешанного типа в многомерных ограниченных областях, следует отметить работу [4], где изучается задача типа задачи Дирихле.

**Литература**

1. Бицадзе А. В. ДАН СССР. 1962. Т. 143, № 5.
2. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М.: Изд. АН СССР, 1959.
3. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев, 1965.
4. Каратопраклиев Г. Д. ДАН. 1969. Т. 188, № 6.

Поступила в редакцию
20 октября 1969 г.

Институт математики
СО АН СССР

# К теории вырождающихся гиперболических уравнений в многомерных областях

В эвклидовом пространстве $E_{n+1}$ точек $(x,\, x_0) = (x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n,\, x_0)$ рассмотрим уравнение

$$x_0^{2m}\Delta_x u - x_0 u_{x_0x_0} + (m - 1/2)\, u_{x_0} = 0, \tag{1}$$

где $m$ – неотрицательное целое число, $\Delta_x$ – оператор Лапласа по переменным $x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n$, а $u\,(x,\, x_0)$ – искомое решение.

Уравнение (1) при $n = 1$ относится к классу уравнений, подробно исследованных в работе [1].

Обозначим через $H$ конечную односвязную область пространства $E_{n+1}$, ограниченную плоскостью $x_0 = 0$ и характеристическим коноидом $K\colon\ |x| = r - \beta x_0^{1/\beta}$, $x_0 \geqslant 0$, где $|x|$ – длина вектора $x$, $r = \text{const} > 0$, $(2m+1)\,\beta = 2$.

Пусть $\alpha = (\alpha_1,\, \alpha_2,\, \ldots,\, \alpha_n)$ – фиксированный отличный от нуля вектор из шара $|x| < r$ эвклидова пространства $E_n$, $H_\alpha^\tau$ – подобласть области

Бицадзе А. В., Нахушев А. М. Доклады АН СССР. 1972, **204**:6, 1289–1291.

$H$, ограниченная коноидами $K$ и $\tilde{K}$: $|x-\alpha| = \beta x_0^{1/\beta}$, $K^r$ и $K_\alpha$ части $K$ и $\tilde{K}$, составляющих границу области $H_\alpha^r$, $A = \|a_{jk}\|$ – квадратная $(n\times n)$-матрица, транспонированная по отношению к ортогональной матрице $A' = \|a_{kj}\|$, $a_{ij} = \alpha_j/|\alpha|$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $\det A' = 1$, $A_i$ – матрица, полученная из матрицы $A$ заменой элементов $i$-го ее столбца нулями.

Введем операторы

$$S_t^\alpha u \equiv \gamma(n) \int\limits_{|\xi|=t} u\left[\frac{r\xi_i\alpha}{|\alpha|\sqrt{r^2-|\alpha|^2}} + \frac{\alpha}{2} + A_i\xi,\ \left(\frac{r}{2\beta} - \frac{|\alpha|\,\xi_i}{\beta\sqrt{r^2-|\alpha|^2}}\right)^\beta\right] d\omega_\xi,$$

$$S_t^0 u \equiv \gamma(n) \int\limits_{|\xi|=t} u\left[\xi,\ \left(\frac{r}{2\beta}\right)^\beta\right] d\omega_\xi,$$

$$B_n^\alpha u \equiv \begin{cases} R\left(\dfrac{\partial}{\partial R^2}\right)^{(n-1)/2} \dfrac{1}{R} S_R^\alpha u, & n \equiv 1\,(\mathrm{mod}\,2),\\ \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\dfrac{\partial}{\partial R^2}\right)^{n/2} \int\limits_0^R \dfrac{S_t^\alpha u}{\sqrt{R^2-t^2}}\,dt, & n \equiv 0\,(\mathrm{mod}\,2). \end{cases}$$

Здесь и ниже $d\omega_\xi$ – элемент сферы $|\xi| = t$ пространства $E_n$,

$$\gamma(n) = \sqrt{\pi^{1-n}}, \quad 2R = \sqrt{r^2-|\alpha|^2}, \quad \frac{\partial}{\partial R^2} = \frac{1}{2R}\frac{\partial}{\partial R}.$$

Очевидно, что эти операторы не зависят от индекса $i = 1, 2, \ldots, n$.

Справедливо

**Утверждение.** *Для любого регулярного в области $H$ решения $u(x, x_0)$ уравнения (1), непрерывного в $\overline{H}$, имеет место равенство*

$$u(\alpha, 0) + u\left[0,\ (r/\beta)^\beta\right] = B_n^\alpha u \quad \forall\, \alpha,\ |\alpha| < r. \tag{2}$$

Действительно, предположим сначала, что $u_{x_j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, и $x_0^{1/2-m} u_{x_0}$ непрерывны в $\overline{H}$. Непосредственным вычислением нетрудно убедиться, что преобразование

$$z_0 = \frac{ry_0 + |\alpha|\,y_i}{2R} - \frac{r^2+|\alpha|^2}{4R} \quad\Leftrightarrow\quad y_0 = \frac{rz_0 - |\alpha|\,z_i}{2R} + \frac{r}{2},$$

$$z_i = \frac{|\alpha|\,y_0 + ry_i}{2R} - \frac{r\,|\alpha|}{2R} \ \Leftrightarrow\ y_i = \frac{rz_i - |\alpha|\,z_0}{2R} + \frac{|\alpha|}{2},$$

$$z_k = y_k, \quad k = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n,$$

где

$$y_0 = \beta x_0^{1/\beta}, \quad y = A'x \Leftrightarrow x = Ay = \frac{\alpha}{|\alpha|} y_i + A_i y,$$

отображает область $H_\alpha^r$ на область $Q$ пространства $E_{n+1}$ независимых переменных $z_0, z_1, \ldots, z_n$, ограниченную конусами $|z| = R - z_0$ и $|z| = R + z_0$, причем точкам $\left(0, (r/\beta)^\beta\right)$ и $(\alpha, 0)$ сопоставляются точки $(0, R)$ и $(0, -R)$, а поверхности

$$2\beta r x_0^{1/\beta} + 2\alpha x = r^2 + |\alpha|^2 \tag{3}$$

– плоскость $z_0 = 0$.

В переменных $z_0$, $z$ функция

$$v(z, z_0) = u\left[\frac{\alpha}{|\alpha|}\frac{rz_i - |\alpha| z_0}{\sqrt{r^2 - |\alpha|^2}} + \frac{\alpha}{2} + A_i z, \ \left(\frac{rz_0 - |\alpha| z_i}{\beta\sqrt{r^2 - |\alpha|^2}} + \frac{r}{2\beta}\right)^\beta\right] \tag{4}$$

является решением уравнения

$$v_{z_0 z_0} - \Delta_z v = 0. \tag{5}$$

Из однозначной разрешимости задачи Коши для уравнения (5) с начальными данными $v(z, 0)$, $v_{z_0}(z, 0) = v_{z_0}(z, z_0)|_{z_0=0}$, $|z| \leqslant R$, следует, что функция $v(z, z_0)$ в области $Q$ представима в виде [2]

$$v(z, \ \pm z_0) = \frac{\gamma(n)}{2} z_0 \left(\frac{\partial}{\partial z_0^2}\right)^{(n-1)/2} \frac{1}{z_0} \int\limits_{|\xi|=z_0} v(z+\xi, \ 0)\, d\omega_\xi \pm$$

$$\pm \frac{\gamma(n)}{4} \left(\frac{\partial}{\partial z_0^2}\right)^{(n-3)/2} \frac{1}{z_0} \int\limits_{|\xi|=z_0} v_{z_0}(z+\xi, \ 0)\, d\omega_\xi, \quad n \equiv 1 \pmod 2, \tag{6}$$

$$v(z, \ \pm z_0) = \frac{\gamma(n)}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{\partial}{\partial z_0^2}\right)^{n/2} \int\limits_0^{z_0} \frac{dt}{\sqrt{z_0^2 - t^2}} \int\limits_{|\xi|=t} v(z+\xi, \ 0)\, d\omega_\xi \pm$$

$$\pm \frac{\gamma(n) z_0}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{\partial}{\partial z_0^2}\right)^{(n-2)/2} z_0^{n-3} \int\limits_0^{z_0} \frac{t^{2-n} dt}{\sqrt{z_0^2 - t^2}} \int\limits_{|\xi|=t} v_{z_0}(z+\xi, \ 0)\, d\omega_\xi, \tag{7}$$

$$n \equiv 0 \pmod 2,$$

Поскольку

$$u(\alpha, 0) + u\left[0, (r/\beta)^\beta\right] = v(0, -R) + v(0, R),$$

то из (6) и (7), в силу (4), при $z=0$, $z_0=R$ и $\alpha\neq 0$ получаем (2). При $\alpha=0$ формула (2) также вытекает из (6) и (7), где на этот раз

$$v\,(z,\,z_0)=u\left[z,\ \left(\frac{2z_0+r}{2\beta}\right)^{\beta}\right],\quad z=x,\quad z_0=y_0-\frac{r}{2}.$$

Принимая теперь во внимание, что соотношения (6) и (7) имеют место для всех положительных $z_0<R$, простым предельным переходом можно показать справедливость равенства (2) и для регулярных решений $u\,(x,\,x_0)$ из класса $C\left(\overline{H}\right)$.

Обозначим через $H\,(\alpha,\,r)$ часть поверхности (3), принадлежащую $H$, а через $K\,(\alpha,\,r)=K_\alpha\cap K^r$.

В операторе $B_n^\alpha$ при $n\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,2)$ участвуют значения функции $u\,(x,\,x_0)$ лишь на $K\,(\alpha,\,r)$. В случае же $n\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,2)$ в выражении оператора $B_n^\alpha$ участвуют значения функции $u\,(x,\,x_0)$ на $H\,(\alpha,\,r)$. На этот раз пользуясь свойством функции Вольтерра [3] $V\,(x,\,y_0;\,\xi,\,\xi_0)$ для волнового уравнения $\Box u\equiv u_{y_0y_0}-\Delta_x u$, легко вычислить, что

$$G_n^\alpha u\equiv B_n^\alpha u-u\left[0,\ (r/\beta)^{\beta}\right]=$$

$$=\lim_{y_0\to 0}\frac{\partial}{\partial y_0}\int\limits_{K_\alpha^r}\left\{u\left[\xi,\ (\xi_0/\beta)^{\beta}\right]\frac{\partial}{\partial N}V\,(\alpha,\,y_0;\,\xi,\,\xi_0)-\right.$$

$$\left.-\,V\,(\alpha,\,y_0;\,\xi,\,\xi_0)\,\frac{\partial}{\partial N}u\left[\xi,\ (\xi_0/\beta)^{\beta}\right]\right\}dK_\alpha^r, \tag{8}$$

где $K_\alpha^r$ – образ $K^r$ при отображении $y_0=\beta x_0^{1/\beta}$, $x=x$, $N$ – конормаль, соответствующая оператору $\Box$, $dK_\alpha^r$ – элемент поверхности $K_\alpha^r$.

Из (8) видно, что в выражении оператора $G_n^\alpha$ участвуют значения $u\,(x,\,x_0)$ только на коноиде $K^r$.

Заметим, что при $n=2$

$$2\pi V\,(x,\,y_0;\,\xi,\,\xi_0)=\log\left[\left(\xi_0-y_0+\sqrt{|\xi_0-y_0|^2-|x-\xi|^2}\right)/\,|x-\xi|\right].$$

Свойство (2) всех решений уравнения (1) позволяет отыскать ряд корректных задач для уравнения (1) в области $H$. Здесь мы ограничимся постановкой одной простой краевой задачи в случае, когда $1<n\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,2)$.

**Задача.** *Найти регулярное в области $H$ решение $u\,(x,\,x_0)$ уравнения (1), непрерывное в $\overline{H}$ и удовлетворяющее условиям*

$$\lim x_0^{1/2-m}u_{x_0}=\nu\,(x)\quad\forall\,x,\ |x|<r, \tag{9}$$

$$B_n^x u = \psi(x) \quad \forall\, x,\ |x| < r, \tag{10}$$

*где*

$$\nu(x) \in C^{(n+1)/2}(|x| \leqslant r), \quad \psi(x) \in C^{(n+3)/2}(|x| \leqslant r).$$

Единственность и существование решения этой задачи легко получить из равенства (2) и однозначной разрешимости видоизмененной (по терминологии работы [4]) задачи Коши:

$$\lim_{x_0 \to 0} u(x,\, x_0) = \tau(x), \quad \lim_{x_0 \to 0} x_0^{1/2-m} u_{x_0} = \nu(x), \quad |x| < r,$$

для уравнения (1), если учесть, что на основании (9), (10) и принципа Гюйгенса

$$u\left(0,\ (r/\beta)^{\beta}\right) = \frac{\gamma(n)}{4} r \left(\frac{\partial}{\partial r^2}\right)^{(n-1)/2} \frac{1}{r} \int\limits_{|\xi|=r} \psi(z+\xi,\ 0)\, d\omega_\xi +$$

$$+ \frac{\gamma(n)}{8} \left(\frac{\partial}{\partial r^2}\right)^{(n-3)/2} \frac{1}{r} \int\limits_{|\xi|=r} \nu(z+\xi,\ 0)\, d\omega_\xi.$$

**Литература**

1. Бицадзе А. В. Сб. тр., посвященных восьмидесятилетию Н. И. Мусхелишвили. М., 1972.
2. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., 1964.
3. Гурса Э. Курс математического анализа. Т. 3. М. – Л., 1939.
4. Бицадзе А. В. Тр. III Всесоюзн. математич. съезда. Т. 3. М.: Изд-во АН СССР, 1958.

Поступила в редакцию
2 марта 1972 г.

Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР;
Институт математики СО АН СССР

## О корректной постановке задач для уравнений смешанного типа в многомерных областях

В евклидовом пространстве $E_{n+1}$ точек $(x,\, x_0)$, $x = (x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n)$ рассмотрим конечную область $D$, ограниченную поверхностью Ляпунова $\sigma$, расположенной в полупространстве $x_0 < 0$, и коноидом $K\colon\ |x| = r - \beta x_0^{1/\beta}$, $x_0 \geqslant 0$, $r = \mathrm{const} > 0$, $(2m+1)\,\beta = 2$, где $m$ – неотрицательное целое число. Обозначим через $D^+$ и $D^-$ части области $D$, лежащие соответственно в полупространствах $x_0 < 0$ и $x_0 > 0$, через $S$ – общий участок границ областей $D^+$ и $D^-$, представляющий $n$-мерный шар $\{x_0 = 0,\ |x| \leqslant r\}$, а через $S_0$ – сферу $\{x_0 = 0,\ |x| = r\}$.

Бицадзе А. В., Нахушев А. М. Доклады АН СССР. 1972, **205**:1, 9–12.

Уравнение

$$x_0^{2m}\Delta_x u - x_0 u_{x_0x_0} + (m-1/2)\, u_{x_0} = 0, \tag{1}$$

где $\Delta_x$ – оператор Лапласа по переменным $x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n$, эллиптично в области $D^+$, гиперболично в $D^-$ с одновременным вырождением типа и порядка на $S$.

Уравнение (1) при $n = 1$ относится к классу уравнений, структурные свойства решений которых подробно исследованы в работе [1]. Ниже, если особо не оговорено, будем считать, что $1 < n \equiv 1 \pmod 2$.

**Задача 1.** *Найти функцию $u\,(x,\, x_0)$ со следующими свойствами:*

1) *$u\,(x,\, x_0)$ – регулярное в $D \setminus S$ решение уравнения (1) из класса $C\left(\overline{D}\right) \cap C^3\left(D^-\right)$;*

2) *$|x_0|^{1/2-m}\, u_{x_0}$ непрерывна в $D$ и интегрируема по $S_0$;*

3) *$u\,(x,\, x_0)$ удовлетворяет условиям*

$$u\,(x,\, x_0) = \varphi\,(x,\, x_0) \quad \forall\,(x,\, x_0) \in \sigma, \tag{2}$$

$$\left(B_n^x x_0^{1/2-m}\frac{\partial}{\partial x_0} + \mu B_n^x\right) u = \psi\,(x) \quad \forall\,(x,\, x_0) \in K, \tag{3}$$

$$\lim_{x_0 \to (r/\beta)^\beta} x_0^{1/2-m} u_{x_0}\,(0,\, x_0) = c_1, \tag{4}$$

*где $\varphi$ и $\psi$ – заданные функции соответственно из классов $C^{(n+7)/2}\,(\sigma)$ и $C^{(n+7)/2}\,(|x| \leqslant r)$, $\mu \geqslant 0$ и $c_1$ – заданные постоянные, $B_n^x$ – введенный в [2] оператор*

$$B_n^x u \equiv \gamma\,(n)\, R\left(\frac{\partial}{\partial R^2}\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{R} \times$$

$$\times \int\limits_{|\xi|=R} u\left[\frac{r\xi_i x}{|x|\sqrt{r^2 - |x|^2}} + \frac{x}{2} + A_i\xi,\ \left(\frac{r}{2\beta} - \frac{\xi_i\,|x|}{\beta\sqrt{r^2-|x|^2}}\right)^\beta\right] d\omega_\xi.$$

Здесь $d\omega_\xi$ – элемент сферы $|\xi| = R$ пространства $E_n$, $\gamma\,(n) = \sqrt{\pi^{1-n}}$, $2R = \sqrt{r^2 - |x|^2}$, $2R\,\partial\,/\,\partial R^2 = \partial\,/\,\partial R$, $A_i$ – матрица, полученная из квадратной $n \times n$-матрицы $A = \|a_{jk}\|$, транспонированной по отношению к ортогональной матрице $A' = \|a_{kj}\|$ с $\det A' = 0$ и $a_{ij} = x_j\,/\,|x|$, $j = 1,\, 2,\, \ldots,\, n$, заменой элементов $i$-го ее столбца нулями.

В [2] нами была доказана справедливость равенства

$$u\,(x,\, 0) + u\left[0,\, (r/\beta)^\beta\right] = B_n^x u \quad \forall\, x,\ |x| < r. \tag{5}$$

Пользуясь свойством (5) решений уравнения (1) нетрудно показать, что функциональное соотношение между $\tau(x) \equiv u(x,\, 0)$ и $\nu(x) \equiv \lim\limits_{x_0 \to +0} x_0^{1/2-m} u_{x_0}$, принесенное из $D^-$, в соответствии с (3) и (4) имеет вид

$$\nu(x) + \mu\tau(x) = \psi(x) - c_0\mu - c_1, \tag{6}$$

где $c_0 = u\left[0,\, (r\,/\,\beta)^{\beta}\right]$.

Так как на $S_0$, в силу (2) и (6),

$$\tau(x) = \varphi(x,\, 0)\,, \quad \nu(x) = \psi(x) - \mu\varphi(x,\, 0) - c_0\mu - c_1,$$

то на основании принципа Гюйгенса получаем

$$(1 + \mu r)\, c_0 = \frac{\gamma(n)}{2} r \left(\frac{\partial}{\partial r^2}\right)^{(n-1)/2} \frac{1}{r} \int\limits_{|\xi|=r} \varphi(\xi,\, 0)\, d\omega_\xi +$$

$$+ \frac{\gamma(n)}{4} \left(\frac{\partial}{\partial r^2}\right)^{(n-3)/2} \frac{1}{r} \int\limits_{|\xi|=r} \left[\psi(\xi) - \mu\varphi(\xi,\, 0) - c_1\right] d\omega_\xi. \tag{7}$$

Из (6) и (7) вытекает справедливость следующего принципа экстремума: *решение $u(x,\, x_0)$ задачи 1 при $\varphi(x,\, 0) \equiv 0$, $\psi(x) \equiv 0$, $c_1 = 0$ положительный максимум и отрицательный минимум в замкнутой области $\overline{D}^+$ принимает на поверхности $\overline{\sigma}$.*

Действительно, в области $D^+$ функция $u(x,\, x_0)$ не может достигать экстремума. Если положительный максимум в $\overline{D}^+$ функции $u(x,\, x_0)$ достигается в точке $(\xi,\, 0) \in S$, то в этой точке $\nu(\xi) > 0$. Поскольку функция $u\left[x,\, (y_0\,/\,\beta)^{\beta}\right]$, как функция переменных $x$ и $y_0$, является гармонической в области $D_1$, где $D_1$ – образ $D^+$ при отображении $x = x$, $y_0 = -\beta(-x_0)^{1/\beta}$, то последнее неравенство вытекает из принципа Заремба–Жиро. С другой стороны, из (6) и (7) заключаем, что $\nu(\xi) \leqslant 0$. Полученное противоречие исключает возможность достижения функцией $u(x,\, x_0)$ положительного максимума в точке $(\xi,\, 0)$. Аналогично доказывается, что функция $u(x,\, x_0)$ не может достигать отрицательного минимума в $\overline{D}^+$ в точках $(\xi,\, 0) \in S$.

Из доказанного принципа и однозначной разрешимости видоизмененной задачи Коши [2]

$$\lim_{x_0 \to 0} u(x,\, x_0) = \tau(x)\,, \quad \lim_{x_0 \to 0} x_0^{1/2-m} u_{x_0} = \nu(x)\,, \quad |x| < r, \tag{8}$$

для уравнения (1) в области $D^-$ следует, что в рассматриваемом случае задача 1 не может иметь более одного решения.

Переходя к доказательству существования решения задачи 1, для простоты будем предполагать, что $\sigma$ совпадает с «нормальной» поверхностью $\sigma_0\colon |x|^2+\beta^2(-x_0)^{2/\beta}=r^2$, $x_0\leqslant 0$ и $\varphi(x,\,x_0)\equiv 0$.

Определенная формулой

$$G(x,\;x_0;\;\xi,\;\xi_0)=\gamma_1\left[|x-\xi|^2+|\zeta_0-y_0|^2\right]^{(-n)/2}-$$

$$-\gamma_1 r^{n-1}\left[\left(|\xi|^2+\zeta_0^2\right)\left(|x-\xi^*|^2+|y_0-\zeta_0^*|^2\right)\right]^{(1-n)/2},$$

где

$$\xi^*=r^2\xi/\left(|\xi|^2+\zeta_0^2\right),\quad \zeta_0^*=r^2\zeta_0/\left(|\xi|^2+\zeta_0^2\right),\quad y_0=-\beta(-x_0)^{1/\beta},$$

$$\zeta_0=-\beta(-\xi_0)^{1/\beta},\quad 2(n-1)\gamma(-n)\gamma_1=\Gamma(n/2+1/2),$$

действительная функция $G(x,\;x_0;\;\xi,\;\xi_0)$ при $x\neq\xi$, $x_0\neq\xi_0$ является решением уравнения (1) в $D^+$, удовлетворяющим условиям: $G=0$ при $(x,\,x_0)\in\sigma_0$, $G_{\zeta_0}(x,\;0;\;\xi,\;\xi_0)=0$ при $\xi_0=0$. Учитывая это обстоятельство и применяя в $D^+$ формулу Грина (так же как в [3, с. 87]) получим второе основное функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$:

$$\tau(x)+2\gamma_1\int\limits_{|\xi|\leqslant r}\left(|x-\xi|^{1-n}-r^{n-1}\left|x\,|\xi|^2-\xi r^2\right|^{1-n}\right)\nu(\xi)\,d\omega_\xi=0. \qquad (9)$$

Исключая $\tau(x)$ из (6) и (9), для $\nu(x)$ получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода, безусловная разрешимость которого вытекает из единственности решения задачи 1.

**Задача 2.** *Найти функцию $u(x,\,x_0)$ со следующими свойствами:*

1) $u(x,\,x_0)$ *– регулярное в $D\setminus S$ решение уравнения (1), непрерывное в $\overline{D}$;*

2) $|x_0|^{1/2-m}u_{x_0}$ *непрерывна в $D$ и интегрируема по $S_0$;*

3) $u(x,\,x_0)$ *на $\sigma$ удовлетворяет условию (2), а на $K$ краевому условию*

$$\Delta_x B_n^x u+a^j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}B_n^x u+c(x)\left[B_n^x u-u\left(0,\;(r/\beta)^\beta\right)\right]=\psi(x), \qquad (10)$$

*где $a^j(x)$, $c(x)$ – заданные непрерывные функции, причем $c(x)\leqslant 0$ при $|x|\leqslant r$, и по повторяющемуся индексу $j$ подразумевается суммирование от 1 до $n$.*

Из равенства (5) и краевых условий (3) и (10) легко усмотреть, что задача 2 эквивалентна (в смысле ее однозначной разрешимости) задаче Дирихле

$$\tau(x)=\varphi(x,\,0)\quad\forall\,x,\;\;|x|=r,$$

для уравнения

$$\Delta_x \tau + a^j(x)\, \tau_{x_j} + c(x)\, \tau = \psi(x)$$

в шаре $|x| < r$ евклидова пространства $E_n$.

Условие $c(x) \leqslant 0$ гарантирует единственность решения задачи 2. При доказательстве существования решения приходится накладывать на $\sigma$ и на функции, участвующие в краевых условиях, дополнительные ограничения. Так, например, в случае когда $\sigma = \sigma_0$, в силу хорошо известных свойств решения задачи Дирихле для равномерно эллиптических уравнений [4] и решения задачи (8) для уравнения (1) в области $D^-$ для существования решения задачи 2 достаточно, чтобы

$$\varphi(x,\, x_0) \in C^{(0,\,\lambda)}(\sigma)\,, \quad \varphi(x,\, 0) \in C^{((n+3)/2,\,\lambda)}(S_0)\,,$$

$$a^j(x)\,,\ c(x)\,,\ \psi(x) \in C^{((n-1)/2,\,\lambda)}(S)\,,$$

где $C^{(k,\,\lambda)}(E)$ – множество функций, имеющих производные до $k$-го порядка, удовлетворяющие условию Гельдера с показателем $\lambda$.

Непосредственным обобщением задач 1 и 2 являются краевые задачи для уравнения (1), когда на коноиде $K$ задаются условия вида

$$\left( A^j B_n^x \frac{\partial}{\partial x_j} + A^0 B_n^x x_0^{1/2-m} \frac{\partial}{\partial x_0} + C B_n^x \right) u = \psi,$$

где $A^j$, $A^0$ и $C$ – заданные (например, псевдодифференциальные) операторы.

В случае, когда $n$ четно, роль оператора $B_n^x$ при постановке краевых задач для уравнения (1) играет оператор $C_n^x$, определяемый формулой [2]:

$$G_n^x u \equiv \lim_{y_0 \to 0} \frac{\partial}{\partial y_0} \int\limits_{K_x^r} \left\{ u \left[ \xi,\ (\xi_0/\beta)^\beta \right] \frac{\partial}{\partial N} V(x,\ y_0;\ \xi,\ \xi_0) - \right.$$

$$\left. - V(x,\ y_0;\ \xi,\ \xi_0)\, \frac{\partial}{\partial N} u \left[ \xi,\ (\xi_0/\beta)^\beta \right] \right\} dK_x^r.$$

Здесь $K_x^r$ – часть конуса $|\xi| = r - y_0$, лежащая внутри конической области $|\xi - x| \leqslant y_0$, $\partial/\partial N$ – конормаль, соответствующая волновому оператору $\partial^2/\partial \xi_0^2 - \Delta_\xi$, $V(x,\ y_0;\ \xi,\ \xi_0)$ – функция Вольтерра характеристической задачи Коши для уравнения $u_{y_0 y_0} = \Delta_x u$ с данными на конусе $|x| = r - y_0$, $y_0 \geqslant 0$, $dK_x^r$ – элемент поверхности $K_x^r$.

В заключение отметим, что рассмотренные выше задачи в определенном смысле являются многомерными аналогами задач, исследованных в [1] и [5].

**Литература**


1. Бицадзе А. В. Сборн. тр., посвященных восьмидесятилетию Н. И. Мусхелишвили. М., 1972.
2. Бицадзе А. В., Нахушев А. М. ДАН. 1972. Т. 204, № 6.
3. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М., 1959.
4. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. М., 1957.
5. Нахушев А. М. Дифференциальные уравнения. 1968. Т. 4, № 1.


Поступила в редакцию
2 марта 1972 г.

Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР

Институт математики СО АН СССР

# Вырождающиеся гиперболические уравнения

## О задаче Дарбу для гиперболических уравнений

Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{yy} - k(y)u_{xx} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y), \tag{1}$$

где $k(y) > 0$ при $y \neq 0$ и может обращаться в нуль при $y = 0$.

Пусть $D$ – односвязная область плоскости независимых переменных $x$, $y$, ограниченная характеристиками $AC$ и $BC$ уравнения (1), выходящими из точки $C\left(\frac{1}{2},\, y_C\right)$, и отрезком $AB\colon 0 < x < 1$ прямой $y = 0$.

Относительно коэффициентов $k$ и $b$ уравнения (1) будем предполагать, что они непрерывны в замыкании $\overline{D} = D \cup \partial D$ области $D$, а относительно $a$ и $c$ – их непрерывность в $\overline{D}$ вместе с производной по $x$.

Обозначим через $W$ множество функций $u = u(x,y)$ из класса $C(\overline{D}) \cap C^2(D) \cap W_2^1(D) \cap W_2^1(\partial D)$, где $W_2^1(D)$ – пространство Соболева, для которых $Lu \in L_2(D)$ и соблюдены краевые условия

$$u\big|_{AB \cup BC} = 0, \quad \text{или} \quad u_y\big|_{AB} = 0, \quad u\big|_{BC} = 0. \tag{2}$$

**Задача Дарбу.** *Найти функцию $u \in W$, удовлетворяющую уравнению (1) в области $D$.*

Единственность и существование неоднородной задачи Дарбу:

$$u_y\big|_{AB} = \nu(x), \quad u\big|_{BC} = \psi(y),$$

для уравнения (1) в случае, когда

$$k(y) = -y^m, \quad m \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 2), \quad a,\, b \in C^3(\overline{D}), \quad c,\, f \in C^1(\overline{D})$$

и, кроме того, при $m \geqslant 2$ функция $a$ представима в виде $a = |y|^n a_1(x,y)$ с $a_1 \in C(\overline{D})$ и $n > \frac{m}{2} - 1$, были установлены Геллерстедтом [1] методом функции Грина–Адамара.

**Теорема.** *Пусть коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют одному из следующих условий:*

1) $k(y) \neq 0$ *или* $a(x,0) > 0$ *при* $0 \leqslant x \leqslant 1$*;*

2) $a/k,\ b^2/k \in C(\overline{D})$, $c(x,0) < 0$ *при* $0 \leqslant x \leqslant 1$*;*

3) $a/k,\ b^2/k,\ a_x/k,\ c/k,\ c_x/k \in C(\overline{D})$*;*

4) $k/a,\ b^2/a \in C(\overline{D})$, $a > 0$, $c(x,0) < 0$ *при* $y \neq 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$*;*

---

Нахушев А. М. Докл. АН СССР. 1970, **195**:4, 776–779.
Представлено академиком С. Л. Соболевым 11.05.1970

5) $k/a,\ b^2/a,\ c/k,\ c_x/k \in C(\overline{D})$, $a > 0$, *при* $y \neq 0$, $a_x \geqslant 0$.

*Тогда имеет место априорная оценка вида*

$$\|u\|_{++} \leqslant C\|Lu\|_{+}, \quad \forall\, u \in W,$$

*где* $\|\cdot\|_{++}$, $\|\cdot\|_{+}$ – *некоторые позитивные нормы, а* $C$ – *не зависящая от* $u$ *постоянная.*

**Доказательство.** Введем оператор

$$L_\mu v \equiv v_{yy} - kv_{xx} + a_\mu v_x + bv_y + c_\mu v,$$

где

$$\mu \equiv \text{const} < 0, \quad a_\mu = a - 2\mu k, \quad c_\mu = c + a\mu - k\mu^2.$$

Легко проверить, что если $u = v\exp(\mu x)$ и $u \in W$, то $Lu = \exp(\mu x)L_\mu v$ и $v \in W$. Для любой функции $d = d(x) \in C^1(\overline{D})$ и $v \in W$ справедливо тождество

$$2(dv_x,\, L_\mu v)_0 = 2\int\limits_D dv_x L_\mu v\, dD = \int\limits_D \left[d_x(kv_x^2 + v_y^2) + 2da_\mu v_x^2 + 2dbv_xv_y\right] dD -$$

$$-\int\limits_D (dc_\mu)_x v^2 dD + \int\limits_{\partial D} dc_\mu x_n v^2 dS +$$

$$+\int\limits_{\partial D} d[-(kv_x^2 + v_y^2)x_n + 2y_n v_x v_y]\, dS = \sum_{i=1}^{4} I_j, \tag{3}$$

где $x_n$, $y_n$ – направляющие косинусы внешней нормали $n = (x_n, y_n)$ к границе области $D$.

Так как корни характеристического уравнения $\lambda(\lambda + x_n + kx_n) = 0$, соответствующего квадратичной форме $-kx_n\xi^2 + 2y_n\xi\eta - x_n\eta^2$ на характеристике $AC$, неотрицательны, а на характеристике $BC$ в силу (2)

$$v_x = v_n x_n, \quad v_y = v_n y_n,$$

нетрудно убедиться в том, что $I_4 \geqslant 0$ для всех $v \in W$, если $d(x) \geqslant 0$ в $D$.

Предположим, что $d = \exp(\alpha x)$, где $\alpha \equiv \text{const} > 0$. Из (3) и простого неравенства

$$2bv_xv_y \geqslant -\varepsilon b^2 v_x^2 - \frac{1}{\varepsilon}v_y^2,$$

справедливого для любого $\varepsilon > 0$, имеем

$$\int\limits_D d\left[(\alpha k + 2a_\mu - \varepsilon b^2)v_x^2 + \left(\alpha - \frac{1}{\varepsilon}\right)v_y^2\right] dD + I_2 + I_3 \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon\|v_x\sqrt{d\omega}\|_0^2 + C\|\omega^{-1/2}L_\mu v\|_0^2, \tag{4}$$

где $\omega = \omega(x, y)$ – любая неотрицательная функция из класса $C(\overline{D})$, а $\|\cdot\|_0$ – норма в пространстве $L_2(D)$. Здесь и ниже $C$ означает некоторую положительную постоянную, которая не зависит от $v$.

Для удобства введем позитивные нормы по формулам

$$\|v\|_{1,\varphi,\psi} = \left[\int\limits_D (\varphi v_x^2 + v_y^2 + \psi v^2)dD\right]^{1/2}, \quad \|v\|_{1,\varphi,1} \equiv \|v\|_{1,\varphi},$$

$$\|v\|_{0,\varphi} = \left(\int\limits_D \frac{v^2}{\varphi}dD\right)^{1/2}, \quad \|v\|_{j,1} \equiv \|v\|_j, \;\; j = 0, 1.$$

Перепишем неравенство (4) в виде

$$\int\limits_D d\left[a_\mu^\alpha v_x^2 + \left(\alpha - \frac{1}{\varepsilon}\right) v_y^2 - c_\mu^\alpha v^2\right] dD \leqslant C\|L_\mu v\|_{0,\omega} - I_3, \tag{5}$$

где

$$a_\mu^\alpha = 2a + (\alpha - 4\mu)k - \varepsilon(b^2 + \omega),$$

$$c_\mu^\alpha = \alpha c + c_x + (\alpha a + a_x)\mu - \alpha k\mu^2 = \alpha c_\mu + c_{\mu x}.$$

Пусть соблюдено условие 1 теоремы, например, $a(x,\, 0) > 0$. Положим

$$\mu < -\min_{0\leqslant x\leqslant 1} \frac{c(x,\, 0)}{a(x,\, 0)}.$$

Тогда при достаточно малых значениях $\varepsilon$ найдется такое число $\delta < 0$, что

$$c_\mu < 0, \quad a_\mu^\alpha > 0, \quad \forall\, (x, y) \in \overline{D} \cap (\delta \leqslant y \leqslant 0).$$

Поэтому существует такое, независящее от $\alpha$ число $\mu_0$, что

$$c_{\mu_0} < 0, \quad a_{\mu_0}^\alpha > 0, \quad \forall\, \alpha > 0, \quad (x, y) \in \overline{D}, \tag{6}$$

и число $\alpha_0$, зависящее от $\mu_0$, что

$$c_{\mu_0}^{\alpha_0} < 0, \quad \forall\, (x, y) \in \overline{D}. \tag{7}$$

Принимая во внимание (6) и (7), из (5) при $\omega \equiv 1$ получаем энергетическое неравенство

$$\|v\|_1 \leqslant \|L_{\mu_0} v\|_0, \quad \forall\, v \in W. \tag{8}$$

Аналогично, но еще проще, доказывается оценка (8), когда $k(0) \neq 0$, т. е. уравнение (1) строго гиперболично.

Если имеет место условие 2, то при $\omega \equiv k$, очевидно, существует такое, не зависящее от $\alpha$, число $\mu_0$, что

$$c_{\mu_0} < 0, \quad a^{\alpha}_{\mu_0}/k = \alpha - 4\mu_0 + (2a - \varepsilon b^2 - \varepsilon k)/k > 0, \quad \forall\,(x, y) \in \overline{D},$$

и такое число $\alpha_0$, что верно (7). Следовательно, в силу (5),

$$\|v\|_{1,k} \leqslant C\|L_{\mu_0}v\|_{0,\,k}, \quad \forall\, v \in W.$$

Пусть теперь выполнено условие 3. Тогда при $\omega \equiv k$ найдется число $\mu_0$, которое не зависит от $\alpha$, что $c_{\mu_0}/k < 0$, $a^{\alpha}_{\mu_0}/k > 0$ в $\overline{D}$, и такое число $\alpha_0$, что $c^{\alpha_0}_{\mu_0}/k < 0$ в $\overline{D}$. Поэтому в соответствии с (5) имеем

$$\|v\|_{1,\,k,\,k} \leqslant C\|L_{\mu_0}v\|_{0,\,k}, \quad \forall\, v \in W.$$

Точно также убеждаемся в том, что $\forall\, v \in W$, $\|v\|_{1,\,a} \leqslant C\|L_{\mu_0}v\|_{0,\,a}$ и $\|v\|_{1,\,a,\,k} \leqslant C\|L_{\mu_0}v\|_{0,\,a}$ при соблюдении условий 4 и 5 соответственно, а это и завершает доказательство теоремы.

Из доказанной теоремы следует единственность регулярного решения задачи Дарбу и существование слабого решения сопряженной задачи

$$v_{yy} - kv_{xx} - (av)_x - (bv)_y + cv = f, \quad v\big|_{AB\cup AC} = 0$$

в функциональных пространствах, соответствующих априорной оценке.

Нетрудно показать, что основное неравенство (5) гарантирует единственность решения задачи Дарбу и при более общих предположениях относительно коэффициентов уравнения (1). Однако следует отметить, что *некоторые из условий теоремы являются существенными и их нарушения могут привести даже к неединственности решения задачи Дарбу.*

**Пример 1.** Функция

$$u = \sin\left(x - 1 + \int\limits_y^0 \exp\frac{1}{2t}dt\right)$$

в области $D$ является решением однородной задачи Дарбу: $u\big|_{BC} = 0$, $u_y\big|_{AB} = 0$ для уравнения

$$u_{yy} - \exp\left(\frac{1}{y}\right)u_{xx} - \frac{1}{2y^2}\exp\left(\frac{1}{2y}\right)u_x = 0.$$

**Пример 2.** Общее решение уравнения

$$u_{yy} - y^2u_{xx} - u_x = 0 \tag{9}$$

в классе функций $u \in C^1(D \cup AB) \cap C^2(D)$, обладающих тем свойством, что $u(x,\, 0)$ и $u_y(x, 0) \in C^1(0 \leqslant x \leqslant 1) \cap C^2(0 < x < 1)$ дается формулой

$$u(x,\, y) = \tau\left(x + \frac{1}{2}y^2\right) + \frac{1}{2}y \int\limits_0^1 \nu\left(x + \frac{1}{2}y^2 - y^2 t\right)\frac{dt}{\sqrt{t}}, \tag{10}$$

где $\tau(x)$, $\nu(x)$ – произвольные функции из $C^1(0 \leqslant x \leqslant 1) \cap C^2(0 < x < 1)$.

Воспользовавшись формулой (10), нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения: *однородная задача, соответствующая неоднородной задаче Дарбу:* $u_y|_{AB} = \nu(x)$, $u|_{BC} = \psi(x)$ *для уравнения* (9)*, имеет бесчисленное множество линейно независимых решений, а неоднородная разрешима тогда и только тогда, когда*

$$\nu(x) = \psi_*(x) \equiv \sqrt{1-x}\ \psi'\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2}\right).$$

Для уравнения (9) корректно поставлена задача Дарбу, когда $u$ задается не на $BC$, а на $AC$, что говорит о неравноправности этих характеристик, или когда на $AB$ задается не $u_y$, а $u$ и, наконец, следующая краевая задача

$$u|_{BC} = \psi(x), \quad \lim_{y \to 0}\frac{u_y - \psi_*(x)}{y} = \nu(x), \quad 0 < x < 1,$$

если, например,

$$\psi(x) \in C^4\left(\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1\right), \ \ \nu(x) \in C^1(0 \leqslant x \leqslant 1) \cap C^2(0 < x < 1).$$

Любопытно отметить, что уравнение (9) приведено А. В. Бицадзе [2] как пример уравнения, для которого задача Коши с начальными данными на линии параболического вырождения корректна. Следовательно, *в отличие от строго гиперболических уравнений, или от вырождающихся уравнений с нехарактеристическим степенным вырождением порядка меньшего двух, из корректности задачи Коши не следует, вообще говоря, корректность соответствующих задач Дарбу, если порядок вырождения больше либо равен двум.*

В заключение отметим, что в связи с приведенными здесь примерами возникает вопрос, может ли неединственность решения задачи Дарбу повлиять на единственность известной задачи Трикоми. Например, легко убедиться, что для уравнения

$$\operatorname{sign} y \cdot y^2 u_{xx} + u_{yy} - u_x = 0$$

этого не происходит.

**Литература**


1. Gellerstedt S. Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik. 1937. Vol. 25 A, no. 29. Pp. 1–23.
2. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М., 1959.


Поступила в редакцию
30 апреля 1970 г.

Институт математики
СО АН СССР

# К априорным оценкам для задач Трикоми и Дарбу

**1. Априорные оценки для задачи Трикоми.** Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv k(y)\, u_{xx} + u_{yy} + a(x, y)\, u_x + b(x, y)\, u_y + c(x, y)\, u = f(x, y), \quad (1)$$

где $yk(y) > 0$ при $y \neq 0$.

Пусть $\Omega$ – конечная односвязная область плоскости независимых переменных $x$, $y$, ограниченная кусочно-гладкой дугой Жордана $\sigma$ с концами в точках $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, лежащей в верхней полуплоскости $y > 0$, и характеристиками $AC$ и $BC$ уравнения (1), выходящими из точки $C\left(\dfrac{1}{2}, y_C\right)$, $y_C < 0$; $\Omega_1$ и $\Omega_2$ – эллиптическая и гиперболическая части смешанной области $\Omega$; $J$ – единичный интервал $0 < x < 1$ на прямой $y = 0$.

Относительно коэффициентов уравнения (1) предполагается, что

$$k(y) \in C^1\left(\overline{\Omega}_1\right) \cap C^1\left(\overline{\Omega}_2\right), \ \ a, \ \ b \in C\left(\overline{\Omega}\right), \ \ c \in C^1\left(\overline{\Omega}\right).$$

**Задача Трикоми.** *Найти функцию* $u(x, y)$ *из класса* $C\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^1(\Omega)$, *удовлетворяющую уравнению* (1) *в областях* $\Omega_1$, $\Omega_2$ *и краевому условию*

$$u(x, y) = 0 \ \ \forall\ (x, y) \in \sigma \cup AC. \quad (2)$$

Примем следующие обозначения:

$L^*$ – оператор, сопряженный по Лагранжу с оператором $L$,

$$L^* v \equiv k(y)\, v_{xx} + v_{yy} - (av)_x - (bv)_y + cv = f; \quad (3)$$

$W_2^l(\Omega)$ – пространство Соболева [1] со скалярным произведением $(.\,,.)_l$ и нормой $\|\cdot\|_l$, $l = 0, 1, \ldots$; $W_2^0(\Omega) = L_2(\Omega)$;

$W_2^{-l}(\Omega)$ – негативное (по Лаксу) пространство, построенное по $L_2(\Omega)$ и $W_2^l(\Omega)$ (см. [2]);

Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1972, **8**:1, 107–117.

$<\varphi,\, u>_0$, где $u\in W_2^l(\Omega)$ – билинейная форма на пространстве $W_2^{-l}(\Omega)$, которая при $\varphi\in L_2(\Omega)$ совпадает со скалярным произведением $(\varphi,\, u)_0$;

$W(B)$ – множество функций $u$ из класса

$$W = C\left(\overline{\Omega}\right)\cap C^2(\Omega\setminus J)\cap W_2^1(\Omega)\cap W_2^1(\partial\Omega),$$

для которых $Lu\in L_2(\Omega)$ и соблюдено условие (2);

$W(B^*)$ – множество функций $v$ из $W$, для которых $L^*v\in L_2(\Omega)$ и выполнено *сопряженное краевое* условие

$$v(x,\, y) = 0\quad \forall\,(x,\, y)\in\sigma\cup BC. \tag{4}$$

Для любых функций $u\in W(B)$ и $v\in W(B^*)$ справедливо равенство

$$(v,\, Lu)_0 = (u,\, L^*v)_0\,, \tag{5}$$

поэтому задачу $T^*$: *найти функцию $v$ из класса $C\left(\overline{\Omega}\right)\cap C^1(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению* (3) *в областях $\Omega_1$ и $\Omega_2$ и краевому условию* (4), *будем называть задачей, сопряженной задаче $T$ (Трикоми).*

*Слабым решением* задачи $T$ назовем любую функцию $u\in L_2(\Omega)$, удовлетворяющую равенству

$$(u,\, L^*v)_0 = <f,\, v>_0\quad \forall\, v\in W(B^*)\,,$$

а слабым решением задачи $T^*$ – функцию $v\in L_2(\Omega)$, для которой

$$(v,\, Lu)_0 = <f,\, u>_0\quad \forall\, u\in W(B)\,.$$

Ниже, если особо не оговорено, будем считать, что $f\in W_2^{-1}(\Omega)$.

**Теорема (априорная оценка).** *Пусть коэффициенты уравнения* (1) *и кривая $\sigma$ таковы, что существует хотя бы один вектор $(\alpha,\beta,\gamma)$ с компонентами $\alpha\in C\left(\overline{\Omega}\right)\cap C^2\left(\overline{\Omega}_1\right)\cap C^2\left(\overline{\Omega}_2\right)$ и $\beta,\ \gamma\in C\left(\overline{\Omega}\right)\cap C^1(\Omega_1)\cap C^1\left(\overline{\Omega}_2\right)$, удовлетворяющий системе дифференциальных неравенств*

$$L^*\alpha + \alpha c \geqslant (\beta c)_x + (\gamma c)_y\quad \forall\,(x,\, y)\in\Omega, \tag{6}$$

$$k(\gamma_y - \beta_x - 2\alpha) + \gamma k' + 2\beta a > 0\quad \forall\,(x,\, y)\in\overline{\Omega}, \tag{7}$$

$$\beta_x - \gamma_y + 2\gamma b > 2\alpha\quad \forall\,(x,\, y)\in\overline{\Omega}, \tag{8}$$

$$\begin{gathered}[k(\gamma_y - \beta_x - 2\alpha) + \gamma k' + 2\beta a]\,[\beta_x - \gamma_y - 2\alpha + 2\gamma b] > \\ > (\beta_y + k\gamma_x - \beta b - \alpha\gamma)^2\quad \forall\,(x,\, y)\in\overline{\Omega},\end{gathered} \tag{9}$$

*условиям «склеивания»*

$$\lim_{y\to+0}\left[\alpha_y(x,\, y) - \alpha_y(x,\, -y)\right]\geqslant 0,\quad \lim_{y\to+0}\left[k(y) - k(-y)\right]\gamma(x,\, 0)\geqslant 0 \tag{10}$$

*и краевым условиям*

$$(\beta,\,\gamma)\,n=\beta x_n+\gamma y_n\geqslant 0\quad\forall\,(x,y)\in\sigma, \tag{11}$$

$$\beta+\sqrt{-k}\gamma\leqslant 0,\quad\forall\,(x,y)\in BC, \tag{12}$$

$$4k\left(\alpha_y+\sqrt{-k}\alpha_x\right)\leqslant\left(2\sqrt{-k}a+2kb-k'\right)\alpha+$$

$$+\,2\left(\beta\sqrt{-k}+\gamma k\right)c,\quad\forall\,(x,y)\in BC, \tag{13}$$

*где* $n=(x_n,y_n)$ *– единичная внешняя нормаль к границе. Тогда имеет место энергетическое неравенство*

$$\|u\|_1\leqslant C\,(\mu)\,\|Lu\|_0\quad\forall\,u\in W\,(B)\,. \tag{14}$$

Например, если $a\equiv b\equiv c\equiv 0$, $k'\,(y)>0$ в $\overline{\Omega}_1$ и $\overline{\Omega}_2$, а кривая $\sigma$ такова, что

$$(\beta_1 x+\beta_0)\,x_n+(\gamma_1 y+\gamma_0)\,y_n\geqslant 0,\quad\forall\,(x_1,y)\in\sigma,$$

где $\beta_0,\ \beta_1,\ \gamma_0,\ \gamma_1\equiv\mathrm{const}\geqslant 0,\ \beta_1>\gamma_1$,

$$\gamma_0>\max\left\{\max\frac{k\,(\beta_1-\gamma_1)-\gamma_1 yk'}{k'},\ -\gamma_1 y_C\right\},$$

то в качестве вектора $(\alpha,\,\beta,\,\gamma)$ можно взять $(0,\ \beta_1 x+\beta_0,\ \gamma_1 y+\gamma_0)$.

**Доказательство теоремы 1.** Из очевидных тождеств

$$2\alpha kuu_{xx}=2\,(\alpha kuu_x)_x-2\alpha ku_x^2-\left(\alpha_x ku^2\right)_x+k\alpha_{xx}u^2,$$

$$2\alpha uu_{yy}=2\,(\alpha uu_y)_y-2\alpha u_y^2-\left(\alpha_y u^2\right)_y+\alpha_{yy}u^2,$$

$$2\beta ku_x u_{xx}=\left(\beta ku_x^2\right)_x-k\beta_x u_x^2,$$

$$2\beta u_x u_{yy}=2\,(\beta u_x u_y)_y-2\beta_y u_x u_y-\left(\beta u_y^2\right)_x+\beta_x u_y^2,$$

$$2\gamma ku_y u_{xx}=2\,(\gamma ku_y u_x)_x-2k\gamma_x u_x u_y-\left(\gamma ku_x^2\right)_y+(\gamma k)_y\,u_x^2,$$

$$2\gamma u_y u_{yy}=\left(\gamma u_y^2\right)_y-\gamma_y u_y^2,\quad 2\beta bu_x u_y=2\beta bu_x u_y,$$

$$2\alpha auu_x=\left(\alpha au^2\right)_x-(\alpha a)_x\,u^2,\quad 2a\gamma u_x u_y=2a\gamma u_x u_y,$$

$$2\alpha buu_y=\left(\alpha bu^2\right)_y-(\alpha b)_y\,u^2,\quad 2a\beta u_x^2=2a\beta u_x^2,$$

$$2\beta cuu_x=\left(\beta cu^2\right)_x-(\beta c)_x\,u^2,\quad 2b\gamma u_y^2=2b\gamma u_y^2,$$

$$2\gamma cuu_y=\left(\gamma cu^2\right)_y-(\gamma c)_y\,u^2,\quad 2c\alpha u^2=2c\alpha u^2$$

после почленного сложения и применения формулы Грина легко убедиться, что

$$2\,(lu,\,Lu)_0=\int\limits_{\Omega}\left[L^*\alpha+\alpha c-(\beta c)_x-(\gamma c)_y\right]u^2d\Omega+$$

$$+\int\limits_{\Omega}\Big[\Big(-2\alpha k-\beta_x k+(\gamma k)_y+2\beta a\Big)u_x^2+2\,(-\beta_y-k\gamma_x+\beta b+a\gamma)\,u_xu_y+$$

$$+(-2\alpha+\beta_x-\gamma_y+2\gamma b)\,u_y^2\big]\,d\Omega+2\int\limits_{CB}\alpha u\,(ku_xx_n+u_yy_n)\,ds+$$

$$+\int\limits_{CB}u^2\left[-k\alpha_xx_n-\alpha_yy_n+\alpha\,(ax_n+by_n)+C\,(\beta x_n+\gamma y_n)\right]ds+$$

$$+\int\limits_{J}\lim_{y\to+0}u^2\left[\alpha_y\,(x,\,y)-\alpha_y\,(x,\,-y)\right]dx+\int\limits_{J}\lim_{y\to+0}\gamma u_x^2\left[k\,(y)-k\,(-y)\right]dx+$$

$$+\int\limits_{\sigma\cup AC\cup CB}\left[k\,(\beta x_n-\gamma y_n)\,u_x^2+2\,(\beta y_n+\gamma kx_n)\,u_xu_y+(\gamma y_n-\beta x_n)\,u_y^2\right]ds=$$

$$=J_1+J_2+J_3+J_4+J_5+J_6+J_7,$$

где $lu=\alpha u+\beta u_x+\gamma u_y$, $d\Omega$ – элемент площади, а $ds$ – элемент длины.

Поскольку на характеристике $BC$: $kx_n^2+y_n^2=0$, $\sqrt{1-k}x_n=1$, $\sqrt{1-k}y_n=-\sqrt{-k}$ и, стало быть, определитель

$$\begin{vmatrix} k\,(\beta x_n-\gamma y_n) & \beta y_n+\gamma kx_n \\ \beta y_n+\gamma kx_n & \gamma y_n-\beta x_n \end{vmatrix}=-\left(kx_n^2+y_n^2\right)\left(k\gamma^2+\beta^2\right)=0,$$

то в соответствии с (12) квадратичная форма $Q$, стоящая под знаком интеграла в выражении $J_7$, на этой характеристике неотрицательна.

На кривой $\sigma\cup AC$: $u_x=u_nx_n$, $u_y=u_ny_n$. Поэтому и в силу (11)

$$Q=u_n^2\,(\beta x_n+\gamma y_n)\left(kx_n^2+y_n^2\right)\geqslant 0\quad\forall\,(x,\,y)\in\sigma\cup AC.$$

Следовательно, $J_7\geqslant 0$. Из неравенства (10) прямо следует, что $J_6\geqslant 0$ и $J_5\geqslant 0$. Далее, принимая во внимание, что на $CB$: $dx=\sqrt{-k}dy$, получаем

$$J_3=2\int\limits_{CB}\alpha u\,(ku_xdy-u_ydx)=-\int\limits_{CB}\alpha\sqrt{-k}du^2=\int\limits_{CB}u^2\left(\alpha\sqrt{-k}\right)ds,$$

где $d/ds = x_n \partial/\partial y - y_n \partial/\partial x$. Значит, сумма подынтегральных функций в интегралах $J_3$ и $J_4$, умноженная на $\sqrt{1-k}$, на характеристике $BC$ равна выражению

$$u^2\Big[-k\alpha_x+\alpha_y\sqrt{-k}+\alpha\left(a-b\sqrt{-k}\right)+c\left(\beta-\gamma\sqrt{-k}\right)+\sqrt{-k}\left(\alpha_y+\sqrt{-k}\alpha_x\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\alpha k'/\sqrt{-k}\Big] = u^2\left[-4k\left(\sqrt{-k}\alpha_x+\alpha_y\right)+\left(2\sqrt{-k}a+2kb-k'\right)\alpha+\right.$$

$$\left.+2\left(\beta\sqrt{-k}+k\gamma\right)c\right]/\sqrt{-4k},$$

которое, согласно (13), неотрицательно. А это говорит о том, что $J_3 + J_4 \geqslant 0$.

Так как в силу (6) $J_1 \geqslant 0$, то доказано следующее основное неравенство:

$$\int\limits_{\Omega}\Big[\left(-2\alpha k-\beta_x k+(\gamma k)_y+2\beta a\right)u_x^2+2\left(-\beta_y-k\gamma_x+\beta b+a\gamma\right)u_x u_y+$$

$$+\left(-2\alpha+\beta_x-\gamma_y+2\gamma b\right)u_y^2\Big]\,d\Omega \leqslant 2\,(lu,\,Lu)_0 \leqslant \varepsilon\,\|u\|_1 + C\,\|Lu\|_0\,, \quad (15)$$

где $\varepsilon$ – сколь угодно малое положительное число.

На основании (7), (8) и (9) квадратичная форма, стоящая под знаком интеграла в (15), положительно определена и поэтому из (15) легко усмотреть, что

$$\delta\,\|\mathrm{grad}\,u\|_0^2 \leqslant \varepsilon\,\|u\|_1^2 + C\,\|Lu\|_0^2\,, \quad \delta \equiv \mathrm{const} > 0.$$

Отсюда, пользуясь хорошо известным неравенством

$$\|u\|_0 \leqslant \|\mathrm{grad}\,u\|_0\,, \quad (16)$$

убеждаемся в справедливости оценки (14).

Из теоремы 1 вытекает единственность сильного решения задачи $T$ и существование слабого решения сопряженной задачи $T^*$ для любой правой части $f \in W_2^{-1}(\Omega)$.

В области $\Omega$ рассмотрим *уравнение смешанно-составного типа*

$$Su = L^* lu = f, \quad (17)$$

где $l$ – введенный выше дифференциальный оператор первого порядка.

Пусть $W_s(B)$ – множество функций $u$ из $W$, для которых

$$u|_{\sigma\cup AC} = 0, \quad lu|_{\sigma\cup BC} = 0. \quad (18)$$

Принимая во внимание очевидное в силу (5), (15) и (16) соотношение

$$(lu,\, Lu)_0 = (u,\, Su)_0 \geqslant C\,\|u\|_1^2 \quad \forall\, u \in W_s\,(B)\,,$$

на основании обобщенного неравенства Шварца

$$(u,\, Su)_0 \leqslant \|u\|_1\,\|Su\|_{-1}$$

получаем априорную оценку

$$\|u\|_1 \leqslant C\,\|Su\|_{-1} \quad \forall\, u \in W_s\,(B)\,,$$

из которой следует единственность сильного решения краевой задачи (18) для уравнения (17) и существование слабого решения из $W_2^1\,(\Omega)$ сопряженной задачи для любой правой части $f \in W_2^{-1}\,(\Omega)$ (см. [2, с. 107]).

Среди работ, посвященных уравнениям смешанно-составного типа, отметим работу А. В. Бицадзе и М. С. Салахитдинова [3], которая является основополагающей в этом направлении.

В известных нам работах (см., например, [4–12]) устанавливались априорные оценки вида

$$\|u\|_{++} \leqslant C\,(\mu)\,\|Lu\|_{+}\,, \tag{19}$$

где $\|\cdot\|_{++}$ и $\|\cdot\|_{+}$ – некоторые позитивные нормы для уравнений смешанного типа, которые в области гиперболичности совпадают с уравнением

$$k\,(y)\,u_{xx} + u_{yy} + cu = f, \quad k'\,(0) > 0, \quad C \equiv \mathrm{const} \leqslant 0.$$

Постоянная $C\,(\mu)$, входящая в эти оценки, зависела от меры $\mu$ эллиптической части $\Omega_1$ смешанной области $\Omega$ таким образом, что

$$\lim_{\mu\to 0} C\,(\mu) < \infty, \tag{20}$$

более того, при непрерывной деформации кривой $\sigma$ до совпадения с отрезком $AB \equiv J$ прямой $y = 0$ она могла разве лишь уменьшаться.

Как нетрудно видеть из условий только что доказанной теоремы и особенно из найденных в работах [13] и [14] примеров, показывающих неединственность решения как первой $u|_{AC\cup AB} = 0$, так и второй $u|_{AC} = 0$, $u_y|_{AB} = 0$ задач Дарбу, абсолютная постоянная $C\,(\mu)$ в априорной оценке (14) существенно зависит от меры $\mu$ области эллиптичности $\Omega_1$ и для нее неравенство (20) может не иметь места. В частности, как это замечено автором [13, 15], неединственность решения задач Дарбу вовсе может не влиять на коррективность задачи Трикоми.

*Априорные оценки, для которых нарушено* (20) *и вообще оценки, учитывающие тип уравнения, естественно назвать смешанными априорными оценками.*

Смешанные априорные оценки необходимы и при исследовании довольно широкого класса краевых задач со смещением [16] на гиперболической части границы для уравнений смешанного типа. Здесь продемонстрируем это на одной простой краевой задаче со смещением для уравнения Лаврентьева–Бицадзе

$$\operatorname{sign} y \cdot u_{xx} + u_{yy} = f\,(x,\, y)\,, \tag{21}$$

т. е. для уравнения (1) в случае, когда $k\,(y) = \operatorname{sign} y$, $a \equiv b \equiv c \equiv 0$.

Ниже под регулярным в области $\Omega$ решением уравнения (21) будем понимать любую функцию $u\,(x,\, y)$ из класса $C\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^1\,(\Omega) \cap C^2\,(\Omega \setminus J)$, удовлетворяющую этому уравнению в $\Omega \setminus J$ и такую, что $u_y\,(x,\, 0)$ на концах интервала $J$ может обращаться в $\infty$ интегрируемого порядка.

**Задача А.** *Найти регулярное в области* $\Omega$ *решение уравнения* (21), *удовлетворяющее краевым условиям*

$$u|_{\sigma} = 0, \tag{22}$$

$$u\left(\frac{x}{2},\, -\frac{x}{2}\right) + u\left(\frac{x+1}{2},\, \frac{x-1}{2}\right) = 0, \quad \forall\, x \in \overline{J}. \tag{23}$$

Пусть $f \in C^{(m,1/2)}\,(\Omega_2)$, где $m \geqslant 1$. Легко убедиться, что все регулярные в $\Omega$ решения уравнения (18), удовлетворяющие (23), в области $\Omega_2$ представимы в виде

$$u\,(x,\, y) = \varphi\,(x+y) - \varphi\,(x-y) + \frac{1}{4}\int\limits_0^{x+y} dt \int\limits_1^{x-y} f\left(\frac{t+s}{2},\, \frac{t-s}{2}\right) ds,$$

где $\varphi(x)$ – произвольная функция из класса $C\left(\overline{J}\right) \cap C^2\,(J)$. Отсюда при $y \to 0$ имеем

$$\tau\,(x) \equiv u\,(x,\, 0) = \frac{1}{4}\int\limits_0^{x} dt \int\limits_1^{x} f\left(\frac{t+s}{2},\, \frac{t-s}{2}\right) ds. \tag{24}$$

Из (24) на основании неравенств Шварца, Минковского и теоремы вложения $W_p^l$ в $L_{q^*}$ Соболева [1] нетрудно усмотреть, что

$$\|\tau\|_{W_2^{l+1}(J)} \leqslant C\,\|f\|_{W_2^l(\Omega_2)}\,. \tag{25}$$

Хорошо известно (см., например, [2, с. 224]), что если граница области $\Omega_1$ принадлежит классу $C^{m+2}$, то для функции $u$, удовлетворяющей уравнению

$$u_{xx} + u_{yy} = f\,(x,\, y) \quad \forall\, (x,\, y) \in \Omega_1,$$

и краевым условиям (22), (24), справедливо энергетическое неравенство

$$\|u\|_{W_2^{m+2}(\Omega_1)} \leqslant C\,\|f\|_{W_2^m(\Omega_1)} + C\,\|\tau\|_{W_2^{m+3/2}(J)}\,. \tag{26}$$

Таким образом, если мера $\mu\ \Omega_1$ отлична от нуля, то из (26) в силу (25) получаем смешанную априорную оценку

$$\|u\|_{W_2^{m+2}(\Omega_1)} \leqslant C\,(\mu)\left[\|Lu\|_{W_2^m(\Omega_1)} + \|Lu\|_{W_2^{m+1/2}(\Omega_2)}\right].$$

Поскольку задача (22), (23) при $\sigma \equiv \overline{J}$ для уравнения $u_{xx} = u_{yy}$ имеет бесконечное множество решений, то, очевидно, $\lim\limits_{\mu\to 0} c\,(\mu) = \infty$.

Следует отметить, что задача $A$, являясь простейшей смешанной краевой задачей, интересна еще тем, что, в отличие от известных краевых задач (Трикоми, Франкля, Бицадзе) для уравнений смешанного типа, исключая задачу Дирихле, которая, вообще говоря, некорректна [17], представляет собой пример корректной самосопряженной смешанной краевой задачи.

**2. К априорным оценкам для первой задачи Дарбу.** Рассмотрим уравнение

$$u_{yy} - |u|^m\,u_{xx} = f\,(x,\,y)\,,\quad m \equiv \mathrm{const} > 0 \tag{27}$$

в области $\Omega_2$, ограниченной характеристиками $AC$: $\xi = 1$, $BC$: $\eta = 1$, где

$$\xi = x - \frac{2}{m+2}\,(-y)^{\frac{m+2}{2}}\,,\quad \eta = x + \frac{2}{m+2}\,(-y)^{\frac{m+2}{2}}\,, \tag{28}$$

и отрезком $AB \equiv \overline{J}$ оси $y = 0$.

**Задача Дарбу.** *В области $\Omega_2$ найти решение $u\,(x,\,y)$ уравнения (27), удовлетворяющее краевому условию*

$$u = 0,\quad \forall\ (x,\,y) \in AB \cup AC \tag{29}$$

*и такое, что $v\,(x) \equiv u_y\,(x,\,0) \in C^2\,(J)$, причем*

$$\int\limits_0^1 \left(x - x^2\right)^{-\beta} v\,(x)\,dx < \infty,\quad \beta = \frac{m}{2m+4}.$$

Соответствующая этой задаче функция Грина–Адамара $G$ в характеристических координатах $\xi$, $\eta$ имеет вид [18]

$$G\,(\xi,\ \eta;\ x,\ y) = \begin{cases} R\,(\xi,\ \eta;\ x,\ y)\,, & \eta \geqslant x, \\ \overline{R}\,(\xi,\ \eta;\ x,\ y)\,, & \eta \leqslant x, \end{cases}\quad (0 < x,\,y < 1)\,,$$

где $R$ – функция Римана

$$R = (\eta - \xi)^{\beta} (y - x)^{-\beta} F(\beta,\ 1-\beta,\ 1;\ \sigma), \quad \eta > \xi,$$

$$\overline{R} = \gamma (y - x)^{1-2\beta} [(x-\xi)(y-\eta)]^{\beta-1} (\eta - \xi) F\left(1-\beta,\ 1-\beta,\ -2\beta;\ \frac{1}{\sigma}\right),$$

$$\sigma = \frac{x-\xi}{\eta-\xi} \cdot \frac{y-\eta}{y-x}, \quad \gamma = \frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(2-2\beta)}, \quad x > \xi, \quad y > \eta.$$

Введем функцию

$$R_0(\xi,\eta;\, x,\, y) = \frac{\gamma}{2\beta-2} (y-x)^{1-2\beta} \left(\frac{\eta-\xi}{x-\xi}\right)^{1-\beta} \left(\frac{\eta-\xi}{y-\xi}\right)^{1-\beta} \times$$

$$\times F_1\left(1-\beta,\ 1-\beta,\ 1-\beta,\ 3-2\beta;\ \frac{\eta-\xi}{x-\xi},\ \frac{\eta-\xi}{y-\xi}\right),$$

где $F_1(\alpha,\ \beta,\ \beta',\ \gamma;\ x,\ y)$ – гипергеометрическая функция переменных $x$, $y$ [19].

Имеет место тождество

$$\frac{\partial R_0}{\partial \eta} = -(\eta-\xi)^{-2\beta}\, \overline{R}. \tag{30}$$

Действительно,

$$\frac{\partial R_0}{\partial \eta} = \frac{\gamma (y-x)^{1-2\beta}}{(2-2\beta)} X^{1-\beta} Y^{1-\beta} \times$$

$$\times \left[(2-2\beta) F_1(1-\beta,\, 1-\beta,\, 1-\beta,\, 3-2\beta;\, X,\, Y) + X \frac{\partial F_1}{\partial X} + Y \frac{\partial F_1}{\partial Y}\right],$$

где

$$X = \frac{\eta-\xi}{x-\xi}, \quad Y = \frac{\eta-\xi}{y-\xi} \ \Rightarrow\ \sigma = \frac{1-Y}{X-Y}.$$

На основании легко проверяемых соотношений

$$\frac{x}{\beta}\frac{\partial F_1}{\partial x} = F_1(\alpha,\ \beta+1,\ \beta',\ \gamma;\ x,\ y) - F_1(\alpha,\ \beta,\ \beta',\ \gamma;\ x,\ y),$$

$$\frac{y}{\beta'}\frac{\partial F_1}{\partial y} = F_1(\alpha,\ \beta,\ \beta'+1,\ \gamma;\ x,\ y) - F_1(\alpha,\ \beta,\ \beta',\ \gamma;\ x,\ y),$$

$$(\gamma-\beta-\beta'-1) F_1(\alpha,\ \beta,\ \beta',\ \gamma;\ x,\ y) + \beta F_1(\alpha,\ \beta+1,\ \beta',\ \gamma;\ x,\ y) +$$

$$+ \beta' F_1(\alpha,\ \beta,\ \beta'+1,\ \gamma;\ x,\ y) = (\gamma-1) F_1(\alpha,\ \beta,\ \beta',\ \gamma-1;\ x,\ y)$$

выражение, стоящее в квадратной скобке, равно

$$(2-2\beta)\,F_1+(1-\beta)\,F_1\,(1-\beta,\ 2-\beta,\ 1-\beta,\ 3-2\beta;\ X,\ Y)+$$
$$+\,(1-\beta)\,F_1\,(1-\beta,\ 1-\beta,\ 2-\beta,\ 3-2\beta;\ X,\ Y)-(2-2\beta)\,F_1=$$
$$=(2-2\beta)\,F_1\,(1-\beta,\ 1-\beta,\ 1-\beta,\ 2-2\beta;\ X,\ Y)\,,$$

а последнее в свою очередь, согласно известной формуле [19],

$$(1-y)^{\alpha}\,F_1\,(\alpha,\ \beta,\ \beta',\ \beta+\beta';\ x,\ y)=F\left(\alpha,\ \beta,\ \beta+\beta';\ \frac{x-y}{1-y}\right)$$

равно

$$(2-2\beta)\,(y-\eta)^{\beta-1}\,(y-\xi)^{1-\beta}\,F\,(1-\beta,\ 1-\beta,\ 2-2\beta;\ 1/\sigma)\,.$$

Тем самым (30) доказано.

С помощью (30) нетрудно убедиться, что единственное решение $u\,(x,\,y)$ задачи Дарбу из класса $C^2\,(\Omega_2)$ в любой точке $(x,\,y)$ области $\Omega_2$ представимо в виде

$$u\,(x,\,y)=\int\limits_0^{\xi}d\xi_1\int\limits_{\xi_1}^{\eta}\frac{f^*\,(\xi_1,\,\eta_1)}{(\eta_1-\xi_1)^{4\beta}}G\,(\xi_1,\ \eta_1;\ \xi,\ \eta)\,d\eta_1, \tag{31}$$

где

$$f^*\,(\xi,\ \eta)=-\frac{1}{4}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{4\beta}f\left(\frac{\xi+\eta}{2},\ -\left(\frac{m+2}{4}\right)^{1-2\beta}(\eta-\xi)^{1-2\beta}\right),$$

а $\xi$ и $\eta$ – характеристические координаты (28).

**Теорема 1.** *Пусть $m<2$, тогда существует решение $u\,(x,\,y)$ первой задачи Дарбу в приведенной выше постановке и, более того, $u\,(x,\,y)\in C^1\left(\overline{\Omega}_2\right)$.*

Так как непосредственное доказательство теоремы 2 через представления (31) связано с довольно громоздкими вычислениями, то предлагается более простой способ ее доказательства.

Из корректности задачи Коши для уравнения (27) с данными на участке $AB$ границы области $\Omega_2$ следует, что все решения этого уравнения, обращающиеся в нуль на $AB$ и принадлежащие тому классу, где ищется решение рассматриваемой задачи Дарбу, имеет (см. [20]) вид

$$u\,(x,\,y)=\frac{\Gamma\,(2-2\beta)}{\Gamma^2\,(1-\beta)}y\int\limits_0^1 v\left[x+\frac{2}{m+2}\,(-y)^{\frac{m+2}{2}}\,(2t-1)\right][t\,(1-t)]^{-\beta}\,dt+$$

$$+\int\limits_{\xi}^{\eta} d\xi_1 \int\limits_{\xi_1}^{\eta} \frac{f^*(\xi_1,\,\eta_1)}{(\eta_1-\xi_1)^{4\beta}} R(\xi_1,\ \eta_1;\ \xi,\ \eta)\, d\eta_1 = J_v + J_f. \tag{32}$$

Из (32) при $\xi = 0$, $x = \dfrac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}$ в силу (29) получаем уравнение Абеля для нахождения $v(x)$

$$f_0(x) = \frac{\Gamma^2(1-\beta)}{\Gamma(2-2\beta)} \left(\frac{4}{m+2}\right)^{\frac{2}{m+2}} \int\limits_0^x d\xi \int\limits_{\xi}^{x} \frac{f^*(\xi,\,\eta)}{(\eta-\xi)^{4\beta}} R(\xi,\ \eta;\ 0,\ x)\, d\eta =$$

$$= x^{\frac{2}{m+2}} \int\limits_0^1 \frac{v(xt)\, dt}{t^{\beta}(1-t)^{\beta}} = \int\limits_0^x \frac{v(\xi)\, d\xi}{\xi^{\beta}(x-\xi)^{\beta}}, \quad 0 < x < 1.$$

Следовательно, по формуле обращения

$$v(x) = x^{\beta} \frac{\sin \pi\beta}{\pi} \frac{d}{dx} \int\limits_0^x \frac{f_0(t)\, dt}{(x-t)^{1-\beta}}.$$

На основании известного тождества (см., например, [21])

$$(1-z)^{\beta} F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ z) = F\left(\gamma-\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ \frac{z}{z-1}\right), \quad |\arg(1-z)| < \pi$$

можно написать

$$R(\xi,\ \eta;\ x,\ y) = \left(\frac{\eta-\xi}{y-\xi}\right)^{\beta} \left(\frac{\eta-\xi}{y-x}\right)^{\beta} F\left(\beta,\ \beta,\ 1;\ \frac{x-\xi}{x-\eta} \cdot \frac{\eta-y}{\xi-y}\right). \tag{33}$$

Следовательно,

$$f_0(x) = \mathrm{const} \int\limits_0^x (x-\xi)^{-\beta} d\xi \int\limits_{\xi}^{x} \frac{f^*(\xi,\,\eta)}{(\eta-\xi)^{2\beta}} \eta^{-\beta} F\left(\beta,\ \beta,\ 1;\ \frac{\xi}{\eta} \cdot \frac{x-\eta}{x-\xi}\right) d\eta =$$

$$= \mathrm{const}\, x^{2-4\beta} \int\limits_0^1 (1-t)^{-\beta} dt \int\limits_t^1 \frac{f^*(xt,\, x\tau)}{(\tau-t)^{2\beta}} \tau^{-\beta} F\left(\beta,\ \beta,\ 1;\ \frac{t}{\tau} \cdot \frac{1-\tau}{1-t}\right) d\tau,$$

откуда в соответствии с равенством

$$\frac{d^i}{dx^i} f^*(xt,\, x\tau) = o(1)\, x^{1-2\beta-i}, \quad i = 1,\, 2,$$

находим
$$\frac{d^i}{dx^i} f_0(x) = o(1)\, x^{2-4\beta-i}, \quad i = 0,\, 1,\, 2.$$
Теперь легко видеть, что
$$v(x) = x^{\beta} \frac{\sin \pi\beta}{\pi} \int\limits_0^x \frac{f_0'(t)\, dt}{(x-t)^{1-\beta}} = x^{2\beta} \frac{\sin \pi\beta}{\pi} \int\limits_0^1 \frac{f_0'(xt)\, dt}{(1-t)^{1-\beta}}.$$
Стало быть, $v(x) \in C\left(\overline{J}\right)$, причем
$$\frac{d^i}{dx^i} v(x) = o(1)\, x^{1-2\beta-i}, \quad i = 0,\, 1. \tag{34}$$

Простой заменой переменной интегрирования можно доказать справедливость следующих формул:
$$\frac{\partial J_\nu}{\partial x} = o(1) \int\limits_\xi^\eta v'(t)\,(t-\xi)^{-\beta}\,(\eta-t)^{-\beta}\, dt,$$

$$\frac{\partial J_\nu}{\partial y} = o(1) \int\limits_0^1 v\left[x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(2t-1)\right][t(1-t)]^{-\beta}\, dt +$$
$$+\, o(1)\,(-y)^{\frac{m+2}{2}} \int\limits_0^1 v'\left[x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(2t-1)\right][t(1-t)]^{-\beta}\, dt.$$
Так как, согласно (34),
$$\int\limits_\xi^\eta v'(t)\,(t-\xi)^{-\beta}\,(\eta-t)^{-\beta}\, dt = o(1)\,(\eta-\xi)^{1-2\beta}\,\eta^{-2\beta} = o(1)\,(-y)^{\frac{2-m}{2}},$$

то из предыдущих равенств вытекает, что $J_v \in C^1\left(\overline{\Omega}_2\right)$.

Принимая во внимание (33), для второго слагаемого в правой части (32) будем иметь
$$J_f = \int\limits_\xi^\eta \frac{d\xi}{(\eta-\xi_1)^{\beta}} \int\limits_{\xi_1}^\eta \frac{f^*(\xi_1,\, \eta_1)}{(\eta_1-\xi_1)^{2\beta}}\,(\eta_1-\xi)^{-\beta}\, F\left(\beta,\ \beta,\ 1;\ \frac{\xi_1-\xi}{\eta_1-\xi}\cdot\frac{\eta-\eta_1}{\eta-\xi_1}\right) d\eta_1.$$

Отсюда после замены переменных интегрирования
$$\xi_1 = \xi + (\eta-\xi)\, t, \quad \eta_1 = \xi + (\eta-\xi)\,\tau$$

получаем формулу

$$J_f = o\left(1\right) y^2 \int\limits_0^1 \frac{dt}{\left(1-t\right)^{\beta}} \int\limits_t^1 \frac{f^*\left[\xi + \left(\eta - \xi\right) t,\ \ \xi + \left(\eta - \xi\right) \tau\right]}{\left(\tau - t\right)^{2\beta} \tau^{\beta}} \times$$

$$\times F\left(\beta,\ \beta,\ 1;\ \frac{t}{\tau} \cdot \frac{1-\tau}{1-t}\right) d\tau,$$

из которой просто следует, что $J_f \in C^1\left(\overline{\Omega}_2\right)$.

Таким образом, теорема 2 полностью доказана.

Любопытно сравнить последнее утверждение теоремы 2 с примером 3 работы [15], из которого следует невозможность, вообще говоря, получения априорных оценок вида

$$\left\|u\right\|_{l+1} \leqslant C \left\|Lu\right\|_l, \quad u|_{AB \cup BC} = 0,$$

когда оператор $L$ не строго гиперболический.

В заключение приведем принадлежащий Т. Ш. Кальменову пример, показывающий, что условие $m < 2$ теоремы 2 является существенным.

Функция

$$u\left(x,\, y\right) = -\frac{c\Gamma\left(3 - 4\beta\right)}{2\Gamma\left(1-\beta\right)\Gamma\left(2 - 3\beta\right)} \left(\frac{m+2}{4}\right)^{1-2\beta} \times$$

$$\times y \int\limits_0^1 \left[x + \frac{2}{m+2}\left(-y\right)^{\frac{m+2}{2}}\left(2t-1\right)\right]^{1-2\beta} \left[t\left(1-t\right)\right]^{-\beta} dt - \frac{c}{2} y^2,$$

будучи непрерывным в $\overline{\Omega}_2$ решением задачи Дарбу (29) для уравнения

$$u_{yy} - \left|y\right|^m u_{xx} = c \equiv \mathrm{const},$$

не принадлежит $C^1\left(\overline{\Omega}_2\right)$, если $m > 2$.

**Литература**


1. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск: Изд СО АН СССР, 1962.
2. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наукова думка, 1965.
3. Бицадзе А. В., Салахитдинов М. С. СМЖ. 1961. Т. 2, № 1. С. 7–19.
4. Morawetz C. S. Comm. Pure Appl. Math. 1958. Vol. 11, no. 3. Pp. 315–331.
5. Fridrichs K. O. Comm. Pure Appl. Math. 1958. Vol. 11, no. 3. Pp. 333–418.
6. Франкль Ф. И. Изв. вузов. Математика. 1959. Вып. 6. С. 192–201.
7. Березанский Ю. М. ДАН СССР. 1960. Т. 132, № 1. С. 9–12.
8. Березанский Ю. М. УМЖ. 1963. Т. 15, № 4. С. 347–264.

9. Михайлов В. П. ДАН СССР. 1967. Т. 175, № 5. С. 1012–1014.
10. Morawetz C. S. Comm. Pure Appl. Math. 1970. Vol. 23, no. 4. Pp. 587–603.
11. Каратопраклиев Г. Д. Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5, № 1. С. 199–205.
12. Коврижкин В. В. Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, № 1. С. 182–184.
13. Нахушев А. М. ДАН СССР. 1970. Т. 195, № 4. С. 776–778.
14. Кальменов Т. Ш. Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, № 1. С. 178–181.
15. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5, № 1. С. 44–59.
16. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, № 1. С. 42–56.
17. Бицадзе А. В. ДАН СССР. 1958. Т. 122, № 2. С. 167–170.
18. Gellerstedt S. Arkiv Mat. Astr. och Fysik. 1937. Vol. 25 A, no. 29. Pp. 1–23.
19. Appel P., Kampe I. De feriet fonctions hupergeómetriques et huperspheriques. Polynomes d'Hermite. Gautier – Villars. Paris, 1926.
20. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М.: Изв. АН СССР, 1959.
21. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М.–Л.: ГИФМЛ, 1963. 358 с.


Поступила в редакцию
25 апреля 1971 г.

Институт математики
СО АН СССР

## Критерий единственности решения задачи Дарбу для одного вырождающегося гиперболического уравнения влагопереноса

Одномерный поток влаги $u = u(\xi, t)$ в коллоидном капиллярно-пористом теле поликапиллярной структуры связан с влажностью $w = w(\xi, t)$ в точке $\xi$ в момент времени $t$ обобщенным законом переноса влаги [1]

$$u = -D\rho\,\frac{\partial w}{\partial \xi} - \tau_0\,\frac{\partial u}{\partial t} \qquad (D,\ \rho = \mathrm{const}\,),$$

где $D$ – коэффициент диффузии, $\rho$ – плотность, $\tau_0 = D/v$ – время релаксации, которая существенно может зависеть от пространственной координаты $\xi$. Отсюда на основании закона сохранения массы

$$\rho\,\frac{\partial w}{\partial \xi} = -\frac{\partial u}{\partial \xi}$$

нетрудно увидеть, что

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial}{\partial t}\,\tau_0\,\frac{\partial u}{\partial t}. \tag{1}$$

А. В. Лыков [1], принимая во внимание, что для ряда капиллярно-пористых тел скорость переноса $v$ примерно равна скорости капиллярного движения, которая в свою очередь обратно пропорциональна пути движения $\xi$, полагает

$$\tau_0 = \frac{D}{a_0^2}\,\xi^2, \tag{2}$$

Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1980, **16**:9, 1643–1649.

где $a_0$ – коэффициент пропорциональности, зависящий от пористости тела, его капиллярных свойств и вязкости жидкости.

Из (1) в соответствии с (2) получаем уравнение влагопереноса

$$u_t = Du_{\xi\xi} - \left(\frac{D}{a_0^2}\right)\xi^2\, u_{tt}, \tag{3}$$

которое выведено А. В. Лыковым [1] (см. также [2]), с помощью методов термодинамики необратимых процессов.

Переходя в уравнении (3) к безразмерным независимым переменным

$$x = \frac{t}{t_0}, \quad y = \frac{\xi}{\sqrt{a_0 t_0}} \quad (t_0 - \text{характерное время}),$$

получим

$$y^2\, u_{xx} - u_{yy} - au_x = 0 \quad (a = \mathrm{const}\,), \tag{4}$$

где $a = -a_0/D$ – безразмерная величина.

Любопытно отметить, что уравнение (4) впервые было приведено А. В. Бицадзе [3] как пример уравнения, для которого при $|a| \leqslant 1$ корректна по Адамару задача Коши с начальными данными на любом участке $x_0 < x < x_1$ линии $y = 0$ параболического вырождения, хотя нарушено известное условие Геллерстедта [4], а автором [5] – как пример уравнения, для которого при $|a| = 1$ задача Дарбу корректно не поставлена и характеристики не являются равноправными как носители граничных данных.

Рассмотрим уравнение (4) в области $\Omega$, ограниченной его характеристиками $AC\colon\ \xi = 0$, $BC\colon\ \eta = 1$ и отрезком $AB\colon\ 0 \leqslant x \leqslant 1$ прямой $y = 0$, где

$$\xi = x - \frac{1}{2}\,y^2, \quad \eta = x + \frac{1}{2}\,y^2 \tag{5}$$

здесь и в дальнейшем означают характеристические координаты.

В работе [5] (см. также [6]), в частности, доказано, что задача Дарбу для уравнения (4) в области $\Omega$ с данными на $AB \cup BC$ при $a \geqslant 0$ или на $AB \cup AC$ при $a \leqslant 0$ не имеет более одного решения.

Пусть $u(x, y)$ – любое, принадлежащее классу $C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega \cup I) \cap C^2(\Omega)$, где $\overline{\Omega}$ – замыкание $\Omega$, $I$ – единичный интервал $0 < x < 1$, решение уравнения (4) с $|a| < 1$ и

$$\tau(x) = u(x, 0), \quad \nu(x) = u_y(x, 0), \quad x \in I,$$

$$u|_{BC} = \varphi(\xi), \quad \xi \in \overline{I}, \quad u|_{AC} = \psi(\eta), \quad \eta \in \overline{I}.$$

Тогда при дополнительном предположении о суммируемости функции $x^{-(a+1)/4}(1-x)^{(a-1)/4}\nu(x)$ на сегменте $\overline{I}$ можно доказать, что

$$\varphi(\xi) = B(\beta,\beta')\sqrt{1-\xi}\int\limits_{\xi}^{1}\frac{(1-t)^{\beta'-1}\tau(t)dt}{(t-\xi)^{1-\beta}} -$$

$$-B(1-\beta,1-\beta')\int\limits_{\xi}^{1}\frac{(1-t)^{-\beta}\nu(t)dt}{(t-\xi)^{\beta'}} \quad \forall\,\xi\in I, \tag{6}$$

$$\psi(\eta) = B(\beta,\beta')\sqrt{\eta}\int\limits_{0}^{\eta}\frac{t^{\beta-1}\tau(t)dt}{(\eta-t)^{1-\beta'}}{}', -$$

$$-B(1-\beta,1-\beta')\int\limits_{0}^{\eta}\frac{t^{-\beta'}\nu(t)dt}{(\eta-t)^{\beta}} \quad \forall\,\eta\in I, \tag{7}$$

где $\beta=(1+a)/4$, $\beta'=(1-a)/4$, а $B(x,y)=\Gamma(x+y)/[\Gamma(x)\Gamma(y)]$ – бета-функция.

Справедливость соотношений (6) и (7) между функциями $\tau(x)$, $\nu(x)$, $\varphi(\xi)$ и $\psi(\eta)$ вытекает из того, что функция $u(x,y)$ представима при $|a|<1$ в виде [3]

$$u(x,y) = B(\beta,\beta')\int\limits_{0}^{1}\tau[\eta-(\eta-\xi)s\,]\,s^{\beta'-1}(1-s)^{\beta-1}ds -$$

$$-B(1-\beta',1-\beta)\sqrt{\eta-\xi}\int\limits_{0}^{1}\nu[\eta-(\eta-\xi)s\,]\,s^{-\beta}(1-s)^{-\beta'}ds, \quad 0<\xi<\eta<1.$$

Из (6) и (7) заключаем, что при $|a|<1$ первая задача Дарбу

$$u|_{AB}=\tau(x), \quad u|_{AC}=\psi(\eta)$$

и ей сопряженная

$$u|_{AB}=\tau(x), \quad u|_{BC}=\varphi(\xi),$$

а также вторая задача Дарбу

$$u_y|_{AB}=\nu(x), \quad u|_{AC}=\psi(\eta)$$

и ей сопряженная

$$u_y|_{AB}=\nu(x), \quad u|_{BC}=\varphi(\xi)$$

для уравнения (4) в области $\Omega$ всегда разрешимы и притом единственным образом.

Пусть теперь $a \leqslant -1$. Имеют место следующие теоремы.

**Теорема 1.** *Решение $u(x,y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ однородной первой задачи Дарбу*

$$u|_{AB} = 0, \quad u|_{BC} = 0 \tag{8}$$

*для уравнения (4) не совпадает с тривиальным $u(x,y) \equiv 0$ тогда и только тогда, когда коэффициент $a = -4k - 3$, $k = 0, 1, \ldots$*

**Теорема 2.** *Регулярное решение $u(x,y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega \cup I)$ однородной второй задачи Дарбу*

$$u_y|_{AB} = 0, \quad u|_{BC} = 0 \tag{9}$$

*для уравнения (4), которое в случае, когда $-3 < a < -1$, обладает тем дополнительным свойством, что производная по $\eta$ от сужения $u|_{AC} = \psi(\eta)$, $0 < \eta < 1$, при $\eta \to 1$ не обращается в бесконечность неинтегрируемого порядка, будет тривиальным тогда и только тогда, когда $a \neq -4k - 1$, $k = 0, 1, \ldots$*

В самом деле, уравнение (4) в характеристических координатах (5) имеет вид

$$(\eta - \xi)\, u_{\xi\eta} + \beta'\, u_\xi - \beta\, u_\eta = 0. \tag{10}$$

Образом области $\Omega$ при отображении (5) является треугольник

$$\Delta = \{(\xi,\, \eta) \colon 0 < \xi < \eta < 1\}.$$

Условия (8) и (9) переходят соответственно в условия

$$u|_{\eta=\xi} = 0, \quad u|_{\eta=1} = 0, \tag{11}$$

$$\lim_{\eta\to\xi} \sqrt{\eta - \xi}\,(u_\eta - u_\xi) = 0, \quad u|_{\eta=1} = 0. \tag{12}$$

Любое решение $u$ уравнения Эйлера–Дарбу–Пуассона (10), удовлетворяющее условию $u|_{\eta=1} = 0$ в области $\Delta$, представимо в виде [3]

$$u = R(0,\, \eta; \xi,\, \eta)\psi(\eta) + \int_1^\eta \left[ -\frac{\partial R(0,\, t; \xi,\, \eta)}{\partial t} + \frac{\beta'\, R(0,\, t; \xi,\, \eta)}{t} \right] \psi(t)dt, \tag{13}$$

где

$$R(0,\, t; \xi,\, \eta) = \sqrt{t}\eta^{-\beta'}(t - \xi)^{-\beta} F(\beta,\, \beta',\, 1; z), \quad z = \frac{\xi(t - \eta)}{\eta(t - \xi)},$$

– значение функции Римана $R(t_1,\, t; \xi,\, \eta)$ для уравнения (10) при $t_1 = 0$.

Используя известную формулу приведения Гаусса

$$b(1-z)F(a+1,\, b+1,\, c+1; z) = c\,F(a,\, b,\, c; z) - (c-b)F(a+1,\, b,\, c+1; z)$$

для гипергеометрической функции $F(a,\, b,\, c; z)$, упростим выражение, стоящее в квадратной скобке под знаком интеграла (13)

$$\frac{\beta' R}{t} - \frac{\partial R}{\partial t} = \left(\frac{\beta'}{t} - \frac{1}{2t} + \frac{\beta}{t-\xi}\right) R - \sqrt{t}\eta^{-\beta'}(t-\xi)^{-\beta}\times$$

$$\times\, \beta'\beta(1-z)F(\beta+1,\, \beta'+1,\, 1+1; z)\frac{\eta(t-\xi)}{t(\eta-\xi)}\,\frac{\xi(\eta-\xi)}{\eta(t-\xi)^2} =$$

$$= \left(\frac{\beta'-1/2}{t} + \frac{\beta}{t-\xi}\right) R - \frac{\beta\xi\sqrt{t}\eta^{-\beta'}(t-\xi)^{-\beta}}{t(t-\xi)}\times$$

$$\times\,[F(\beta,\, \beta',\, 1; z) - (1-\beta')F(\beta+1,\, \beta',\, 2; z)] =$$

$$= \beta(1-\beta')\xi\, t^{-1/2}\eta^{-\beta'}(t-\xi)^{-\beta-1}F(\beta+1,\, \beta',\, 2; z).$$

Следовательно,

$$u = \eta^{\beta}(\eta-\xi)^{-\beta}\psi(\eta) - \beta(1-\beta')\xi\eta^{-\beta'}\int\limits_{\eta}^{1}\frac{F(\beta+1,\, \beta',\, 2; z)}{\sqrt{t}(t-\xi)^{\beta+1}}\psi(t)dt. \qquad (14)$$

Пусть нарушено условие теоремы 1, т. е. пусть $\beta' = k+1$, $k = 0, 1, \ldots$ Тогда из (14) с учетом (8) и того факта, что $\beta < 0$ и

$$\lim_{\eta\to\xi} F(\beta+1,\, \beta',\, 2; z) = \lim_{z\to 1} F(\beta+1,\, \beta',\, 2; z) = \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(2-\beta')},$$

получаем уравнение Абеля

$$\tau(\xi) = \lim_{\eta\to\xi} u = -\frac{\beta(1-\beta')\Gamma(1/2)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(2-\beta')}\,\xi^{1-\beta'}\int\limits_{\xi}^{1}\frac{\psi(t)dt}{\sqrt{t}(t-\xi)^{\beta+1}} = 0,$$

из которого вытекает, что $\psi(\eta) \equiv 0$. Стало быть, $u(x, y) \equiv 0$.

Пусть теперь $\beta' = k+1$, $k = 0, 1, \ldots$ В случае, когда $\beta' = 1$, $(a = -3)$, из (14) заключаем, что все нетривиальные решения задачи (8) задаются формулой

$$u = \left(\frac{\eta-\xi}{\eta}\right)^{1/2}\psi(\eta),$$

если же $\beta' = 2$ $(a = -7)$, то

$$u = \left(\frac{\eta - \xi}{\eta}\right)^{1/2} \left[\frac{\eta - \xi}{\eta}\psi(\eta) - \frac{3}{2}\,\frac{\xi}{\eta^2}\int\limits_{\eta}^{1}\psi(t)dt\right].$$

При $\beta' = n + 2$, $n = 1, 2, \ldots$, на основании известной формулы автотрансформации

$$F(a,\, b,\, c; z) = (1 - z)^{c-a-b} F(c - a,\, c - b, c; z)$$

можно написать (см., например, [7])

$$F(\beta + 1,\, \beta',\, 2; z) = (1 - z)^{1/2} F(-n,\, 1 - \beta,\, 2; z) =$$

$$= (1 - z)^{1/2} \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \frac{\Gamma(1 - \beta + m)}{\Gamma(1 - \beta)\Gamma(2 + m)}\,(-z)^m. \qquad (15)$$

Из (14) с учетом (15) получаем формулу

$$u = \left(\frac{\eta - \xi}{\eta}\right)^{1/2} \left[\left(\frac{\eta - \xi}{\eta}\right)^{n+1} \psi(\eta) - \frac{(n + 3/2)(n + 1)}{\Gamma(n + 5/2)}\,\xi\eta^{-n-2} \times\right.$$

$$\left.\times \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \frac{\Gamma(n + m + 5/2)}{\Gamma(m + 2)} \left(-\frac{\xi}{\eta}\right)^m \int\limits_{\eta}^{1} \frac{(t - \eta)^m}{(t - \xi)^{m-n}}\psi(t)dt\right],$$

которая определяет все нетривиальные решения однородной первой задачи Дарбу (8) для уравнения (4) при $a = -4n - 7$, $n = 1, 2, \ldots$ Таким образом, теорема 1 полностью доказана.

Предположим теперь, что нарушено условие теоремы 2: $a = -4k - 1$, $k = 0, 1, \ldots$ т. е. $\beta = -k$, $\beta' = k + 1/2$. Поскольку $F(0,\, \beta',\, 1; z) \equiv 1$, то из (13) следует, что при $a = -1$ $(\beta = 0)$ все нетривиальные решения однородной второй задачи Дарбу (12) задаются формулой

$$u = \psi(\eta),$$

а при $a = -5$ $(\beta = -1)$ в силу (14) – формулой

$$u = \frac{\eta - \xi}{\eta}\,\psi(\eta)\, - \frac{1}{2}\xi\eta^{-3/2} \int\limits_{\eta}^{1} \psi(t) t^{-1/2} dt.$$

Если же $\beta + 1 = -n$, $n = 1, 2, \ldots$, то на основании (14) и тождества

$$F(-n,\, \beta',\, 2; z) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \frac{\Gamma(\beta' + m)}{\Gamma(\beta')\Gamma(m + 2)}\,(-z)^m$$

получаем

$$u = \left(\frac{\eta - \xi}{\eta}\right)^{n+1} \psi(\eta) - \frac{(n+1)(n+1/2)}{\Gamma(n+3/2)}\, \xi\eta^{-n-3/2} \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \frac{\Gamma(n+m+3/2)}{\Gamma(m+2)} \left(-\frac{\xi}{\eta}\right)^m \int\limits_{\eta}^{1} \frac{(t-\eta)^m \psi(t)dt}{\sqrt{t}(t-\xi)^{m-n}}.$$

Из (14) в случае, когда $a < -3$ ($-k \neq \beta < -1/2$, $k = 0, 1, \ldots$), имеем

$$\nu(x) = \lim_{y\to -0} u_y(x,y) = \lim_{y\to -0} \left\{-\beta(1-\beta')\, \xi\eta^{\beta-1}(-y)^{-2\beta-1}\psi(\eta) - \beta(1-\beta') \times\right.$$

$$\times\, \xi\eta^{-\beta'} \int\limits_{\eta}^{1} \left[\frac{\beta'(\beta+1)F(\beta+2,\, \beta'+1,\, 3; z)(-y)\, t(\xi(t-\xi) + \eta(t-\eta))}{2t^{1/2}(t-\xi)^{\beta+3}\eta^2} - \right.$$

$$\left.\left. - (\beta+1)\left(\frac{\eta-\xi}{t-\xi}\right)^{1/2-\varepsilon} \frac{(-y)^{2\varepsilon} F(\beta+1,\, \beta',\, 2; z)}{t^{1/2}(t-\xi)^{\beta+\varepsilon+3/2}}\right] \psi(t)dt \right\},$$

где $0 < \varepsilon < -\beta - 1/2$. Отсюда, поскольку

$$F(\beta+2,\, \beta'+1,\, 3; z) = (1-z)^{1/2} F(1-\beta,\, 2-\beta',\, 3; z),$$

$$F(1-\beta,\, 2-\beta',\, 3; 1) = \frac{2\Gamma(1/2)}{\Gamma(2+\beta)\Gamma(1+\beta')},$$

находим

$$\nu(x) = \beta(\beta'-1)\beta'(\beta+1)x^{1-\beta'} \times$$

$$\times \lim_{y\to -0} \int\limits_{\eta}^{1} \frac{\eta^{1/2}(t-\xi)^{1/2} F(1-\beta,\, 2-\beta',\, 3; z)}{2(\eta-\xi)^{1/2}(t-\xi)^{\beta+3}\eta^2} (-y)\, [\xi(t-\xi) + \eta(t-\eta)] \times$$

$$\times\, \psi(t)dt = \frac{2\beta\beta'(\beta+1)(\beta'-1)\Gamma(1/2)}{\Gamma(2+\beta)\Gamma(1+\beta')}\, x^{\beta} \int\limits_{x}^{1} \frac{\psi(t)dt}{(t-x)^{\beta+3/2}}.$$

Таким образом, если $a < -3$, то

$$\nu(x) = \frac{2\Gamma(1/2)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta'-1)}\, x^{\beta} \int\limits_{x}^{1} \frac{\psi(t)dt}{(t-x)^{\beta+3/2}}. \tag{16}$$

Из (16) в силу (9) ($\nu(x) \equiv 0$) заключаем, что $\psi(x) \equiv 0$.

В случае, когда $-3 < a < -1$, представление (13) можно переписать в виде

$$u = \int_1^\eta \left[\frac{\beta'}{t}\psi(t) + \psi'(t)\right] R(0,\, t,\, \xi; \eta) dt =$$

$$= \eta^{-\beta} \int_1^\eta \left[\frac{\beta'}{t}\psi(t) + \psi'(t)\right] t^{1/2}(t-\xi)^{-\beta} F(\beta,\, \beta',\, 1; z) dt.$$

Отсюда непосредственным вычислением находим

$$\nu(x) = \lim_{y\to -0} u_y = -\beta\beta' x^{-\beta'} \lim_{y\to -0} \int_\eta^1 \left[\frac{\beta'}{t}\psi(t) + \psi'(t)\right] t^{1/2} \times$$

$$\times F(\beta+1,\, \beta'+1,\, 2; z)(t-\xi)^{-\beta} \frac{(-y)t}{\eta(t-\xi)} \left(\frac{t-\eta}{t-\xi} + \frac{\xi}{\eta}\right) dt =$$

$$= -\beta\beta' x^{-\beta'} \lim_{y\to -0} \int_\eta^1 \left[\frac{\beta'}{t}\psi(t) + \psi'(t)\right] t^{1/2} \frac{\eta^{1/2}(t-\xi)^{1/2}}{t^{1/2}(-y)} \times$$

$$\times F(1-\beta,\, 1-\beta',\, 2; z)(t-\xi)^{-\beta} \frac{(-y)t}{\eta(t-\xi)} \left(\frac{t-\eta}{t-\xi} + \frac{\xi}{\eta}\right) dt =$$

$$= -2\beta\beta' F(1-\beta,\, 1-\beta',\, 2; 1)\, x^{\beta-1} \int_x^1 \frac{\beta'\psi(t) + t\psi'(t)}{(t-x)^{1-\beta'}} dt$$

или

$$\nu(x) = -2B(\beta, \beta')\, x^{\beta-1} \int_x^1 \frac{\beta'\psi(t) + t\psi'(t)}{(t-x)^{1-\beta'}} dt. \tag{17}$$

Из (17) с учетом того, что в силу (9) $\nu(x) \equiv 0$ и $\psi(1) = 0$, будем иметь $\psi(\eta) \equiv 0$. Стало быть, $u(x,y) \equiv 0$. Таким образом, теорема 2 доказана.

Теоремы 1 и 2 в случае, когда $\psi'(\eta) = \frac{\partial}{\partial\eta}\left(u|_{\xi=0}\right)$ при $\eta \to 1$ может иметь лишь особенность интегрируемого порядка, впервые были доказаны Т. Ш. Кальменовым [8] (см. также [9]).

**Литература**

1. Лыков А. В. Инженерно-физический журнал. 1965. Т. 9, № 3.
2. Лыков А. В. Тепломассообмен. М.: Энергия, 1978.
3. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959.
4. Gellerstedt S. Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik. 1937. Vol. 25 A, no. 29. Pp. 1–23.

5. Нахушев А. М. Доклады АН СССР. 1970. Т. 195, № 4.
6. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, № 1.
7. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М.: ИЛ, 1957.
8. Кальменов Т. Ш. Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, № 1.
9. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8, № 1.

Поступила в редакцию
29 января 1979 г.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и механики КБГУ

# Эффект локализации особенности градиента решения задачи Дарбу для уравнения Геллерстедта и критерий его непрерывности

Рассмотрим неоднородное уравнение Геллерстедта

$$u_{yy} - (-y)^m u_{xx} = f(x, y) \tag{1}$$

в области $D$ евклидовой плоскости точек $(x, y)$, ограниченной кривыми $AC_m\colon\ \xi = 0$, $BC_m\colon\ \eta = l$, где

$$\xi = x - \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}, \quad \eta = x + \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}, \tag{2}$$

и отрезком $AB : 0 \leqslant x \leqslant l$ прямой $y = 0$.

Пусть $\beta = m/(2m+4)$, $\gamma_1 = -(2-4\beta)^{4\beta}/4$, $\gamma_2 = (2-4\beta)^{2\beta-1}$;

$$u = u(x, y), \quad v = v(\xi, \eta) = u\left(\frac{\xi+\eta}{2}, -\gamma_2(\eta-\xi)^{1-2\beta}\right),$$

$$F(\xi, \eta) = \gamma_1 f\left(\frac{\xi+\eta}{2}, -\gamma_2(\eta-\xi)^{1-2\beta}\right);$$

$\Omega = \{(\xi, \eta)\colon 0 < \xi < \eta < l\}$ – образ области $D$ при отображении (2): $\overline{D}$ – замыкание $D$.

Уравнение (1) в характеристических координатах (2) принимает хорошо известный вид

$$v_{\xi\eta} + \frac{\beta}{\eta-\xi}(v_\xi - v_\eta) = \frac{F(\xi, \eta)}{(\eta-\xi)^{4\beta}}. \tag{3}$$

Как и в работе [1], через $D(\beta, \beta)$ обозначим множество действительных функций $v(\xi, \eta)$ из класса $C(0 \leqslant \xi < \eta \leqslant l) \cap C^1(\Omega)$, имеющих непрерывную в $\Omega$ смешанную производную $v_{\xi\eta}$.

Функции $u(x, y)$ назовем решением уравнения (1) в области $D$, если $v$ – решение уравнения (3) в области $\Omega$ из класса $D(\beta, \beta)$.

Нахушев А. М. Доклады РАН. 1992, **323**:5, 834–837.
Представлено академиком В. А. Ильиным 21.02.1992

**Задача Дарбу.** *Найти решение и уравнения* (1), *непрерывное в* $\overline{D}$ *и удовлетворяющее краевому условию*

$$u(x,y) = 0 \quad \forall\,(x,y) \in AB \cup AC_m. \tag{4}$$

Вопрос об изолированных особенностях решений уравнения Трикоми, лежащих в области его эллиптичности вплоть до параболической линии $y = 0$, впервые поставлен самим Ф. Трикоми еще в 1928 г. (см. [2, с. 181]). Очевидно, что если $f$ не зависит от $x$ и $u(x,y)$ – трижды непрерывно дифференцируемое по $x$ решение уравнения (1), то и первая компонента градиента $\nabla u = (u_x, u_y)$ будет его решением. Поэтому история проблемы об особенностях градиента решения задачи Трикоми и Дарбу, по существу, началась с работы [2].

Традиционно считается, что уравнение (1) с достаточно гладкой в $\overline{D}$ правой частью не может иметь решение с изолированной особой точкой, лежащей даже на $AB$, ибо эта особенность должна уноситься вдоль характеристики, выходящей из этой точки. Однако и это правило не без исключения. Об этом говорит следующая

**Теорема 1 (о локализации особенности).** *Пусть* $2 < m < 4$, $f \in C^1(\overline{D})$ *и* $f(0,0) \neq 0$. *Тогда первая компонента градиента* $\nabla u$ *решения* $u(x,y)$ *задачи Дарбу* (4) *для уравнения* (1) *непрерывна всюду в* $\overline{D}$ *за исключением точки* $(0,0)$, *где она обращается в* $\infty$, *а вторая непрерывна в* $\overline{D}$.

Пусть

$$R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta) = (\eta_1-\xi_1)^{2\beta}[(\eta-\xi_1)(\eta_1-\xi)]^{-\beta} F\left(\beta,\beta,1;\frac{(\xi-\xi_1)(\eta_1-\eta)}{(\xi-\eta_1)(\xi_1-\eta)}\right),$$

где $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ – гипергеометрическая функция, означает функцию Римана для уравнения (3).

Схема доказательства теоремы 1 такова.

1. Устанавливается справедливость следующей леммы о необходимых краевых условиях для уравнения (1) в области $D$.

**Лемма 1.** *Пусть* $F(\xi,\eta) \in C(\overline{\Omega})$, $v(\xi,\eta)$ – *решение уравнения* (3) *из класса* $D(\beta,\beta)$. *Тогда*

$$\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)} \lim_{\eta\to\xi} (\eta-\xi)^{2\beta}(v_\eta - v_\xi) = \xi^\beta D_{l\xi}^{1-\beta}[v(0,\eta_1) - v(0,l)] +$$

$$+ (l-\xi)^\beta D_{0\xi}^{1-\beta}[v(\xi_1,l) - v(0,l)] - \Gamma(\beta) D_{0\xi}^{-\beta} D_{l\xi}^{-\beta} (\eta_1-\xi)^{1-4\beta} F(\xi_1,\eta_1),$$

$$\frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1-2\beta)} v(\xi,\xi) = \xi^{-\beta}[D_{l\xi}^{\beta}\eta_1^{2\beta} v(0,\eta_1) + \beta D_{l\xi}^{\beta-1}\eta_1^{2\beta-1} v(0,\eta_1)] +$$

$$+ (l-\xi)^{-\beta}\{D_{0\xi}^{\beta-1}[(l-\xi_1)^{2\beta} v(\xi_1,l)]' + \beta D_{l\xi}^{\beta-1}(l-\xi_1)^{2\beta-1} v(\xi_1,l)\} -$$

$$-\Gamma(1-\beta)D_{0\xi}^{\beta-1}D_{l\xi}^{\beta-1}(\eta_1-\xi_1)^{-2\beta}F(\xi_1,\eta_1).$$

Здесь и далее $\Gamma(z)$ – гамма-функция, $D_{ax}^{\alpha}$ – оператор дробного интегро-дифференцирования [3].

Лемма 1 позволяет, в частности, утверждать, что если $v(\xi,\eta)$ удовлетворяет ее условиям, то $v(\xi,\eta)$ и взвешенная производная $(\eta-\xi)^{2\beta}(v_\eta-v_\xi)$ непрерывны всюду в $\overline{\Omega}$ за исключением, быть может, точек $(0,0)$ и $(l,l)$.

2. На основании леммы 1 и свойств функции Римана доказывается, что решение $u(x,y)$ задачи Дарбу (1), (4) представимо в виде

$$u=u^1+u^2,$$

$$u^1(x,y)=\frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}y\int\limits_0^1\nu[\eta-(\eta-\xi)t](t-t^2)^{-\beta}dt,\quad \nu[x]\equiv u_y(x,0),$$

$$u^2(x,y)=\int\limits_\xi^\eta d\xi\int\limits_{\xi_1}^\eta F(\xi_1,\eta_1)(\eta_1-\xi_1)^{-4\beta}R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)d\eta_1.$$

3. Доказывается следующая лемма о свойстве решения однородной задачи Коши:

$$u^2(x,0)=0,\quad u_y^2(x,0)=0,\quad 0<x<l,$$

для уравнения (1) в точках $\theta_0^m(x)=(x/2,-\gamma_2x^{1-2\beta})$, $x\in[0,l]$, лежащих на характеристике $AC_m$.

**Лемма 2.** *Если $f\in C(\overline{D})$, то существует такая функция $\nu_0\in C[0,l]$, что*

$$D_{0x}^{1-\beta}u^2[\theta_0^m(x)]=x^{1-3\beta}\nu_0(x),\quad \nu_0(0)=0\ \Leftrightarrow\ f(0,0)=0.$$

4. Устанавливается достоверность леммы об априорных оценках решения $u^2$ однородной задачи Коши для уравнения (1) в области $D$.

**Лемма 3.** *Пусть $f\in C(\overline{D})$, тогда*

$$|u^2(x,y)|\leqslant C\|f\|y^2.$$

*Если же $f\in C^1(\overline{D})$, то*

$$|u_x^2(x,y)|\leqslant C\|f_x\|y^2,\quad |u_y^2(x,y)|\leqslant C\|f\|y.$$

Здесь и в дальнейшем $C$ означает положительную постоянную, которая может зависеть только от $\beta$ и $l$, а $\|\cdot\|_k$ – норма в пространстве $C^k$, $\|\cdot\|=\|\cdot\|_0$.

5. Существенно опираясь на лемму 2, можно доказать, что

$$\nu_1(x)\Gamma(1-\beta)\equiv[x\nu_0'(x)+(1-2\beta)\nu_0(x)]\gamma_2\Gamma(2-2\beta)\in C[0,l],$$

$$\nu'(x) = \nu_1(x)x^{-2\beta}, \quad \nu_1(0) = (1-2\beta)\nu_0(0). \tag{5}$$

6. Пользуясь равенством (4), первой формулой среднего значения интеграла [4], а затем интегральным представлением для гипергеометрических функций [5], показываем, что

$$u_x^1 = y\nu_1[\eta - (\eta - \xi)t_0]\eta^{-2\beta}F(2\beta, 1-\beta, 2-2\beta; 1-\xi/\eta), \tag{6}$$

где $t_0$ – некоторая точка из $[0,1]$.

Лемма 3 и представление (5) позволяют рассмотреть и случай $m \leqslant 2$.

**Теорема 2.** *Пусть* $f \in C^1(\overline{D})$, $f(0,0) \neq 0$ *и* $m = 2$. *Тогда если* $u$ *– решение задачи Дарбу* (1), (4), *то* $u_x \in C(\overline{D} \setminus A)$ *и ограничена в* $D$, *а* $u_y \in C(\overline{D})$.

**Теорема 3.** *Пусть* $u$ *– решение задачи Дарбу* (4) *для уравнения* (1) *с* $m \leqslant 2$ *и* $f \in C^1(\overline{D})$. *Тогда*

$$\|u\| \leqslant C\|f\|_1, \quad \textit{если} \;\; m < 2,$$

*и*

$$\|u\| + \|u_y\| + \sup_{\overline{D}} |u_x| \leqslant C\|f\|_1, \quad \textit{если} \;\; m = 2.$$

Необходимое и достаточное условие существования конечного предела следа $\nu(x)$ при $x \to 0$, $l$ производной по $y$ от решения $u(x,y)$ задачи Трикоми для уравнения

$$u_{yy} + yu_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, \tag{7}$$

впервые было найдено в работе [2]. Для уравнения же вида

$$u_{yy} + \operatorname{sign} y \cdot |y|^m u_{xx} = f(x,y), \quad 0 < x < l, \tag{8}$$

этот вопрос и связанная с ним проблема *ограниченности градиента решения задачи Трикоми и ее сингулярного варианта* – первой задачи Дарбу в гиперболической части $D$ смешанной области задания уравнения (7) – оставались открытыми.

Имеет место

**Теорема 4.** *Если* $2k \leqslant m < 2(k+1)$, $f \in C^k(\overline{D})$, $k = 1, 2, \ldots$, *то решение* $u(x,y)$ *задачи Дарбу* (4) *для уравнения* (1) *в области* $D$ *будет принадлежать пространству* $C^1(\overline{D})$ *тогда и только тогда, когда*

$$\partial^i f/\partial y^i(0,0) = 0 \quad \forall\, i = 0, 1, \ldots, k-1. \tag{9}$$

В силу теоремы 3 условие (8) является лишним, когда $m < 2$.

Доказательство теоремы 4 основывается на леммах 2, 3 и на следующем представлении для функции $\nu_0(x)$:

$$\nu_0(x) = \int_0^1 \frac{z^{1-3\beta}(1-z)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} dz \Bigg\{ \int_0^1 \frac{F\left(x\xi, x\zeta(z)\right)}{(1-\xi)^{2\beta}[\zeta(z)]^\beta} d\xi +$$

$$+\beta^2 \int\limits_0^1 \xi(1-\xi)^{-2\beta}[\zeta(z)]^{-2\beta} d\xi \int\limits_0^1 \eta^{1-4\beta}[\zeta(z\eta)]^{\beta-1} \times$$

$$\left.\times F\left(x\xi, x\zeta(z\eta)\right) F\left(1-\beta, 1-\beta, 2; (1-\eta)\xi/\zeta(z\eta)\right) d\eta\right\},$$

где $\zeta(\mu) = \xi + (1-\xi)\mu$, $\mu \in [0,1]$, $\xi \in [0,1]$.

Для любой функции $f(x,y) \in C^1(\overline{D})$ введем отображения $f \to f_1^1$ и $f \to f_2^2$ определяемые формулами

$$f_1^1(x,y) = \int\limits_0^1 f_1(xt, yt^{1-2\beta})dt, \qquad f_2^2(x,y) = (1-2\beta)\int\limits_0^1 t^{-2\beta} f_2(xt, yt^{1-2\beta})dt,$$

где субиндексы 1 и 2 означают производные по $X$ и $Y$ от $f(X,Y)$. Примем следующие обозначения:

$$x_1 = x\zeta_1, \quad x_2 = -(x\zeta_2)^{1-2\beta},$$

$$\zeta_1 = \xi + 1/2(1-\xi)\mu, \quad \zeta_2 = (1-\xi)\mu\gamma_2^{1/(1-2\beta)},$$

$2*n = 22\ldots2$ – кортеж длины $n$.

При доказательстве теоремы 4 существенно используется и тот факт, что

$$f(x_1,x_2) = x_2^i f_{2*i}^{2*i}(0,0) + x_1 x_2^i f_{2*i\,1}^{2*i\,1}(x_1,x_2) + x_2^k f_{2*k}^{2*k}(x_1,x_2), \; i = 0,1,\ldots,k-1;$$

$$x\frac{d}{dx} f(x_1,x_2) = (1-2\beta)\left[x_2^{j+1} f_{2\,2*j}^{2*j}(0,0) + x_2^k f_{2\,2*(k-1)}^{2*(k-1)}(x_1,x_2)\right] +$$

$$+\, x_1\left[f_1(x_1,x_2) + (1-2\beta)x_2^{j+1} f_{2\,2*j}^{2*j}(x_1,x_2)\right], \quad j = 0,1,\ldots,k-2.$$

Здесь по индексам $i$ и $j$ подразумевается суммирование.

В заключение выражаю сердечную признательность моему учителю чл.-корр. РАН А. В. Бицадзе за внимание к работе и проф. Недю Попиванову за совместную работу в г. Варне в сентябре 1990 г., которая вернула меня к проблеме о градиенте решения задачи Дарбу.

## Литература

1. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10, № 1. С. 100–111.
2. Трикоми Ф. О линейных уравнениях смешанного типа. М.–Л.: ГИТТЛ, 1947. 192 с.
3. Нахушев А. М., Салахитдинов М. С. Доклады АН. 1988. Т. 299, № 6. С. 1313–1316.
4. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. Т. 1. М.: МГУ, 1985. 666 с.
5. Никифоров А. Ф., Уваров В. Б. Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1984. 344 с.

Поступила в редакцию
25 февраля 1992 г.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и автоматизации

# Уравнения смешанного типа

## Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа с двумя линиями параболического вырождения

В работе в качестве модельного уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа с двумя непересекающимися линиями параболического вырождения рассматривается уравнение

$$y(y-1)u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{1}$$

в области, содержащей внутри себя интервалы обеих прямых $y = 0$, $y = 1$.

$1^\circ$. Введем следующие обозначения:

$$\begin{gathered} \omega(y) = 1/4k'\sqrt{-k} + 1/8 \arcsin k', \\ \tilde{y}(y) = -(3/2a)^{2/3}(\omega \mp \pi/16)^{2/3}, \\ 0 \leqslant y \leqslant 1, \end{gathered} \tag{2}$$

$$\begin{gathered} \omega(y) = 1/4k'\sqrt{k} - 1/8 \ln|k' + 2\sqrt{k}|, \quad \tilde{y}(y) = (3\omega/2a)^{2/3}, \\ y \leqslant 0,\ y \geqslant 1, \quad k(y) = y(y-1), \end{gathered} \tag{3}$$

$$a \equiv \text{const}, \quad \tilde{x} = x/a, \quad \pi < 8a < 2\pi, \tag{4}$$

$$a\xi_1(x, y) = x + \omega - \pi/16, \quad a\eta_1(x, y) = x - \omega + \pi/16, \tag{5}$$

$$b(\tilde{y}) = [\tilde{y}'(y)]^{-2}\tilde{y}''(y), \quad \tilde{\omega}(y) = \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^{\tilde{y}} b(s)ds\right). \tag{6}$$

На плоскости переменных $x$, $y$ рассмотрим точки

$$A_1(0,\,0), \quad A_0(\pi/8,\,0), \quad A_2(a,\,0), \quad B(a-\pi/16,\,1/2), \quad A_3(a,\,1),$$

$$A_4(0,\,1), \quad A(a-\pi/8,\,1), \quad B_1(\pi/16,\,1/2), \quad A_5(a-\pi/8,\,0).$$

Пусть $D^*$ – конечная односвязная область, ограниченная 1) дугой $\sigma_1\colon (x-a/2)^2+\omega^2 = a^2/4$, $y \geqslant 1$; 2) дугой $\sigma_0\colon (x-a/2)^2+\omega^2 = a^2/4$, $y \leqslant 0$; характеристиками $A_1B_1 : \eta_1 = \pi/8a$, $B_1A_4 : \xi_1 = 0$, $A_2B : \xi_1 = 1 - \pi/8a$, $BA_3 : \eta_1 = 1$ уравнения (1). Пусть далее $B_0(\mathscr{D}_0)$ – точка пересечения характеристик $A_0B_0 : \eta_1 = \pi/4a$ и $AB_0 : \xi_1 = 1 - \pi/8a$ ($A\mathscr{D}_0 : \eta_1 = 1 - \pi/8a$ и $B_1A_4$); $D$ – часть области $D^*$, лежащая выше кривой $\mathscr{D}_0AB$; $D^+$ – эллиптическая часть области $D$; $\Delta\,(\Delta^*)$ – гиперболическая часть $D$, лежащая выше кривой $A_4\mathscr{D}_0A$ ($ABA_3$).

*Работа в основном представляет собой подробное изложение статьи [1] (прим. автора).*

Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1967, **3**:1, 45–58.

**Задача 1.** *Найти функцию $u(x, y)$ со следующими свойствами:*

*1) $u \in C(D^* - A_0 - A_2)$ и в точке $A_0\,(A_2)$ обращается (может обращаться) в $\infty$ порядка $\alpha < 1/6$ (логарифмического порядка);*

*2) $u_y\,(u_x)$ – непрерывна всюду в замкнутой области $\overline{D}^*$, за исключением $A_0$, и, быть может, $A$, $A_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 5)$ и характеристик, выходящих из них, где она обращается в $\infty$ порядка $< 5/6$ $(< 7/6)$ и $< 1$ $(< 1)$ соответственно;*

*3) $u$ – регулярное решение уравнения (1) всюду в $D^*$, за исключением, быть может, характеристик, выходящих из точек $A_0$, $A$, $A_5$;*

*4) $u$ – удовлетворяет краевым условиям:*

$$(\tilde{\omega}u)_{\sigma_1} = \varphi_1(\tilde{x}), \quad 0 \leqslant \tilde{x} \leqslant 1; \tag{7}$$

$$(\tilde{\omega}u)_{A_4\mathscr{D}_0} = \psi_1(\eta_1), \quad 0 \leqslant \eta_1 \leqslant x_0; \tag{8}$$

$$(\tilde{\omega}u)_{A_3B} = \psi_2(\xi_1), \quad x_0 \leqslant \xi_1 \leqslant 1; \tag{9}$$

$$(\tilde{\omega}u)_{BB_0} = \psi_3(\eta_1), \quad 1 \leqslant \eta_1 \leqslant \pi/4a; \tag{10}$$

$$(\tilde{\omega}u)_{\sigma_0} = \varphi_0(\tilde{x}), \quad 0 \leqslant \tilde{x} < 1, \tag{11}$$

*где $\tilde{\omega}$ определена формулой (6), причем в (2) перед $\pi/16$ берется знак минус, а $x_0 = 1 - \pi/8a$.*

Относительно функций $\varphi_i$, $\psi_i$ делаются следующие предположения:

$$\varphi_1(\tilde{x}) \in C^2(0 < \tilde{x} < 1), \quad \varphi_1(\tilde{x}) = O(1)\left(\tilde{x} - \tilde{x}^2\right)^{\chi_1}; \tag{12}$$

$$\psi_1(\eta_1) \in C^7(0 < \eta_1 \leqslant x_0), \quad \psi_1^{(i)}(\eta_1) = O(1)\eta_1^{\chi_2 - i}, \quad i = 0, 1; \tag{13}$$

$$\psi_2(\xi_1) \in C^7(x_0 \leqslant \xi_1 < 1), \quad \psi_2^{(i)}(\xi_1) = O(1)(1 - \xi_1)^{\chi_2 - i}; \tag{14}$$

$$\psi_3(\eta_1) \in C(1 \leqslant \eta_1 \leqslant \pi/4a), \quad \psi_3(\eta_1) \in C^4(1 < \eta_1 < \pi/4a); \tag{15}$$

$$1 < \chi_i \equiv \mathrm{const}\,, \quad \psi_3'(\eta_1) = O(1)(\pi/4a - \eta_1)^{-\alpha - 5/6}; \tag{16}$$

$\psi_3'(\eta_1)$ при $\eta_1 = 1$ может обращаться в $\infty$ порядка $\leqslant 2/3$;

$$\varphi_0(\tilde{x}) \in C(0 \leqslant \tilde{x} < 1), \quad \varphi_0(\tilde{x}) \in C^2(0 < \tilde{x} < 1),$$

причем $\varphi_0$ в точке $\tilde{x} = 1$ обращается, вообще говоря, в $\infty$ логарифмического порядка.

Единственность решения задачи 1 доказывается точно так же, как и в случае задачи $A$, рассмотренной в [2].

2°. 1. В уравнении (1) перейдем к переменным

$$\tilde{x} = x/a, \quad \tilde{y} = (3\omega/2a)^{2/3} \quad \text{при} \quad y \geqslant 1,$$

$$\tilde{y} = -(3/2a)^{2/3}(\pi/16 - \omega)^{2/3} \quad \text{при} \quad 0 < y \leqslant 1$$

и к функции $z = \tilde{\omega} u$. Тогда $z$ будет удовлетворять уравнению

$$\tilde{y} z_{\tilde{x}\tilde{x}} + z_{\tilde{y}\tilde{y}} + c(\tilde{y}) z = 0, \tag{17}$$

где $-4c(\tilde{y}) = 2b_{\tilde{y}} + b^2$ допускает производные любого порядка, причем $c(0) > 0$ (см. [2], [3]).

Если $M$ – некоторое множество на плоскости переменных $x$, $y$, то его образ на плоскости переменных $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, в дальнейшем будем обозначать через $\tilde{M}$. Очевидно $\tilde{D}^+$ есть конечная односвязная область, ограниченная нормальным контуром

$$\tilde{\sigma_1}\colon (\tilde{x} - 1/2)^2 + 4/9 \tilde{y}^3 = 1/4, \quad \tilde{y} \geqslant 0 \tag{18}$$

уравнения (17) и отрезком $\tilde{A}_4 \tilde{A}$ прямой $\tilde{y} = 0$.

**Задача 2 (Холмгрена).** *Найти регулярное в области $\tilde{D}^+$ решение уравнения* (17), *удовлетворяющее краевым условиям* (7)

$$z = \varphi_1(\tilde{x}), \quad (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \tilde{\sigma_1}, \quad 0 \leqslant \tilde{x} \leqslant 1;$$

*и*

$$z_{\tilde{y}} = \nu(\tilde{x}), \quad \tilde{y} = 0, \quad 0 < \tilde{x} < 1, \quad \tilde{x} \neq x_0, \tag{19}$$

*где* $\nu(\tilde{x}) \in C^1(0 < \tilde{x} < 1,\ \tilde{x} \neq x_0)$ *и при* $\tilde{x} = 0,\ x_0,\ 1$ *может обращаться в* $\infty$ *порядка* $< 2/3$.

Для удобства перейдем в уравнении (17) к новым переменным:

$$x = 2\tilde{x} - 1, \quad y = 2^{2/3} \tilde{y}. \tag{20}$$

Тогда (17), (7) и (19) примут следующий вид:

$$Tz \equiv y z_{xx} + z_{yy} = -4^{-2/3} c(4^{-1/3} y) z = c_0(y) z; \tag{21}$$

$$z = \varphi_1((x+1)/2) = \tilde{\varphi}(x), \quad (x, y) \in \sigma, \quad |x| \leqslant 1; \tag{22}$$

$$z_y = 4^{-1/3} \nu((x+1)/2) = \tilde{\nu}(x), \quad y = 0, \quad |x| < 1, \quad x \neq 2x_0 - 1. \tag{23}$$

Преобразование (20) переводит $\tilde{D}^+$ в область $\Omega$, ограниченную кривой $\sigma$: $x^2 + \frac{4}{9} y^3 = 1$ и отрезком $|x| \leqslant 1$, $y = 0$.

Функция Грина задачи 2 в области $\Omega$ задается формулой [4]

$$G(x, y; \xi, \eta) = u(x, y; \xi, \eta) + v(x, y; \xi, \eta), \tag{24}$$

где

$$u = \gamma_1 (r_1^2)^{-1/6} \mathscr{F}\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}; 1 - \frac{r^2}{r_1^2}\right), \ v = -\left(R^2\right)^{-1/6} u(x, y; \bar{\xi}, \bar{\eta}), \tag{25}$$

$$\left.\begin{matrix} r^2 \\ r_1^2 \end{matrix}\right\} = (x - \xi)^2 + \frac{4}{9}\left(y^{3/2} \mp \eta^{3/2}\right)^2, \quad R^2 = \xi^2 + \frac{4}{9}\eta^3, \tag{26}$$

$$\bar{\xi} = \xi/R^2, \quad \bar{\eta}^{3/2} = \eta^{3/2}/R^2, \quad 4\pi\Gamma(1/3)\gamma_1 = (4/3)^{1/3}\Gamma^2(1/6). \tag{27}$$

В работе [2] доказано, что существует единственное решение $z$ задачи 2 и оно представимо в виде

$$z = z_0(x,y) + Z(x,y) + \int\limits_{-1}^{1} \tilde{\nu}(t)N(t,\, x,\, y)dt, \tag{28}$$

где

$$z_0 = N_0 + F = -\int\limits_{-1}^{1} \tilde{\nu}(\xi)G(\xi,\, 0; x,\, y)d\xi + \int\limits_{-1}^{1} \tilde{\varphi}(\xi)A_\xi[G(\overline{\xi,\, \eta}; x,\, y)]d\xi, \tag{29}$$

$$A_\xi \equiv \eta\frac{d\eta}{d\xi}\frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{\partial}{\partial\eta},$$

а черта над $(\xi,\, \eta)$ означает, что $(\xi,\, \eta) \in \sigma$; $Z$ и $N$ соответственно являются решениями следующих безусловно разрешимых уравнений Фредгольма:

$$Z(x,y) + \int\limits_{\Omega} c_0(\eta)G(\xi,\, \eta; x,\, y)Z(\xi,\, \eta)d\xi d\eta = Z_0(x,y), \tag{30}$$

$$N(t,\, x,\, y) + \int\limits_{\Omega} c_0(\eta)G(\xi,\, \eta; x,\, y)N(t,\, \xi,\, \eta)d\xi d\eta = N_0(t,\, x,y), \tag{31}$$

$$Z_0 = -\int\limits_{\Omega} c_0(\eta)G(\xi,\, \eta; x,\, y)Fd\xi d\eta,$$

$$N_0 = \int\limits_{\Omega} c_0(\eta)G(t,\, 0; \xi,\, \eta)d\xi d\eta. \tag{32}$$

2. Из (32) имеем

$$N_0(y,\, x, 0) = \mathfrak{R}(x,y) = \int\limits_{\Omega} c_0(\eta)G(\xi,\, \eta; x, 0)G(y,\, 0; \xi,\, \eta)d\xi d\eta. \tag{33}$$

Ниже будет доказано, что функция $\mathfrak{R}(x,y) \in C^\infty(-1 < x,\, y < 1,\, x \neq y)$, а при $x = y$ первые производные имеют логарифмическую особенность, которую удается выделить в явном виде.

Рассмотрим функцию

$$\mathfrak{R}_i(x,y) = \int\limits_{\Omega} \eta^i G(\xi,\, \eta; x, 0)G(y, 0; \xi, \eta)d\xi d\eta, \quad i \geqslant 0. \tag{34}$$

Из (24)–(27) легко увидеть, что

$$G(\xi,\,\eta;x,0)=\gamma_1(R_x^2)^{-1/6}-\gamma_1(\overline{R}_x^2)^{-1/6}, \tag{35}$$

где

$$R_x^2=(x-\xi)^2+4/9\eta^3,\quad \overline{R}_x^2=(1-x\xi)^2+4/9x^2\eta^3.$$

Следовательно,

$$\mathfrak{R}_i(x,y)=\gamma_1^2\int\limits_\Omega\eta^i(R_xR_y)^{-1/3}d\xi d\eta-\gamma_1^2\int\limits_\Omega\eta^i[(R_x\overline{R}_y)^{-1/3}+$$

$$+(\overline{R}_xR_y)^{-1/3}-(\overline{R}_x\overline{R}_y)^{-1/3}]d\xi d\eta=\gamma_1^2\mathfrak{R}_i^1(x,y)+\mathfrak{R}_i^2(x,y). \tag{36}$$

Очевидно, $\mathfrak{R}_i^2(x,y)\in C^\infty(-1<x,\,y<1)$ при любом $i\geqslant 0$. Интеграл $\mathfrak{R}_i^1$ после перехода к повторному и преобразования посредством подстановки $\eta=(9/4)^{1/3}[(1-\xi^2)(1-t)]^{1/3}$ примет вид

$$\mathfrak{R}_i^1(x,y)=\alpha_i\int\limits_{-1}^{1}(1-\xi^2)^{i/3}(\zeta\zeta_0)^{1/6}F_1\left(1,\,\frac{1}{6},\,\frac{1}{6},\,\frac{i+4}{3};\zeta,\,\zeta_0\right)d\xi, \tag{37}$$

где $0<a_i\equiv\mathrm{const}$; $\zeta=\zeta(x)=(1-\xi^2)/(1+x^2-2x\xi)$; $\zeta_0=\zeta(y)$; $F_1$ – гипергеометрическая функция переменных $\zeta,\,\zeta_0$; $0\leqslant\zeta,\,\zeta_0\leqslant 1$.

Имеет место следующее тождество (см. [4] § 17):

$$B(1,\,\gamma-1)F_1(1,\beta,\,\beta,\,\gamma;u,\,v)+$$

$$+B(1,\,1+2\beta-\gamma)F_1(1,\beta,\,\beta,\,2+2\beta-\gamma;1-u,\,1-v)+$$

$$+\exp(\gamma\pi i)B(1+2\beta-\gamma,\,\gamma-1)(-u)^{-\beta}(-v)^{-\beta}F_1(1+2\beta-\gamma,\beta,\,\beta,\,2\beta;1/u,\,1/v),$$

где $B$ – бета-функция, $-\pi<\arg(-u),\ \arg(-v)<\pi$, $\operatorname{Im}u,\ \operatorname{Im}v\leqslant 0$. Отсюда, опираясь на известное соотношение

$$(1-v)^{-\alpha}\mathscr{F}(\alpha,\,\beta,\,\beta',\,\beta+\beta';(u-v)/(1-v))=F_1(\alpha,\,\beta,\,\beta+\beta';u,\,v)$$

и на тот факт, что

$$F_1(\alpha,\,\beta,\,\beta,\,\gamma;u,\,v)=F_1(\alpha,\,\beta,\,\beta;v,\,u),$$

получаем

$$F_1\left(1,\,\frac{1}{6},\,\frac{1}{6},\,\frac{i+4}{3};\zeta,\,\zeta_0\right)=a(i)F_1\left(1,\,\frac{1}{6},\,\frac{1}{6},\,\frac{3-i}{3};1-\zeta,\,1-\zeta_0\right)+$$

$$+b(i)(\zeta\zeta_0)^{-1/6}\zeta^{-i/3}(1-\zeta)^{i/3}\mathscr{F}\left(-\frac{i}{3},\,\frac{1}{6},\,\frac{1}{3};\frac{\zeta_0-\zeta}{\zeta_0(1-\zeta)}\right),\quad \zeta_0\geqslant\zeta, \tag{38}$$

$$F_1\left(1,\,\frac{1}{6},\,\frac{1}{6},\,\frac{i+4}{3};\zeta,\,\zeta_0\right)=a(i)F_1\left(1,\,\frac{1}{6},\,\frac{1}{6},\,\frac{3-i}{3};1-\zeta,\,1-\zeta_0\right)+$$

$$+\,b(i)(\zeta\zeta_0)^{-1/6}\zeta_0^{-i/3}(1-\zeta_0)^{i/3}\mathscr{F}\left(-\frac{i}{3},\,\frac{1}{6},\,\frac{1}{3};\frac{\zeta-\zeta_0}{\zeta(1-\zeta_0)}\right),\qquad \zeta\geqslant\zeta_0,\qquad (39)$$

где $a(i)=(1+i)/i$, $b(i)=\Gamma(-i/3)\Gamma(i/3+4/3)/\Gamma(1/3)$, $i/3\neq 0,\,1,\,\dots$

Пусть $x\leqslant y$. Тогда из (37), (38) и (39) имеем

$$\mathfrak{R}_i^1(x,y)=\mathscr{L}_i^*(x,y)+$$

$$+\,m_i\int\limits_{-1}^{(x+y)/2}(y-\xi)^{2i/3}\mathscr{F}\left(-\frac{i}{3},\,\frac{1}{6},\,\frac{1}{3};\frac{(y-x)(y+x-2\xi)}{(y-\xi)^2}\right)d\xi+$$

$$+\,m_i\int\limits_{(x+y)/2}^{1}(\xi-x)^{2i/3}\mathscr{F}\left(-\frac{i}{3},\,\frac{1}{6},\,\frac{1}{3};\frac{(y-x)(2\xi-x-y)}{(\xi-x)^2}\right)d\xi=\mathscr{L}_i^*+I_1+I_2.$$

Здесь и в дальнейшем $\mathscr{L}_i^*$ означает некоторую функцию из класса $C^\infty(-1<x,\,y<1)$, а $m_i$ – некоторую постоянную, отличную от нуля. В интегралах $I_1$ и $I_2$ сделаем замену $\xi=(x-yt)/(1-t)$ и $\xi=(y-xt)/(1-t)$ соответственно. Тогда их сумма $I$ примет вид

$$I=m_i(y-x)^{\frac{2i}{3}+1}\left\{\int\limits_{-1}^{(1+x)/(1+y)}+\int\limits_{-1}^{(1-y)/(1-x)}\right\}(1-t)^{\frac{-2i}{3}-2}\times$$

$$\times\,\mathscr{F}\left(-\frac{i}{3},\,\frac{1}{6},\,\frac{1}{3};1-t^2\right)dt.$$

Теперь нетрудно увидеть, что

$$I=m_i(y-x)^{\frac{2i}{3}+1}\left\{\int\limits_{(1+x)/(1+y)}^{1}+\int\limits_{(1-y)/(1-x)}^{1}\right\}(1-t)^{\frac{-2i}{3}-2}\mathscr{F}_p(t)dt+$$

$$+\,m_i(y-x)^{2i/3+1}=J+m_i(y-x)^{2i/3+1},$$

где $p>2i/3$,

$$\mathscr{F}_p(t)=\mathscr{F}\left(-\frac{i}{3},\,\frac{1}{6},\,\frac{1}{3};1-t^2\right)-\sum_{k=0}^{p}\frac{(-i/3)_k(1/6)_k}{(1/3)_k k!}(1-t^2)^k$$

и символ $(\lambda)_k$ обозначает величину $\Gamma(\lambda+k)/\Gamma(\lambda)$.

После простой замены переменной интеграции в интегралах, входящих в $J$, получаем

$$J = m_i(1+y)^{1+2i/3}\int\limits_0^1 t^{-2-2i/3}\mathscr{F}_p(x^*t(2-x^*t))dt +$$

$$+ m_i(1-x)^{1+2i/3}\int\limits_0^1 t^{-2-2i/3}\mathscr{F}_p(y^*t(2-y^*t))dt,$$

где $x^*=(y-x)/(1+y)$, $y^*=(y-x)/(1-x)$. Поэтому $J$ есть функция типа $\mathscr{L}_i^*$.

Таким образом доказано, что функция $\mathfrak{R}_i$ из (34) в силу (36), (37) представима в виде

$$\mathfrak{R}_i(x,y) = m_i|y-x|^{1+2i/3} + \mathscr{L}_i^*, \quad i/3 \neq 0,\, 1,\, 2,\, \ldots \tag{40}$$

Нет сомнения в том, что (40) законно и при $x \geqslant y$.

Пусть теперь $i/3 = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots$ Тогда

$$\mathfrak{R}_i(x,y) = m_i|y-x|^{1+2i/3}\ln|y-x| + \mathscr{L}_i^*. \tag{41}$$

Для доказательства достаточно распространить тождества (38) и (39) на рассматриваемые значения $i$. Это делается так же, как и для гипергеометрических функций одной переменной [5]. А именно: записываем (38), (39) для $i = 3m+\varepsilon$, где $m = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots$; $\varepsilon$ – сколь угодно малое положительное число, а затем переходим к пределу при $\varepsilon \to 0$.

Поскольку $c_0(y) \in C^\infty(y > -(3\pi/8a)^{2/3})$, то по формуле Тейлора можно записать:

$$c_0(y) = \sum_{i=0}^{q} d_i y^i + O(y^q), \quad d_0 = c_0(0) < 0, \quad q \geqslant 1.$$

Следовательно (см. (33), (34), (40), (41)),

$$N_0(t,\, x,\, 0) = \sum_{i=0}^{q} d_i\mathfrak{R}_i(x,\, t) + \mathfrak{M}_{\overline{q}}(x,\, t), \tag{42}$$

где $\mathfrak{M}_{\overline{q}} \in C^\infty(-1 < x,\ t < 1,\ x \neq t)$, $\mathfrak{M}_{\overline{q}} \in C^{\overline{q}}(-1 < x,\ t < 1)$, если $\overline{q} = 1 + 2[q/3]$ и $q/3 \neq 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$; если же $q/3 \neq 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$, то $\mathfrak{M}_{\overline{q}} \in C^{\overline{q}-1}(-1 < x,\ t < 1)$, причем $\overline{q}$-я производная при $x = t$ может обращаться в $\infty$ порядка не выше логарифмического.

3. Очевидно функция $N_0(t,\,x,\,y)$ является решением однородной задачи Холмгрена для уравнения

$$TN_0 + c_0(y)G(t,\,0;x,\,y) = 0, \quad (x,\,y) \in \Omega.$$

Из аналитического характера решений эллиптического уравнения с аналитическими коэффициентами (см., например, [6]) безусловно вытекает, что $N_0 \in C^\infty(\Omega,\,|t| < 1)$.

Более того, оказывается, что $N_0$ имеет производные любого порядка по $x$ и $t$, когда $(x,\,y) \in \Omega \cup \{y = 0,\,|x| < 1,\,x \neq t,\,|t| < 1\}$. Действительно, пусть $t < t + \varepsilon < x$, а $\Omega_1$ $(\Omega_2)$ – подобласть области $\Omega$, где $\xi < t + \varepsilon$ $(\xi > t + \varepsilon)$. В силу (24) и (32) достаточно установить, что указанным выше свойством обладает функция

$$U_1(t,\,x,\,y) + U_2(t,\,x,\,y) = \left( \int\limits_{\Omega_1} + \int\limits_{\Omega_2} \right) c_0(\eta)\,u(\xi,\,\eta;x,\,y)\,u(t,\,0;\xi,\,\eta)\,d\xi d\eta.$$

Легко видеть, что $U_1$ $(U_2)$ имеет производные всех порядков по $x(t)$ при $(x,\,y) \in \Omega \cup \{y = 0,\ |x| < 1,\,|t| < 1\}$ и их можно получить непосредственным дифференцированием под знаком интеграла. То, что $U_1$ $(U_2)$ допускает производные по $t(x)$, устанавливается с помощью известного тождества $u_x(\xi,\,\eta;x,\,y) = -u_\xi(\xi,\,\eta;x,\,y)$ последовательным применением операции дифференцирования и интегрирования по частям.

Исходя из интегрального уравнения (31) и приведенных здесь свойств функции $N_0$, можно показать (см. [4] гл. 1, § 17, где рассмотрен случай $0 < c_0(y) \equiv \mathrm{const}$), что функция

$$N(t,\,x,\,0) \in C^\infty(-1 < x,\,t < 1,\,x \neq t)$$

и представима в форме (42).

4. В (28) вернемся к переменным $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, по формуле (20) и в результате положим $\tilde{y} = 0$, $\tilde{x} = x$. Тогда, согласно (29), будем иметь

$$\tau(x) = \gamma_1 \int\limits_0^1 \nu(t)\,[L(x,t) - |t-x|^{-1/3} + (t + x - 2tx)^{-1/3}]\,dt + \Phi(x), \quad (43)$$

где

$$\gamma_1 L(x,\,t) = N(2t-1,\ 2x-1,\,0), \ \ \Phi(x) = F(2x-1,\,0) + Z(2x-1,\,0).$$

Из (29) с учетом того, что

$$A_\xi[G(\overline{\xi,\,\eta};x,\,y)] = \gamma_1/(2\eta)(1 - x^2 - 4/9y^3)(r_1^2)^{-7/6} \times$$

$$\times \mathscr{F}(1/6,\, 7/6,\, 1/3; 1-(r/r_1)^2), \tag{44}$$

получаем (см. [4], [9])

$$F(x,\,0) = (4/9)^{1/3}\gamma_1/2(1-x^2)\int\limits_{-1}^{1}\tilde{\varphi}(\xi)(1-\xi^2)^{-1/3}(1+x^2-2x\xi)^{-7/6}\,d\xi.$$

Отсюда, согласно (12), имеем, что $F(x,0) \in C^\infty(|x|<1)$, причем $F''(x,0)$ при $x \to \pm 1$ может обращаться в $\infty$ порядка $\leqslant 2-2\varkappa_1$, если $\varkappa_1 < 1$. Далее, в силу (44) ясно, что $F(x,y)$ допускает в $\Omega \cup \{y=0,\, |x|<1\}$ производные любого порядка по $x$. Опираясь на эти свойства функции $F$, без труда можно убедиться в том, что функция $Z(x,\,0)$ из (30) обладает следующими свойствами: 1) $Z(x,\,0) \in C^\infty(|x| \leqslant 1)$ и в точках $x = \pm 1$ имеет нуль порядка $\geqslant 1$; 2) $Z(x,\,0) \in C^\infty(|x|<1)$; 3) $Z''(x,\,0)$ при $x \to \pm 1$ может обращаться в $\infty$ порядка не выше логарифмического.

5. Пусть существует решение задачи 1. Тогда имеет место (43) и следующие два фундаментальных соотношения между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенные из гиперболической части $\tilde{\Delta} \cup \tilde{\Delta}^*$ смешанной области $\tilde{D}$ на линию вырождения $\tilde{y} = 0$:

$$\tau(x) = \gamma\int\limits_0^x \nu(t)(x-t)^{-1/3}P\left((x-t)^{4/3}\right)dt + \Psi_1(x), \quad 0<x<x_0, \tag{45}$$

$$\tau(x) = \gamma\int\limits_x^1 \nu(t)(t-x)^{-1/3}P\left((x-t)^{4/3}\right)dt + \Psi_2(x), \quad x_0<x<1, \tag{46}$$

где: 1) $P\left((x-t)^{4/3}\right)$ допускает производные любого порядка при $x \neq t$, причем $P(0)=1$ и первые производные при $x=t$ обращаются в нуль порядка не ниже 1/3; 2) $\Psi_i$ – функция, зависящая только от $\psi_i$, $i=1,2$; $\Psi_1 \in C^6(0<x\leqslant x_0)$, $\Psi_2 \in C^6(x_0 \leqslant x < 1)$; 3) $\Psi_1'$ ($\Psi_2'$) в худшем случае ведет себя так же, как $x^{\chi_2-1}$ ($(1-x)^{\chi_2-1}$), когда $x \to 0$ ($x \to 1$); 4) $2\Gamma(5/6)\Gamma(1/3)\gamma = (4/3)^{1/3}\Gamma(1/6)$.

Сформулированный результат содержится в [2, 3].

3°. 1. Докажем существование решения системы (43), (45), (46). С этой целью исключим $\tau(x)$ из (43), (45). Тогда

$$\int\limits_0^x \nu(t)(x-t)^{-1/3}P\left((x-t)^{4/3}\right)dt = H_1(x) + \int\limits_0^1 \nu(t)[L(x,t)+l(x,t)]dt, \tag{47}$$

где

$$\gamma H_1(x) = \Phi(x) - \Psi_1(x), \quad l(x,t) = (t+x-2tx)^{-1/3} - |t-x|^{-1/3}.$$

Уравнение (47) (считаем правую часть пока известной) является обобщенным уравнением Абеля. Известным методом (см. [7]) оно сводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\nu(x) + \int\limits_0^x \nu(t)(x-t)^{1/3} P_1\left((x-t)^{2/3}\right) dt = \overline{H}_1(x) + \overline{L}(x) + \bar{l}(x), \quad (48)$$

где

$$\overline{L}(x) = \int\limits_0^1 \nu(t) L_0(x,t) dt, \qquad L_0(x,t) = \frac{d}{dx}\int\limits_0^x \frac{L(\xi,t)d\xi}{(x-\xi)^{2/3}},$$

$$\overline{H}_1(x) = \frac{d}{dx}\int\limits_0^x \frac{H_1(t)dt}{(x-t)^{2/3}}, \quad (49)$$

$$\bar{l}(x) = \frac{d}{dx}\int\limits_0^x\int\limits_0^1 \frac{\nu(t)l(\xi,t)}{(x-\xi)^{2/3}} dt d\xi,$$

а $P_1 \in C(0 \leqslant x,\, t \leqslant 1)$, и имеет такую же гладкость (в смысле дифференцируемости), что и его аргумент $(x{-}t)^{2/3}$, причем $P_1(0) \neq 0$. Известно [8], что

$$\bar{l}(x) = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}\nu(x) - \int\limits_0^1 \nu(t) K^-(x,\, t) dt,$$

где $K^- = (t/x)^{2/3}[1/(t-x) - 1/(x+t-2tx)]$, и интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Следовательно, (20) можно переписать в виде

$$\nu(x) - \lambda \int\limits_0^x \nu(t)(x-t)^{1/3} P_1\left((x-t)^{2/3}\right) dt = \rho(x), \qquad \lambda\pi\sqrt{3} = -1, \quad (50)$$

$$\frac{1}{\lambda}\rho(x) = -\overline{H}_1(x) + \int\limits_0^1 \nu(t) K^-(x,\, t) dt - \int\limits_0^1 \nu(t) L_0(x,\, t) dt.$$

После обращения уравнения (50) и простых преобразований легко увидеть, что

$$\nu(x) = -\lambda \int\limits_0^1 \nu(t) K^-(x,\, t) dt = h_1^*(x) + \int\limits_0^1 \nu(t) L_1^*(x,\, t) dt, \qquad 0 < x < x_0,$$

где

$$h_1^*(x) = -\lambda \overline{H}_1(x) - \lambda^2 \int\limits_0^x \overline{H}_1(\xi)(x-\xi)^{1/3} Q_1\left((x-\xi)^{2/3}\right) d\xi,$$

$$L_1^*(x,t) = -\lambda L_0(x,t) - \lambda^2 \int\limits_0^x L_0(\xi,\, t)(x-\xi)^{1/3} Q_1\left((x-\xi)^{2/3}\right) d\xi +$$

$$+ \lambda^2 \int\limits_0^x K^-(\xi,\, t)(x-\xi)^{1/3} Q_1\left((x-\xi)^{2/3}\right) d\xi,$$

$(x-t)^{1/3}Q_1$ – резольвента ядра $(x-t)^{1/3}P_1$.

Аналогично из (43)–(46) находим

$$\nu(x) + \lambda \int\limits_0^1 \nu(t) K^+(x,t) dt = h_2^*(x) + \int\limits_0^1 \nu(t) L_2^*(x,t) dt, \tag{51}$$

где

$$K^+(x,t) = \left(\frac{1-t}{1-x}\right)^{2/3} \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1}{t+x-2tx}\right), \quad x_0 < x < 1,$$

а $h_2^*$, $L_2^*$ – известные функции, зависящие от $\Psi_2$ и $L$ соответственно.

Исключительно для удобства перепишем (50), (51) в виде

$$S_\nu^i \equiv \nu_i(x) + (-1)^i \lambda \int\limits_{-1}^1 \nu_i(t)\, K_i(x,t) dt = h_i(x) + \int\limits_{-1}^1 \nu(t)\, L_i(x,t) dt, \tag{52}$$

где

$$\nu_1(x) = \nu_2(x) = \nu\left(\frac{x+1}{2}\right), \quad x \neq x_0 = 2x_0 - 1, \quad h_i(x) = h_i^*\left(\frac{x+1}{2}\right),$$

$$K_i(x,t) = \left(\frac{1-(-1)^i t}{1-(-1)^i x}\right)^{2/3} \left(\frac{1}{t-x} + \frac{(-1)^i}{1-tx}\right),$$

$$L_i^*\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2},\ \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\right) = 2L_i(x,\, t), \quad i = 1, 2.$$

Как известно [9], сингулярное интегральное уравнение (52) в случае, когда $L_i \equiv 0$, можно свести к эквивалентному интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Применяемый для этой цели метод ниже будет использован для регуляризации уравнения (52).

2. Пусть

$$A_i(x) = h_i(x) + \int\limits_{-1}^{1} \nu(t)\, L_i(x,t)dt.$$

Определим функцию $A^i(x)$ таким образом: $A^1 = A_1$, $A^2 = p_1$, если $-1 < x < x_0$; $A^1 = p_2$, $A^2 = A_2$, если $x_0 < x < 1$. Здесь $p_i(x)$ – некоторая функция, непрерывная, по Гельдеру, в области определения.

Уравнение (52) можно переписать в виде $S^i_\nu = A^i$. Обратим оператор $S^i$ в классе искомых $\nu$. Тогда

$$4\nu_i(x) = 3A^i(x) - (-1)^i 3\lambda \int\limits_{-1}^{1} A^i(t)K^i(x,t)dt, \tag{53}$$

где

$$K^i = \left(\frac{1-t^2}{1-x^2}\right)^{1/3} \left(\frac{1}{t-x} + \frac{(-1)^i}{1-tx}\right).$$

Поскольку $\nu_1(x) = \nu_2(x)$ при $|x| < 1$, $x \neq x^0$, то из (53) имеем

$$p^1_2(x) = R^1_2(x) \pm \lambda \int\limits_{-1}^{1} p^1_2(t)K^2_1(x,t)dt, \tag{54}$$

где

$$R^1_2(x) = A^1_2(x) \pm \lambda \int\limits_{-1}^{1} A^1_2(t)K^1_2(x,t)dt$$

и верхний знак берется при $-1 \leqslant x \leqslant x^0$, нижний – при $x^0 \leqslant x \leqslant 1$. Здесь и ниже $M^i_j(x) = M_i(x)$, если $-1 < x < x^0$; $M^i_j(x) = M_j(x)$, если $x^0 < x < 1$; $K^i_j(x,\, t) = K^i$, если $-1 < t < x^0$; $K^i_j(x,\, t) = K^j$, если $x^0 < t < 1$. Как показал Геллерстедт, сингулярное интегральное уравнение (54) эквивалентно уравнению Фредгольма

$$p^1_2(x) + \lambda \int\limits_{-1}^{1} p^1_2(s)\overline{K}{}^2_1(x,s)ds = \chi^1_2(x), \tag{55}$$

где

$$\frac{4}{3}\chi^1_2 = R^1_2 \pm \lambda \int\limits_{-1}^{1} R^1_2(s) \left(\frac{1-s^2}{1-x^2}\right)^{1/3} \overline{\Gamma}{}^1_2(x,s)ds \equiv E(R^1_2), \tag{56}$$

$$\overline{\Gamma}^1(x,s) = \left[\frac{(x^0-s)(1+x)}{|x^0-x|(1+s)}\right]^{1/3}\left(\frac{1}{s-x}+\frac{1}{1-sx}\right),$$

$$-\overline{\Gamma}^2(x,s) = \left[\frac{(x^0-s)(1-x)}{|x^0-x|(1-s)}\right]^{1/3}\left(\frac{1}{s-x}-\frac{1}{1-sx}\right),$$

$\overline{K}_1^2$ – регулярное ядро и допускает мажоранту в форме $M|x^0-x|^{-1/3}$. Это ядро выписывается в явном виде и поэтому нетрудно увидеть, что оно при $-1 < x,\ s < 1,\ x,\ s \neq 0$ имеет производные всех порядков.

Из единственности решения задачи Геллерстедта для уравнения $Tz = 0$ в области $\tilde{D}$ с данными на $\tilde{\sigma}_1$ и на характеристиках $\tilde{A}_4\tilde{\mathscr{D}}_0$ и $\tilde{A}_3\tilde{B}$ вытекает безусловная разрешимость уравнения (55). Пусть $\Gamma_2^1$ – ее резольвента. Тогда

$$p_2^1(x) = \chi_2^1(x) - \lambda\int\limits_{-1}^{1}\chi_2^1(s)\Gamma_2^1(x,s)ds \equiv \overline{E}(\chi_2^1). \tag{57}$$

Далее можно записать

$$R_2^1(x) = H_2^1(x) + \int\limits_{-1}^{1}\nu_1(s)l_2^1(x,s)ds,$$

где

$$H_i(x) = h_i(x) - (-1)^i\lambda\int\limits_{-1}^{1}h_2^1(t)K_2^1(x,t)dt = \tilde{E}(h_i), \quad l_i(x,s) = \tilde{E}(L_i).$$

Следовательно, в силу (56)

$$\frac{4}{3}\chi_2^1(x) = \overline{H}_2^1(x) + \int\limits_{-1}^{1}\nu_1(t)\overline{l}_2^1(x,t)dt,$$

где

$$\overline{H}_2^1(x) = E(H_2^1), \quad \overline{l}_2^1(x,t) = E(l_2^1).$$

Последнее учтем в (57). В результате получим

$$p_2^1(x) = \overline{h}_2^1(x) + \int\limits_{-1}^{1}\nu_2(t)\overline{L}_2^1(x,t)dt, \tag{58}$$

где

$$4\overline{h}_2^1(x) = 3\overline{E}(\overline{H}_2^1), \quad 4\overline{L}_2^1(x,t) = 3\overline{E}(\overline{l}_2^1).$$

Таким образом,

$$A^1(x) = h^1(x) + \int_{-1}^{1} \nu_1(t) L^1(x,t)dt, \tag{59}$$

где $h^1(x) = h_1(x)$, $L^1(x,t) = L_1(x,t)$, если $-1 < x < x^0$; $h^1(x) = \overline{h}_2(x)$, $L^1(x,t) = \overline{L}_2(x,t)$, если $x^0 < x < 1$.

Подставим выражение (59) в (53) ($i = 1$). В результате после перестановки порядка интегрирования в повторном особом интеграле, где один интеграл обыкновенный, получим

$$\nu_1(x) - \int_{-1}^{1} \nu_1(t)\tilde{L}(x,t)dt = \tilde{h}(x), \tag{60}$$

где

$$\frac{4}{3}\tilde{L}(x,t) = L^1(x,t) + \lambda\int_{-1}^{1} L^1(s,t)K^1(x,s)ds \equiv U(L^1), \quad \tilde{h} = U(h^1).$$

Интегральное уравнение (60) (относительно свойств ядра и свободного члена см. ниже) является Фредгольмовым, и оно в классе искомых решений эквивалентно (52). Так как решение задачи 1 единственно, то (60) безусловно разрешимо.

3. Нетрудно убедиться в том, что

$$h_1(x) \in C^5(-1 < x \leqslant x^0), \quad h_1(x) = O(1)(1+x)^{1/3},$$
$$h_2(x) \in C^5(x^0 \leqslant x < 1), \quad h_2(x) = O(1)(1-x)^{1/3}.$$

Пусть $-1 < x < x^0$. Тогда

$$H_2^1(x) = h_1(x) + \lambda\int_{-1}^{x^0} h_1(t)\left(\frac{1-t^2}{1-x^2}\right)^{1/3}\left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{1-tx}\right)dt +$$
$$+\lambda\int_{x^0}^{1} h_2(t)\left(\frac{1-t^2}{1-x^2}\right)^{1/3}\left(\frac{1}{t-x} + \frac{1}{1-tx}\right)dt.$$

Отсюда из основания известных свойств интеграла типа Коши (см. [10] § 21, 22) заключаем: 1) $H_2^1(x) \in C^{(4,\delta)}(-1 < x < x^0)$, т. е. допускает производную 4-го порядка, удовлетворяющую условию Гельдера с показателем $\delta$, $0<\delta<1$; 2) $H_2^1$ при $x\to -1$ $(x\to x^0)$ обращается в $\infty$ порядка $\leqslant 1/3$ (логарифмического порядка).

Ясно, что $H_2^1(x)\in C^{(4,\delta)}(x^0<x<1)$, и в точке $x=1$ ведет себя так же, как и при $x=-1$.

Если $-1<x<x^0$, то очевидно

$$\overline{H}_2^1(x) = H_2^1(x) + \lambda\left(|x^0-x|(1-x)\right)^{-1/3}\times$$

$$\times\int\limits_{-1}^{x^0} H_2^1(s)[(x^0-s)(1-s)]^{1/3}\left(\frac{1}{s-x}+\frac{1}{1-sx}\right)ds +$$

$$+\lambda\left(|x^0-x|(1+x)\right)^{-1/3}\int\limits_{x^0}^{1} H_2^1(s)[(s-x^0)(1+s)]^{1/3}\left(\frac{1}{s-x}-\frac{1}{1-sx}\right)ds.$$

Следовательно, $\overline{H}_2^1(x)\in C^{(4,\delta)}(-1<x<x^0)$, а при $x\to -1$, $x^0$ может обращаться в $\infty$ порядка $\leqslant 1/3$. Этими свойствами она обладает и при $x^0<x<1$.

Используя свойства функций $F_2^1$, $\bar{h}_2^1$, $h^1$, увидим, наконец, что

$$\tilde{h}(x)\in C^{(4,\delta)}(|x|<1,\, x\neq x^0),$$

а при $x\to\pm 1$, $x^0$ может обращаться в $\infty$ порядка $\leqslant 1/3$.

4. Из (49) после дифференцирования под знаком интеграла имеем

$$L_0(x,\,t) = \int\limits_0^x L_\xi(\xi,t)(x-\xi)^{-2/3}d\xi.$$

Доказанный в п. 2, пп. 2 результат позволяет заключить, что $L_x$ представима в виде

$$L_x = \mu\ln|x-t| + \mathscr{L}^*(x,t),$$

где 1) $\mu=\mu_1\equiv\text{const}$ при $x\leqslant t$, $\mu=\mu_2\equiv\text{const}$ при $x\geqslant t$; 2) $\mathscr{L}^*$ – некоторая функция, допускающая производные любого порядка, когда $0<x,\,t<1$, причем на прямой $x=t$ первые производные могут иметь лишь интегрируемые особенности (см. (41), (42)). Кроме этого, $\mathscr{L}^*$ обладает таким свойством, что особенности у ее производных, если они имеются, можно выделить в явном виде.

Опираясь на свойства функций $\mathscr{L}^*$ и $P$, из (45) нетрудно убедиться, что: 1) $L_i(x,\,t)\in C(-1\leqslant x,\,t\leqslant 1)$, $L_i(x,\,t)\in C^\infty(-1<x,\,t<1,\,x\neq t)$ и при $x=t$ первые производные обращаются, вообще говоря, в $\infty$, как

$|x-t|^{-2/3}\ln|x-t|$; 2) особенности у производных от $L_i$ можно выделить в явном виде; 3) ядро $\tilde{L}$ интегрального уравнения (60) принадлежит $C^\infty(-1 < x,\ t < 1,\ x \neq t,\ x \neq x_0)$ и в точках $x = \pm 1$, $x_0$ может иметь неподвижные особенности порядка $\leqslant 1/3$, причем первые ее производные при $x = t$ могут обращаться в $\infty$, как $|x-t|^{-2/3}\ln|x-t|$.

5. Пусть $\mu(x) \in C^{(0,\delta)}(a \leqslant x \leqslant b)$. Тогда (см. [8, с. 90])

$$\frac{d}{dx}\int_a^b \mu(t)\ln|t-x|dt = -\int_a^b \frac{\mu(t)}{t-x}dt. \tag{61}$$

Если же $\mu(x) \in C^1(a < x < b)$, а $\mu'(x)$ в точках $x = a$, $x = b$ имеет лишь особенность порядка $< 1$, то

$$\int_a^b \frac{\mu(t)}{t-x}dt = \mu(b)\ln(b-x) - \mu(a)\ln(x-a) - \int_a^b \mu'(t)\ln|t-x|dt. \tag{62}$$

Из (61), (62) прямо следует, что если $\mu(x) \in C^{(m,\delta)}(a < x < b)$, а $\mu^{(m)}(x)$ при $x \to a$, $b$ не обращается в $\infty$ порядка $> 1$, то интеграл типа Коши с плотностью $\mu$ также принадлежит этому классу.

Опираясь на эти факты, можно показать, что решение $\nu_i(x)$ уравнения (52) принадлежит $C^4(|x| < 1,\ x \neq x^0)$ и в точках $x = \pm 1$, $x^0$ может обращаться в $\infty$ порядка $\leqslant 1/3$. Следовательно, $\nu(x) \in C^4(0 < x < 1$, $x \neq x_0)$, а при $x = 0$, $x_0$, $1$ может иметь особенность порядка $\leqslant 1/3$.

После того, как найдено $\nu(x)$ решением задачи Холмгрена в области $\tilde{D}^+$ и сингулярной задачи Трикоми в областях $\tilde{\Delta}$, $\tilde{\Delta}^*$, строим решение $u(x,y)$ задачи 1 в области $D$. Следует отметить, что $u(x,y)$ как функция соответствующих характеристических координат внутри характеристических дуг $A_4\mathscr{D}_0$ и $AB$ имеет, по крайней мере, такую же степень гладкости, что и $\nu(x)$ [1, 2].

Возможность построения решения $u(x,y)$ задачи 1 в остальной части $D^* \setminus D$ области $D^*$ доказана в работе [2].

### Литература

1. Нахушев А. М. Доклады АН СССР. 1966. Т. 170, № 1. С. 38–40.
2. Нахушев А. М. Сибирский матем. журнал. 1967. Т. 8, № 1. С. 39–68.
3. Нахушев А. М. Доклады АН СССР. 1966. Т. 166, № 3. С. 536–540.
4. Gellerstedt S. Sur un probléme aux limites pour une équation linéaire aux dérivees partielles du second ordre de type mixte. Thése, Uppsala, 1935.
5. Франкль Ф. И. Изв. АН СССР, серия матем. 1945. Т. 8, № 5. С. 195–224.
6. Леви Е. Е. Усп. матем. 1940. Вып. 8. С. 249–292.
7. Гурса Э. Курс математического анализа. Т. 3, ч. 2. М., 1934.
8. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959.

9. Gellerstedt S. Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik. 1937. Vol. 26 A, no. 3.
10. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962.

Поступила в редакцию
20 мая 1966 г.

Институт математики
СО АН СССР

# Об одной краевой задаче для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа

Рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} k(y)\, u_{xx} + u_{yy} + a(x,y)\, u_x + b(x,y)\, u_y + c(x,y)\, u, & y < 0, \\ u_{xx} + \alpha\,(x,y) u_x + \beta\,(x,y) u_y + \gamma\,(x,y) u, & y > 0, \end{cases} \tag{1}$$

в односвязной смешанной области $D$ плоскости независимых переменных $x$, $y$, ограниченной отрезками $AA_0$, $A_0B_0$, $BB_0$ прямых $x = 0$, $x = 1$, $y = y_0 > 0$ соответственно и действительными характеристиками $AC\colon \sqrt{-k}\, dy + dx = 0$, $BC\colon \sqrt{-k}\, dy - dx = 0$ уравнения (1), выходящими из точек $A(0,0)$, $B(1,0)$. Пусть $D_1$ ($D_2$) – параболическая (гиперболическая) часть смешанной области $D$.

Относительно коэффициентов уравнения (1) делаются следующие предположения: $k(y)$ – непрерывно дифференцируемая и монотонно возрастающая функция в $D_2$, причем $k(0) = 0$; $a$, $b$ и $c$ принадлежат пространству $C^1(\overline{D}_2)$ и связаны соотношениями (см. [1])

$$\delta(\sqrt{-k}) + a + b\sqrt{-k} < 0,$$

$$\delta\left(\frac{\delta\sqrt{-k}}{\sqrt{-k}} + \frac{a + b\sqrt{-k}}{\sqrt{-k}}\right) + \frac{1}{2k}\left[\delta\sqrt{-k} + a + b\sqrt{-k}\right] \times$$
$$\times \left[\delta\sqrt{-k} + a - b\sqrt{-k}\right] - 2c \leqslant 0, \quad c \leqslant 0,$$

где $\delta \equiv \partial \setminus \partial y + \sqrt{-k} \partial \setminus \partial x$; $\alpha$, $\beta$, $\gamma \in C(\overline{D}_1)$ и, кроме того, $\beta < 0$, $\gamma \leqslant 0$.

Под *регулярным в области* $D$ решением уравнения (1) будем понимать функцию $u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_1 \cup D_2)$ и удовлетворяющую уравнению (1) в $D_1 \cup D_2$.

Для уравнения (1) непосредственным аналогом известной задачи Трикоми [2] является следующая

**Задача Т.** *Найти регулярное в $D$ решение $u(x,y)$ уравнения* (1), *удовлетворяющее краевым условиям:*

$$u(0,y) = \varphi_0(y), \quad u(1,y) = \varphi_1(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant y_0, \tag{2}$$

Бжихатлов Х. Г., Нахушев А. М. Докл. АН СССР. 1968, **183**:2, 261–264.
Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 25.03.1968

$$u|_{AC} = \psi(x), \tag{3}$$

*где* $\varphi_0(y)$, $\varphi_1(y) \in C(0 \leqslant y \leqslant y_0)$, $\psi(x) \in C^4(0 \leqslant x \leqslant 1/2)$, $\varphi_0(0) = \psi(0) = \varphi_1(1) = 0$.

**Лемма.** *Пусть* 1) $u(x, y)$ *– регулярное решение задачи T, когда* $\psi(x) \equiv 0$; 2) *производная от функции* $u(x, y)$ *по направлению характеристик семейства* $\sqrt{-k}\,dy + dx = 0$ *существует и непрерывна в* $\overline{D}_2 \setminus A \setminus B$. *Тогда положительный максимум (отрицательный минимум) функции* $u(x, y)$ *в* $\overline{D}_2$ *достигается в некоторой точке* $(\xi, 0) \in AB$ *и в этой точке* $u_y > 0$ $(u_y < 0)$.

Эта лемма доказывается так же, как в [1], [3], где рассмотрен случай $k(y) = y$, $a(x, y) \equiv 0$, а $b(x, y)$ и $C(x, y)$ связаны специальным образом.

*Пусть* $u(x, y) \in C^1(D_1 \cup A_0B_0)$ *и удовлетворяет условиям леммы. Тогда положительный максимум и отрицательный минимум* $u(x, y)$ *в* $\overline{D}_1$ *достигаются на* $\overline{AA_0} \cup \overline{BB_0}$.

Справедливость этого принципа экстремума следует из приведенной леммы и известного принципа экстремума для параболических уравнений [4].

Из принципа экстремума вытекает единственность решения $u(x, y)$ задачи T, если $u(x, y) \in C^1(D_1 \cup A_0B_0)$.

Докажем существование решения задачи T, ограничиваясь случаем $a = b = c = \alpha = \gamma = 0$, $\beta = -1$, $k(y) = y$.

Пусть существует решение $u(x, y)$ задачи T и $u(x, 0) = \tau(x)$, $u_y(x, 0) = \nu(x)$. Тогда из уравнения (1) непосредственно вытекает, что $\tau(x)$ и $\nu(x)$ на $AB$ будут связаны следующим соотношением, принесенным из области $D_1$:

$$\tau''(x) = \nu(x), \quad 0 < x < 1,$$

или

$$\tau(x) = \int_0^x (x - t)\nu(t)dt + x\int_0^1 (t - 1)\nu(t)dt. \tag{4}$$

Решая задачу Дарбу для уравнения (1) в области $D_2$ с данными (3) и $\nu(x)$ на $AB$, убеждаемся [5], что эти функции связаны также соотношением

$$\tau(x) = \gamma_0 \int_0^x \frac{\nu(t)dt}{(x - t)^{1/3}} + \Psi(x), \quad 0 < x < 1, \tag{5}$$

где $4\pi^2\gamma_0 = 3^{2/3}\Gamma^3(1/3)$,

$$\Psi(x) = \frac{\Gamma(1/6)}{\Gamma(5/6)\,\Gamma(1/3)} x^{-1/6} \int_0^x \left[\psi'\left(\frac{\eta}{2}\right) + \frac{1}{6\eta}\psi\left(\frac{\eta}{2}\right)\right] \frac{\eta^{1/3}}{(x - \eta)^{1/6}} d\eta. \tag{6}$$

Поскольку

$$\psi(x) = x\int\limits_0^1 \psi'(tx)dt, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1/2,$$

из (6) легко усмотреть, что

$$\Psi(x) \in C^3\,(0 \leqslant x \leqslant 1), \quad \Psi(x) = O(1)x. \tag{7}$$

Исключая $\tau(x)$ из системы (4), (5), получим

$$\int\limits_0^x \frac{\gamma_0 - (x-t)^{4/3}}{(x-t)^{1/3}}\nu(t)dt = x\int\limits_0^1 (t-1)\nu(t)dt - \Psi(x). \tag{8}$$

Очевидно, уравнение (8) эквивалентно задаче T.

Применяя к обеим частям интегрального уравнения (8) оператор (см. [6])

$$A\mu(x) \equiv \frac{\partial}{\partial x}\int\limits_0^x \frac{\mu(t)dt}{(x-t)^{2/3}}, \tag{9}$$

после некоторых преобразований найдем

$$\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\gamma_0\,\nu(x) - 3\int\limits_0^x (x-t)^{1/3}\nu(t)dt = \int\limits_0^1 (t-1)\nu(t)\,dt\,Ax - A\Psi(x),$$

или

$$\nu(x) - \lambda\int\limits_0^x (x-t)^{1/3}\nu(t)dt = \lambda\,x^{1/3}\int\limits_0^1 (t-1)\,\nu(t)dt + \Phi(x), \tag{10}$$

где

$$\lambda = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi\gamma_0}, \quad \Phi(x) = -\frac{\lambda}{3}A\Psi(x). \tag{11}$$

Пусть $\Gamma(x,\,t,\,\lambda)$ – резольвента ядра $(x-t)^{1/3}$ оператора Вольтерра в левой части уравнения (10). Нетрудно убедиться в том, что

$$\Gamma(x,t,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^{n-1}\Gamma^n\,(4/3)}{\Gamma\,(4n/3)}(x-t)^{(4n-3)/3}. \tag{12}$$

После законного в силу (7) и (11) обращения интегрального оператора Вольтерра уравнение (10) принимает вид

$$\nu(x) - \lambda \int_0^1 k(x,t)\,\nu(t)dt = f(x), \tag{13}$$

где

$$k(x,t) = (t-1)\left[x^{1/3} + \lambda \int_0^x s^{1/3}\Gamma(x,s,\lambda)ds\right], \tag{14}$$

$$f(x) = \Phi(x) + \lambda \int_0^x \Gamma(x,t,\lambda)\,\Phi(x)dt. \tag{15}$$

Из (11) с учетом (7) имеем

$$\Phi(x) = -\frac{\lambda}{3}\int_0^x \frac{\Psi'(t)dt}{(x-t)^{2/3}},$$

следовательно, $\Phi(x) \in C\,(0 \leqslant x \leqslant 1) \cap C^2(0 < x < 1)$, причем в точке $x = 0$ обращается в нуль порядка не ниже 1/3. Очевидно, в силу (12) и (15) правая часть $f(x)$ уравнения (13) обладает теми же свойствами.

Из (14) и (12) заключаем:

$$k(x,t) \in C(0 \leqslant x,\, t \leqslant 1),\; k(x,t) = x^{1/3}k^*(x,t),$$

где $k^*(x,t) \in C(0 \leqslant x,\ t \leqslant 1)$; $k(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируемо по $x$ в квадрате $0 < x,\, t < 1$.

Таким образом, если существуют решения $\nu(x)$ интегрального уравнения Фредгольма второго рода (13), то они принадлежат классу $C\,(0 \leqslant x \leqslant 1) \cap C^2(0 < x < 1)$ и при $x = 0$ обращаются в нуль порядка не ниже 1/3. Из соотношения (5) следует, что для таких $\nu(x)$ функция $\tau(x) \in C\,(0 \leqslant x \leqslant 1) \cap C^2(0 < x < 1)$ и при $x = 0$ обращается в нуль порядка не ниже единицы.

Решения $u(x,y)$ задачи T в области $D_2$ (если они существуют) представимы формулой Дарбу

$$u(x,y) = \frac{\Gamma\,(1/3)}{\Gamma^2\,(1/6)}\int_0^1 \tau\left[x + 2/3(-y)^{3/2}(2t-1)\right]\left[t(1-t)\right]^{-5/6}dt +$$

$$+\frac{\Gamma\,(5/3)}{\Gamma^2\,(5/6)}y\int_0^1 \nu\left[x{+}2/3(-y)^{3/2}(2t-1)\right]\left[t(1-t)\right]^{-1/6}dt,$$

откуда следует, что $u(x,y) \in C^1(\overline{D}_2)$.

Теперь нетрудно видеть эквивалентность (в смысле разрешимости) задачи T интегральному уравнению (13) и принадлежность решения $u(x,y)$ этой задачи классу функций, для которых доказан принцип экстремума.

Из единственности решения задачи T вытекает безусловная разрешимость интегрального уравнения Фредгольма второго рода (13) и, следовательно, задачи T.

Пусть теперь $D_1$ – односвязная область полуплоскости $y > 0$, граница которой содержит участок $AB$ оси $y = 0$, а $D = D_1 \cup D_2 \cup AB$. В общем случае при доказательстве существования решения задачи T в области $D$ принципиальных затруднений не возникает, если дополнительно область $D_1$ и функций $a$, $b$, $c$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ таковы, что в области $D_1$ разрешима основная краевая задача для уравнения (1) [4], а в $D_2$ – задача Дарбу [5].

**Литература**


1. Agmon S., Nirenberg L., Protter M. Comm. Pure and Appl. Math. 1953. Vol. 6, no. 4. Pp. 455.
2. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М., 1959.
3. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, № 1. С. 52.
4. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М., 1957.
5. Gellerstedt S. Ark. Mat., Astr., Fys. 1937. Vol. 25 A, no. 29. Pp. 1–23.
6. Гурса Э. Курс математического анализа. Т. 3, ч. 2. М., 1934.


Поступила в редакцию
20 марта 1968 г.

Институт математики
СО АН СССР

# Критерий единственности задачи Дирихле для уравнения смешанного типа в цилиндрической области

Пусть $D$ – ограниченная область $n$-мерного евклидова пространства $E_n$ точек $x = (x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n)$ с кусочно-гладкой границей $\Gamma$; $J_{ab}$ – интервал $a < y < b$; $\Omega_{ab} = D \times J_{ab}$ – цилиндрическая область в пространстве $E_{n+1}$ с декартовыми ортогональными координатами $x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n,\, y$; $S_{ab}$ – граница $\Omega_{ab}$.

В области $\Omega_{\alpha\beta}$, $\alpha < 0$, рассмотрим уравнение смешанного типа

$$Tu \equiv k\,(y)\left[a^{ij}\,(x)\,u_{x_i}\right]_{x_j} - u_{yy} + c\,(x)\,k\,(y)\,u = 0, \tag{1}$$

где повторение индекса означает суммирование по этому индексу от 1 до $n$ и, кроме этого,

$$k\,(y) \in C^1\left(\overline{J}_{\alpha 0}\right) \cap C^1\left(\overline{J}_{0\beta}\right), \quad a^{ij}\,(x)\,, \quad c\,(x) \in C\left(\overline{D}\right); \tag{2}$$

Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1970, **6**:1, 190–191.

$$yk(y) > 0, \quad \forall\, y \neq 0; \quad k'(y) \geqslant 0, \quad \forall\, y \geqslant 0, \quad c(x) \leqslant 0; \tag{3}$$

$$a^{ij}(x)\,\xi_i\xi_j \geqslant \gamma\,|\xi|^2\,, \quad \forall\, x \in D,\ \xi \in E_n,\ \gamma = \mathrm{const} > 0. \tag{4}$$

**Задача D.** *Найти в $\Omega_{\alpha\beta}$ при $y \neq 0$ решение $u(x,\,y)$ уравнения (1) из класса $C\left(\overline{\Omega}_{\alpha\beta}\right) \cap C^1(\Omega_{\alpha\beta}) \cap W_2^1(\Omega_{\alpha\beta})$, принимающее заданные значения на $S_{\alpha\beta}$.*

**Теорема.** *Если $S_{\alpha\beta}$, $a^{ij}$ и $c$ обладают тем свойством, что система собственных функций $\{v_m(x)\}$, соответствующих собственным значениям $\lambda_m$ однородной задачи Дирихле $v|_\Gamma = 0$ для уравнения*

$$\left[a^{ij}(x)\,v_{x_i}\right]_{x_j} + [c(x) + \lambda]\,v = 0, \quad x \in D \tag{5}$$

*полна в пространстве $L_2(D)$ и $v_m \in C^1\left(\overline{D}\right) \cap C^2(D)$, $\forall\, m$, то задача $D$ имеет единственное решение тогда и только тогда, когда*

$$\omega_m(\beta) \neq 0, \quad \forall\, m \tag{6}$$

*где $\omega_m(y)$ – решение уравнения*

$$\omega_m'' + \lambda_m k(y)\,\omega_m = 0 \tag{7}$$

*из класса $C^1\left(\overline{J}_{\alpha\beta}\right)$, удовлетворяющее условию $\omega_m(\alpha) = 0$.*

Заметим, что система $\{v_m(x)\}$ будет удовлетворять условиям теоремы, если, например, $a^{ij}(x) \in C^{2+\varkappa}\left(\overline{D}\right)$, $c(x) \in C^{1+\varkappa}\left(\overline{D}\right)$ и граница $\Gamma$ является $3 + \varkappa$ раз непрерывно дифференцируемой, где $\varkappa \geqslant n/2$ [1, с. 47].

Пусть соблюдено условие (6) и $u(x,\ y)$ – любое решение однородной задачи $D$: $u|_{S_{\alpha\beta}} = 0$. Докажем, что $u(x,\ y) \equiv 0$.

Действительно, функция $\omega(x,\ y) = v_m(x)\,\omega_m(y)$ для любого $m$ представляет собой решение уравнения (1) из класса $C^1\left(\overline{\Omega}_{\alpha\beta}\right) \cap C^2(\Omega_{\alpha 0} \cup \Omega_{0\beta})$, обращающееся в нуль на $D \cup (\Gamma \times J_{\alpha\beta})$. Принимая это во внимание, из очевидного в силу (2) равенства

$$\left(\int\limits_{\Omega_{\alpha 0}} + \int\limits_{\Omega_{0\beta}}\right)(\omega T u - u T\omega)\,dxdy =$$

$$= \int\limits_{S_{\alpha\beta}} \left[k a^{ij}\left(\omega u_{x_i} - u\omega_{x_i}\right)\nu_{x_j} - \left(\omega u_y - u\omega_y\right)\nu_y\right] dS,$$

где $\nu_{x_j}$, $\nu_y$ – направляющие косинусы внешней нормали к $S_{\alpha\beta}$, легко видеть, что

$$\int\limits_D \omega(x,\,\beta)\,u_y(x,\,\beta)\,dx = \omega_m(\beta)\int\limits_D v_m(x)\,u_y(x,\ \beta)\,dx = 0.$$

Следовательно, $u_y(x,\,\beta)\equiv 0$. Далее, для любого $h\geqslant 0$ имеет место равенство

$$2\int\limits_{\Omega_{h\beta}} u_y Tu\,dxdy = 2\int\limits_{S_{h\beta}} ka^{ij}u_{x_i}\nu_{x_j}u_y dS - \int\limits_{S_{h\beta}}\left(ka^{ij}u_{x_i}u_{x_j}+u_y^2-cku^2\right)\nu_y dS +$$

$$+\int\limits_{\Omega_{h\beta}} k'(y)\left(a^{ij}u_{x_i}u_{x_j}-cu^2\right)dxdy,$$

из которого с учетом того, что $u=u_y=0$, на $S_h=S_{h\beta}\setminus[S_{h\beta}\cap(y=h)]$, заключаем

$$\int\limits_{\Omega_{h\beta}} k'(y)\left(a^{ij}u_{x_i}u_{x_j}-cu^2\right)dxdy + \int\limits_{S_{h\beta}\cap(y=h)}\left(ka^{ij}u_{x_i}u_{x_j}+u_y^2-cku^2\right)dS=0.$$

Отсюда на основании (3) и (4) имеем $u=0$ в $\Omega_{0\beta}$. Поэтому $u=0$ на $S_{\alpha 0}$ и, стало быть, по принципу Хопфа [2] $u=0$ в $\Omega_{\alpha 0}$.

Пусть теперь условие (6) нарушено хотя бы для одного $m=l$. Тогда функция $u(x,\;y)=v_l(x)\,\omega_l(y)$ является нетривиальным решением однородной задачи $D$.

Для уравнения Лаврентьева–Бицадзе

$$\operatorname{sign} y\cdot u_{x_1x_1}-u_{yy}=0,$$

когда $D$ есть интервал $0<x_1<1$, как нетрудно убедиться из (5) и (7), $\lambda_m=\pi^2m^2$, а

$$\omega_m(y)\,e^{-\pi m\alpha}=\begin{cases}\operatorname{ch}\pi m\alpha\sin\pi m y-\operatorname{sh}\pi m\alpha\cos\pi m y, & y>0,\\ \operatorname{sh}\pi m\,(y-\alpha)\,, \quad y<0.\end{cases}$$

Поэтому условие (6) эквивалентно неравенству

$$\operatorname{ch}\pi m\alpha\sin\pi m\beta\neq\operatorname{sh}\pi m\alpha\cos\pi m\beta,\quad\forall\, m. \tag{8}$$

Если $\sin\pi m\beta\neq 0$, условие (8) совпадает с условием, найденным другим способом в работах [3] и [4].

При $\alpha=0$, $k(y)\equiv 1$, $a^{ij}(x)\,\xi_i\xi_j>0$, $\forall\,x\in\overline{\Omega}_{0\beta}$ и $\xi\neq 0$ неравенство (6) можно свести к эквивалентному условию $\sqrt{\lambda_m}\beta\neq l\pi$ $\forall\,m$ и $l=1,\,2,\,\ldots$ единственности задачи Дирихле для гиперболического уравнения, полученному в работе [5].

Пусть теперь $\Omega_1$ – ограниченная конечно-связная область нижней полуплоскости $y<0$ плоскости переменных $x_1$, $y$ с кусочно-гладкой границей, содержащей интервал $D$: $0<x_1<1$ прямой $y=0$; $\Omega_2=D\times J_{01}$ – квадрат $0<x_1,\,y<1$; $\Omega=\Omega_1\cup D\cup\Omega_2$. Легко заметить, что задача Дирихле: $u|_{\partial\Omega}=\varphi\in C^1(\partial\Omega)\cap C^2(\partial\Omega_2\setminus D)$ для уравнения Лаврентьева–Бицадзе в области $\Omega$ всегда разрешима и притом единственным образом.

**Литература**


1. Ладыженская О. А. Смешанная задача для гиперболического уравнения. М.: ГИТТЛ, 1953.
2. Бицадзе А. В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966.
3. Бахания Н. Н. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка // Тр. Выч. центра АН ГрузССР. 1963. Т. 3. С. 79–80.
4. Cannon J. R. Ann. de Mat. pura ed Appl., LXII. 1963. Pp. 371–377.
5. Dunninger D. R., Zachmanoglou E. C. J. Math. Mech. 1969. Vol. 18, no. 8.


Поступила в редакцию
11 июля 1969 г.

Институт математики
СО АН СССР

# О правильной постановке краевых задач для параболических уравнений со знакопеременной характеристической формой

В ограниченной области $\Omega$ евклидова пространства $E_n$ с кусочно-гладкой границей $\Sigma = \partial\Omega$ рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv a^{ij}(x)u_{x_ix_j} + b^i(x)u_{x_i} + c(x)u = f(x), \tag{1}$$

где

$$a^{ij}(x) \in C^2(\overline{\Omega}), \quad b^i(x) \in C'(\overline{\Omega}), \quad c(x) \in C(\overline{\Omega}), \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

и по повторяющимся индексам предполагается суммирование от 1 до $n$.

Уравнение (1) называется уравнением эллиптико-параболического типа или уравнением с неотрицательной характеристической формой, если

$$Q(x,\xi) = a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant 0, \qquad \forall\, x \in \Omega, \quad \xi \in E_n.$$

Хорошо известно [1–3], как ставятся краевые задачи для уравнения (1) с неотрицательной характеристической формой. После работы [3] Г. Фикера первой краевой задачей для таких уравнений принято называть задачу

$$Lu = f(x), \quad \forall\, x \in \Omega, \quad u = g(x), \quad \forall\, x \in \Sigma_2 \cup \Sigma_3, \tag{2}$$

где $\Sigma_2$ и $\Sigma_3$ – части $\Sigma$, определяемые следующим образом. Пусть $N = (N_1, N_2, \ldots, N_n)$ – вектор внутренней нормали к $\Sigma$, а $\Sigma^0$ – множество точек $\Sigma$, где $Q(x,N) = 0$. Тогда $\Sigma_3 = \Sigma\backslash\Sigma^0$, а $\Sigma_2$ совпадает с множеством точек $\Sigma^0$, где функция

$$b(x) = (b^i - a^{ij}_{x_j})N_i < 0.$$

Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1973, **9**:1, 130–135.

Единственность сильного и существование слабого решений из $L_p(\Omega)$, $p \geqslant 1$, задачи (1), (2) были установлены Г. Фикера [3] в случае, когда

$$c < 0, \quad c^* = a^{ij}_{x_i x_j} - b^i_{x_i} + c < 0, \quad \forall\, x \in \overline{\Omega}. \tag{3}$$

Возникает вопрос о числе линейно независимых регулярных решений однородной задачи, соответствующей задаче (1), (2), и о степени ее недоопределенности, если нарушено условие (3). Известны лишь примеры задачи (2), показывающие неединственность обобщенного решения в классе $L_p(\Omega)$ при $p < 3$ [4] и даже в классе ограниченных измеримых функций в области $\Omega$, если граница множества $\Sigma_2$ на $\Sigma$ имеет положительную $(n-1)$-мерную меру [5].

В дальнейшем речь будет идти о параболических уравнениях вида (1) со знакопеременной характеристической формой $Q(x, \xi)$, т. е. о таких уравнениях, которые параболичны всюду в замыкании $\overline{\Omega}$ области $\Omega$, за исключением компакта $S_0 = \{x/Q(x, \xi) = 0,\ \forall\, \xi \in E_n\}$.

В первую очередь приведем простой пример, показывающий, что первая краевая задача (2) *для параболических уравнений с неотрицательной характеристической формой $Q(x, \xi)$ может оказаться недоопределенной, неправильно поставленной, если нарушено условие $c < 0$.*

Уравнение

$$x_2^{m+1} u_{x_1 x_1} - x_2 u_{x_2} = 0, \tag{4}$$

где $m$ – нечетное число в прямоугольнике $\Omega$ с вершинами в точках $A(0, \alpha)$, $\alpha < 0$, $B(1, \alpha)$, $C(1, \beta)$, $\beta > 0$, $D(0, \beta)$, является параболическим уравнением с неотрицательной характеристической формой $Q(x, \xi) = x_2^{m+1} \xi_1^2$. Очевидно,

$$\Sigma^0 = \overline{AB} \cup \overline{CD} \cup [\partial\Omega_1 \cap (x_2 = 0)], \qquad b(x) = |x_2|, \quad \forall\, x \in \Sigma^0,$$

$$\Sigma_2 = \varnothing, \qquad \Sigma_3 = \overline{AD} \cup \overline{BC} \setminus [\partial\Omega_1 \cap (x_2 = 0)].$$

Нетрудно видеть, что *однородная первая краевая задача*

$$u(0, x_2) = 0, \qquad u(1, x_2) = 0, \qquad \alpha \leqslant x_2 \leqslant \beta$$

*для уравнения* (4) *в области $\Omega_1$ имеет бесчисленное множество линейно независимых решений. В частности, такими решениями будут функции вида*

$$u(x) = \exp\left(-\frac{\pi^2 k^2}{m+1} x_2^{m+1}\right) \sin \pi k x_1, \qquad k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Очевидно, *этот факт вовсе не означает, что нарушение предположения $c < 0$ всегда влечет недоопределенность первой краевой задачи.*

Например, краевая задача: найти регулярное и ограниченное в области $\Omega_2 = \{x|\, 0 < x_1,\, x_2 < 1\}$ решение $u(x) \equiv u(x_1, x_2)$ уравнения

$$x_1^4 u_{x_1 x_1} + 2x_1^3 u_{x_1} - u_{x_2} = 0,$$

принимающее заданные значения на $\gamma = \gamma_0 \cup \gamma_1$, где

$$\gamma_0 = \partial\Omega_2 \cap \{x|\ x_2 = 0\}, \qquad \gamma_1 = \partial\Omega_2 \cap \{x|\ x_1 = 1\}$$

не имеет более одного решения.

Действительно, установим, что для любого решения $u(x)$ этой задачи справедливо равенство

$$M_1 \equiv \sup_{\overline{\Omega}_2} u = \sup_{\gamma} u \equiv M_2.$$

Допустим, что $M_1 > M_2$. Функция

$$v(x,t) = u\left(\frac{1}{x}, t\right) - (2t + x^2)\varepsilon,$$

где $x = 1/x_1$, $x_2 = t$, $\varepsilon \equiv \mathrm{const} > 0$, в полуполосе $1 < x < +\infty$, $0 < t < 1$ удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$v_t = v_{xx}, \tag{5}$$

причем

$$v(x,0) = u(1/x, 0) - \varepsilon x^2 < M_2,\ 1 < x < +\infty,$$
$$v(x,t) \leqslant M_1 - \varepsilon x^2 \leqslant M_2,\ \forall\, x \geqslant \sqrt{(M_1 - M_2)/\varepsilon} = h.$$

Отсюда и из принципа экстремума для уравнения (5) уже в ограниченной области $1 < x < h$, $0 < t < 1$ заключаем, что $M_1 < M_2$, а это неверно.

Приведенные примеры показывают также, что *при правильной постановке краевых задач (в смысле хотя бы их нетеровости или фредгольмовости) для уравнения* (1) *с неотрицательной или знакопеременной характеристической формой наряду с другими коэффициентами существенную роль должен играть и коэффициент* $c(x)$.

Перейдем теперь к исследованию вопроса о корректной постановке краевых задач для параболических уравнений со знакопеременной характеристической формой, ограничиваясь при этом модельными уравнениями такого типа.

Пусть $D_n$ – конечная область из $E_n$, $\Omega_n = D_n(\alpha < x_0 < \beta)$, где $\alpha < 0$, $\beta > 0$, – цилиндрическая область в евклидовом пространстве $E_{n+1}$ точек $(x, x_0)$.

В области $\Omega_n$ рассмотрим уравнение

$$u_{x_0} = x_0^m Lu, \tag{6}$$

где

$$L \equiv a^{ij}(x,x_0)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + a^i(x,x_0)\frac{\partial}{\partial x_i} + c(x,x_0), \quad i,j = 1,2,\ldots,n,$$

– равномерно эллиптический оператор с непрерывными в $\overline{\Omega}_n$ коэффициентами, а $m$ – нечетное число.

**Задача 1.** *Найти регулярное в области $\Omega_n$ решение $u(x,x_0)$ уравнения (6), непрерывное в $\overline{\Omega}_n$ по краевому условию*

$$u(x,x_0) = \varphi(x,\, x_0), \qquad \forall\,(x,\, x_0) \in S_n \tag{7}$$

*и условию сопряжения*

$$\lim_{x_0 \to +0} x_0^{-m} u_{x_0} = \lim_{x_0 \to -0} (-x_0)^{-m} u_{x_0}, \tag{8}$$

*где $s_n = \partial D_n \times (\alpha \leqslant x_0 \leqslant \beta)$ – боковая поверхность цилиндра $\Omega_n$.*

Под регулярным решением в $\Omega_n$ здесь понимается решение, имеющее в $\Omega_n$ непрерывные производные по переменным $x$ до второго порядка и непрерывную производную первого порядка по $x_0$.

Уравнение (6) простой заменой $x = x$, $y_0 = x_0^m |x_0|/(m+1)$ сводится к уравнению

$$\operatorname{sign}\, y_0 \cdot u_{y_0} = a^{ij}(x,\overline{y}_0)u_{x_i x_j} + a^i(x,\overline{y}_0)u_{x_i} + c(x,\overline{y}_0)u, \tag{9}$$

где $\overline{y}_0 = [(m+1)\operatorname{sign}\, y_0 y_0]^{1/(m+1)}$.

Принимая это во внимание и пользуясь принципом экстремума для параболических уравнений, легко заметить, что если

$$c(x,x_0) \leqslant 0, \qquad \forall\,(x,\, x_0) \in \Omega_n, \tag{10}$$

то положительный максимум и отрицательный минимум в $\overline{\Omega}_n$ решения $u(x,x_0)$ задачи 1 при $\varphi(x,0) = 0$ достигается на $S$. Стало быть, задача 1 не может иметь более одного решения.

В силу (7) и (8) функция $\tau(x) = u(x,0)$ является решением задачи Дирихле

$$\tau(x) = \varphi(x,0), \qquad \forall\, x \in \partial D_n,$$

для уравнения

$$a^{ij}(x,0)\tau_{x_i x_j} + a^i(x,0)\tau_{x_i} + c(x,0)\tau = 0.$$

Известно (см. [6]), что если $a^{ij}(x,0) \in C^{(0,\lambda)}(D_n)$, $a^i(x,0) \in C^{(0,\lambda)}(D_n)$, $\varphi(x,0) \in C^{(2,\lambda)}(\partial D_n)$ и граница $\partial D_n$ области $D_n$ из класса $C^{(2,\lambda)}$, то в силу (10) существует решение $\tau(x)$ задачи Дирихле и оно принадлежит $C^{(2,\lambda)}(D_n)$.

Поскольку уравнение (6) редуцируется к уравнению (9), нетрудно установить теперь существование решения задачи 1 при обычных требованиях гладкости [6] на заданные функции.

*Условие сопряжения* (8) *является существенным. Например, как это было замечено выше, однородная задача, соответствующая краевой задаче: найти регулярное в области*

$$\Omega = \{(x,x_0) | \, 0 < x = x_1 < 1, \alpha < x_0 < \beta\}$$

*решение* $u(x,x_0)$ *уравнения*

$$u_{x_0} = x_0^m u_{xx},$$

*непрерывное в* $\overline{\Omega}$ *и удовлетворяющее краевому условию*

$$u(0,x_0) = \varphi_0(x_0), \quad u(0,x_0) = \varphi_1(x_0), \quad \alpha \leqslant x_0 \leqslant \beta,$$

*имеет бесконечное множество линейно независимых решений.* Любопытно отметить, что эта же задача для уравнения

$$u_{x_0} = \operatorname{sign} x_0 \cdot u_{xx}$$

всегда разрешима и притом единственным образом.

Условие сопряжения вида (8) с необходимостью возникает и при правильной постановке краевых задач для уравнения (1) в случае, когда поверхность $S_0$, на которой происходит смена знака формы $Q(x,\xi)$, является особой характеристикой. Например, *для уравнения*

$$x^{2m} u_{x_0} = x u_{xx} - (m - 1/2) u_x, \tag{11}$$

где $m$ – неотрицательное целое число в прямоугольнике

$$\Omega = \{(x,x_0) \mid -1 < x < 1, \, 0 < x_0 < 1\},$$

*краевая задача*

$$u(x,1) = \varphi_0(x), \quad -1 \leqslant x \leqslant 0, \quad u(-1,x_0) = \varphi_1(x_0), \quad 0 \leqslant x_0 \leqslant 1,$$

$$u(x,0) = \psi_0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad u(1,x_0) = \psi_1(x_0), \quad 0 \leqslant x_0 \leqslant 1,$$

*не имеет более одного регулярного всюду в* $\Omega$*, за исключением, быть может, точек прямой* $x = 0$*, решения из класса функций* $u(x,x_0)$*, непрерывных в* $\overline{\Omega}$ *и таких, что* $|x|^{1/2-m} u_x \in C(\Omega)$. Единственность решения

$u(x, x_0)$ этой задачи вытекает из следующего принципа экстремума: положительный максимум и отрицательный минимум функции $u(x, x_0)$ в $\overline{\Omega}$ достигается на тех частях границы $\partial\Omega$, где она задана. Существование решения можно установить методом интегральных уравнений, воспользовавшись тем, что уравнение (11) преобразованием

$$t = x_0, \qquad \xi = \frac{|x|^{m+1/2}}{m+1/2}\ \mathrm{sign}\ x$$

сводится к уравнению

$$u_t = \ \mathrm{sign}\ \xi \cdot u_{\xi\xi}.$$

Уравнение (11) в определенном смысле представляет собой простой аналог уравнения, предложенного в [8].

Пусть $D$ – ограниченная область из $E_n$ с кусочно-гладкой границей, $\Omega = D \times (0 < x_0 < \beta)$ – цилиндрическая область в пространстве $E_{n+1}$, содержащая внутри себя часть $S_0$ плоскости $x_n = 0$. Предполагается, что $S_0$ разбивает $\Omega$ на две области, на $\Omega^+$ и $\Omega^-$, где $x_n > 0$ и $x_n < 0$ соответственно.

В области $\Omega$ рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv \ \mathrm{sign}\ x_n \cdot \Delta_x u - u_{x_0} = f(x, x_0), \tag{12}$$

где $\Delta_x$ – оператор Лапласа по переменным $x_1, x_2, \dots, x_n$.

**Задача 2.** *Найти регулярное в $\Omega \setminus S_0$ решение $u(x, x_0)$ уравнения* (12) *из класса $C(\overline{\Omega}) \cap C'(\Omega)$, удовлетворяющее краевому условию*

$$u(x, x_0) = 0, \qquad \forall\,(x, x_0) \in \partial\Omega \setminus (\Gamma_0^- \cup \Gamma_\beta^+), \tag{13}$$

где

$$\Gamma_0^- = \partial\Omega^- \cap (x_0 = 0), \qquad \Gamma_\beta^+ = \partial\Omega^+ \cap (x_0 = \beta).$$

Примем следующие обозначения: $L^*$ – оператор, сопряженный по Лагранжу с оператором $L$

$$L^* v \equiv \ \mathrm{sign}\ x_n \cdot \Delta_x v + v_{x_0} = f. \tag{14}$$

$W(B)$ – множество функций $u(x, x_0)$ из класса

$$W = C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega \setminus S_0) \cap W_2'(\partial\Omega),$$

где $W_2^1(\partial\Omega)$ – пространство Соболева, для которых $Lu \in L_2(\Omega)$ и соблюдено краевое условие (13); $W(B^*)$ – множество функций $v(x, x_0)$ из $W$, для которых $L^* v \in L_2(\Omega)$ и выполнено сопряженное краевое условие

$$v(x, x_0) = 0, \qquad \forall\,(x,\, x_0) \in \partial\Omega \setminus (\Gamma_\beta^- \cup \Gamma_0^+), \tag{15}$$

где $\Gamma_0^+ = \partial\Omega^+ \cap (x_0 = 0)$, $\Gamma_\beta^- = \partial\Omega^- \cap (x_0 = \beta)$, $(\cdot, \cdot)_0$ и $(\cdot, \cdot)_0^\pm$ – скалярные произведения в пространствах $L_2(\Omega)$ и $L_2(\Omega^\pm)$ соответственно.

Для любых функций $u(x,x_0)\in W(B)$ и $v(x,x_0)\in W(B^*)$ справедливо равенство

$$(v,\,Lu)_0=(u,\,L^*v)_0$$

поэтому **задача** $2^*$**:** *найти функцию* $v(x,x_0)$ *из класса* $C(\overline{\Omega})\cap C'(\Omega)$, *удовлетворяющую уравнению* (14) *в* $\Omega\setminus S_0$ *и краевому условию* (15), является сопряженной с задачей 2.

**Слабым решением** задачи $2^*$ назовем любую функцию $v(x,\,x_0)\in L_2(\Omega)$, для которой

$$(v,\,Lu)_0=(f,u)_0\quad\forall\,u\in W(B).$$

**Априорная оценка.** *Для любой функции* $u(x,x_0)\in W(B)$ *имеет место энергетическое неравенство*

$$\|\,u\,\|_+=\left[\int\limits_\Omega\big(u^2+|\bigtriangledown_x u|^2\big)d\Omega\right]^{1/2}\leqslant C\,\|\,Lu\,\|_0,$$

*где* $\bigtriangledown_x=(\partial/\partial x_1,\,\partial/\partial x_2,\,\ldots,\,\partial/\partial x_n)$, *а* $C$ *– независящая от* $u(x,x_0)$ *положительная постоянная.*

Действительно, пусть $\omega=\omega(x)$ – произвольная функция из $C^2(\overline{D})$, обладающая тем свойством, что

$$\omega(x)<0,\qquad\Delta_x\omega>0,\qquad\forall\,x\in\overline{D}.\tag{16}$$

Из очевидного тождества

$$2\operatorname{sign}\,x_n\,\omega uLu=\frac{\partial}{\partial x_i}(2\omega uu_{x_i}-\omega_{x_i}u^2)-$$

$$-\operatorname{sign}\,x_n\frac{\partial}{\partial x_0}(\omega u^2)+u^2\Delta_x\omega-2\omega|\nabla_x u|^2,\quad\forall\,u\in W(B)$$

по формуле Грина легко убедиться, что

$$(2\omega u,\ \operatorname{sign}\,x_nLu)_0=(2\omega u,\,Lu)_0^+ +(2\omega u,\,-Lu)_0^- =$$

$$=\int\limits_\Omega\big(u^2\Delta_x\omega-2\omega|\nabla_x u|^2\big)\,d\Omega+\int\limits_{\partial\Omega^+}(2\omega uu_{x_i}N^i-u^2\omega_{x_i}N^i-\omega u^2N^0)dS+$$

$$+\int\limits_{\partial\Omega^-}(2\omega uu_{x_i}N^i-u^2\omega_{x_i}N^i+\omega u^2N^0)dS=$$

$$=\int\limits_\Omega\big(u^2\Delta_x\omega-2\omega|\nabla_x u|^2\big)\,d\Omega-\int\limits_{\Gamma_\beta^+\cup\Gamma_0^-}\omega u^2dS,\tag{17}$$

где $N = (N^1, N^2, \ldots, N^n, N^0)$ – единичная внешняя нормаль к границе, а $dS$ – элемент границы.

Принимая во внимание (13) и (16), из (17) имеем

$$(2\omega u,\ \operatorname{sign} x_n \cdot Lu)_0 \geqslant C_1 \parallel u \parallel_+^2, \qquad C_1 = \text{const} > 0.$$

Стало быть,

$$\parallel u \parallel_+ \leqslant C \parallel Lu \parallel_0 .$$

Из априорной оценки вытекает единственность сильного решения задачи 2 и существование слабого решения задачи 2*.

Пользуясь схемой Лакса и Филлипса [9], можно доказать совпадение слабого решения задачи 2* с сильным.

В заключение отметим, что вопросу правильной постановки краевых задач для параболических уравнений со знакопостоянной характеристической формой посвящены работы [10, 11].

**Литература**

1. Келдыш М. В. ДАН СССР. 1951. Т. 77, № 2.
2. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М., 1959.
3. Фикера Г. Сб. пер. Математика. 1963. Т. 7, № 6.
4. Олейник О. А., Радкевич Е. В. Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой. М.: ВИНИТИ, 1971.
5. Phillips R. S., Sarason L. J. J. Math. and Mech. 1968. Vol. 17, no. 9.
6. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. М., 1957.
7. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М.: ИЛ, 1968.
8. Бицадзе А. В. Сб. трудов, посвященных восьмидесятилетию Н. И. Мусхелишвили. М.: Наука, 1972.
9. Lax P. D., Phillips R. S. Comm. Pure Appl. Math. 1960. Vol. 13.
10. Джураев Т. Д. Тезисы I республиканской конференции математиков по дифференциальным уравнениям. Ашхабад. 1972. С. 14–18.
11. Нахушев А. М. Тезисы I республиканской конференции математиков по дифференциальным уравнениям. Ашхабад. 1972. С. 19–22.

Поступила в редакцию
12 апреля 1972 г.

Институт математики
СО АН СССР

# Об одной смешанной задаче для вырождающихся эллиптических уравнений

Рассмотрим уравнение

$$y^m u_{xx} + u_{yy} + a(x,\, y)u_x + b(x,\, y)u_y + c(x,\, y)u = 0 \tag{1}$$

Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1975, **11**:1, 192–195.

в конечной односвязной области $\Omega$ евклидовой плоскости независимых переменных $x$ и $y$, ограниченной простой кривой Жордана $\sigma$ с концами в точках $A(0,\,0)$ и $B(1,\,0)$, расположенной в полуплоскости $y>0$, и отрезком $AB\colon 0\leqslant x\leqslant 1$ прямой $y=0$.

Относительно коэффициентов уравнения (1) предполагается, что $m=\mathrm{const}\geqslant 0$, $a$, $b$ и $c$ принадлежат классу $C(\overline{\Omega})$, причем $c\leqslant 0$ всюду в $\overline{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega$.

**Задача A.** *Найти регулярное в области $\Omega$ решение $u=u(x,\,y)$ уравнения (1) из класса $C(\overline{\Omega})$, удовлетворяющее на границе $\partial\Omega$ смешанным краевым условиям*

$$u(x,\,y)=\varphi(x,\,y)\qquad\forall\,(x,\,y)\in\sigma, \tag{2}$$

$$\lim_{y\to+0}\left[a_0(x)\,\frac{\partial}{\partial y}+a_j(x)D_{0x}^{\alpha_j}+a_{n+1}(x)\right]u=\Psi(x),\quad 0<x<1, \tag{3}$$

*где $\varphi$, $a_0$, $a_j$, $j=1,\,\ldots,\,n$, $a_{n+1}$, $\Psi$ – заданные функции, непрерывные в замыкании множества их определения*

$$\sum_{i=0}^{n+1}a_i^2(x)\neq 0,\quad 0\leqslant x\leqslant 1, \tag{4}$$

*$D_{0x}^{\alpha_j}$ – оператор дробного (в смысле Римана–Лиувилля) дифференцирования порядка $\alpha_j<1$, задаваемый формулой*

$$D_{0x}^{\alpha_j}\,f(x)\equiv\frac{1}{\Gamma(1-\alpha_j)}\,\frac{d}{dx}\int\limits_0^x\frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha_j}}.$$

Здесь $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера.

В краевом условии (3) по повторяющемуся индексу $j$ подразумевается суммирование от 1 до $n$.

Не нарушая общности, можно предположить, что $\alpha_1>\alpha_2>\ldots>\alpha_n$.

Задача A в случае, когда

$$a_0(x)=a_1(x)=\ldots=a_{n+1}(x)\equiv 0,\quad a_{n+1}(x)\equiv 1$$

совпадает с задачей Дирихле [1], а когда

$$a_0(x)\equiv 1,\quad a_1(x)=a_2(x)=\ldots=a_{n+1}(x)\equiv 0$$

– с задачей Хольмгрена [2], [3].

Задача A эквивалентно редуцируется к задаче Дирихле и в случае, когда

$$a_0(x)\equiv 0,\quad a_1(x)\neq 0\qquad\forall\,x\in\overline{I}, \tag{5}$$

$$a_j(x) \in C^1(\bar{I}), \quad j = 1, \ldots, n; \quad a_{n+1}(x) \in C(\bar{I}), \quad \Psi(x) \in C(\bar{I}),$$

где $I = \{x\colon 0 < x < 1\}$.

В самом деле, на основании (5) краевое условие (3) можно переписать в виде

$$D_{0x}^{\alpha}\tau + b_j(x) D_{0x}^{\alpha_j}\tau + b_{n+1}(x)\tau = \psi(x), \quad j = 2, \ldots, n,$$

или

$$\tau(x) + D_{0x}^{-\alpha}\, b_j\, D_{0x}^{\alpha_j}\tau + D_{0x}^{-\alpha} b_{n+1}\tau = D_{0x}^{-\alpha}\psi, \tag{6}$$

где

$$\tau(x) = u(x,\, 0),\ b_j(x) = \frac{a_j(x)}{a_1(x)},\ b_{n+1}(x) = \frac{a_{n+1}(x)}{a_1(x)},\ \psi(x) = \frac{\Psi(x)}{a_1(x)},\ \alpha = \alpha_1,$$

$D_{0x}^{-\alpha}$ – оператор, обратный оператору $D_{0x}^{\alpha}$.

Из соотношения

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha_j)\, D_{0x}^{-\alpha}\, b_j\, D_{0x}^{\alpha}\tau = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^x \frac{b_j(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}\,\frac{d}{dt}\int\limits_0^{t-\varepsilon}\frac{\tau(\xi)d\xi}{(t-\xi)^{\alpha_j}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int\limits_0^x \frac{b_j(t)\tau(t-\varepsilon)dt}{(x-t)^{1-\alpha}\varepsilon^{\alpha_j}} - \alpha_j \int\limits_0^{x-\varepsilon}\tau(\xi)d\xi\int\limits_{\xi+\varepsilon}^x \frac{b_j(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}(t-\xi)^{1+\alpha_j}}\right]$$

с учетом равенства

$$\alpha_j\int\limits_{\xi+\varepsilon}^x \frac{b_j(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}(t-\xi)^{1+\alpha_j}} = \frac{b_j(\xi+\varepsilon)}{(x-\xi-\varepsilon)^{1-\alpha}\varepsilon^{\alpha_j}} + \frac{d}{d\xi}\int\limits_{\xi+\varepsilon}^x \frac{b_j(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}(t-\xi)^{\alpha_j}}$$

легко видеть, что

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha_j)\, D_{0x}^{-\alpha} b_j D_{0x}^{\alpha_j}\tau = -\int\limits_0^x \tau(t)dt\,\frac{d}{dt}\int\limits_t^x \frac{b_j(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{1-\alpha}(\xi-t)^{\alpha_j}} =$$

$$= -\int\limits_0^x \tau(t)dt\,\frac{d}{dt}(x-t)^{\alpha-\alpha_j}\int\limits_0^1 \frac{b_j[t+(x-t)z]dz}{z^{\alpha_j}(1-z)^{1-\alpha}}.$$

Принимая это во внимание, убеждаемся в эквивалентности уравнения (6) интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$\tau(x) - \int\limits_0^x \frac{K_j(x,\, t)\tau(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha+\alpha_j}} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x \frac{b_{n+1}(t)\tau(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt = D_{0x}^{-\alpha}\Psi,$$

где $K_j(x, t) \in C(\overline{I} \times \overline{I})$, которое безусловно и однозначно разрешимо в классе $C(\overline{I})$.

К различным частным случаям задачи А эквивалентно (в смысле однозначной разрешимости) редуцируются многие краевые задачи для линейных уравнений второго порядка смешанного типа. В частности, по стандартной схеме [1] легко убедиться, что фундаментальное соотношение между $\tau(x) = u(x, 0)$ и $\nu(x) = u_y(x, 0)$ в задаче Трикоми для уравнения

$$\operatorname{sign} y \cdot |y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

приносимое на линию вырождения из гиперболической части смешанной области, представимо в виде (3), где $a_0(x) \equiv \text{const} < 0$, $a_1(x) \equiv \text{const} > 0$, $a_2(x) = a_3(x) = \cdots = a_{n+1}(x) \equiv 0$, а $\alpha_1$ – положительная постоянная, зависящая только от $m$.

Имеет место следующий принцип экстремума. *Пусть* $\Psi(x) \equiv 0$ *и*

$$a_0(x) \leqslant 0, \quad a_i(x) \geqslant 0, \quad \forall\, i = 1, \ldots, n+1, \quad x \in I. \tag{7}$$

*Тогда положительный максимум и отрицательный минимум решения* $u(x, y)$ *задачи А в* $\overline{\Omega}$ *достигается лишь на кривой* $\sigma$, *если* $u(x, 0) \in C^{(0, h)}(I)$, $h > \alpha_1$.

Здесь и ниже $C^{(k, h)}(E)$ означает класс функций, у которых в $E$ существуют все производные порядка $k$, удовлетворяющие условию Гельдера с показателем $h$. Действительно, допустим, что $\max\limits_{\overline{\Omega}} u = u(\xi, \eta) > 0$. Очевидно, $(\xi, \eta) \overline{\in} \Omega$. Пусть $(\xi, \eta) = (\xi, 0) \in I$. В силу (3) в этой точке имеем

$$a_0(\xi)\nu(\xi) + a_j(\xi) D_{0\xi}^{\alpha_j} \tau(\xi) + a_{n+1}(\xi)\tau(\xi) = 0. \tag{8}$$

На основании (4) и (7) среди функций $a_i(x)$, $i = 0, 1, \cdots, n+1$, найдется по крайней мере одна функция $a_l(x)$ такая, что $a_l(\xi) > 0$ при $l \neq 0$ и $a_l < 0$ при $l = 0$.

Если $l = 0$, то из (7), (8) и принципа Заремба–Жиро [4], утверждающего, что $\nu(\xi) < 0$, получим $(\xi, 0) \in I$. А это противоречит сделанному допущению. Если же $l = j\, (j = 1, \ldots, n)$, то на основании установленного в [5] принципа экстремума для оператора дробного дифференцирования будем иметь неравенство $D_{0\xi}^{\alpha_j} \tau(\xi) > 0$, из которого с помощью (8) доказывается, что точка $(\xi, \eta) \in \sigma$.

Аналогично убеждаемся, что точка $(\xi, \eta)$, где функция $u(x, y)$ достигает отрицательного минимума, не может принадлежать $I$. Стало быть, $(\xi, \eta) \in \sigma$.

Из установленного принципа экстремума вытекает единственность и устойчивость решения задачи А.

Нетрудно заметить, чго если соблюдены условия (4) и (5), то задача (2), (3) имеет не более одного решения для любого линейного эллиптического в области $\Omega$ уравнения второго порядка, коэффициенты которого удовлетворяют известным условиям, гарантирующим справедливость принципов Хопфа и Заремба–Жиро [4].

Вопрос существования решения задачи А можно исследовать методом интегральных уравнений при следующих предположениях относительно кривой $\sigma$ и заданных функций: $\sigma$ – гладкая кривая с параметрическим уравнением $x = x(s)$, $y = y(s)$, $x(s)$, $y(s) \in C^{(2,\,h)}$ $(0 \leqslant s \leqslant l)$, где $s$ – длина дуги, отсчитываемая от точки $B(1,\,0)$, а $l$ – длина $\sigma$; в достаточно малых окрестностях точек $A(0,\,0)$ и $B(1,\,0)$ части кривой $\sigma$ совпадают с соответствующими частями нормальной кривой

$$\sigma_0\colon\ (x - 1/2)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} = 1/4;$$

кривая $\sigma$ лежит вне области, ограниченной кривой $\sigma_0$ и отрезком $AB$; $\varphi(x,\,y) = f(s) \in C^{(2,\,h)}$ $(0 \leqslant s \leqslant l)$, $a_j(x) \in C^{(1,\,h)}(\overline{I})$, $j = 0,\,1,\,\ldots,\,n$, $a_{n+1}(x)$ и $\Psi(x) \in C^{(0,\,h)}(I)$; коэффициенты уравнения (1) принадлежат классу $C^{(1,\,h)}(\Omega)$, причем при $m \geqslant 2$, $a(x,\,y)$ удовлетворяет условию Геллерстедта* [6]

$$a(x,\,y) = a_0(x,\,y) y^{\mu}, \quad \mu = \mathrm{const} > \frac{m}{2} - 1, \quad a_0 \in C^{(1,\,h)}(\overline{I}).$$

По стандартной схеме (см. [1], [7], [9]) можно доказать, что если существует решение $u(x,\,y)$ задачи А и $\tau(x) = u(x,\,0)$, $\nu(x) = u_y(x,\,0)$, то

$$\tau(x) = \gamma_m \int\limits_0^1 [(x-\xi)^{-\frac{m}{m+2}} - (x+\xi-2x\xi)^{-\frac{m}{m+2}}]\nu(\xi)d\xi +$$
$$+ \int\limits_0^1 K_m(x,\,\xi)\nu(\xi)d\xi + \Phi_m(x), \quad 0 < x < 1, \tag{9}$$

при $m > 0$, и

$$\tau(x) = \gamma_0 \int\limits_0^1 [\log|x-\xi| - \log(x+\xi-2x\xi)]\nu(\xi)d\xi +$$
$$+ \int\limits_0^1 K_0(x,\,\xi)\nu(\xi)d\xi + \Phi_0(x), \quad 0 < x < 1,$$

*Условие, гарантирующее однозначную разрешимость задачи Дарбу для вырождающегося гиперболического уравнения.

при $m = 0$, где $\gamma_m = \text{const} \neq 0$, $K_m(x, \xi)$ и $\Phi_m(x)$ – заданные функции, непрерывные на сегментах $0 \leqslant x,\, t \leqslant 1$, удовлетворяющие условию Гельдера с показателем $h > \alpha$, внутри этих сегментов.

Из краевого условия (3) имеем

$$a_0(x)\nu(x) + a_j(x)D_{0x}^{\alpha_j}\tau(x) + a_{n+1}(x)\tau(x) = \Psi(x). \tag{10}$$

Следовательно, задача A эквивалентна (в смысле разрешимости) системе интегро-дифференциальных уравнений (9), (10).

Пусть $a_j(x) \equiv 0$ для всех $j = 1, 2, \ldots, n$. Тогда из (9) и (10) получаем интегральное уравнение

$$a_0(x)\nu(x) + a_{n+1}(x)\gamma_m \int\limits_0^1 \left[|x-t|^{-\frac{m}{m+2}} - (x+t-2xt)^{-\frac{m}{m+2}}\right]\nu(t)dt +$$

$$+ a_{n+1}(x)\int\limits_0^1 K_m(x, t)\nu(t)dt = \Psi(x) - a_{n+1}(x)\Phi_m(x),$$

которое в силу принципа экстремума безусловно и однозначно разрешимо, если $a_0(x) < 0$, $a_{n+1}(x) \geqslant 0$ для всех $x \in \overline{I}$. Поскольку в этом случае достаточно искать функцию $\nu(x)$ в классе функций, непрерывных в интервале $I$ и могущих обращаться в бесконечность интегрируемого порядка на концах этого интервала, наложенные выше на заданные функции условия можно значительно ослабить.

Вопрос существования решения задачи A в общем случае, когда $\alpha_1 \leqslant 2/(m+2)$, исследуется точно так же, как и задача Трикоми для уравнения

$$\operatorname{sign} y \cdot |y|^m u_{xx} + u_{yy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y) = 0.$$

При $\alpha_1 > 2/(m+2)$ возникают затруднения принципиального характера. В этом случае интегральное уравнение для искомой функции $\nu(x)$ можно записать в виде

$$\nu(x) + \left| \overline{\int\limits_0^1 K(x, t)\nu(t)dt} \right. = \Psi(x), \quad 0 < x < 1,$$

где ядро $K(x, t)$, вообще говоря, имеет подвижную (при $x = t$) и неподвижную (при $x, t = 0, 1$) особенности высокого порядка, и поэтому интеграл понимается в смысле конечной части по Адамару [9, 10].

**Литература**


1. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959.
2. Holmgren E. Arkiv Mat., Astr. och Fisik, 25. Pp. 1–3.
3. Евсин В. И. Сибир. матем. журнал. 1972. Т. 8, № 2.
4. Бицадзе А. В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966.
5. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10, № 1.
6. Gellerstedt S. Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik. 1937. Vol. 25 A, no. 29. Pp. 1–23.
7. Gellerstedt S. Sur un probleme aux limites pour une equation lineaire aux derives partielles du second ordre de type mixte. These, Uppsala, 1935.
8. Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1970.
9. Hadamard J. Le probleme de Cauchv. Paris, 1932.
10. Wiener K. Math. Nachrichten. 1967. Vol. 35.


Поступила в редакцию
21 февраля 1974 г.

Кабардино-Балкарский
государственный университет

# К теории краевых задач для уравнения смешанного гиперболо-параболического типа

В ограниченной области $\Omega$ евклидовой плоскости точек $z = (x, y)$ с кусочно-гладкой границей $\Sigma$ рассмотрим уравнение смешанного гиперболо-параболического типа

$$Lu = u_{yy} - k(z)u_{xx} + a(z)u_x + b(z)u_y + c(z)u = f(z), \tag{1}$$

где $0 \leqslant k$, $a$, $b$ и $c$ – заданные в замыкании $\overline{\Omega}$ функции из класса $C(\overline{\Omega})$.

Пусть $x_n$ и $y_n$ — направляющие косинусы внешней нормали $n$ к $\Sigma$;

$$\Sigma_+ = \{z | z \in \Sigma,\ x_n \geqslant 0\}, \quad \Sigma_- = \Sigma \setminus \Sigma_+;$$

$$\Sigma_+^+ = \{z | z \in \Sigma_+,\ y_n^2 - kx_n^2 < 0\}, \quad \Sigma_+^- = \Sigma_+ \setminus \Sigma_+^+;$$
$$\Sigma_-^+ = \{z | z \in \Sigma_-,\ y_n^2 - kx_n^2 > 0\}, \quad \Sigma_-^- = \Sigma_- \setminus \Sigma_-^+.$$

Ниже излагается простой прием, позволяющий правильно сформулировать краевую задачу для уравнения (1) в области $\Omega$, в частности, доказывается, что от граничных условий освобождается лишь часть $\Sigma_-^-$ границы $\Sigma$.

С оператором $L$ свяжем однопараметрическое семейство операторов $L_\mu$, $\mu \leqslant 0$, по формуле

$$L_\mu v \equiv v_{yy} - kv_{xx} + a_\mu v_x + bv_y + c_\mu v,$$

где $a_\mu = a - 2\mu k$, $c_\mu = c + a\mu - k\mu^2$.

Нахушев А. М. Докл. АН СССР. 1977, **235**:2, 273–276.
Представлено академиком А. Н. Тихоновым 20.10.1980

Очевидно, если $u = v\exp(\mu x)$, то $Lu = \exp(\mu x) L_\mu v$.

В дальнейшем предполагается, что функции $k$, $a$ и $c$ непрерывно дифференцируемы по $x$ в $\overline{\Omega}$.

Пусть

$$A^{\alpha\varepsilon}_{\mu\omega} = \alpha k + 2a_\mu + k_x - \varepsilon(b^2 + \omega),\ C^\alpha_\mu = \alpha c_\mu + c_{\mu x},$$

где $0 \leqslant \omega = \omega(z) \in C(\overline{\Omega})$, а $\alpha > 1/\varepsilon$ и $\varepsilon$ – положительные числа.

Для любых $\mu$, $\alpha$, $\varepsilon$ и для любой функции $\omega$ справедливо неравенство

$$\int\limits_\Omega \exp(\alpha x)[A^{\alpha\varepsilon}_{\mu\omega} v_x^2 + (\alpha - 1/\varepsilon)v_y^2 - C^\alpha_\mu v^2] d\Omega + \int\limits_z \exp(\alpha x)[c_\mu x_n v^2 -$$

$$- x_n(k v_x^2 + v_y^2) + 2y_n v_x v_y] d\Sigma \leqslant \|\omega^{-1/2} L_\mu v\|_0^2,\ \ \forall\, v \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega). \quad (2)$$

Здесь и ниже $C$ означает некоторую положительную постоянную, не зависящую от $v$, а $\|\cdot\|_0$ – норму в $L_2(\Omega)$.

Неравенство (2) по существу было доказано в [1] для случая, когда $k_x \equiv 0$.

Обозначим через $W(B_j)$ множество функций $v(z)$ из $C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, для которых $L_\mu v \in L_2(\Omega)$ и соблюдены краевые условия

$$v\,|_{\Sigma_+} = 0, \quad v_n\,|_{\Sigma_+^+} = 0, \quad v_x\,|_{\Sigma_-^+} = 0, \qquad (3)$$

или

$$v\,|_{\Sigma_+} = 0, \quad v_n\,|_{\Sigma_+^+} = 0, \quad v_y\,|_{\Sigma_-^+} = 0, \qquad (4)$$

а через $\Omega_0$ – компактное множество $\{z \mid z \in \overline{\Omega},\ k(z) = 0\}$.

На тех частях $\Sigma_+$, где $x_n = 0$, условие $v\,|_{\Sigma_+} = 0$ можно заменить условием $v_y\,|_{\Sigma_+} = 0$, если эти части являются интервалами прямых, параллельных оси $y = 0$.

Имеет место следующая

**Теорема.** *Если* $\Omega_0 = \varnothing$ *или*

$$a(z) > 0,\ 2a(z) + k_x(z) > 0 \quad \forall\, z \in \Omega_0, \qquad (5)$$

*то*

$$\|v\|_1 \leqslant C\|L_\mu v\|_0 \quad \forall\, v \in W(B_j),$$

*где* $\|\cdot\|_1$ *– норма в пространстве* $W_2^1(\Omega)$.

Действительно, пусть соблюдено условие (5) и

$$\mu < \mu_0 = \min_{\Omega_0}[-c(z)/a(z)].$$

Поскольку $c_\mu(z) < 0$ в $\Omega_0$ и $c_\mu(z) \in C(\overline{\Omega})$, то существует такое число $\mu_1 \leqslant \mu_0$, что

$$c_\mu(z) < 0 \quad \forall\, z \in \overline{\Omega}, \quad \mu \leqslant \mu_1. \tag{6}$$

Рассмотрим на границе $\Sigma$ форму

$$Q = c_\mu x_n v^2 - x_n(kv_x^2 + v_y^2) + 2y_n v_x v_y.$$

В силу (6) и равенств

$$v = 0, \quad v_x = v_n x_n, \quad v_y = v_n y_n \quad \forall\, z \in \Sigma_+,$$

имеем

$$Q\,|_{\Sigma_+} = x_n(y_n^2 - kx_n^2)v_n^2 \quad \Rightarrow \quad Q\,|_{\Sigma_+} \geqslant 0, \quad Q\,|_{\Sigma_+^+} = 0.$$

Стало быть,

$$Q\,|_{\Sigma_+} \geqslant 0. \tag{7}$$

На части $\Sigma_-$ границы $\Sigma$ по определению $x_n < 0$, поэтому

$$Q\,|_{\Sigma_-} \geqslant 2y_n v_x v_y - x_n(kv_x^2 + v_y^2) \equiv q.$$

Отсюда на основании очевидных неравенств $q\,|_{\Sigma_-^+} = 0$, $q\,|_{\Sigma_-^-} \geqslant 0$ заключаем, что

$$Q\,|_{\Sigma_-} \geqslant 0. \tag{8}$$

Принимая во внимание (7) и (8), основное неравенство (2) при $\omega(z) \equiv 1$ можно переписать в виде

$$\int\limits_\Omega \exp(\alpha x)[A_{\mu_1}^{\alpha\varepsilon} v_x^2 + (\alpha - 1/\varepsilon)v_y^2 - C_\mu^\alpha v^2]d\Omega \leqslant$$

$$\leqslant C\|L_\mu v\|_0^2 \quad \forall\, \mu \leqslant \mu_1, \quad v \in W(B_j). \tag{9}$$

В силу (6) существует такое $\alpha_0$ что

$$C_\mu^\alpha(z) < 0 \qquad \forall\, z \in \overline{\Omega}, \qquad \alpha \geqslant \alpha_0. \tag{10}$$

Из второго неравенства условий (5) следует, что при достаточно малых значениях $\varepsilon$

$$A_{\mu_1}^{\alpha\varepsilon} = 2a(z) + k_x(z) - \varepsilon(b^2 + 1) > 0 \quad \forall\, z \in \Omega_0.$$

Следовательно, найдется такое $\alpha_1$, что

$$A_{\mu_1}^{\alpha\varepsilon} > 0 \quad \forall\, z \in \overline{\Omega}, \quad \alpha \geqslant \alpha_1. \tag{11}$$

Соотношения (9), (10) и (11) доказывают справедливость теоремы.

Из теоремы заключаем, что если $u(z)$ – регулярное в области $\Omega$ решение уравнения (1) с правой частью $f \in L_2(\Omega)$ из класса $C^1(\overline{\Omega})$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\,|_{\Sigma_+} = 0, \quad u_n\,|_{\Sigma_+^+} = 0, \quad (u_x - \mu u)\,|_{\Sigma_-^+} = 0 \tag{12}$$

или

$$u\,|_{\Sigma_+} = 0, \quad u_n\,|_{\Sigma_+^+} = 0, \quad u_y\,|_{\Sigma_-^+} = 0, \tag{13}$$

то

$$\int\limits_{\Omega} [(u_x - \mu u)^2 + u_y^2 + u^2] d\Omega \leqslant C\|f\|_0^2. \tag{14}$$

Из априорной оценки (14) вытекают единственность регулярного решения задачи (12) или (13) для уравнения (1) и существование слабого решения сопряженной (по Лагранжу) задачи в соответствующих этой оценке функциональных пространствах [2].

Основное неравенство (2) позволяет выделить широкий класс уравнений смешанного гиперболо-параболического типа, для которых справедлива априорная оценка

$$\|v\|_{++} \leqslant C\|L_\mu v\|_+ \quad \forall\, v \in W(B_j),$$

где $\|\cdot\|_{++}$ и $\|\cdot\|_+$ – некоторые позитивные, вообще говоря, весовые нормы. Например, если $c(z) < 0$ в $\Omega_0$ и $k_x/k$, $a/k$, $b^2/k \in C(\Omega_0)$, то

$$\int\limits_{\Omega} (kv_x^2 + v_y^2 + v^2) d\Omega \leqslant C\|k^{-1/2}L_\mu v\|_0^2 \quad \forall\, v \in W(B_j).$$

Изложенный выше простой способ дает возможность правильно сформулировать задачи типа (12) или (13) для уравнений вида (1) с коэффициентами, претерпевающими разрывы первого рода при переходе через многообразия $\Omega_0^j$ изменения типа уравнения, когда на этих многообразиях заданы соответствующие условия линейного сопряжения для искомой функции $u$ и ее производной по некасательному к $\Omega_0^j$ направлению. Однако следует отметить, что существует ряд корректных задач для уравнения смешанного гиперболо-параболического типа, которые не являются частными случаями задачи (12) или (13). Например, в области $\Omega = \{z \mid \ 0 < x < l,\, 0 < y < x_0\}$ рассмотрим следующую задачу для модельного уравнения смешанного гиперболо-параболического типа:

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - u_{yy}, & 0 < x < x_0, \\ u_{xx} - u_y, & x_0 < x < l. \end{cases} \tag{15}$$

**Задача A.** *Найти регулярное в области* $\Omega$ *при* $x \neq x_0$ *решение* $u(x,\, y)$ *уравнения* (15) *из класса* $C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, *удовлетворяющее краевым условиям*

$$u(x,\, 0) = \tau(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l; \quad u(x,\, x_0) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant x_0;$$

$$u(0,\, y) = \varphi_0(y), \quad u(l,\, y) = \varphi_l(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant x_0,$$

*где* $\tau(x)$, $\varphi_0(y)$, $\varphi_l(y)$ *и* $\psi(x)$ *– заданные достаточно гладкие функции.*

Нетрудно доказать, что задача $A$ является корректно поставленной.

Многие задачи тепло- и массообмена [3], [4] сводятся к краевым задачам типа (12) или (13) для простейших частных случаев уравнения (1), вообще говоря, с разрывными коэффициентами.

Рассмотрим теперь уравнение (см. [5])

$$u_{yy} - y^2 u_{xx} - u_x = 0, \tag{16}$$

для которого нарушено условие (5) теоремы.

Вторая задача Дарбу, которая является частным случаем задачи ($B_j$), для уравнения (16) имеет бесчисленное множество линейно независимых решений [1], а первая задача всегда разрешима и притом единственным образом [6].

Пусть $\Omega$ – характеристический двуугольник, т. е. область, ограниченная характеристиками $x - \frac{1}{2}y^2 = 0$ и $x + \frac{1}{2}y^2 = 1$ уравнения (16).

**Задача B.** *Найти регулярное в области* $\Omega$ *решение* $u(x,\, y)$ *уравнения* (16) *из класса* $C(\overline{\Omega})$, *удовлетворяющее краевым условиям*

$$u(x,\, \sqrt{2x}) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1/2; \quad u(x,\, -\sqrt{2-2x}) = \psi(x), \quad 1/2 \leqslant x \leqslant 1.$$

Задача $B$ является корректно поставленной [7], хотя предложенным выше способом для нее не удается получить априорную оценку вида (14).

Среди работ, посвященных краевым задачам для уравнений смешанного гиперболо-параболического типа, следует отметить работы [8–10], где получен ряд важных результатов.

В заключение хочется выразить глубокую благодарность чл.-корр. АН СССР А. В. Бицадзе, проф. В. А. Ильину и проф. Ш. А. Алимову за весьма полезное обсуждение результатов этой работы на руководимых ими семинарах.

## Литература

1. Нахушев А. М. ДАН. 1970. Т. 195, № 4.
2. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наукова думка, 1965.

3. Лыков А. В. Инж.-физ. журн. 1965. Т. 9, № 3.
4. Ведерников В. В. Вестн. с.-х. науки. 1972. Т. 3, № 74.
5. Бицадзе А. В. Уравнение смешанного типа. Итоги науки. М., 1959.
6. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, № 1.
7. Нахушев А. М. Сообщ. АН ГрузССР. 1975. Т. 77, № 3.
8. Елеев В. А. Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 1.
9. Каратопраклиев Г. Д. Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 1.
10. Ланин И. Н. Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 1.

Поступила в редакцию
9 марта 1977 г.

Кабардино-Балкарский
государственный университет

## О справедливости одной априорной оценки

В $n$-мерной области $Q$ рассмотрим линейный дифференциальный оператор в частных производных второго порядка

$$Lu \equiv a^{ij}(x)\, u_{x_i x_j} + b^i(x)\, u_{x_i} + c(x)\, u, \quad i,\, j = 1,\, 2,\, \ldots,\, n,$$

где $a^{ij}(x)$, $b^i(x)$, $c(x)$ – достаточно гладкие в замыкании $\overline{Q}$ функции точки $x = (x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n)$ и по повторяющимся индексам $i$, $j$ подразумевается суммирование от 1 до $n$.

Пусть $s$ – произвольное целое число, $\|u\|_s$ – норма функции $u = u(x)$ в пространстве $W_2^s(Q)$ (см. [1]). В работе исследуется вопрос об априорной оценке вида

$$\|u\|_{s+2} \leqslant c_0 \|Lu\|_s \quad (\text{для всех } u \in C_0^\infty(\Omega)), \tag{1}$$

где $c_0$ – не зависящая от $u$ положительная постоянная, $\Omega$ – строго внутренняя подобласть области $Q$. В частности, устанавливается, что оценка (1) не выполняется, если оператор $L$ является оператором смешанного эллиптико-гиперболического типа.

Справедлива следующая

**Теорема.** *Если для некоторого $s$ и любой функции $u \in C_0^\infty(\Omega)$ имеет место априорная оценка* (1)*, то оператор $L$ в области $\Omega$ является эллиптическим.*

Доказательство этой теоремы при $s = 0$ принадлежит Л. Гордингу и для любого $s \geqslant 0$ приводится в книге Ю. М. Березанского [1, с. 124]. Поэтому остается рассмотреть случай $s < 0$.

Пусть $u(x)$ – любая функция из $C_0^\infty(\Omega)$. Применяя оценку (1) к функции $u_{x_k}$, которая, очевидно, принадлежит $C_0^\infty(\Omega)$, и принимая во внимание равенство

$$Lu_{x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} Lu - lu, \quad k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n,$$

Нахушев А. М. Доклады АН СССР. 1981, **257**:1, 45–47.

где

$$lu = a^{ij}_{x_k}(x)\, u_{x_i x_j} + b^i_{x_k}(x)\, u_{x_k} + c_{x_k}(x)\, u,$$

получим

$$\|u_{x_k}\|_{s+2} \leqslant c_0 \|Lu_{x_k}\|_s = c_0 \left\| \frac{\partial}{\partial x_k} Lu - lu \right\|_s \leqslant c_0 \left( \left\| \frac{\partial}{\partial x_k} Lu \right\|_s + \|lu\|_s \right).$$

Отсюда в силу очевидных неравенств (см. [1, с. 154], лемма 3.6)

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_k} Lu \right\|_s \leqslant c_2 \|Lu\|_{s+1} \; \|lu\|_s \leqslant c_2 \|u\|_{s+2} \leqslant c_0 c_2 \|Lu\|_s \leqslant c_3 \|Lu\|_{s+1}$$

можно записать

$$\|u_{x_k}\|_{s+2} \leqslant c_4 \|Lu\|_{s+1} \quad (\text{для всех } k = 1,\, 2,\, \ldots). \tag{2}$$

Здесь и ниже $c_i$, $i = 2,\, 3,\, \ldots$, означают положительные постоянные, которые не зависят от $u$. Из (1) и (2) легко видеть, что $\|u\|_{s+3} \leqslant c_1 \|Lu\|_{s+1}$ (для всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$).

Если $s + 1 = 0$, то, используя результат Л. Гординга [1], получим, что оператор $L$ в $\Omega$ эллиптичен. Если же $s + 1 < 0$, то рассуждения повторяются до тех пор, пока не придем к априорной оценке

$$\|u\|_{s+k+2} \leqslant c_k \|Lu\|_{s+k} \quad (\text{для всех } u \in C_0^\infty(\Omega))$$

с $s + k = 0$. После этого доказательство опять завершается применением результата Л. Гординга.

Отметим, что аналогичное утверждение справедливо и для любого линейного дифференциального оператора в частных производных четного порядка.

На основании доказанной теоремы можно судить о характере гладкости решения краевых задач для уравнений второго порядка смешанного эллиптико-гиперболического типа. Для этих уравнений можно получить априорные оценки в смешанных нормах, которые завышают гладкость на две единицы лишь в строго внутренних подобластях эллиптической части смешанной области (см. [2]).

Рассмотрим уравнение

$$T_\lambda u \equiv k(y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \lambda u = f(x,\, y), \quad \lambda = \mathrm{const},$$

где $k(y)$ – непрерывно дифференцируемая для всех $y \in (-\infty,\, \infty)$ функция, удовлетворяющая условиям $k'(0) > 0$, $yk(y) > 0$ при $y \neq 0$, в конечной смешанной области $Q$, которая ограничена гладкой кривой $\Gamma_0 \subset \{(x,\, y) \mid y > 0\}$ с концами в точках $(0,\, 0)$ и $(1,\, 0)$ кривой

$$\Gamma_1\colon\; x = \mu(y), \;\; y \leqslant 0, \;\; \mu'(y) \leqslant \sqrt{-k(y)}, \;\; \mu(0) = 0$$

и характеристикой

$$\Gamma_2\colon\ x = 1 - \int\limits_y^0 \sqrt{-k\,(t)}dt.$$

Пусть $\widetilde{W}_2^1\,(Q)$ – пространство функций из $W_2^1\,(Q)$, обращающихся в нуль на $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$, а $\overset{\circ}{W}{}_2^{-1}\,(Q)$ – пространство линейных функционалов над $\overset{\circ}{W}{}_2^1\,(Q)$.

В работе [3] (см. также [4]) В. П. Михайлова в области $Q$ исследуется однородная обобщенная задача Трикоми $u\mid_{\Gamma_0\cup\Gamma_1} = 0$ для неоднородного уравнения $T_\lambda u = f$. Результаты В. П. Михайлова сформулированы в виде двух теорем (1.1 и 3.1), которые эквивалентны оценке

$$\|u\|_{\widetilde{W}_2^1(Q)} \leqslant c\,\|T_\lambda u\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^{-1}}\,(Q)\,, \tag{3}$$

справедливой, по его утверждению, для любой функции $u = u\,(x,\,y)$ из $\widetilde{W}_2^1\,(Q)$ (и тем более справедливой для любой функции $u$ из класса $C_0^\infty\,(Q)^*$).

Пусть $\Omega$ – строго внутренняя подобласть гиперболической части $Q \cap \{(x,\,y) \mid y < 0\}$ смешанной области $Q$. Из (3) следует, что

$$\|u\|_1 \leqslant c\,\|T_\lambda u\|_{-1} \quad (\text{для всех } u \in C_0^\infty\,(\Omega)).$$

Но это противоречит доказанной выше теореме, и, стало быть, априорная оценка В. П. Михайлова (3), а также обе теоремы 1.1 и 3.1 из его работы [3] являются ошибочными. Нетрудно указать и непосредственную ошибку в приведенном доказательстве. Следует также отметить, что аналогичная ошибка допущена и в статье И. М. Петрушко [5].

Среди работ, в какой-то степени посвященных обсуждению оценки вида (3) для уравнений смешанного типа, отметим работу Г. Д. Каратопраклиева [6], где указывалось, что «важный вопрос о получении неравенства (3) остается открытым», и работу В. П. Диденко [7], в которой на странице 16 написано: «Если бы $H^{**}$ было множеством второй категории, то по соответствующей теореме о замкнутых операторах было бы справедливо неравенство типа $\|u\|_{W^1} \leqslant \|Lu\|_{W^{-1}}$ (скачок в две единицы). Однако, по-видимому, $H$ является множеством первой категории, поэтому получить оценку со скачком гладкости на две единицы здесь нельзя».

*См. неравенство (3.5) в работе [3, с. 160].

**$H$ – множество значений операторов Трикоми.

**Литература**

1. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наукова думка, 1965.
2. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8, № 1.
3. Михайлов В. П. Тр. МИАН. 1968. Т. 103, № 142.
4. Михайлов В. П. ДАН. 1967. Т. 175, № 5.
5. Петрушко И. М. Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, № 1.
6. Каратопраклиев Г. Д. Докл. Болг. Акад. наук. 1970. Т. 23, № 10.
7. Диденко В. П. Укр. матем. журн. 1973. Т. 25, № 1.

Поступила в редакцию
23 октября 1980 г.

Кабардино-Балкарский
государственный университет

# Прямая задача теории сопла Лаваля

В газовой динамике под прямой задачей теории сопла Лаваля понимается задача определения всех течений с переходом через скорость звука в сопле с заданными стенками.

А. А. Никольский [1] свел прямую задачу теории плоскопараллельного сопла Лаваля со стенками, близкими к стенкам другого сопла, в котором известно некоторое течение с переходом через скорость звука, приближенно к краевой задаче для следующего уравнения в частных производных:

$$\eta^2 \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \eta \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} - \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0, \quad \theta_0 < \theta < \theta_1, \tag{1}$$

где $\theta$ – угол наклона скорости, $\eta$ – функция модуля скорости, $z = z(\theta, \eta)$ – некоторая вариация функции тока плоских адиабатических газовых течений [2, с. 487].

Уравнение (1) является уравнением смешанного типа, оно эллиптического типа в зоне $\eta > 0$ дозвуковых течений и гиперболического типа в зоне $\eta < 0$ сверхзвуковых течений. На линии $\eta = 0$ происходит изменение типа и вырождение порядка, причем при переходе через критическую скорость должно соблюдаться условие

$$\lim_{\eta \to -0} \frac{1}{\eta} \frac{\partial z}{\partial \eta} = \lim_{\eta \to +0} \frac{1}{\eta} \frac{\partial z}{\partial \eta}. \tag{2}$$

Введем в (1) и (2) новые переменные:

$$z(\theta, \eta) = u(x, y),$$

Нахушев А. М. Доклады АМАН. 2003, **6**:2, 52–62.

$$x = \frac{\theta - \theta_0}{\theta_1 - \theta_0} r, \quad r = \mathrm{const} > 0, \quad y = \left[ \frac{r}{2(\theta_1 - \theta_0)} \right]^{4/3} \eta^2 \operatorname{sign} \eta.$$

Тогда они примут вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + |y|^{1/2} \operatorname{sign} y \, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < r; \tag{3}$$

$$\lim_{y \to -0} \frac{\partial u}{\partial y} = - \lim_{y \to +0} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u = u(x, y). \tag{4}$$

При определенной схематизации [2, с. 486] прямая задача теории сопла Лаваля приводит к задаче Трикоми для уравнения (3) с разрывным условием сопряжения (4).

На евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ точек $(x, y)$ уравнение (3) представляет собой частный случай уравнения

$$\operatorname{sign} y \cdot |y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad -1 < m = \mathrm{const} < 0, \tag{5}$$

которое можно записать и в виде

$$u_{xx} + \operatorname{sign} y \cdot |y|^{-m} u_{yy} = 0. \tag{6}$$

Прямая $y = 0$ является особой характеристикой уравнения (6), огибающей семейство его характеристик.

Пусть

$$\xi = x - \frac{2}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}}, \quad \eta = x + \frac{2}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}} \tag{7}$$

– характеристические координаты уравнения (5);

$$\Omega = \{(x, y)\colon 0 < \xi < \eta < r\}$$

– характеристический треугольник с вершинами в точках

$$A = (0, 0), \ B = (r, 0), \ C = (r/2, \, y_c), \ y_c < 0; \ AB = \{(x, 0)\colon 0 \leqslant x \leqslant r\},$$

$$AC = \{(x, y)\colon \xi = 0, \, 0 \leqslant x \leqslant r/2\}, \, BC = \{(x, y)\colon \eta = r, \, r/2 \leqslant x \leqslant r\};$$

$\overline{\Omega} = \Omega \cup AB \cup AC \cup BC$ – замыкание $\Omega$;

$$2\beta = m/(m+2); \ \alpha = 1 - 2\beta; \ 2\gamma(m) = (2\alpha)^{2\beta} B(\beta, \alpha)/\Gamma(2\beta).$$

Точка

$$\theta_0(x) = \frac{x}{2} - i \left[ \frac{(m+2)x}{4} \right]^{2/(m+2)}$$

для любого $x \in [0, r]$ лежит на характеристике $AC$. Образом точки $\theta_0(x)$ при отображении (7) является точка $(0, x)$ на плоскости комплексной переменной $\xi + i\eta$.

Обобщенным решением уравнения (5) в области $\Omega$ назовем любую функцию $u(x, y)$, представимую в виде

$$u(x,y) = B_1 E_{\xi\eta}^{\beta+1,\beta}\tau(t) - B_2(\xi-\eta)^2 E_{\xi\eta}^{\beta+2,\beta+1}\tau''(t) - B_3 D_{\xi\eta}^{\beta-1}(t-\xi)^{-\beta}\nu(t), \quad (8)$$

где

$$B_1 = \Gamma(2+2\beta)/\Gamma(1+\beta), \quad 2B_2 = \Gamma(1+2\beta)/\Gamma(2+\beta),$$
$$B_3 = (2-4\beta)^{2\beta-1}\Gamma(2-2\beta)/\Gamma(1-\beta),$$

$\tau(x)$ и $\nu(x)$ таковы, что $\tau(x) \in C[0,r] \cap C^2]0,r[$, $\tau''(x) \in L^{\beta+1,0}[0,r]$, $\nu(x) \in L^{-\beta,0}[0,r] \cap C]0,r[$, $E_{\xi\eta}^{p,q}$ – операторы Эрдейи–Кобера, $L^{p,q}[0,r]$ – пространство функций с ограниченной нормой

$$\|\varphi\|_{p,q} = \int\limits_0^r x^p |\log x|^q |\varphi(x)| dx.$$

Функция (8) непрерывна в замкнутой области $\overline{\Omega}$

$$u(x,0) = \tau(x), \ \lim_{y \to -0} \partial u/\partial y = \nu(x), \ 0 < x < r.$$

Если $\nu(x) \in C]0,r[ \cap L[0,r]$, $\tau(x) \in C[0,r]$ и

$$\tau(x) = \tau(0) + D_{0x}^{-\alpha}T(t), \quad (9)$$

где $T(x) \in C]0,r[ \cap L[0,r]$, то функция (8) представляет собой обобщенное решение класса $R_2$ задачи Коши, с начальными данными $\tau(x)$ и $\nu(x)$, для уравнения (5) в области $\Omega$. Если $\tau(x) \in C^3[0,1]$, $\nu(x) \in C^2[0,1]$, то это решение принадлежит $C^2(\Omega)$ [3, с. 260].

Относительно функции $T(x) \in L[0,r]$ отображение (9) представляет собой интегральное уравнение Абеля [4]. Число $\alpha = 2/(m+2) \in ]1,2[$. Поэтому оператор $D_{0x}^{-\alpha}$ будет мономорфизмом и $T(x) = D_{0x}^{\alpha}[\tau(t) - \tau(0)]$ тогда и только тогда, когда производная $\partial_{0x}^{\alpha-1}\tau(t) = D_{0x}^{\alpha-1}[\tau(t) - \tau(0)]$ абсолютно непрерывна на $[0,r]$ и $\lim\limits_{x\to 0} \partial_{0x}^{-2\beta}\tau(t) = 0$.

Следовательно, функцию $\tau(x) \in C[0,r] \cap C^1]0,r[$ можно представить в виде (8) с $T(x) \in L[0,r]$ тогда и только тогда, когда регуляризованная дробная производная $\partial_{0x}^{-2\beta}\tau(t)$ абсолютно непрерывна на $[0,r]$ и обращается в нуль при $x \to 0$.

Из (8) следует, что для всех $x \in [0,r]$

$$u[\Theta_0(x)] = B_1 E_{0x}^{\beta+1,\beta}\tau(t) - B_2 x^2 E_{0x}^{\beta+2,\beta+1}\tau''(t) - B_3 D_{0x}^{\beta-1} t^{-\beta}\nu(t). \quad (10)$$

Равенство (10) и правила взвешенной композиции операторов дробного дифференцирования и интегрирования с одинаковыми началами (см. [5, с. 23]) позволяет доказать справедливость следующего утверждения

**Лемма 1.** *Если* $u[\Theta_0(x)] = 0$ *на сегменте* $[0, r]$, *то равенство* (10) *можно записать в виде*

$$\tau(x) = \gamma(m) D_{0x}^{-\alpha} \nu(t). \tag{11}$$

Эта лемма по существу принадлежит Ф. И. Франклю [2, с. 495], [6], который показал, что начальные функции $\tau(x)$ и $\nu(x)$ задачи Коши для уравнения (6) в области $\Omega$ связаны с функцией $u[\Theta_0(x)] = \varphi(x) = u|_{\substack{\xi=0\\ \eta=x}}$ следующей формулой

$$\tau(x) = \frac{\sin \pi\beta}{2\pi} \left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta} \frac{\Gamma^2(\beta)}{\Gamma(2\beta)} \int\limits_0^x \frac{\nu(t)dt}{(x-t)^{2\beta}} + \varphi_1(x), \tag{12}$$

где

$$\varphi_1(x) = \frac{\Gamma^2(\beta)}{\Gamma(2\beta)} \frac{\sin \pi\beta}{\pi} x^{1-\beta} \frac{d}{dx} \int\limits_0^x t^{2\beta-1} (x-t)^{-\beta} \varphi(t) dt.$$

Здесь условие Франкля $\varphi(0) = 0$ понимается в том смысле, что оно гарантирует включение $\varphi(t) \in L^{-\alpha,0}[0, r] \cap C[0, r]$.

Поскольку $\pi/\sin \pi\beta = \Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)$, $-\beta\Gamma(-\beta) = \Gamma(1-\beta)$, то

$$\frac{\sin \pi\beta}{2\pi} \left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta} \frac{\Gamma^2(\beta)}{\Gamma(2\beta)} \int\limits_0^x \frac{\nu(t)dt}{(x-t)^{2\beta}} = \gamma(m) D_{0x}^{-\alpha} \nu(t).$$

$$\varphi_1(x) = \frac{-\beta\Gamma(\beta)\Gamma(-\beta)x^{1-\beta}}{\Gamma(2\beta)\Gamma(1-\beta)\Gamma(-\beta)} \int\limits_0^x \frac{t^{2\beta-1}\varphi(t)}{(x-t)^{\beta+1}} dt = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)} E_{0x}^{-\beta, 2\beta-1} \varphi(t).$$

Поэтому равенство (12) эквивалентно формуле

$$\tau(x) = \gamma(m) D_{0x}^{-\alpha} \nu(t) + \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)} E_{0x}^{-\beta, -\alpha} u[\Theta_0(t)], \tag{13}$$

где, как и ранее, предполагается, что $u[\Theta_0(t)] \in L^{-\alpha,0}[0, r] \cap C[0, r]$.

При $u[\Theta_0(t)] \equiv 0$ из (13) следует (11).

Обобщенное решение $u(x, y)$ уравнения (5) в области $\Omega$ можно ввести и через функции Грина–Адамара $H(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta)$ второй задачи Дарбу.

Она определяется следующим образом:

$$H(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)=\begin{cases}\left(\frac{\eta_1-\xi_1}{\eta-\xi}\right)^{\beta}F\left(\beta,1-\beta,1;\frac{\xi-\xi_1}{\eta_1-\xi_1}\cdot\frac{\eta-\eta_1}{\eta-\xi}\right), & \eta_1\geqslant\xi,\\ \frac{\gamma(\eta_1-\xi_1)^{2\beta}}{[(\xi-\xi_1)(\eta-\eta_1)]^{\beta}}F\left(\beta,\beta,2\beta;\frac{\eta_1-\xi_1}{\xi-\xi_1}\cdot\frac{\eta-\xi}{\eta-\eta_1}\right), & \eta_1\leqslant\xi;\end{cases}$$

где $\gamma\beta B(2\beta,1-2\beta)=1$.

Функцию $u(x,y)$ назовем обобщенным решением уравнения (5) класса $R_\nu(\Omega)$, если она представима в виде

$$u(x,y)=\frac{\gamma}{2}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta}\int\limits_0^{\xi}\nu(\xi_1)(\xi-\xi_1)^{-\beta}(\eta-\xi_1)^{-\beta}d\xi+$$

$$+\int\limits_0^{\eta}\left[\psi'(\eta_1)+\frac{\beta}{\eta_1}\psi(\eta_1)\right]H(0,\eta_1;\xi,\eta)d\eta_1, \tag{14}$$

где $\nu(x)\in L^{-2\beta,0}[0,r]\cap C]0,r[$, $\psi(x)\in C[0,r]\cap C^1]0,r[\cap L^{2\beta-1,0}[0,r]$, $\psi'(x)\in L^{2\beta,0}[0,r]$.

Функция (5) принадлежит классу $C(\overline{\Omega})\cap C^1(\Omega\cup J_r)$ и для всех $x\in J_r=\{(x,0)\colon 0<x<r\}$ справедливы равенства $\lim\limits_{y\to-0}\partial u/\partial y=\nu(x)$, $u[\Theta_0(x)]=\psi(x)$. Истинность этого предложения доказывается точно так же, как при $0<\beta<1/2$ [7, с. 21].

Из (14) при $y=0$, $\eta=\xi=x\in]0,r[$ имеем

$$\tau(x)=\gamma(m)D_{0x}^{-\alpha}\nu(t)+\Psi(x). \tag{15}$$

Легко видеть, что

$$\Psi(x)=\gamma x^{-\beta}\int\limits_0^{x}\left[\psi'(t)+\frac{\beta}{\eta}\psi(t)\right]t^{2\beta}(x-t)^{-\beta}dt.$$

Пусть $\Psi_\beta(x)=x^{2\beta-1}\varphi(x)$. Так как

$$\left[\psi'(x)+\frac{\beta}{x}\psi(x)\right]x^{2\beta}=x\psi_\beta'(x)+(1-\beta)\psi_\beta(x),$$

то

$$\Psi(x)=\gamma x^{-\beta}\int\limits_0^{x}[t\psi_\beta'(t)+(1-\beta)\psi_\beta(t)](x-t)^{-\beta}dt.$$

Но

$$\int\limits_0^x t(x-t)^{-\beta}\psi'_\beta(t)dt = -\int\limits_0^x \psi_\beta(t)[(x-t)^{-\beta} + \beta t(x-t)^{-\beta-1}]dt =$$

$$= (\beta-1)\int\limits_0^x \psi_\beta(t)(x-t)^{-\beta}dt - \beta x\int\limits_0^x \psi_\beta(t)(x-t)^{-\beta-1}dt.$$

Стало быть,

$$\Psi(x) = \beta\gamma x^{1-\beta}\int\limits_0^x \frac{\psi_\beta(t)dt}{(x-t)^{\beta+1}}.$$

Отсюда, принимая во внимание, что $-\beta\gamma\Gamma(-\beta) = \Gamma(\beta)/\Gamma(2\beta)$, получаем

$$\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)}\Psi(x) = \frac{x^{1-\beta}}{\Gamma(-\beta)}\int\limits_0^x (x-t)^{-\beta-1}t^{2\beta-1}\psi(t)dt,$$

а это означает достоверность следующей формулы

$$\Psi(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)}E_{0x}^{-\beta,2\beta-1}u[\Theta_0(t)]. \tag{16}$$

Равенства (15) и (16) говорят о справедливости формулы (13) и для обобщенного решения уравнения (5) класса $R_\nu(\Omega)$.

Справедливо следующее вспомогательное предложение, которое доказывается с помощью теоремы 1.7.1 автора [5, с. 56].

**Лемма 2.** *Пусть*

$$\tau(x) \in S^1[0,r],\ \partial_{0x}^{\alpha-1}\tau(t) \in AC[0,r],\ \tau(0) = 0,$$

$$\lim_{x\to+0}\partial_{0x}^{\alpha-1}\tau(t) = 0, \lim_{x\to r}\tau(x)\partial_{0x}^{\alpha-1}\tau(t) = 0.$$

*Тогда* $(\tau,\ D_{0x}^{\alpha}\tau)_0 \leqslant 0$ *для любого* $\alpha \in [1,\ 2]$.

При $\alpha = 1$ и $\alpha = 2$, согласно условиям леммы 2, соответственно, имеем $\tau(0) = \tau(r) = 0$ и $\tau(0) = 0$, $\tau(r)\tau'(r) = 0$. Стало быть $(\tau,\ \tau')_0 = 0$, $(\tau,\ \tau'')_0 = -\|\tau'\| \leqslant 0$, $(\tau,\ \tau'')_0 = 0$, тогда и только тогда, когда $\tau(x) = 0$.

Пусть $\alpha \in ]1,\ 2[$ и $\tau^{(\alpha)}(x) = D_{0x}^{\alpha}\tau(t)$. Поскольку $\tau(x) \in S^1[0,r]$ и $\tau(0) = 0$, то из формулы

$$D_{ax}^{\alpha}\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varphi^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)}(x-a)^{k-\alpha} + D_{ax}^{\alpha-n}\varphi^{(n)}(t),$$

$\alpha \in ]n-1, n]$, $n = 1, 2, \ldots$, получаем $D_{0x}^{\alpha-1}\tau(t) = \partial_{0x}^{\alpha-1}\tau(t)$. Это равенство и включение $\tau^{(\alpha-1)}(x) \in AC[0, r]$ дают основание утверждать, что

$$\left(\tau, \tau^{(\alpha)}\right)_0 = \int\limits_0^r \tau(x)\frac{d}{dx}\tau^{(\alpha-1)}(x)dx = \left[\tau(x)\tau^{(\alpha-1)}(x)\right]\Big|_0^r - \left(\tau',\, \tau^{\alpha-1}\right)_0.$$

Так как

$$\tau(0) = 0, \quad \tau(r)\tau^{(\alpha-1)}(r) = 0,$$

то отсюда вытекает равенство

$$\left(\tau, \tau_0^{(\alpha)}\right) = -\left(\tau', D_{0x}^{\alpha-1}\tau'\right)_0.$$

Условия леммы 2: $\tau^{(\alpha-1)}(0) = 0$, $\tau^{(\alpha-1)}(x) = D_{0x}^{\alpha-2}\tau'(t) \in AC[0, r]$ означают, что функция $\tau'(x)$ удовлетворяет условиям упомянутой теоремы 1.7.1 [5, с. 56]. Поэтому $\left(\tau', D_{0x}^{\alpha-1}\tau'\right)_0 \geqslant 0$. И, стало быть, $(\tau, D_{0x}^{\alpha}\tau)_0 \leqslant 0$, что и требовалось доказать.

Вернемся теперь к уравнению (5) в области $\Omega$ и докажем следующую теорему

**Теорема.** *Пусть $u(x, y)$ – обобщенное решение уравнения* (5) *класса $R_\nu(\Omega)$, удовлетворяющее условиям: $u[\Theta_0(x)] = 0$ для всех $x \in [0, r]$; $\partial_{0x}^{-2\beta}\tau(t) \in AC[0, r]$; $\lim\limits_{x\to 0}\partial_{0x}^{-2\beta}\tau(t) = 0$; $\tau(r)\tau^{(-2\beta)}(r) = 0$, где $\tau(x) = u(x, 0)$. Тогда $(\tau, \nu)_0 \leqslant 0$.*

Условие $u[\Theta_0(x)] = 0$ и равенства (15) и (16) приводят к (11). Функция $\omega(x) = d/dx D_{0x}^{\alpha-2}\tau(t) = \tau^{(\alpha-1)}(x)$ в силу условия $\tau(0) = u(0, 0) = 0$ совпадает с $\partial_{0x}^{-2\beta}\tau(t)$. Следовательно, $\omega(x) \in AC[0, r]$.

Условие $\lim\limits_{x\to 0}\partial_{0x}^{-2\beta}\tau(t) = 0$ означает, что $\omega(0) = 0$. Другими словами, правая часть $\tau(x)$ интегрального уравнения Абеля (11) удовлетворяет условию теоремы Тамаркина [4, с. 574], гарантирующему существование единственного решения $\gamma(m)\nu(x) = D_{0x}^{\alpha}\tau(t) \in L[0, r]$. Число $\beta \in ]-1/2, 0[$ и поэтому $\gamma(m) > 0$.

Функция $\tau(x)$ удовлетворяет условиям леммы 2, утверждающей, что $\gamma(m)(\tau, \nu)_0 = (\tau,\, D_{0x}^{\alpha}\tau)_0 \leqslant 0$ для всех $\alpha = 1 - 2\beta \in ]1, 2[$.

Пусть $D$ – соответствующая уравнению (5) ограниченная односвязная смешанная область, гиперболическая часть которой совпадает с $\Omega$, а эллиптическая с $D^+ = D \setminus \Omega$. Через $\sigma$ обозначим эллиптическую часть границы $\partial D$ области $D$: $\sigma = \partial D^+ \setminus AB$. Предполагается, что $\sigma$ является кусочно-гладкой кривой.

Важным следствием приведенной теоремы является теорема единственности решения задачи Трикоми для уравнения (5) в области $D$ с граничными данными на $\sigma \cup AC$ и с условием сопряжения

$$\lim_{y\to -0} u(x, y) = G_\tau \lim_{y\to +0} u(x, y), \qquad \lim_{y\to -0} u_y(x, y) = G_\nu \lim_{y\to +0} u_y(x, y),$$

где постоянные величины $G_\tau$ и $G_\nu$ разного знака.

При $G_\tau = 1$, $G_\nu = -1$ это условие переходит в (4).

Теорема говорит и о том, что условие Ф. И. Франкля [2, с. 60]:

$$\lim_{(x,y)\to(r,0)} (-y)^{m/2} u^2(x,y) = 0$$

является следствием его метода доказательства оценки $(\tau,\nu)_0 \leqslant 0$, а также знакоопределенность функционала Трикоми [8]

$$F\left(-|y|^m; u\right) = \int\limits_\Omega \left(u_y^2 - |y|^m u_x^2\right) d\Omega,$$

и теорему единственности можно доказать в полном соответствии с методом Трикоми (см. [5, § 5.7]).

В заключение отметим, что аналог критерия второй производной в дробном исчислении (см. [5, § 3.3]) позволяет реализовать для уравнения (5) метод А. В. Бицадзе доказательства единственности решения задачи Трикоми, основанный на его принципе экстремума.

**Литература**


1. Никольский А. А. Уравнения в вариациях плоских адиабатических газовых течений // Труды ЦАГИ. 1948; см. также Сб. теоретических работ по аэродинамике. ЦАГИ, 1957.
2. Франкль Ф. И. Избранные труды по газовой динамике. М.: Наука, 1973. 771 с.
3. Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа. М.: Высшая школа, 1985. 304 с.
4. Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М., 1966. 672 с.
5. Нахушев А. М. Элементы дробного исчисления и их применение. Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2000. 299 с.
6. Кароль И. Л. Решение первой краевой задачи для уравнения диффузии дробного порядка // ДАН СССР. 1953. Т. LXXXXIII, № 2. С. 1286–1289.
7. Нахушев А. М. Об одном классе линейных краевых задач для гиперболического и смешанного типов уравнений второго порядка. Нальчик: Эльбрус, 1992. 155 с.
8. Нахушев А. М. Об априорных оценках для вырождающегося гиперболического уравнения. Сб. научных работ «Неклассические уравнения математической физики». Новосибирск: Изд-во Института математики им. С. Л. Соболева, 2002. 249 с.


Научно-исследовательский институт
прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН

# Об априорных оценках для уравнения с обобщенным оператором Трикоми в главной части

Рассмотрим уравнение в частных производных второго порядка

$$K(y)u_{xx} + u_{yy} = f(u), \tag{1}$$

Нахушев А. М., Нахушева В. А. Доклады АМАН. 2002, **6**:1, 22–27.

где $K(y) \leqslant 0$, в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, ограниченной отрезком

$$AB = \{(x, y)\colon 0 \leqslant x \leqslant r,\ y = 0\}$$

и характеристиками

$$AC\colon dx + \sqrt{-K(y)}dy = 0 \ \text{ и } \ BC\colon dx - \sqrt{-K(y)}dy = 0,$$

выходящими из точки $C = (r/2; y_c)$, $y_c < 0$ (см. рис. 1).

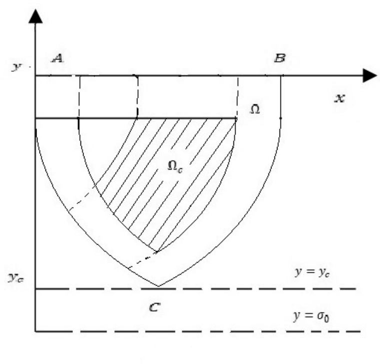


Рис. 1

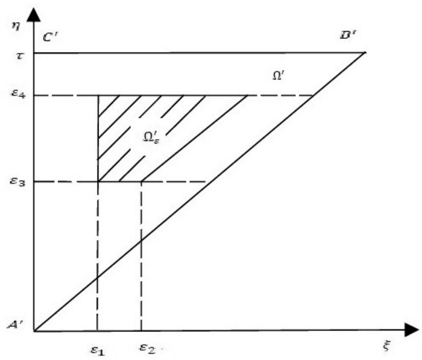


Рис. 2

Уравнение (1) при $K(y) = y$, $f(u) = 0$ совпадает с хорошо известным в газовой динамике смешанных течений уравнением Трикоми.

Предполагается, что $f\colon u \to f(u)$ – дифференциальный оператор в частных производных первого порядка с областью определения $D(f) \subset C^2(\Omega)$ и областью значения $R(f) \subset C(\Omega)$;

$$K(y) \in C^2]y_c, 0], \quad K'(y) \neq 0, \quad K(y) < 0 \quad \forall\, y \in ]y_c, 0]; \tag{2}$$

$$|K(y)| \leqslant K_0 |y|^{-2\mu}, \quad K_0 = \text{const } > 0, \quad \mu = \text{const } < 1. \tag{3}$$

Условие (3) позволяет записать характеристические координаты уравнения (1) в виде

$$\xi = x + \int\limits_0^y \sqrt{-K(t)}dt, \quad \eta = x - \int\limits_0^y \sqrt{-K(t)}dt. \tag{4}$$

На характеристике $AC$ $\xi = 0$, а на характеристике $BC$ $\eta = r$.

В силу (2) якобиан преобразования (4)

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \partial\xi/\partial x & \partial\xi/\partial y \\ \partial\eta/\partial x & \partial\eta/\partial y \end{vmatrix} = -2\sqrt{-K(y)}$$

отличен от нуля при $y_c < y < 0$. Преобразование (4) отображает область $\Omega$ в область $\Omega' = \{(\xi, \eta) : 0 < \xi < \eta < r\}$ евклидовой плоскости точек $(\xi, \eta)$ (см. рис. 2).

Для любой функции $u = u(x, y)$ из класса $C^2(\Omega)$ справедливы следующие равенства:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{-K}}\frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\sqrt{-K}}\frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{5}$$

$$K\, u_{xx} = K\left(u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}\right), \tag{6}$$

$$u_{yy} = -K\left(u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}\right) - \frac{K'}{2\sqrt{-K}}(u_\xi - u_\eta). \tag{7}$$

В силу (6) и (7) уравнение (1) записывается в виде

$$\sqrt{-K}K'u_\xi = \sqrt{-K}K'u_\eta - 8K^2u_{\xi\eta} + 2Kf(u). \tag{8}$$

Следуя Ф. И. Франклю [1, с. 283], введем функцию $M(y)$ по формуле

$$M(y)\frac{d\sqrt{|K|}}{dy} = 4|K|^{3/2}, \quad K \equiv K(y).$$

Очевидно, что при $y_c < y < 0$ функция $M(y) = -8K^2/K'$.

Согласно (5) имеем

$$M(y)u_\eta u_{\xi\eta} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \xi}[M(y)u_\eta^2] - \frac{1}{2}u_\eta^2\frac{\partial M(y)}{\partial \xi} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \xi}[M(y)u_\eta^2] - \frac{M'(y)}{4\sqrt{-K}}u_\eta^2. \tag{9}$$

Обе части уравнения (8) умножим на $u_\eta/K'$, а затем воспользуемся (9). В результате получим

$$\sqrt{-K}u_\xi u_\eta = -\sqrt{-K}N(K)u_\eta^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \xi}[M(y)u_\eta^2] + 2Ku_\eta f(u)/K', \tag{10}$$

где дифференциальный оператор $N$ действует на $K$ по формуле

$$N(K) = -1 - \frac{M'(y)}{4K(y)}.$$

Поскольку

$$N(K) = -1 + \frac{2}{K}\left[K\left(\frac{K}{K'}\right)\right]' = -1 + 2\left(\frac{K}{K'}\right)' + 2,$$

то функция

$$N(K) = 1 + 2(K/K')', \quad y_c < 0 < 0 \tag{11}$$

совпадает с известной в теории уравнений смешанного типа функцией $F(y)$ [2, с. 9].

Пусть

$$\Omega'_\varepsilon = \{(\xi,\eta)\colon \varepsilon_3 < \eta < \varepsilon_4,\, \varepsilon_1 < \xi < \eta + \varepsilon_2 - \varepsilon_3\},$$

где $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$, $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3 < \varepsilon_4 < r$ – строго внутренняя подобласть области $\Omega'$ (см. рис. 2); $\Omega_\varepsilon$ – прообраз области $\Omega'_\varepsilon$ при отображении (4) (см. рис. 1); $\omega'_0 = A'B' = \{(\xi,\eta)\colon 0 < \eta = \xi < r\}$; $\omega'_1 = A'C' = \{(\xi,\eta)\colon \xi = 0,\, 0 < \eta < r\}$; интеграл $\int\limits_{\Omega'} \varphi\, d\xi d\eta$ от функции $\varphi = \varphi(\xi,\eta)$ определен равенством

$$\int\limits_{\Omega'} \varphi\, d\xi d\eta = \lim_{\varepsilon_4\to r}\lim_{\varepsilon_3\to 0}\lim_{\varepsilon_2\to\varepsilon_3}\lim_{\varepsilon_1\to 0}\int\limits_{\Omega'_\varepsilon} \varphi\, d\xi d\eta.$$

Имеет место следующая

**Лемма.** *Пусть $u = u(x,y)$ – регулярное в области $\Omega$ решение уравнения (1), обладающее следующими свойствами:*

1) $K(y)u_\eta^2 \in C(\Omega' \cup \omega'_0 \cup \omega'_1)$*;*

2) *существует интеграл от функции $\varphi = \sqrt{-K}N(K)u_\eta^2$ по области $\Omega'$; справедливо равенство*

$$\left[(Ku_\eta)^2/K'\right](0,\eta) = \left[(Ku_\eta)^2/K'\right](\eta,\eta), \quad 0 < \eta < r. \tag{12}$$

*Тогда*

$$\int\limits_{\Omega'} \sqrt{-K}\left[u_\xi + 2\sqrt{-K}f(u)/K'\right]u_\eta\, d\xi d\eta = -\int\limits_{\Omega'} \sqrt{-K}N(K)u_\eta^2\, d\xi d\eta. \tag{13}$$

Действительно, на основании формулы Грина имеем

$$\int\limits_{\Omega'} \frac{\partial}{\partial\xi}[M(y)u_\eta^2]d\xi d\eta = \lim_{\varepsilon_4\to r}\lim_{\varepsilon_3\to 0}\lim_{\varepsilon_2\to\varepsilon_3}\lim_{\varepsilon_1\to 0}\int\limits_{\partial\Omega'_\varepsilon} M(y)u_\eta^2 d\eta =$$

$$= \lim_{\varepsilon_4\to r}\lim_{\varepsilon_3\to 0}\lim_{\varepsilon_2\to\varepsilon_3}\lim_{\varepsilon_1\to 0}\int\limits_{\varepsilon_3}^{\varepsilon_4}\left\{\left[M(y)u_\eta^2\right]|_{\xi=\eta+\varepsilon_2-\varepsilon_3} - \left[M(y)u_\eta^2\right]|_{\xi=\varepsilon_1}\right\}d\eta =$$

$$= \int\limits_0^r \left\{\left[M(y)u_\eta^2\right](\eta,\eta) - \left[M(y)u_\eta^2\right](0,\eta)\right\}d\eta.$$

Отсюда с учетом нелокального краевого условия (12) получаем, что

$$\int\limits_{\Omega'} \frac{\partial}{\partial\xi}[M(y)u_\eta^2]d\xi d\eta = 0. \tag{14}$$

Равенства (10) и (14) говорят об истинности формулы (13).

Так как $d\xi d\eta = 2\sqrt{-K}d\Omega$, то формулу (13) можно переписать в виде

$$\int\limits_{\Omega} \left[u_\xi + 2\sqrt{-K}f(u)/K'\right] u_\eta K d\Omega = -\int\limits_{\Omega} KN(K)u_\eta^2\, d\Omega. \tag{15}$$

Из (15) при

$$2\sqrt{-K}f(u)/K' = \lambda u_\xi + \mu u_\eta, \tag{16}$$

где $\lambda = \mathrm{const}$ , $\mu = \mu(x,y) \in C(\overline{\Omega})$, получаем равенство

$$(1+\lambda)\int\limits_{\Omega} K u_\xi u_\eta d\Omega = -\int\limits_{\Omega} K\left[N(K)+\mu\right] u_\eta^2\, d\Omega. \tag{17}$$

Условие (16) в силу (1), (6) и (7) означает, что функция $u$ как функция характеристических переменных $\xi$ и $\eta$ удовлетворяет уравнению

$$8(-K)^{3/2}u_{\xi\eta} + (\lambda+1)K'u_\xi + (\mu-1)K'u_\eta = 0. \tag{18}$$

При $K(y) = y$, $4(-y)^{3/2} = 3(\eta-\xi)$ уравнение (18) переходит в обобщенное уравнение Эйлера–Дарбу–Пуассона

$$(\eta-\xi)u_{\xi\eta} + B'u_\xi - Bu_\eta = 0, \tag{19}$$

где

$$B' = (\lambda+1)/6, \quad B = (1-\mu)/6. \tag{20}$$

Уравнение (19) в силу (20) относится к классу гиперболического типа уравнений первого рода, если в области $\Omega'$ $\lambda - \mu < 4$, и второго рода, если $\lambda - \mu > 4$ [3].

Как видно из (5),

$$4Ku_\xi u_\eta = Ku_x^2 + u_y^2.$$

Теперь ясно, что равенство (17) можно записать в виде

$$(1+\lambda)F(K;u) = -4\int\limits_{\Omega} K\left[N(K)+\mu\right] u_\eta^2\, d\Omega, \tag{21}$$

где

$$F(K;u) = \int\limits_{\Omega} \left(Ku_x^2 + u_y^2\right)\, d\Omega. \tag{22}$$

Из (21) вытекают следующие две теоремы.

**Теорема 1.** *Пусть $f(u)$ задается формулой (16) и соблюдены условия леммы. Тогда*

$$(1+\lambda)F(K;u) \geqslant 0 \quad (\leqslant 0),$$

*если*

$$N(K) + \mu \geqslant 0 \quad (\leqslant 0) \quad \forall\,(x,y) \in \Omega.$$

**Теорема 2.** *Пусть $f(u)$ задается формулой (16), соблюдены условия леммы и функции $N(K) \in C[y_c, 0]$. Тогда*

$$(1+\lambda)F(K;u) \geqslant 4\mu_* \int\limits_{\Omega} |K|\, u_\eta^2 \, d\Omega,$$

*если $\mu_* = \min\limits_{\overline{\Omega}} [N(K)+\mu] \geqslant 0$;*

$$(1+\lambda)F(K;u) \leqslant 4\mu^* \int\limits_{\Omega} |K|\, u_\eta^2 \, d\Omega,$$

*если $\mu^* = \max\limits_{\overline{\Omega}} [N(K)+\mu] \leqslant 0$.*

Пусть теперь

$$2\sqrt{-K} f(u)/K' = \lambda \frac{\partial u}{\partial \xi} + \sum_{i=1}^{n} \mu_i \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^{2i-1}, \quad \mu_1 \equiv \mu,$$

где $\mu_i = \mu_i(x,y) \in C(\overline{\Omega})$ для любого $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда равенство (15) принимает следующий вид:

$$(1+\lambda)F(K;u) = -4\int\limits_{\Omega} K \left\{ [N(K)+\mu] \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^2 + \sum_{i=2}^{n} \mu_i \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^{2i} \right\} d\Omega. \quad (23)$$

Из (23) следует, что если $N(K)+\mu \geqslant 0$, $\mu_i(x,y) \geqslant 0$ в области $\Omega$, то $(1+\lambda)F(K;u) \geqslant 0$.

Нелинейное условие (12) при $K'(y) > 0$ (либо $K'(y) < 0$) можно заменить линейным нелокальным краевым условием

$$\left[\left(K/\sqrt{|K'|}\right) u_\eta\right](0,\eta) = G\left[\left(K/\sqrt{|K'|}\right) u_\eta\right](\eta,\eta), \quad 0 < \eta < r, \qquad (24)$$

где коэффициент $G$ равен 1 или $-1$.

Пусть $K(y) = -(-y)^m$, $-2 < m = \mathrm{const}$. Тогда вследствие (4) имеем

$$\xi = x - 2\frac{(-y)^{\frac{m+2}{2}}}{m+2},\ \eta = x + 2\frac{(-y)^{\frac{m+2}{2}}}{m+2},\ \sqrt{-K} = \left[\frac{m+2}{4}(\eta-\xi)\right]^{\frac{m}{m+2}},$$

$$\frac{K}{\sqrt{|K'|}} = -\frac{1}{\sqrt{|m|}}(-y)^{\frac{m+1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{|m|}}\left[\frac{m+2}{4}(\eta-\xi)\right]^{\frac{m+1}{m+2}} \quad (m \neq 0),$$

и, стало быть, условие (24) допускает следующую запись:

$$\lim_{\xi\to 0}\frac{\partial u}{\partial\eta} = G\lim_{\xi\to\eta}(1-\xi/\eta)^{\frac{m+1}{m+2}}\frac{\partial u}{\partial\eta}, \quad 0<\xi<\eta<r, \tag{25}$$

$$\frac{\partial u}{\partial\eta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \left[\frac{m+2}{4}(\eta-\xi)\right]^{\frac{-m}{m+2}}\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

При $m=0$, $f(u)=0$ уравнение (1) и условие (25) принимают вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\right)u = 0 \quad \forall\,(x,y)\in\Omega, \tag{26}$$

$$\lim_{\xi\to 0}\frac{\partial u}{\partial\eta} = G\lim_{\xi\to\eta}\sqrt{1-\xi/\eta}\frac{\partial u}{\partial\eta}, \quad 0<\eta<r, \tag{27}$$

где $\Omega = \{(x,y)\colon 0<\xi<\eta<r\}$, $\xi = x+y$, $\eta = x-y$,

$$2\frac{\partial u}{\partial\eta} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Пусть $u=u(x,y)$ – регулярное в области $\Omega$ решение уравнения (26) такое, что $u(x,0)\equiv T(x)\in C^2]0,r[$, $u_y(x,0)\equiv N(x)\in C^1]0,r[$. Тогда

$$2\partial u/\partial\eta = T'(\eta)+N(\eta)\in C(0<\eta<r). \tag{28}$$

Из (28) следует, что при $\xi\to\eta$ выражение $\sqrt{1-\xi/\eta}\,\partial u/\partial\eta\to 0$. Принимая это во внимание, из (27) получаем локальное краевое условие

$$\lim_{\xi\to 0}\frac{\partial u}{\partial\eta} = 0, \quad 0<\eta<r. \tag{29}$$

Равенство (29) говорит о том, что функция $u$ является решением уравнения

$$u_x - u_y = 0.$$

Она будет решением и уравнения

$$u_x^2 - u_y^2 = (u_x+u_y)(u_x-u_y) = 0.$$

Поэтому ясно, что функционал $F(1,u)=0$.

Когда $m\neq 0$, выражение $N(-(-y)^m) = 1+2/m$ и оно положительно при $m>0$ и отрицательно при $-2<m<0$.

Известное в теории смешанных до- и сверхзвуковых течений уравнение Чаплыгина можно записать в виде (1) с $f(u) = 0$, т. е. в форме

$$K(y)u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{30}$$

где $x = \theta$ – угол наклона скорости течения, $0 \leqslant x \leqslant \theta_0$;

$$y = \sigma = \frac{1}{2}\int\limits_{\tau}^{\tau_*} \frac{(1-t)^{\beta}}{t}dt, \quad K(y) = \frac{\tau_* - \tau}{\tau_*(1-\tau)^{1/\tau_*}},$$

$\tau$ – переменная Чаплыгина, $0 < \tau \leqslant 1$, $\tau_* = 1/(2\beta+1)$ – критическая скорость; $u = u(x,y) \equiv \Psi(\theta,\sigma)$ – функция тока [1, с. 279].

Непосредственное вычисление показывает, что

$$\frac{dK}{dy} = \frac{dK}{d\tau}\left(\frac{dy}{d\tau}\right)^{-1} = \frac{4\beta\tau^2}{\tau_*(1-\tau)^{3\beta+2}} \geqslant 0. \tag{31}$$

Итак, функция $K(y)$ при $\tau \to 0$ ($y \to +\infty$) стремится к единице и падает при растущем $\tau$ (убывающем $y$). При переходе через критическую линию $\tau = \tau_*$ ($y = 0$) она меняет знак: $\operatorname{sign} K(y) = \operatorname{sign} y$.

Поскольку (см. [1, с. 283])

$$\sqrt{|K|} - \frac{1}{4\sqrt{|K|}}\frac{dM}{d\sigma} = \sqrt{|K|}\frac{(2+\beta)\tau - 2}{\beta(2\beta+1)\tau^2},$$

то

$$N(K) = \frac{4(\tau_0 - \tau)\tau_*^2}{\tau_0(1-\tau_*)\tau^2}, \tag{32}$$

где $\tau_0 = 2/(2+\beta)$ – значение переменной Чаплыгина $\tau$, при котором число Маха $M_0(\tau) = \sqrt{2\beta\tau/(1-\tau)}$ равняется 2: $M_0(\tau_0) = 2$.

Пусть $\sigma_0(\sigma_1)$ равно значению $\sigma$ при $\tau = \tau_0$ ($\tau = 1$). Равенства (31) и (32) подводят к следующему заключению: $N(K) > 0$ ($N(K) < 0$) тогда и только тогда, когда $\sigma_0 < y < 0$ ($\sigma_2 < y < \sigma_0$).

Если $\Omega \subset \{(x,y)\colon \sigma_0 < y < 0\}$, функция тока $\Psi = u(x,y)$ – регулярное в области $\Omega$ решение уравнения Чаплыгина (30) такое, что

$$\Psi \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega \cup \{(x,y)\colon 0 < x < \theta_0,\ y = 0\}),$$

$$\partial\Psi/\partial\eta = O(1/\sqrt{-K}),\ F(K;\Psi) < \infty,\ \Psi|_{AC} = 0$$

то функционал $F(K;\Psi) \geqslant 0$. Этот результат по существу принадлежит Ф. И. Франклю [1, с. 282].

## Литература


1. Франкль Ф. И. Избранные труды по газовой динамике. М.: Наука, 1978. 711 с.
2. Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1970. 295 с.
3. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, № 10. С. 1770–1786.


Научно-исследовательский институт
прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН

# Об одной задаче начально-граничного управления для дифференциального уравнения смешанного типа

Рассмотрим уравнение в частных производных второго порядка смешанного типа

$$\frac{\partial^{2H(-x)+H(x)}u}{\partial y^{2H(-x)+H(x)}} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ y > 0, \tag{1}$$

где $H(x)$ – функция Хевисайда, $c^2 = a^2H(-x) + b^2H(x)$, $a$ и $b$ – положительные числа, $u = u(x, y)$ – действительная функция точки $z = (x, y)$ евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ независимых переменных $x$ и $y$.

При $x < 0$ уравнение (1) совпадает с волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ y > 0, \tag{2}$$

а при $x > 0$ – с уравнением Фурье

$$\frac{\partial u}{\partial y} = b^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ y > 0. \tag{3}$$

Здесь $y$ играет роль временной переменной, которая меняется от начального $y = 0$ до финального значений $y = T$.

Уравнение (1) является уравнением смешанного гиперболо-параболического типа и оно выступает базовой математической моделью различных физико-биологических процессов, протекающих в составных средах, например, движения газа или малосжимаемой жидкости в канале, окруженном пористой средой [1], [2].

Пусть $\Omega^+ = \{z : x > 0,\, 0 < y < T\}$; $\Omega^-$ – область, ограниченная отрезками $A_0B_0 = \{(0, y) : 0 \le y \le T\}$, $B_0B_l = \{(x, T) : l \le x \le 0\}$, $B_lA_{2l} = \{z : x - ay = 2l,\, 0 \le y \le T\}$ и $A_{2l}A_0 = \{(x, 0),\, 2l \leqslant x \leqslant 0\}$, где $A_0 = (0, 0)$, $B_0 = (0, T)$, $B_l = (l, T)$ – точка пересечения характеристик $A_0B_l : x + ay = 0,\, y \geqslant 0$, $B_lA_{2l} : x - ay = 2l$ и прямой: $y = T$, $A_{2l} = (2l, 0)$; $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^- \cup \{(0, y) : 0 < y < T\}$, $\overline{\Omega}$ – замыкание области $\Omega$, $C_0 = (l/2,\, T/2)$ – точка пересечения характеристик $A_lB_0$: $x - ay = l$ и $A_0B_l$;

Нахушев А. М., Нахушева В. А. Доклады АМАН. 2013, **15**:1, 9–17.

$l = -aT$. Через $\Omega_0$, $\Omega_1$ и $\Omega_2$ обозначим треугольники $A_{2l}A_0B_l$, $A_0B_0C_0$, $B_0B_lC_0$. Характеристика $A_0B_l$ разбивает область $\Omega^-$ на две подобласти $\Omega_0$ и $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \{z : x - ay = l, T/2 < y < T\} = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup C_0B_0$ (см. рис. 1).

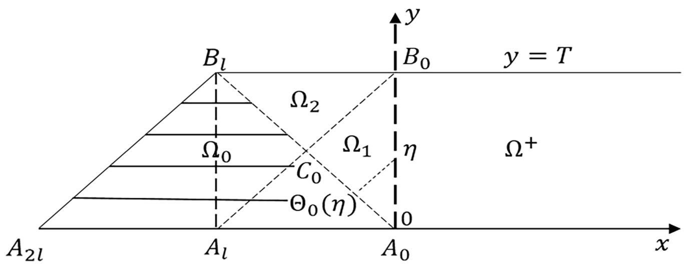


Рис. 1

Решением уравнения (1) в области $\Omega^-$ будем называть любую функцию $u(x, y)$ из класса функций $C(\overline{\Omega}^-)$, непрерывных в $\overline{\Omega}^-$, удовлетворяющую нагруженному уравнению

$$2u(x,y) = \begin{cases} u(x+ay,0) + u(x-ay,0) + \frac{1}{a}\int\limits_{x-ay}^{x+ay} u_y(\xi,0)d\xi, \ z \in \Omega_0, \\ u(0, y+\frac{x}{a}) + u(0, y-\frac{x}{a}) + a\int\limits_{y-x/a}^{y+x/a} u_x(0,\eta)d\eta, \ z \in \Omega_1, \\ u(x+aT-ay,T) + u(x-aT+ay,T) - \frac{1}{a}\int\limits_{x-aT+ay}^{x+aT-ay} u_y(\xi,T)d\xi, \\ z \in \Omega_2, \end{cases} \tag{4}$$

а решением уравнения (1) в области $\Omega^+$ назовем любую функцию $u(x, y) \in C(\overline{\Omega}^+)$, удовлетворяющую нагруженному уравнению

$$u(x,y) = -\frac{b}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^y u_x(+0,\eta)(y-\eta)^{-1/2}\exp\left[-\frac{x^2}{4(y-\eta)b^2}\right]d\eta +$$

$$+\frac{1}{2b\sqrt{\pi y}}\int\limits_0^\infty u(\xi,0)\left[\exp\frac{(x-\xi)^2}{-4yb^2} + \exp\frac{(x+\xi)^2}{-4yb^2}\right]d\xi. \tag{5}$$

Задача начально-граничного управления примыкает к краевой задаче для уравнения

$$D_{0y}^{\alpha H(x)+2H(-x)}u(x,\eta) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < \alpha = \text{const} \leqslant 1, \quad y > 0$$

с оператором Римана–Лиувилля по времени $y$, исследованной в работе [3, с. 189], и ставится следующим образом.

**Задача.** *В области* $\Omega$ *найти решение* $u(z)$ *уравнения* (1) *из класса* $C(\overline{\Omega})$, *удовлетворяющее заданным условиям Коши:*

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad 2l\leqslant x<\infty; \tag{6}$$

$$u_y(x,0)=\psi(x),\quad 2l\leqslant x<0, \tag{7}$$

*произвольно заданному финальному условию:*

$$u(x,T)=\Phi(x),\quad l\leqslant x\leqslant 0, \tag{8}$$

*условию Тихонова:*

$$\lim_{x\to\infty}\max_{[0,T]}|u(x,y)|\exp(-\varepsilon x^2)=0 \tag{9}$$

*и условию сопряжения:*

$$u_x(-0,y)=\beta u_x(+0,y),\ 0<y<T, \tag{10}$$

*где*

$$\varphi(x)\in C[2l,\,\infty[\cap C^1]2l,0[,\qquad \lim_{x\to\infty}|\varphi(x)|\exp(-\varepsilon x^2)=0,$$

$$\psi(x)\in C[2l,0[\cap L[2l,0],\quad \Phi(x)\in C[l,0],\quad \beta=\text{const}\neq 0.$$

Задачу можно интерпретировать и как задачу граничного управления, суть которой состоит в нахождении функции $\tau(y)=u(0,y)$, $0\leq y\leqslant T$, переводящей начальное состояние (6), (7) решения $u(z)=u(x,y)$ уравнения (2) в области $\Omega^-$ в финальное (8), когда известно, что оно продолжается из области $\Omega^-$ через $A_0B_0=\{(0,y)\colon 0<y<T\}$ в область $\Omega^+$ как решение уравнения (3), удовлетворяющее условиям (9), (10).

В основополагающих работах В. А. Ильина [4], [5] впервые предложен метод исследования задач граничного управления для уравнения (2) в прямоугольной области $Q_T=\{z\colon 0<x<l,\ 0<y<T\}$ при любом значении финального времени $T$.

Задаче сопряжения уравнений (2), (3) в области $-\infty<x<\infty$, $0<y<+\infty$ посвящена работа [2].

В области $\Omega_0$ решение задачи определяется как решение задачи Коши (6), (7) для уравнения (2) по следующей хорошо известной формуле:

$$2u(z)=\varphi(x+ay)+\varphi(x-ay)+\frac{1}{a}\int\limits_{x-ay}^{x+ay}\psi(\xi)d\xi,\ z\in\Omega_0. \tag{11}$$

Пусть $\theta_0(\eta)=(-a\eta/2,\,\eta/2)$ – точка пересечения характеристики $x-ay=-a\eta$, выходящей из точки $(0,\eta)\in A_0B_0$ с характеристикой $A_0C_0\colon x+ay=0$.

Из (11) следует, что

$$2u[\theta_0(\eta)] = \varphi(0) + \varphi(-a\eta) + \frac{1}{a}\int\limits_{-a\eta}^{0} \psi(\xi)d\xi,\ 0 < \eta < T. \tag{12}$$

Аналогично из (4) находим, что

$$2u(z) = \tau\left(y + \frac{x}{a}\right) + \tau\left(y - \frac{x}{a}\right) + a\int\limits_{y-x/a}^{y+x/a} \nu^-(\xi)d\xi,\ z \in \Omega_1,$$

где $\tau(y) = u(0,y)$, $\nu^-(y) = u_x(-0,y)$;

$$2u[\theta_0(\eta)] = \varphi(0) + \tau(\eta) + a\int\limits_{\eta}^{0} \nu^-(\xi)d\xi,\ 0 < \eta < T. \tag{13}$$

Равенства (12) и (13) при $\eta = y$ приводят к уравнению

$$\tau(y) - a\int\limits_{0}^{y} \nu^-(\xi)d\xi = \varphi(-ay) + \frac{1}{a}\int\limits_{-ay}^{0} \psi(\xi)d\xi,\ 0 \leqslant y \leqslant T. \tag{14}$$

Из (14), согласно условию сопряжения (10), имеем фундаментальное соотношение между функцией $\tau(y)$ и функцией $\nu(y) = u_x(+0,y)$:

$$\tau(y) - a\beta\int\limits_{0}^{y} \nu(\xi)d\xi = \varphi(-ay) + \frac{1}{a}\int\limits_{-ay}^{0} \psi(\xi)d\xi. \tag{15}$$

Уравнение (15), которое при $\beta = 1$ совпадает с уравнением (14), представляет собой динамическое краевое условие для уравнения (3) в области $\Omega^+$, и его можно записать в виде:

$$\tau(0) = \varphi(0),\ \tau'(y) - a\beta\nu(y) = \psi(-ay) - a\varphi'(-ay),\ 0 < y \leqslant T.$$

Удовлетворив решение (5) краевому условию (6) при $0 < x < \infty$, а затем положив $x = 0$, получим второе функциональное соотношение между $\tau(y)$ и $\nu(y)$:

$$\tau(y) + bD_{0y}^{-1/2}\nu(\eta) = \frac{1}{b\sqrt{\pi}}\varphi_0(y),\ 0 < y < T, \tag{16}$$

где $D_{0y}^{-1/2}$ – оператор Римана–Лиувилля, а

$$\varphi_0(y) = \frac{1}{\sqrt{y}} \int\limits_0^\infty \varphi(\xi) \exp\left[-\frac{\xi^2}{4yb^2}\right] d\xi.$$

Исключим из системы (15), (16) функцию $\tau(y)$. В результате для функции $\nu(y)$ получим интегральное уравнение Вольтерра первого рода:

$$D_{0y}^{-1/2}\nu(\eta) + \lambda D_{0y}^{-1}\nu(\eta) = \mu(y) \tag{17}$$

с параметром $\lambda = a\beta/b$ и правой частью

$$\mu(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}b^2}\varphi_0(y) - \frac{1}{b}\varphi(-ay) - \frac{1}{ab}\int\limits_{-ay}^{0} \psi(\xi)d\xi.$$

Если функция

$$f(y) = D_{0y}^{1/2}\mu(\eta) \in C]0,T] \cap L[0,T], \tag{18}$$

то из уравнения (17) получаем

$$\nu(y) + \lambda D_{0y}^{-1/2}\nu(\eta) = f(y),\ 0 < y \leqslant T. \tag{19}$$

Единственное решение $\nu(y)$ интегрального уравнения Вольтерра второго рода (19) задается формулой Хилле–Тамаркина [6, с. 93]:

$$\nu(y) = \frac{d}{dy}\int\limits_0^y f(\eta)E_{1/2}\left[\lambda(y-\eta)^{1/2}\right] d\eta, \tag{20}$$

где

$$E_\rho[z;\zeta] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\zeta + k/\rho)},\ \rho > 0$$

– функция типа Миттаг-Леффлера, которая при $\zeta = 1$ совпадает с функцией Миттаг-Леффлера $E_{1/\rho}[z] = E_\rho[z;1]$.

Формулу (20) можно записать и в виде

$$\nu(y) = f(y) + \lambda\int\limits_0^y (y-\eta)^{-1/2}E_2\left[\lambda(y-\eta)^{1/2};1/2\right] f(\eta)d\eta. \tag{21}$$

Изучим поведение функции (21) при $y \to 0$. Начнем с функции $\varphi_0(y)$. Легко проверить, что после замены переменной интеграции $\xi = 2b\sqrt{yt}$, в силу равенства $\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$ при $x > 0$, ее можно записать в виде

$$\varphi_0(y) = b\int\limits_0^\infty \left[\varphi(2b\sqrt{yt}) - \varphi(0)\right] e^{-t}t^{-1/2}dt + b\Gamma(1/2)\varphi(0).$$

Отсюда следует, что если

$$\varphi'(x) = |x|^\gamma\varphi_1(x), \quad \psi(x) \in C[2l, 0], \tag{22}$$

где $\gamma = \mathrm{const} > -1$, $\varphi_1(x) \in C[2l, \infty[$, $\varphi_1(0) \neq 0$, то

$$\lim_{y\to+0}\varphi_0(y) = b\sqrt{\pi}\varphi(0), \ \lim_{y\to+0}\mu(0) = 0,$$

$$\varphi_0'(y) = \frac{b^2}{\sqrt{y}}\int\limits_0^\infty \varphi'\left[2b\sqrt{yt}\right]e^{-t}dt, \quad 0 < y \leqslant T,$$

$$\mu'(y) = \frac{1}{b^2\sqrt{\pi}}\varphi_0'(y) + \frac{a}{b}\varphi'(-ay) - \frac{1}{b}\psi(-ay), \quad 0 < y \leqslant T,$$

$$f(y) = D_{0y}^{-1/2}\mu'(\eta) = \frac{1}{b^2\sqrt{\pi}}\partial_{0y}^{1/2}\varphi_0(\eta) + \frac{a}{b}\partial_{0y}^{1/2}\varphi(-a\eta) - \frac{1}{b}D_{0y}^{-1/2}\psi(-a\eta),$$

$$\partial_{0y}^{1/2}\varphi_0(\eta) = \frac{2^\gamma}{\sqrt{\pi}}b^{2+\gamma}\int\limits_0^y \frac{\eta^{\frac{\gamma}{2}-\frac{1}{2}}}{\sqrt{y-\eta}}d\eta\int\limits_0^\infty \varphi_1\left[2b\sqrt{\eta t}\right]e^{-t}dt =$$

$$= \frac{2^\gamma}{\sqrt{\pi}}b^{2+\gamma}y^{\frac{\gamma}{2}}\int\limits_0^1 \frac{\xi^{\frac{\gamma}{2}-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-\xi}}d\xi\int\limits_0^\infty t^{\frac{\gamma}{2}}\varphi_1\left[2b\sqrt{\xi yt}\right]e^{-t}dt,$$

$$\partial_{0y}^{1/2}\varphi(-a\eta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^y \frac{\varphi'(-a\eta)}{\sqrt{y-\eta}}d\eta = \frac{a^\gamma}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^y \frac{\eta^\gamma\varphi_1(-a\eta)}{\sqrt{y-\eta}}d\eta =$$

$$= \frac{a^\gamma}{\sqrt{\pi}}y^{\gamma+1/2}\int\limits_0^1 \frac{\xi^\gamma\varphi_1(-a\xi y)}{\sqrt{1-\xi}}d\xi,$$

$$D_{0y}^{-1/2}\psi(-a\eta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^y \frac{\psi(-a\eta)}{\sqrt{y-\eta}}d\eta = \frac{1}{\sqrt{\pi}}y^{1/2}\int\limits_0^1 \frac{\psi(-a\xi y)}{\sqrt{1-\xi}}d\xi.$$

Теперь нетрудно видеть, что

$$f(y) = y^{\gamma/2}\varphi_{11}(y) + y^{\gamma+1/2}\varphi_{12}(y) + y^{1/2}\psi_1(y), \tag{23}$$

где $\varphi_{11}(y)$, $\varphi_{12}(y)$ и $\psi_1(y)$ принадлежат классу $C[0,T]$,

$$\varphi_{11}(0)=\frac{(2b)^\gamma}{\pi}\varphi_1(0)\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}+1\right)\int\limits_0^1\frac{\xi^{\gamma/2-1/2}}{(1-\xi)^{1/2}}d\xi=\frac{\varphi_1(0)}{\sqrt{\pi}}(2b)^\gamma\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}+\frac{1}{2}\right),$$

$$\varphi_{12}(0)=\frac{a^{\gamma+1}}{b\sqrt{\pi}}\varphi_1(0)\int\limits_0^1\xi^\gamma(1-\xi)^{-1/2}d\xi=\frac{\varphi_1(0)}{b}a^{\gamma+1}\frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+3/2)},$$

$$\psi_1(0)=-\frac{1}{b\sqrt{\pi}}\psi(0)\int\limits_0^1(1-\xi)^{-1/2}d\xi=\frac{2}{b\sqrt{\pi}}\psi(0),$$

и, стало быть, числа $\varphi_{11}(0)$ и $\varphi_{12}(0)\neq 0$, а $\psi_1(0)\neq 0$ при $\psi(0)\neq 0$.

Пусть соблюдено условие (22). Тогда из формулы (21) в силу (24) и функционального соотношения для гамма-функции $2^{\gamma-1}\Gamma\left(\gamma/2+1/2\right)\Gamma\left(\gamma/2+1/2\right)=\sqrt{\pi}\Gamma(\gamma)$ заключаем: если $\gamma\geqslant 0$, то $\nu(y)\in C[0,T]$; если $-1<\gamma<0$, то

$$f(y)=y^{\gamma/2}f_1(y),\quad f_1(y)\in C[0,T],\quad f_1(0)=\varphi_{11}(0)=\frac{2b^\gamma\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma/2)}\varphi_1(0)\neq 0$$

и $\nu(y)$ при $y\to 0$ обращается в бесконечность порядка $-\gamma/2$.

Подставим функцию $\nu(y)$ из (20) в уравнение (15). Тогда будем иметь

$$u(0,y)=a\beta\int\limits_0^y f(\eta)E_{1/2}\left[\lambda(y-\eta)^{1/2}\right]d\eta+\varphi(-ay)+\frac{1}{a}\int\limits_{-ay}^0\psi(\xi)d\xi. \qquad (24)$$

Точки $z_0=(l-x,0)$, $z_1=\left(0,\frac{x-l}{a}\right)$, $z_2=(x,T)$, $z_3=\left(l,-\frac{x}{a}\right)$ при $l<x<0$ для уравнения (2) являются вершинами характеристического четырехугольника $z_0z_1z_2z_3$ со сторонами $z_0z_1$, $z_1z_2$, $z_2z_3$, $z_3z_0$, лежащими в прямоугольнике $A_lA_0B_0B_l$. Для любого решения $u(z)=u(x,y)$ нагруженного уравнения (4) справедлива теорема о среднем значении:

$$u(z_0)+u(z_2)=u(z_1)+u(z_3).$$

Поэтому из финального условия (8) и формул (11), (24) следует, что

$$\varphi(l-x)+\Phi(x)=a\beta\int\limits_0^{(x-l)/a}f(\eta)E_{1/2}\left[\lambda\left(\frac{x-l}{a}-\eta\right)^{1/2}\right]d\eta+$$

$$+\varphi(l-x)+\frac{1}{a}\int\limits_{l-x}^0\psi(\xi)d\xi+\frac{1}{2}\left[\varphi(l-x)+\varphi(l+x)+\frac{1}{a}\int\limits_{l+x}^{l-x}\psi(t)dt\right],\ l\leqslant x\leqslant 0.$$

Стало быть,

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}\left[\varphi(l+x) + \varphi(l-x)\right] + \frac{1}{2a}\int\limits_{l+x}^{l-x}\psi(t)dt +$$

$$+\frac{1}{a}\int\limits_{l-x}^{0}\psi(\xi)d\xi + a\beta\int\limits_{0}^{(x-l)/a} f(\eta)E_{1/2}\left[\lambda\left(\frac{x-l}{a}-\eta\right)^{1/2}\right]d\eta. \tag{25}$$

Пусть

$$2\chi(y) = \varphi(l+ay) + \varphi(l-ay) + \frac{1}{a}\int\limits_{l-ay}^{l+ay}\psi(\xi)d\xi,\ 0 \leqslant y \leqslant T. \tag{26}$$

Тогда из (11) получаем

$$u(l,y) = \chi(y),\ \ 0 \leqslant y \leqslant T. \tag{27}$$

При $\beta = 1$, $u_x(-0,y) = u_x(+0,y) = u_x(0,y)$ уравнение (14) можно переписать в виде

$$u(0,y) - a\int\limits_{0}^{y} u_x(0,\eta)d\eta = \chi_0(y),\ \ 0 \leqslant y \leqslant T, \tag{28}$$

где

$$\chi_0(y) = \varphi(-ay) + \frac{1}{a}\int\limits_{-ay}^{0}\psi(\xi)d\xi,\ \ 0 \leqslant y \leqslant T. \tag{29}$$

В силу (5), (6) и (29) задача по существу свелась к задаче с граничными условиями (7), (8) и начально-финальными условиями

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \ u_y(x,0) = \psi(x),\ u(x,T) = \Phi(x),\ \ l \leqslant x \leqslant 0 \tag{30}$$

для одномерного волнового уравнения (2) в области

$$D = \{z\colon l < x < 0,\ 0 < y < T\}.$$

Поскольку $\nu^-(y) = \beta\nu(y)$, то из (4), в силу (6), (7) и (8), заключаем:

$$2u(z) = \begin{cases} \tau\left(y+\frac{x}{a}\right) + \tau\left(y-\frac{x}{a}\right) + a\beta\int\limits_{y-x/a}^{y+x/a}\nu(\eta)d\eta,\ z\in\Omega_1, \\ \Phi(x-ay+aT) + \Phi(x+ay-aT) - \frac{1}{a}\int\limits_{x+ay-aT}^{x-ay+aT}\Psi(\xi)d\xi,\ z\in\Omega_2, \end{cases} \tag{31}$$

где $\Psi(x) = u_y(x, T)$, $l \leqslant x \leqslant 0$.

Пусть в представлении (22) число $\gamma \geqslant 0$. Так как $\varphi(x) \in C^1]2l, 0[$, $\psi(x) \in C[2l, 0[$, то из (15) получаем

$$\tau'(y) = a\beta\nu(y) + \frac{d\varphi(-ay)}{dy} + \psi(-ay),\ 0 < y \leqslant T. \tag{32}$$

Из (32) и включения $\nu(y) \in C[0, T]$ заключаем, что $\tau'(y) \in C[0, T]$.

На основании (11) можно записать

$$2u_x(z) = \varphi'(x + ay) + \varphi'(x - ay) + \frac{1}{a}[\psi(x + ay) - \psi(x - ay)],\ z \in \Omega_0;$$

$$2u_x(l, y) = \varphi'(l + ay) + \varphi'(l - ay) + \frac{1}{a}[\psi(l + ay) - \psi(l - ay)],\ \ 0 \leqslant y \leqslant T,$$

$$2u_x\left(l, -\frac{x}{a}\right) = \varphi'(l - x) + \varphi'(l + x) + \frac{1}{a}[\psi(l - x) - \psi(l + x)], \tag{33}$$

$$2u_y(z) = a[\varphi'(x + ay) - \varphi'(x - ay)] + \psi(x + ay) + \psi(x - ay),$$

$$2u_y(l, y) = a[\varphi'(l + ay) - \varphi'(l - ay)] + \psi(l + ay) + \psi(l - ay),$$

$$2u_y\left(l, -\frac{x}{a}\right) = a[\varphi'(l - x) - \varphi'(l + x)] + \psi(l - x) + \psi(l + x). \tag{34}$$

К функциям $u_x(z)$ и $u_y(z)$, как и к функции $u(z)$, применим теорему о среднем значении для характеристического четырехугольника $z_0z_1z_2z_3$ и воспользуемся формулами (30), (31), (33), (34). В результате получим

$$\varphi'(l - x) + \Phi'(x) = \nu^-\left(\frac{x - l}{a}\right) + u_x\left(l, -\frac{x}{a}\right) =$$

$$= \beta\nu\left(\frac{x - l}{a}\right) + \frac{1}{2}[\varphi'(l - x) + \varphi'(l + x)] + \frac{1}{2a}[\psi(l - x) - \psi(l + x)];$$

$$\psi(l - x) + \Psi(x) = u_y\left(l, -\frac{x}{a}\right) + \tau'\left(\frac{x - l}{a}\right) =$$

$$= \frac{a}{2}[\varphi'(l - x) - \varphi'(l + x)] + \frac{1}{2}\left[\psi(l - x) + \psi(l + x)\right] + \tau'\left(\frac{x - l}{a}\right).$$

Отсюда на основании (15) и (21) имеем

$$\Phi'(x) = \beta\nu\left(\frac{x - l}{a}\right) + \frac{1}{2}[\varphi'(l + x) - \varphi'(l - x)] + \frac{1}{2a}[\psi(l - x) - \psi(l + x)], \tag{35}$$

$$\Psi(x) = \tau'\left(\frac{x - l}{a}\right) + \frac{a}{2}[\varphi'(l - x) - \varphi'(l + x)] + \frac{1}{2}[\psi(l + x) - \psi(l - x)], \tag{36}$$

где

$$\nu\left(\frac{x-l}{a}\right) = f\left(\frac{x-l}{a}\right) +$$

$$+\lambda \int\limits_0^{(x-l)/a} \left(\frac{x-l}{a} - \eta\right)^{-1/2} E_2\left[\lambda\left(\frac{x-l}{a} - \eta\right)^{1/2}; \frac{1}{2}\right] f(\eta)d\eta,$$

$$\tau'\left(\frac{x-l}{a}\right) = a\beta\nu\left(\frac{x-l}{a}\right) + \psi(l-x) - a\varphi'(l-x),$$

$$\Phi(l) = \frac{1}{2}[\varphi(l+aT) + \varphi(l-aT)] + \frac{1}{2a}\int\limits_{l-aT}^{l+aT} \psi(\xi)d\xi =$$

$$= \frac{1}{2}[\varphi(2l) + \varphi(0)] + \frac{1}{2a}\int\limits_{2l}^{0} \psi(\xi)d\xi.$$

Таким образом установлено, что начальное состояние (6), (7) и финальное состояние $u(x,T) = \Phi(x)$, $u_y(x,T) = \Psi(x)$, $l \leqslant x \leqslant 0$ системы, задаваемой уравнением (1), условием Тихонова (9) и условием сопряжения (10), при $\gamma \geqslant 0$ должны быть связаны формулами (26), (35) и (36).

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-01-00142-а).*

## Литература

1. Джураев Т. Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: ФАН, 1979. 240 с.
2. Стручина Г. М. Задача о сопряжении двух уравнений // Инженерно-физический журнал. 1961. Т. IV, № 11. С. 99–104.
3. Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их применение. М.: Наука, 2012. 232 с.
4. Ильин В. А. Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 11. С. 1513–1528.
5. Ильин В. А. Граничное управление процессом колебаний на одном конце при закрепленном втором конце в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергии // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 12. С. 1670–1686.
6. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН

# Дробное исчисление

## Обратные задачи для вырождающихся уравнений и интегральные уравнения Вольтерра третьего рода

**1. Обратные задачи для уравнения Эйлера–Дарбу–Пуассона.** В теории вырождающихся дифференциальных уравнений при отыскании решений краевых, начальных или смешанных задач, принадлежащих наперед заданным функциональным пространствам, естественным образом возникают (особенно в случае, когда часть границы области задания уравнения освобождена от граничных условий) следующие две взаимно обратные задачи. Пусть $L = \{L^s\}$ – семейство (в частности, однопараметрическое) линейных дифференциальных операторов $L^s$ с одной и той же областью определения $D(L)$; $f = \{f_s\}$ – пространство достаточно гладких в некоторой заданной $n$-мерной области $\Omega$ функций $f_s(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$; $B$ – принадлежащее $D(L)$ пространство функций $u(x)$, $x \in \Omega$, удовлетворяющих наперед заданным краевым условиям на границе $\partial\Omega$ или на ее части.

**Задача 1.** *По заданному оператору $L^\beta \in L$ найти функции $u \in B$ и $f_s \in f$, удовлетворяющие уравнению $L^\beta u = f_s$.*

**Задача 2.** *По заданной правой части $f_\beta \in f$ найти функцию $u \in B$ и оператор $L^\beta \in L$, если известно, что $L^\beta u = f_\beta$.*

Основная цель этого параграфа – продемонстрировать сказанное на примере уравнения Эйлера–Дарбу–Пуассона

$$E(\beta', \beta)u \equiv u_{xy} + \frac{\beta'}{y-x}u_x - \frac{\beta}{y-x}u_y = \frac{f_s(x,y)}{(y-x)^\mu}, \tag{1}$$

где $\mu = \text{const} < 2$, к которому сводятся многие вырождающиеся гиперболические уравнения, например, уравнение

$$y^{2m}u_{xx} + yu_{yy} + \alpha u_y = f(x,y), \quad m,\, \alpha = \text{const}\,, \tag{2}$$

предложенное и исследованное А. В. Бицадзе [1], [2], как модель уравнений смешанного типа, порядок которого вырождается вдоль линии изменения типа.

Задачи 1 и 2 являются обратными в смысле терминологии монографии [3]. Обратным задачам для строго гиперболических уравнений в несколько иной постановке посвящены работы [3–10].

Предварительно докажем ряд вспомогательных утверждений, характеризующих свойства всех решений уравнения (1).

Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1974, **10**:1, 100–111.

Обозначим через $\Omega$ область $0 < x < y < 1$ евклидовой плоскости переменных $x$ и $y$, через $D(\beta', \beta)$ – множество действительных функций $u = u(x, y)$ с непрерывной в $\Omega$ смешанной производной, принадлежащих классу $C(0 \leqslant x < y \leqslant 1) \cap C^1(\Omega)$ и таких, что

$$u_0(y) = u(0, y) \in C^1(0 < y \leqslant 1), \quad u_1(x) = u(x, 1) \in C^1(0 \leqslant x < 1).$$

Из свойств функции Римана [11], [12]

$$R(\xi, \eta; x, y) = (\eta - \xi)^{\beta+\beta'}(\eta - x)^{-\beta}(y - \xi)^{-\beta'} F(\beta, \beta', 1; \sigma_{\xi\eta}),$$

где $\sigma_{\xi\eta} = [(x - \xi)(\eta - y)]/[(\eta - x)(y - \xi)]$, оператора $E(\beta', \beta)$ следует, что для функций $u \in D(\beta', \beta)$ и $f_s(x, y) \in C(0 \leqslant x < y \leqslant 1)$ уравнение (1) эквивалентно соотношению

$$u = (1 - x)^{-\beta} y^{-\beta'} F(\beta, \beta', 1; \sigma_{01}) u_1(0) -$$

$$- y^{-\beta'} \int\limits_y^1 \left[\eta u_0'(\eta) + \beta' u_0(\eta)\right] \eta^{\beta+\beta'-1}(\eta - x)^{-\beta} F(\beta, \beta', 1; \sigma_{0\eta}) d\eta +$$

$$+ (1-x)^{-\beta} \int\limits_0^x \left[(1-\xi) u_1'(\xi) - \beta u_1(\xi)\right](1-\xi)^{\beta+\beta'-1}(y-\xi)^{-\beta'} F(\beta, \beta', 1; \sigma_{\xi 1}) d\xi -$$

$$- \int\limits_0^x (y - \xi)^{-\beta'} d\xi \int\limits_y^1 (\eta - \xi)^{\beta+\beta'-\mu}(\eta - x)^{-\beta} F(\beta, \beta', 1; \sigma_{\xi\eta}) f_s(\xi, \eta) d\eta. \quad (3)$$

**Теорема 1.** *Пусть $\beta + \beta' < 1$, $\beta \leqslant 1$, $\beta' \leqslant 1$. Тогда любое решение $u(x, y)$ уравнения (1) из $D(\beta', \beta)$ непрерывно всюду в $\overline{\Omega}$ за исключением быть может точек $(0, 0)$ и $(1, 1)$ причем если $\beta < 1$ и $\beta' < 1$, то*

$$\frac{\Gamma(1 - \beta)\Gamma(1 - \beta')}{\Gamma(1 - \beta - \beta')} \lim_{(x,y)\to(x,x)} u(x, y) = (1 - x)^{-\beta} x^{-\beta'} u_1(0) -$$

$$- x^{-\beta'} \int\limits_x^1 \Phi_{\beta'}(\eta) \eta^{\beta+\beta'-1}(\eta - x)^{-\beta} d\eta + (1 - x)^{-\beta} \int\limits_0^x \Psi_\beta(\xi)(1 - \xi)^{\beta+\beta'-1}(x - \xi)^{-\beta'} d\xi -$$

$$- \int\limits_0^x (x - \xi)^{-\beta'} d\xi \int\limits_x^1 (\eta - \xi)^{\beta+\beta'-\mu}(\eta - x)^{-\beta} f_s(\xi, \eta) d\eta, \quad 0 < x < 1, \quad (4)$$

*где*

$$\Phi_{\beta'}(\eta) = \eta u_0'(\eta) + \beta' u_0(\eta), \qquad \Psi_\beta(\xi) = (1 - \xi) u_1'(\xi) - \beta u_1(\xi),$$

*если же один из параметров $\beta$ или $\beta'$ равен 1, например $\beta' = 1$, то*

$$\beta \lim_{(x,y)\to(x,x)} u(x,y) = \int_x^1 (\eta - x)^{1-\mu} f_s(x,\eta)d\eta - \Psi_\beta(x). \qquad (5)$$

Равенство (4) вытекает из представления (3), если принять во внимание, что

$$\lim_{z\to 1-0} F(\beta,\beta',1;z) = \frac{\Gamma(1-\beta-\beta')}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\beta')}.$$

При $\beta' = 1$ из (3), с учетом равенства $F(\beta,1,1;z) = (1-z)^{-\beta}$, после элементарных преобразований будем иметь

$$u(x,y) = (y-x)^{-\beta} y^\beta u_0(y) +$$

$$+(y-x)^{-\beta} \int_0^x (y-\xi)^{\beta-1} \left[\Psi_\beta(\xi) - \int_y^1 (\eta-\xi)^{1-\mu} f_s(\xi,\eta)d\eta\right] d\xi =$$

$$= (y-x)^{-\beta} y^\beta u_0(y) + \int_0^{x/y} (1-t)^{-\beta-1} \left[\Psi_\beta\left(\frac{x-yt}{1-t}\right) -\right.$$

$$\left. - \int_y^1 \left(\eta - \frac{x-yt}{1-t}\right)^{1-\mu} f_s\left(\frac{x-yt}{1-t},\eta\right) d\eta\right] dt.$$

Отсюда предельным переходом получим (5). Из (5) следует, что если

$$\int_x^1 (\eta-x)^{1-\mu} f_s(x,\eta)d\eta = \Psi_\beta(x), \qquad 0 < x < 1,$$

то любое решение $u \in D(1,\beta)$ уравнения

$$E(1,\beta)u = (y-x)^{-\mu} f_s(x,y)$$

обращается в нуль при $y \to x$.

**Теорема 2.** *Пусть $\beta' = n+1$, $\beta < -n$, $n = 0, 1, \ldots, f_s(x,y) \equiv 0$, $\Psi_\beta(x) \equiv 0$. Тогда все решения $E(\beta',\beta)u = 0$ из класса $D(\beta',\beta)$ обращаются в нуль при $y \to x$.*

Результаты теоремы 1 при $f_s \equiv 0$ и теоремы 2 в основном были получены Т. Ш. Кальменовым в его кандидатской диссертации «О влиянии коэффициентов при младших производных на корректность задач Дарбу и Гурса ...». Ташкент, 1973.

Действительно, общее решение в указанном классе на основании (3) имеет вид

$$u(x,y) = (1-x)^{-\beta} y^{-n-1} F(\beta, n+1, 1; \sigma_{01}) u_1(0) -$$

$$- y^{-n-1} \int\limits_y^1 \Phi_{n+1}(\eta) \eta^{\beta+n} (\eta - x)^{-\beta} F(\beta, n+1, 1; \sigma_{0\eta}) d\eta.$$

Хорошо известно, что

$$F(\beta, n+1, 1; z) = (1-z)^{-\beta-n} P_n^{(0,-\beta-n)}(1-2z),$$

где $P_n^{(\alpha,\beta)}(z) = (-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(z)$ – многочлен Якоби [12]. Стало быть

$$u(x,y) = y^{\beta-1}(y-x)^{-\beta-n} \Big[ (1-x)^n u_1(0) P_n^{(0,-\beta-n)}(1 - 2\sigma_{01}) -$$

$$- \int\limits_y^1 \Phi_{n+1}(\eta - x)^n P_n^{(0,-\beta-n)}(1 - 2\sigma_{0\eta}) d\eta \Big].$$

Следовательно, функция $u(x,y)$ при $y \to x$, $0 < x < 1$, обращается в нуль порядка не ниже $-\beta - n$.

Изложенный в теореме 2 факт неединственности решения первой краевой задачи Дарбу впервые был замечен Т. Ш. Кальменовым [13] в случае, когда $\beta + \beta' = 1/2$.

**Теорема 3.** *Пусть* $\beta + \beta' > 1$, $\beta\beta' > 0$ *и* $u(x,y)$ *– любое решение уравнения* (1) *из класса* $D(\beta', \beta)$. *Равенство*

$$\lim_{(x,y)\to(x,x)} (y-x)^{\beta+\beta'-1} u(x,y) = 0$$

*имеет место тогда и только тогда, когда*

$$\int\limits_0^x (x-\xi)^{\beta-1} d\xi \int\limits_x^1 (\eta - \xi)^{1-\mu} (\eta - x)^{\beta'-1} f_s(\xi, \eta) d\eta - (1-x)^{\beta'-1} x^{\beta-1} u_1(0) =$$

$$= (1-x)^{\beta'-1} \int\limits_0^x \Psi_\beta(\xi)(x-\xi)^{\beta-1} d\xi - x^{\beta-1} \int\limits_x^1 \Phi_{\beta'}(\eta)(\eta - x)^{\beta'-1} d\eta. \qquad (6)$$

Пользуясь тождеством

$$E(\beta', \beta) u = (y-x)^{1-\beta-\beta'} E(1-\beta, 1-\beta')(y-x)^{\beta+\beta'-1} u,$$

соотношение (3) можно представить в форме

$$(y-x)^{\beta+\beta'-1}u=(1-x)^{\beta'-1}y^{\beta-1}F(1-\beta',\,1-\beta,\,1;\,\sigma_{01})u_1(0)-$$

$$-\,y^{\beta-1}\int\limits_y^1\Phi_{\beta'}(\eta)(\eta-x)^{\beta'-1}F(1-\beta',\,1-\beta,\,1;\,\sigma_{0\eta})d\eta+$$

$$+\,(1-x)^{\beta'-1}\int\limits_0^x\Psi_\beta(\xi)(y-\xi)^{\beta-1}F(1-\beta',\,1-\beta,\,1;\,\sigma_{\xi1})d\xi+$$

$$+\int\limits_0^x(y-\xi)^{\beta-1}d\xi\int\limits_1^y(\eta-\xi)^{1-\mu}(\eta-x)^{\beta'-1}F(1-\beta',\,1-\beta,\,1;\,\sigma_{\xi\eta})f_s(\xi,\eta)d\eta.\quad(7)$$

Поскольку

$$\lim_{\sigma\to1-0}F(1-\beta',\,1-\beta,\,1;\,\sigma)=\frac{\Gamma(\beta+\beta'-1)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')},$$

то справедливость теоремы 3 вытекает из (7).

Теоремы 1, 2 и 3 прямо приводят нас к необходимости исследования обратных задач типа 1 и 2. Из этих теорем видно так же *как правильно надо ставить прямые и обратные задачи.* Например, в случае, когда оператор $E(\beta',\beta)$ задан, уравнение (6) содержит три произвольные функции $f_s(x,y)$, $u_0(y)$, $u_1(x)$. Если задать две из них, то для третьей получается интегральное уравнение первого рода. Когда известны функции $u_0(y)$ и $u_1(x)$, т. е. данные Гурса, интегральное уравнение для $f_s(x,y)$ в соответствии с (6) имеет вид

$$\int\limits_0^x(x-\xi)^{\beta-1}d\xi\int\limits_x^1(\eta-x)^{\beta'-1}(\eta-\xi)^{1-\mu}f_s(\xi,\eta)d\eta=\Psi(x).$$

Задачи типа 1 даже в их простейшей постановке приводят к интегральным уравнениям Вольтерра третьего рода.

Рассмотрим задачу 1 в предположении, что

1) $L^\beta\equiv E(0,\beta)$, $\beta>1$, $D(L)=D(0,\beta)$;

2) $B$ – пространство функций $u(x,y)$ из $D(L)\cap C(\overline{\Omega})$, удовлетворяющих краевым условиям Гурса

$$u(0,x)=\varphi_0(x),\quad u(x,1)=\psi_\beta(x),\quad 0<x<1,\qquad(8)$$

где $\varphi_0(x)$, $\psi_\beta(x)$ – заданные функции;

3) $f = \{f_s\}$ – пространство функций $f_s(x, y)$, представимых в виде

$$f_s(x, y) = -(\beta - \mu + 1)\varphi(y) + \lambda\varphi(x), \qquad \lambda = \mathrm{const}\,, \tag{9}$$

где $\varphi(x) \in C(0 \leqslant x \leqslant 1)$.

В силу (3) искомые функции $u \in B$ и $f_s \in f$ должны быть связаны уравнением

$$u(x, y) = \psi_\beta(x) - \int\limits_y^1 \left[\eta^\beta \varphi_0'(\eta) + \int\limits_0^x \frac{f_s(\xi, \eta)d\xi}{(\eta - \xi)^{\mu-\beta}}\right] \frac{d\eta}{(\eta - x)^\beta} =$$

$$= \psi_\beta(x) - (y - x)^{1-\beta} \int\limits_0^{(1-y)/(1-x)} \left[\eta^\beta \varphi_0'(\eta) + \int\limits_0^x \frac{f_s(\xi, \eta)d\xi}{(\eta - \xi)^{\mu-\beta}}\right] \frac{dt}{(1 - t)^{2-\beta}}, \tag{10}$$

где $\eta = (y - xt)/(1 - t)$. Из этого уравнения легко видеть, что $u \in B$ тогда и только тогда, когда

$$x^\beta \varphi_0'(x) + \int\limits_0^x (x - \xi)^{\beta-\mu} f_s(\xi, x)d\xi = 0. \tag{11}$$

Если соблюдено (8), то

$$u(x, y) = \psi_\beta(x) + \int\limits_y^1 (\eta - x)^{-\beta} d\eta \int\limits_x^\eta (\eta - \xi)^{\beta-\mu} f_s(\xi, \eta)d\xi =$$

$$= \psi_\beta(x) + \int\limits_y^1 (\eta - x)^{1-\mu} d\eta \int\limits_0^1 t^{\beta-\mu} f_s(\eta - \eta t + xt, \eta)dt.$$

Из (9), согласно (8), заключаем, что задача 1 эквивалентна интегральному уравнению Вольтерра третьего рода

$$x^\alpha \varphi(x) - \lambda \int\limits_0^x \frac{\varphi(t)dt}{(x - t)^{1-\alpha}} = x^\beta \varphi_0'(x), \tag{12}$$

где $\alpha = 1 + \beta - \mu$.

Рассмотрим теперь задачу 2 в предположении, что

1) $L = \{L^\beta\}$, $L^\beta \equiv E(0, \beta)$, $\beta > 1$, $D(L) = D(0, \beta)$;

2) $f_\beta$ – заданная функция из $f \in C(\overline{\Omega})$;

3) $B$ – пространство функций $u(x,y)$ из $D(L)$, удовлетворяющих условиям

$$u(x,1) = \psi_\beta(x), \quad \lim_{y\to x}(y-x)^\varepsilon u(x,y) = \tau(x), \quad 0 < x < 1,$$

где $\varepsilon$ – заданное положительное число, а $\psi_\beta(x)$ и $\tau(x)$ – заданные функции из классов $C(0 \leqslant x < 1)$ и $C(0 \leqslant x \leqslant 1)$ соответственно, причем $\tau(x) \neq 0$ при $0 < x < 1$.

Очевидно, задача 2 в такой постановке всегда разрешима и притом единственным образом.

Действительно, из формулы (10) заключаем, что

$$\lim_{y\to x}(y-x)^\varepsilon u(x,y) = -\lim_{y\to x}(y-x)^{\varepsilon+1-\beta}\times$$

$$\times \int\limits_0^{(1-y)/(1-x)} \left[\eta^\beta \varphi_0'(\eta) + \int\limits_0^x (\eta-\xi)^{\beta-\mu} f_\beta(\xi,\eta)d\xi\right](1-t)^{\beta-2}dt.$$

Стало быть $\beta = 1+\varepsilon$, а

$$x^\beta \varphi_0'(x) = -\varepsilon\tau(x) - \int\limits_0^x (x-\xi)^{\beta-\mu} f_\beta(\xi,x)d\xi.$$

Следовательно,

$$u(x,y) = \psi_\beta(x) + \varepsilon\int\limits_y^1 \tau(\eta)(\eta-x)^{-1-\varepsilon}d\eta + \int\limits_y^1 (\eta-x)^{-1-\varepsilon}d\eta\,\times$$

$$\times\int\limits_0^\eta (\eta-\xi)^{1+\varepsilon-\mu} f_\beta(\xi,\eta)d\xi - \int\limits_y^1 (\eta-x)^{-1-\varepsilon}d\eta \int\limits_0^x (\eta-\xi)^{1+\varepsilon-\mu} f_\beta(\xi,\eta)d\xi.$$

Исследуем еще один из возможных вариантов задачи 1, а именно случай, когда

1) $L^\beta \equiv E(1,1)$, $D(L) = D(1,1)$;

2) $B$ – пространство функций $u(x,y)$ из $D(L)\cap C(\overline{\Omega})$, удовлетворяющих краевым условиям

$$u(0,x) = \varphi_1(x), \quad u(x,x) = \tau(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

где $\varphi_1(x)$ и $\tau(x)$ – заданные функции из класса $C^1(0 \leqslant x \leqslant 1)$;

3) $f$ – пространство функций $f_s$, представимых в виде (9).

Покажем, что в рассматриваемом случае задача 1 эквивалентна уравнению Вольтерра третьего рода

$$x^{2-\mu}\varphi(x) - \lambda \int\limits_0^x (x-\xi)^{1-\mu}\varphi(\xi)d\xi = [x\varphi_1(x)]' - \tau(x). \tag{13}$$

Действительно, при $\beta = \beta' = 1$ из (7) имеем

$$(y-x)u = y\varphi_1(y) + (1-x)u_1(x) - u_1(0) - \int\limits_0^x d\xi \int\limits_y^1 (\eta-\xi)^{1-\mu} f_s(\xi,\eta)d\eta.$$

Очевидно, $u \in C(\overline{\Omega})$ тогда и только тогда, когда

$$(1-x)u_1(x) - u_1(0) = \int\limits_0^x d\xi \int\limits_x^1 (\eta-\xi)^{1-\mu} f_s(\xi,\eta)d\eta - x\varphi_1(x).$$

Поэтому

$$(y-x)u = y\varphi_1(y) - x\varphi_1(x) + \int\limits_0^x d\xi \int\limits_x^y (\eta-\xi)^{1-\mu} f_s(\xi,\eta)d\eta =$$

$$= (y-x)\int\limits_0^1 \left\{ [\eta\varphi_1(\eta)]' + \int\limits_0^x (\eta-\xi)^{1-\mu} f_s(\xi,\eta)d\xi \right\} dt,$$

где $\eta = x + (y-x)t$. Следовательно,

$$\int\limits_0^x (x-\xi)^{1-\mu} f_s(\xi,x)d\xi = \tau(x) - [x\varphi_1(x)]'. \tag{14}$$

Из (14) с учетом (9), где $\beta = 1$, получаем (13).

В заключение этого параграфа отметим, что задачи типа 1 и 2 возникают и при исследовании принадлежности решения задачи $E$ [14] (по терминологии М. В. Келдыша) наперед заданным функциональным пространствам, например, С. Л. Соболева [15] $W_2^k(\Omega)$, $k = 0, 1, \ldots$, для уравнения

$$y^m u_{yy} + u_{xx} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega.$$

Обратные задачи типа 1 и 2 возникают также и при исследовании задачи Трикоми в ее классической постановке [16] для уравнения смешанного типа с непрерывными коэффициентами, когда многообразие изменения типа является характеристическим, или для уравнения вида (2) особенно тогда, когда нарушено условие $1/2 - m \leqslant \alpha < 1$ А. В. Бицадзе [1].

**2. К теории интегральных уравнений Вольтерра третьего рода и связанных с ними вырождающихся дифференциальных уравнений с дробными производными.** В этом параграфе в основном будет исследован вопрос о спектре и разрешимости уравнения (12), ограничиваясь наиболее интересным случаем, когда $0 < \alpha < 1$.

Примем следующие обозначения:

$$D^l_{ax} f \equiv \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(-l)} \displaystyle\int\limits_a^x \dfrac{f(t)dt}{(x-t)^{1+l}}, \ \ l < 0, \\ \dfrac{d}{dx} D^{l-1}_{ax} f, \ \ l > 0, \end{cases} \qquad (a < x);$$

$$D^l_{xb} f \equiv \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(-l)} \displaystyle\int\limits_x^b \dfrac{f(t)dt}{(t-x)^{1+l}}, \ \ l < 0, \\ -\dfrac{d}{dx} D^{l-1}_{xb} f, \ \ l > 0, \end{cases} \qquad (x < b).$$

Операторы $D^l_{ax}$ и $D^l_{xb}$ являются операторами дробного интегрирования порядка $-l$ при $l < 0$ и дробного дифференцирования порядка $l$ при $l > 0$. Хорошо известно, что

$$D^{-l}_{ax} D^l_{ax} \varphi = \varphi, \qquad (\varphi, D^l_{ax}\psi)_0 = (\psi, D^l_{xb}\varphi)_0,$$

где $(\cdot,\cdot)$ означает скалярное произведение в пространстве $L_2[a,b]$.

Ниже понадобится следующий весьма простой *принцип экстремума для оператора $D^l_{ax}$ дробного дифференцирования.*

Пусть неубывающая, неотрицательная функция $\omega(t) \neq 0$ и функция $f(t)$ принадлежит классу $C(a \leqslant t \leqslant x)$ и в сколь угодно малой окрестности $a < \delta \leqslant t \leqslant x$ точки $t = x$ произведение $\omega(t)f(t)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $h > l$. Тогда *если на сегменте $a \leqslant t \leqslant x$ функция $f(t)$ достигает положительного максимума (отрицательного минимума) в точке $t = x$, то $D^l_{ax}\,\omega f > 0$ $(< 0)$ для любого $l > 0$.* Это утверждение является тривиальным следствием легко проверяемого тождества

$$\Gamma(1-l) D^l_{ax}\,\omega f = \frac{\omega(x)f(x)}{(x-a)^l} + l \int\limits_a^\delta \frac{\omega(x)f(x) - \omega(t)f(t)}{(x-t)^{1+l}} dt +$$

$$+ l \int_{\delta}^{x} \frac{\omega(x)f(x) - \omega(t)f(t)}{(x-t)^{1+l}} dt.$$

Принцип экстремума для оператора $D^l_{ax}$ (и $D^l_{xb}$ с соответствующими изменениями) широко используется при доказательстве хорошо известного принципа экстремума А. В. Бицадзе [17, 18, 1] для уравнений смешанного типа.

Рассмотрим *интегро-дифференциальное уравнение с дробными производными порядка* $\alpha$, $0 < \alpha < 1$,

$$D_\alpha \varphi \equiv D^\alpha_{0x} x^\beta \varphi + a_j(x) D^{\alpha_j}_{0x} \varphi + b(x)\varphi = c(x), \qquad 0 < x < 1, \tag{15}$$

где $\beta \geqslant 0$, $0 \neq \alpha_j < \alpha$ и по повторяющемуся индексу $j$ подразумевается суммирование от 1 до $m$.

Относительно коэффициентов и правой части уравнения (15) будем предполагать, что $a_j(x) \in C^1(\overline{J})$ при $\alpha_j > 0$, $a_j(x) \in C(\overline{J})$ при $\alpha_j < 0$, а $b(x)$ и $c(x)$ принадлежат $C(\overline{J})$, где $J$ – интервал $0 < x < 1$.

Обозначим банахово пространство функций $\varphi(x) \in C(0 < x \leqslant 1)$ с конечной нормой

$$\|\varphi\|_\gamma = \max_{\overline{J}} |x^\gamma \varphi(x)|, \qquad \gamma \equiv \mathrm{const},$$

через $C_\gamma(J)$, а через $a_i(x)$ – первый отличный от тождественного нуля коэффициент уравнения (15). Уравнение

$$D^*_\alpha \psi \equiv x^\beta D^\alpha_{x1} \psi + D^{\alpha_j}_{x1} a_j \psi + b(x)\psi = c^*(x) \tag{16}$$

сопряжено с уравнением (15) в том смысле, что

$$(\psi,\, D_\alpha \varphi)_{L_2(J)} = (\varphi,\, D^*_\alpha \psi)_{L_2(J)}, \quad \forall\, \varphi,\ \psi \in L_2(J).$$

Легко видеть, что *уравнение* (16) *в классе* $C(0 < x \leqslant 1)$ *имеет не более одного решения.*

В силу принципа экстремума для дробной производной имеет место следующее утверждение.

*Пусть*

$$a_j(x) \geqslant 0,\ \forall\, j,\ b(x) \geqslant 0,\ \ 0 < x < 1,\ \ \alpha_m > 0$$

*и* $\varphi(x)$ *– решение уравнения* $D_\alpha \varphi = 0$ *из пространства* $C_0(J)$, *удовлетворяющее условию Гельдера порядка* $h > \alpha$ *в интервале* $J$. *Тогда положительный максимум и отрицательный минимум функции* $\varphi(x)$ *в* $\overline{J}$ *достигается лишь в точке* $x = 0$.

Следовательно, если $\alpha > \beta$, то в классе функций $\varphi(x)$, для которых $D_{0x}^{\alpha} x^{\beta}\varphi \in C_0(J) \equiv C(\overline{J})$, уравнение (15) не может иметь более одного решения.

Нетрудно показать, что *если*

$$\beta < \alpha - \alpha_i H(\alpha_i), \tag{17}$$

где $H(x)$ – функция Хевисайда, *то для любой правой части* $c(x) \in C_0(J)$ *существует и притом единственное решение уравнения* (15) из пространства $C_{\beta}(J)$.

Действительно, непосредственным вычислением можно убедиться, что выражение $D_{0x}^{-\alpha} a_j D_{0t}^{\alpha_j}\varphi$ при $\alpha_j < 0$ равно

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(-\alpha_j)} \int\limits_0^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha+\alpha_j}} \int\limits_0^1 \frac{a_j[t+(x-t)\xi]d\xi}{\xi^{1+\alpha_j}(1-\xi)^{1-\alpha}},$$

а при $\alpha_j > 0$ равно

$$\frac{-1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha_j)} \int\limits_0^x \varphi(t)dt \, \frac{d}{dt}(x-t)^{\alpha-\alpha_j} \int\limits_0^1 \frac{a_j[t+(x-t)\xi]d\xi}{\xi^{\alpha_j}(1-\xi)^{1-\alpha}}.$$

Принимая это во внимание, убеждаемся в эквивалентности уравнения (15) интегральному уравнению Вольтерра третьего рода

$$x^{\beta}\varphi(x) - \int\limits_0^x \frac{k_i(x,t)}{(x-t)^{\beta_i}}\varphi(t)dt = D_{0x}^{-\alpha}c,$$

где $\beta_i = 1 - \alpha + \alpha_i H(\alpha_i)$, а $k_i(x,t)$ зависит лишь от $a_j(x)$, $b(x)$ и принадлежит $C(\overline{J} \times \overline{J})$.

По стандартной схеме (см., например, [19, с. 81 и 26]) можно показать существование такого натурального числа $n$, что $n$-я степень оператора

$$A_i\psi \equiv \int\limits_0^x \frac{k_i(x,t)}{t^{\beta}(x-t)^{\beta_i}}\psi(t)dt,$$

отображающего пространство $C_0(J)$ в себя, является сжатым. Это и доказывает справедливость сделанного выше утверждения.

При *нарушении условия* (17) *на однозначную разрешимость уравнения* (15) *существенную роль оказывают коэффициенты этого уравнения.*

Остановимся более подробно на уравнении

$$D_{0x}^{\alpha} x^{\alpha}\varphi - \lambda\Gamma(\alpha)\varphi = c(x), \tag{18}$$

которое является простой моделью уравнений с дробными производными, когда порядок вырождения $\beta$ совпадает с порядком $\alpha$ самого уравнения.

Уравнение (18) редуцируется к уравнению такого же рода, что и (11), (13). А именно к уравнению вида

$$x^{\alpha}\varphi(x) - \lambda \int\limits_0^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = f(x). \tag{19}$$

Уравнение (19) было объектом исследования многих авторов [20–25].

Если $\lambda \leqslant 0$, то из установленного выше принципа экстремума следует, что однородное уравнение

$$V_{\alpha}\varphi \equiv x^{\alpha}\varphi(x) - \lambda \int\limits_0^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = 0 \tag{20}$$

в классе функций $\varphi(x)$, принадлежащих $C_0(J)$ и удовлетворяющих при $0 < x \leqslant 1$ условию Гельдера с показателем $h > \alpha$, имеет лишь тривиальное решение.

Для любой непрерывной функции $\varphi(x)$, интегрируемой в интервале $J$, справедливо неравенство

$$(\varphi, D_{0x}^{-\alpha}\varphi)_0 = \int\limits_0^1 \varphi(x) D_{0x}^{-\alpha}\varphi dx \geqslant 0, \tag{21}$$

которое доказывается буквально также, как и в [12, с. 385], где рассмотрен случай $\alpha = 2/3$ и которое показывает положительную определенность оператора дробного интегрирования $D_{0x}^{-\alpha}$.

Из (21) следует, что при $\lambda < 0$

$$\|x^{\alpha/2}\varphi\|_{L_2(J)} \leqslant c\,\|x^{-\alpha/2}V_{\alpha}\varphi\|_{L_2(J)},$$

где $c$, не зависящая от $\varphi$, положительная постоянная.

Следовательно, *в пространстве функций $\varphi(x)$ с конечной нормой, равной $\|x^{\alpha/2}\varphi\|_{L_2(J)}$, уравнение* (20) *не имеет решений, отличных от тривиального.*

Очевидно, для любого $\lambda$ уравнение

$$V_{\alpha}^{*}\psi \equiv x^{\alpha}\psi(x) - \lambda \int\limits_x^1 \frac{\psi(t)dt}{(t-x)^{1-\alpha}} = f^{*}(x), \tag{22}$$

сопряженное с уравнением (19) в классе $C(0 < x \leqslant 1)$, имеет не более одного решения.

Обозначим через $\Lambda$ множество положительных чисел $\lambda$, а через $\sum$ множество чисел $\sigma > -1$. Легко видеть,что уравнение

$$\lambda B(\sigma + 1,\, \alpha) = 1, \tag{23}$$

где

$$B(\sigma + 1,\, \alpha) = \int\limits_0^1 t^\sigma (1-t)^{\alpha-1} dt$$

– бета функция, устанавливает взаимно-однозначное соответствие между $\Lambda$ и $\sum$. Это очевидно, поскольку

$$\frac{d}{d\sigma} B(\sigma + 1,\, \alpha) = \int\limits_0^1 t^\sigma (1-t)^{\alpha-1} \log t\, dt \leqslant 0,$$

$$\lim_{\sigma \to -1} B(\sigma + 1,\, \alpha) = +\infty, \quad \lim_{\sigma \to +\infty} B(\sigma + 1,\, \alpha) = 0, \quad B(1,\, \alpha) = 1/\alpha.$$

Имеет место следующая

**Теорема 4.** *Для любого $\lambda \in \Lambda$ существует число $\sigma \in \sum$ такое, что функции $\varphi(x) = cx^\sigma$, где $c$ – произвольная постоянная, в пространстве $C_{-\sigma}(J)$ образуют собственные функции уравнения (20) или, что одно и то же, оператора $1/\Gamma(\alpha) D_{0x}^\alpha x^\alpha$. В пространстве $C_{-\sigma}(J)$ все собственные значения уравнения (20) являются простыми.*

Эта теорема была доказана в работах [23–25] в основном в случае, когда $-1 < \sigma < 0$, т. е. $0 < \lambda < \alpha$. Дадим очень простое доказательство теоремы 4 в общем случае. Первая часть является тривиальной; число $\sigma$ находится как решение трансцендентного уравнения (23).

Допустим, что собственному значению $\lambda = 1/B(\sigma + 1,\, \alpha)$ в пространстве $C_{-\sigma}(J)$ помимо функций $\varphi_\sigma = x^\sigma$ соответствует еще одна собственная функция $\varphi_1(x) \in C_{-\sigma}(J)$, линейно независимая с $\varphi_\sigma$. Тогда очевидно $\varphi_1(x) = x^\sigma \omega_1(x)$, где $\omega_1(x) \in C_0(J)$ и функция

$$\varphi(x) = x^\sigma \omega(x), \quad \omega(x) = (\|\omega_1\|_0 - \omega_1(x) + 1) \,/\, (\|1 + \|\omega_1\|_0 - \omega_1(x)\|_0)$$

также будет собственной функцией, соответствующей собственному значению $\lambda$. Так как

$$x^{\alpha+\sigma}[1 - \omega(x)] = \lambda \int\limits_0^x \frac{t^\sigma [1 - \omega(t)] dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = \lambda x^{\alpha+\sigma} \int\limits_0^1 \frac{t^\sigma [1 - \omega(tx)] dt}{(1-t)^{1-\alpha}} \geqslant \lambda \mu x^{\alpha+\sigma},$$

$$\mu = \min_{\overline{J}} \int_0^1 \frac{t^\sigma[1-\omega(tx)]}{(1-t)^{1-\alpha}} dt > 0,$$

то $\omega(x) \leqslant 1 - \lambda\mu$. А это противоречит равенству $\|\omega\|_0 = 1$.

Остается теперь показать, что уравнение $A^n\varphi = 0$, $A \equiv x^{-\alpha}V_\alpha$, при любом $n = 2, 3, \ldots$ в пространстве $C_{-\sigma}(J)$ не имеет собственных функций, отличных от собственных функций уравнения $A\varphi = 0$, соответствующих собственному значению $\lambda = 1/B(\sigma+1, \alpha)$.

Пусть существует такое $n$, что $A^n\varphi = 0$ и $A\varphi \neq 0$. Тогда найдется такое $m \geqslant 2$, что $A^m\varphi = 0$, $A^{m-1}\varphi \neq 0$. Так как $AA^{m-1}\varphi = 0$, то $AA^{m-2}\varphi = cx^\sigma$, где $c = \text{const} \neq 0$. Функция $\psi(x) = A^{m-2}\varphi$ – решение уравнения $A\psi = cx^\sigma$ из пространства $C_{-\sigma}(J)$. Отсюда, принимая во внимание, что $\psi(x)$ представима в виде $\psi(x) = x^\sigma\omega(x)$, где $\omega(x) \in C_0(J)$ для $\omega(x)$, получаем уравнение

$$cx^\sigma = x^\sigma\omega(x) - \frac{\lambda}{x^\alpha} \int_0^x \frac{t^\sigma\omega(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}$$

или

$$c = \omega(x) - \lambda \int_0^1 \omega(xt)t^\sigma(1-t)^{\alpha-1}dt. \tag{24}$$

Следовательно, $c = \omega(0)[1-\lambda B(\sigma+1,\alpha)] = 0$, что противоречит нашему допущению.

Таким образом, в указанных выше пространствах спектр оператора $1/\Gamma(\alpha)D_{0x}^\alpha x^\alpha$ (уравнение (20)) совпадает с $\Lambda$.

Из спектральной теории в силу единственности решения сопряженного уравнения (22) следует безусловная разрешимость (в соответствующих пространствах) уравнения (19) для всех $\lambda \notin \Lambda$.

Предположив, что $\lambda = 1/B(\sigma+1, \alpha)$ является собственным значением оператора $\frac{1}{\Gamma(\alpha)}D_{0x}^\alpha x^\alpha$, рассмотрим *одноточечную видоизмененную задачу*

$$\lim_{x\to 0} x^{-\sigma}\varphi(x) = 0 \tag{25}$$

для уравнения

$$\varphi(x) - V\varphi = f(x), \tag{26}$$

где

$$V\varphi \equiv \frac{\lambda}{x^\alpha} \int_0^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}.$$

Поскольку $\|V\varphi\|_{-\gamma} \leqslant q\|\varphi\|_{-\gamma}$, где $q = B(\gamma+1, \alpha)/B(\sigma+1, \alpha) < 1$, $\forall\, \gamma > \sigma$, то для любой правой части $f(x) \in C_{-\gamma}(J)$ существует и притом единственное решение задачи (25), (26) из пространства $C_{-\gamma}(J)$, где $\gamma > \sigma$.

## Литература


1. Бицадзе А. В. К теории одного класса уравнений смешанного типа. В кн.: Некоторые проблемы математики и механики. Л.: Наука, 1970. С. 112–119.
2. Бицадзе А. В. К теории уравнений смешанного типа, порядок которых вырождается вдоль изменения типа. М., 1972. С. 48–52.
3. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Васильев В. Г. Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1969.
4. Прилепко А. И. О некоторых интегральных уравнениях первого рода обратных задач. Применение функциональных методов к краевым задачам математической физики. Новосибирск, 1972. С. 199–205.
5. Прилепко А. И. ДАН СССР. 1961. Т. 139, № 6.
6. Исаков В. М. Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9, № 1.
7. Jones B. G. J. of Math. and Mech. 1962. No. 11. Pp. 907–918.
8. Jones B. G. Com. on Pure and Applied Math. 1963. Vol. 16, no. 1.
9. Connon J. R. Duke Math. J. 1963. Vol. 30, no. 2. Pp. 313–323.
10. Connon J. R. J. of Math. analysis and Applications. 1964. Vol. 8, no. 2. Pp. 188–201.
11. Darboux G. Lecons sur la theorie generale des surfaces et les applications geometriques du calcul infinitesimal. Paris. 1889.
12. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М.: ИЛ, 1957.
13. Кальменов Т. Ш. Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9, № 1.
14. Келдыш М. В. ДАН СССР. 1951. Т. 77, № 2.
15. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962.
16. Трикоми Ф. О линейных уравнениях смешанного типа. М.–Л.: Гостехиздат, 1947.
17. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959.
18. Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1970.
19. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968.
20. Holmgren E. Arkif for mat., astz. och. fysik. Vol. 16, no. 5. Pp. 1–20.
21. Brawne P. I. Comptes Rendues, Ac. Sc. Paris. 1914. Vol. 158. Pp. 1562–1565.
22. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М.–Л.: Гостехиздат, 1948.
23. Михайлов Л. Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его применения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. Душанбе: Изд-во АН ТаджССР, 1963.
24. Михайлов Л. Г. Интегральное уравнение с ядром, однородным степени $-1$. Душанбе: Дониш, 1966.
25. Стеценко В. Я. О простоте максимального собственного значения одного интегрального оператора. В кн.: Исследования по краевым задачам теории функций и дифференциальных уравнений. Душанбе, 1964. С. 133.
26. Гурса Э. Курс математического анализа. Т. 3. М.–Л., 1939.


Поступила в редакцию
3 июля 1973 г.

Институт математики
СО АН СССР

# Задача Штурма–Лиувилля для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с дробными производными в младших членах

В интервале $I = \{x\colon 0 < x < 1\}$ рассмотрим уравнение

$$Ly \equiv y'' + a_0(x)y' + \sum_{j=1}^{m} a_j(x) D_{0x}^{\alpha_j} \omega_j(x) y + a_{m+1}(x) y = f(x), \tag{1}$$

где $0 < \alpha_m < \ldots < \alpha_2 < \alpha_1 = \alpha < 1$, $D_{0x}^{\sigma}$ – оператор дробного (в смысле Римана–Лиувилля) дифференцирования порядка $\sigma$:

$$D_{0x}^{\sigma}\varphi \equiv \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{\sigma}}, \quad 0 < \sigma < 1.$$

К задаче Штурма–Лиувилля

$$p_0 y'(0) + q_0 y(0) = r_0, \quad p_1 y'(1) + q_1 y(1) = r_1 \tag{2}$$

для уравнения вида (1) эквивалентно редуцируются многие прямые и обратные краевые задачи, ассоциированные с вырождающимся гиперболическим уравнением и уравнением смешанного гиперболо-параболического типа [1–4]. В частности, к задаче (1), (2) сводится исследованный в работе [5] аналог задачи Трикоми для уравнения

$$f(x,y) = \begin{cases} u_y - p(x,y)u_{xx}, & y > 0, \\ y u_{xx} + u_{yy}, & y < 0, \end{cases}$$

в смешанной области, гиперболическая часть границы которой образована характеристиками уравнения Трикоми.

Краевым задачам для одного дифференциального оператора дробного порядка типа Штурма–Лиувилля посвящена весьма важная работа М. М. Джрбашяна [6] (см. также [7]).

Интегральное уравнение Вольтерра третьего рода

$$x^{\alpha}\varphi(x) - \lambda \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \varphi(t) dt = f(x),$$

которое можно переписать в виде

$$D_{0x}^{\alpha} x^{\alpha} \varphi - \lambda \Gamma(\alpha) \varphi = c(x),$$

Нахушев А. М. Доклады АН СССР. 1977, **234**:2, 308–311.
Представлено академиком А. Н. Тихоновым 17.02.1977

было объектом исследования многих авторов (библиографию см. в [1]).

В теории краевых задач для уравнения (1) важную роль играет следующий принцип экстремума для оператора дробного дифференцирования [1].

**Лемма.** *Пусть неубывающая положительная при $0 < t < x$ функция $\omega(t)$ принадлежит классу $C(0 \leqslant t \leqslant x)$ и в сколь угодно малой окрестности $0 < \delta \leqslant t \leqslant x$ точки $t = x$ произведение $\omega(t)y(t)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\varkappa > \alpha$.*

*Тогда, если на сегменте $0 \leqslant t \leqslant x$ функция $y(t)$ достигает положительного максимума (отрицательного минимума) в точке $t = x$, то $D_{0x}^{\alpha}\omega y > 0$ $(< 0)$ для любого $\alpha \in I$.*

Пользуясь этой леммой, нетрудно доказать следующее утверждение.

**Теорема 1.** *Пусть $\omega_j(x)$, $j = 1, \ldots, m$, – неубывающие положительные в $I$ функции, которые удовлетворяют в $I$ условию Гельдера с показателем $\varkappa_j > \alpha_j$ и*

$$a_i(x) \in C(\overline{I}), \quad a_i(x) \leqslant 0 \quad \forall\, x \in I, \quad i = 1, \ldots, m+1. \tag{3}$$

*Тогда, если $y(x)$ – регулярное в $I$ решение уравнения $Ly = 0$ из класса $C(\overline{I})$, отличное от постоянной, то положительный максимум (отрицательный минимум) функции $y(x)$ в $\overline{I}$ не может достигаться во внутренних точках $I$.*

Справедливость теоремы 1 в случае, когда $\sum\limits_{i=1}^{m+1} a_i^2(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in I$, непосредственно вытекает из леммы.

Допустим, что $\max\limits_{I} y(x) = y(x_0) > 0$ и $x_0 \in I$. Поскольку $y(x) \not\equiv \mathrm{const}$ и $Ly = 0$, то на основании леммы и условия теоремы существует такое $\delta > 0$, что

$$y(x) < y(x_0), \quad a_{m+1}(x)y(x) \leqslant 0, \quad a_j(x)D_{0x}^{\alpha_j}\omega_j y \leqslant 0$$

для всех $x$ из полусегмента $[\delta, x_0[$. Стало быть,

$$y'' + a_0(x)y' \geqslant 0 \quad \forall\, x \in [\delta, x_0]. \tag{4}$$

Рассмотрим функцию

$$z(x) = y(x) + \varepsilon g(x), \;\; \delta \leqslant x \leqslant x_0,$$

где $g(x) = \exp(-\mu x) - \exp(-\mu x_0)$, $\mu$ и $\varepsilon$ – положительные числа, причем $\varepsilon < [y(x_0) - y(\delta)]/g(\delta)$.

Если $\mu$ достаточно велико, то в силу (4)

$$z'' + a_0(x)z' \geqslant \varepsilon[g'' + a_0(x)g'] = \varepsilon \exp(-\mu x)[\mu^2 - a_0(x)\mu] > 0.$$

Так как $z(\delta) < y(x_0)$, $z(x_0) = y(x_0)$, то максимум $z(x)$ в $[\delta, x_0]$ достигается только в точке $x_0$. Поэтому $z'(x_0) = y'(x_0) + \varepsilon g'(x_0) \geqslant 0$. Отсюда следует, что

$$y'(x_0) \geqslant -\varepsilon\mu \exp(-\mu x_0) > 0, \tag{5}$$

а это противоречит необходимому условию экстремума $y'(x_0) = 0$. Таким образом, $x_0 \notin I$.

**Теорема 2.** *Пусть $\omega_j(x)$, $j = 1, \ldots, m$, – неубывающие положительные в $I$ функции, которые при $0 < x \leqslant 1$ удовлетворяют условию Гельдера с показателем $\varkappa_j > a_j$, и выполнено условие (3).*

*Тогда, если $y(x)$ – регулярное в $I$ решение уравнения $Ly = 0$ из класса $C(\overline{I}) \cap C^1(0 < x \leqslant 1)$ и*

$$y^* = \max_{\overline{I}} y(x) = y(1) > 0 \ (y_* = \min_{\overline{I}} y(x) = y(1) < 0),$$

*то $y'(1) > 0$ $(y'(1) < 0)$. Если же*

$$y^* = y(0) > 0 \ (y^* = y(0) < 0),$$

*то $y'(0) < 0$ $(y'(0) > 0)$ при условии, что*

$$y(x) \in C^1(0 \leqslant x < 1), \ \omega_j(x) \in C^1(0 \leqslant x \leqslant \varepsilon_0),$$

$$\omega_j(0) \neq 0 \ \forall\, j = 1, 2, \ldots, m,$$

*где $\varepsilon_0$ может быть сколь угодно близко к нулю.*

Теорема 2 по существу следует из (5) и легко проверяемого равенства

$$\lim_{x \to 0} x^{\alpha_j} D_{0x}^{\alpha_j} \omega_j y = \omega_j(0) y(0) / \Gamma(1 - \alpha_j).$$

Лемма и теоремы 1 и 2 являются аналогами принципов Хопфа и Заремба–Жиро [8] для дифференциальных операторов дробного порядка.

Теоремы 1, 2 позволяют доказать единственность и существование решения задачи (1), (2) при обычных условиях неравенственного типа на числа $p_i$ и $q_i$, $i = 0, 1$. Более подробно рассмотрим задачу Дирихле (двухточечную задачу)

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0 \tag{6}$$

для уравнения

$$y'' + a_j(x) D_{0x}^{\alpha_j} \omega_j y + a_{m+1}(x) y = f(x). \tag{7}$$

Здесь и ниже по повторяющемуся индексу $j$ подразумевается суммирование от 1 до $m$.

**Теорема 3.** *Пусть коэффициенты уравнения (7) удовлетворяют условиям теоремы 1 и* $f(x) \in C(\overline{I})$, $a_j(x)$, $\omega_j(x) \in C^1(\overline{I})$ $\forall\, j = 1, \ldots, m$.

*Тогда задача (6) для уравнения (7) безусловно и однозначно разрешима в классе* $C(\overline{I}) \cap C^2(I)$.

Действительно, задача (6), (7) эквивалентна уравнению

$$y(x) + \int\limits_0^1 a_{m+1}(t) G(x,t) y(t)dt + Ay = F(x), \tag{8}$$

где $G(x,t) = t(x-1)$ при $t \leqslant x$ и $G(x,t) = x(t-1)$ при $t \geqslant x$,

$$Ay = \int\limits_0^1 G(x,t) a_j(t) D_{0t}^{\alpha_j} \omega_j y dt, \quad F(x) = \int\limits_0^1 G(x,t) f(t)dt.$$

Непосредственным вычислением с использованием формулы перестановки Дирихле нетрудно показать, что

$$\Gamma(1-a_j) Ay = x \int\limits_x^1 \omega_j(\xi) y(\xi) d\xi \int\limits_\xi^1 \frac{[(1-t)a_j(t)]' dt}{(t-\xi)^{\alpha_j}} +$$

$$+ \int\limits_0^x \omega_j(\xi) y(\xi) \left\{ (1-x) \int\limits_\xi^x \frac{[t a_j(t)]'}{(t-\xi)^{\alpha_j}} dt - x \int\limits_x^1 \frac{[(t-1)a_j(t)]'}{(t-\xi)^{\alpha_j}} dt \right\} d\xi.$$

Следовательно, уравнение (8) является интегральным уравнением Фредгольма второго рода, которое в силу теоремы 1 безусловно и однозначно разрешимо.

Для изучения спектра оператора

$$D^{(\beta)} \equiv D_{0x}^{-\alpha} \frac{d^2}{dx^2}, \quad \beta = 2 - \alpha,$$

рассмотрим теперь задачу (6) для уравнения

$$y'' + \lambda D_{0x}^{\alpha} y = 0, \quad 0 < \alpha < 1, \quad \lambda = \mathrm{const}. \tag{9}$$

Из теоремы 1 вытекает, что числа $\lambda \leqslant 0$ не могут быть собственными значениями этого оператора и поэтому будем предполагать, что $\lambda > 0$. Вопрос о собственном спектре оператора $D^{(\beta)}$ впервые исследован М. М. Джрбашяном [6].

Общее решение уравнения (9), удовлетворяющее условию $y(0) = 0$, совпадает с решением уравнения Вольтерра

$$y(x) + \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)} \int\limits_0^x (x-t)^{1-\alpha} y(t)dt = cx, \tag{10}$$

где $c$ – произвольная постоянная. Повторные ядра функции $(x-t)^{1-\alpha}$ имеют вид $k^{(n)}(x,t) = \Gamma^n(\beta)(x-t)^{n\beta-1}/\Gamma(n\beta)$, $n = 1, 2, \ldots$ Принимая это во внимание, нетрудно убедиться в том, что

$$y(x) = cx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{\Gamma(2+n\beta)} x^{n\beta} = cxE_{1/\beta}\left(-\lambda x^{\beta}, 2\right),$$

где

$$E_{\rho}\left(z, \mu\right) = \sum_{n=0}^{\infty} z^k/\Gamma(\mu + k/\rho)$$

– функция типа Миттаг-Леффлера, которая является целой функцией порядка $\rho$ и типа 1 [9].

Теперь очевидно, что имеет место следующая теорема (см. соответствующее утверждение работы [6]).

**Теорема 4.** *Число $\lambda$ является собственным значением задачи* (6) *для уравнения* (9) *тогда и только тогда, когда*

$$E(\alpha, \lambda) \equiv E_{1/\beta}\left(-\lambda, 2\right) = 0. \tag{11}$$

*Поскольку $1/2 \leqslant 1/\beta < 1$, то множество корней уравнения* (11) *не пусто и, более того, оно всегда счетно* [6], [9]. *При $\beta = 2$ ($\alpha = 0$) числа $\lambda_k = \pi^2 k^2$, $k = 0, 1, \ldots$, являются корнями этого уравнения.*

Для отыскания на ЭВМ границ вещественных нулей функции $E(\alpha, \lambda)$ можно воспользоваться следующим алгоритмом:

$$E(\alpha, \lambda) \cong y_n(\alpha, \lambda) = \sum_{k=0}^{n} A_k/\Gamma(x_k),$$

$$A_k = (-\lambda)^k \Big/ \prod_{j=0}^{k} (x_k + j), \quad x_k = (1-a)k + 1,$$

$$A_k = -A_{k-1}\frac{\lambda}{x_k + k} B_k, \quad B_k = \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1-\alpha}{x_k + j - 1}\right), \quad A_0 = 1;$$

$1/\Gamma(x_k)$ вычисляется согласно алгоритму 80б из [10].

В силу теоремы Лейбница погрешность аппроксимации функции $E(\alpha,\lambda)$ полиномом $y_n(\alpha,\lambda)$ не превышает $|A_{n+1}|/\Gamma(x_{n+1})$, как только $\lambda B_n\Gamma(x_{n-1}) \leqslant (x_n+n)\Gamma(x_n)$, например, при $\beta n \geqslant \lambda+\alpha-3$.

Описанный алгоритм реализован А. В. Бородиным в виде программ на ФОРТРАН для ЭВМ ЕС-1020 в Вычислительном центре Кабардино-Балкарского университета. Счет по этой программе подтверждает гипотезу о наличии вещественных нулей $\lambda_k$, $k=0,1,\ldots$, у функции $E(\alpha,\lambda)$ при $0 \leqslant \alpha < 1$. В частности, если $\alpha = 1/10$, то первые два нуля $\lambda_0$ и $\lambda_1$ удовлетворяют неравенствам $9,5 < \lambda_0 < 9,6$; $33,5 < \lambda_1 < 33,6$, причем для всех $n \geqslant 22$

$$y_n(0{,}1;\ 9{,}5) = 0{,}629613953590690\cdot 10^{-3} \pm 10^{-19},$$

$$y_n(0{,}1;\ 9{,}6) = 0{,}378454434018503\cdot 10^{-2} \pm 10^{-18}.$$

В заключение отметим, что задача (2) для уравнения (1) при $m=\infty$ исследуется аналогично случаю $m \neq \infty$, если на коэффициенты и класс решений наложить дополнительные условия, которые придают бесконечной сумме содержательный смысл.

Задача (2) является фредгольмовой и для более общего уравнения

$$Ly + \frac{d}{dx}\sum_{j=0}^{\infty} b_j(x) D_{0x}^{\beta_j} y = f(x), \qquad 0 < \beta_j < 1,$$

с достаточно гладкими коэффициентами.

**Литература**

1. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10, № 1.
2. Нахушев А. М. Сообщ. АН ГрузССР. 1975. Т. 77, № 3.
3. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 1.
4. Елдесбаев Т. Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 3.
5. Бжихатлов А. Г., Нахушев А. М. ДАН. 1968. Т. 183, № 2.
6. Джрбашян М. М. Изв. АН АрмССР. 1970. Т. 5, № 2.
7. Джрбашян М. М., Нерсесян А. В. Изв. АН АрмССР. 1968. Т. 3, № 1.
8. Бицадзе А. В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966.
9. Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966.
10. Агеев М. И., Алик В. П., Марков Ю. И. Библиотека алгоритмов 51б-100б, вып. 2. М.: Сов. радио, 1976.

Поступила в редакцию
8 февраля 1977 г.

Кабардино-Балкарский
государственный университет

# О законе композиции операторов дробного интегро-дифференцирования с различными началами

Пусть $\alpha$ – любое действительное число с целой частью $[\alpha]$, $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера.

Оператор $D_{ax}^{\alpha}$: $\varphi(t) \to D_{ax}^{\alpha}\varphi(x)$, где $\varphi(t) \in L[A,B]$,

$$D_{ax}^{\alpha}\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sign}(x-a)}{\Gamma(-\alpha)} \displaystyle\int_a^x \dfrac{\varphi(t)\,dt}{|x-t|^{\alpha+1}}, & \alpha < 0, \\ \varphi(x), \quad \alpha = 0, \\ \operatorname{sign}(x-a)\dfrac{\partial^{[\alpha]+1}}{\partial x^{[\alpha]+1}} D_{ax}^{\alpha-[\alpha]-1}\varphi(x), & \alpha > 0, \end{cases} \tag{1}$$

назовем *оператором дробного в смысле Римана–Лиувилля интегро-дифференцирования порядка* $|\alpha|$ с началом в точке $a \in [A,B]$ и с концом в точке $x \in \,]A,B[$.

Введем в рассмотрение оператор

$$D_{cx,a}^{\alpha,\beta}\varphi(x) \equiv \operatorname{sign}(x-c)|x-a|^{-\alpha-1}\Gamma^{-1}(-\alpha)\Gamma^{-1}(1-\beta) \times$$
$$\times \int_c^x F\left(\alpha+1, 1, 1-\beta; \left|\frac{t-a}{x-a}\right|^{\operatorname{sign}(x-c)}\right)\varphi(t)\,dt,$$

где $\alpha+\beta<0$, $\alpha$, $\beta-1 \neq 0, 1, 2, \ldots$, $c \in [A,B]$, $F\,(a,\, b,\, c; z)$ – гипергеометрическая функция Гаусса [1].

В теории краевых задач, особенно нелокальных, для уравнений смешанного типа [2] с необходимостью возникает проблема поиска аналога известного (см., например, [3], [4]) закона композиции $D_{ax}^{\alpha}D_{ax}^{\beta} = D_{ax}^{\alpha+\beta}$операторов дробного интегрирования порядка $-\alpha > 0$ и $-\beta > 0$ с началом в одной и той же точке $a$ в случае операторов дробного интегрирования и дифференцирования с различными началами.

*Первый закон композиции* (операторов дробного интегрирования с различными началами). Пусть $\varphi(t) \in L[a,b] \cap C]a,b[$, тогда для любых $\alpha<0$, $\beta<0$ и $x \in \,]a,b[$

$$D_{ax}^{\alpha}D_{bx}^{\beta}\varphi(x) = D_{ax,a}^{\alpha,\beta}(x-a)^{-\beta}\varphi(x) + (x-a)^{\beta-\alpha+1}D_{bx,a}^{\beta,\alpha}(x-a)^{-\beta-1}\varphi(x). \tag{2}$$

Действительно, легко видеть, что

$$\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\beta)D_{ax}^{\alpha}D_{bx}^{\beta}\varphi(x) = \int_a^x (x-\xi)^{-\alpha-1}d\xi \left[\int_\xi^x + \int_x^b\right]\frac{\varphi(t)dt}{(t-\xi)^{\beta+1}} =$$

---

Нахушев А. М., Салахитдинов М. С. Доклады АН СССР. 1988, **299**:6, 1313–1316.

$$= \int_a^x \varphi(t)dt \int_a^t \frac{(x-\xi)^{-\alpha-1}}{(t-\xi)^{\beta+1}} d\xi + \int_x^b \varphi(t)dt \int_a^x (x-\xi)^{-\alpha-1}(t-\xi)^{-\beta-1} d\xi. \quad (3)$$

В первом и втором внутренних интегралах произведем замену $\xi = a + (t-a)\eta$ и $\xi = a + (x-a)\eta$ соответственно. В результате, согласно интегральному представлению для функции Гаусса

$$F\,(a,\, b,\, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a} dt,$$

$\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$, $|z| < 1$, получаем, что правая часть (3) равна

$$\int_a^x \frac{(t-a)^{-\beta}\varphi(t)}{(x-a)^{\alpha+1}} dt \int_0^1 (1-\eta)^{-\beta-1} \left(1 - \frac{t-a}{x-a}\eta\right)^{-\alpha-1} d\eta +$$

$$+ \int_x^b \frac{(t-a)^{-\beta-1}}{(x-a)^{\alpha}} \varphi(t)dt \int_0^1 (1-\eta)^{-\alpha-1} \left(1 - \frac{x-a}{t-a}\eta\right)^{-\beta-1} d\eta =$$

$$= \frac{\Gamma(-\beta)}{\Gamma(1-\beta)} (x-a)^{-\alpha-1} \int_a^x (t-a)^{-\beta} F\left(\alpha+1,\, 1,\, 1-\beta; \frac{t-a}{x-a}\right) \varphi(t)dt +$$

$$+ \frac{\Gamma(-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{-\alpha} \int_x^b (t-a)^{-\beta-1} F\left(\beta+1,\, 1,\, 1-\alpha; \frac{x-a}{t-a}\right) \varphi(t)dt.$$

*Второй закон композиции* (операторов дробного интегро-дифференцирования с различными началами). Пусть $\varphi(t) \in L[a,b] \cap C]a,b[$, тогда для любых $\alpha < 0$, $\beta < 0$, удовлетворяющих условию $\alpha + \beta < -1$,

$$\frac{\partial}{\partial x} D_{ax}^{\alpha} D_{bx}^{\beta} \varphi(x) = D_{ax,a}^{\alpha+1,\beta}(x-a)^{-\beta}\varphi(x) +$$

$$+ (x-a)^{\beta-\alpha} D_{bx,a}^{\beta,\alpha+1}(x-a)^{-\beta-1}\varphi(x). \quad (4)$$

В самом деле, на основании равенств (см. [5])

$$\lim_{z\to 1-0} F\,(a,\, b,\, c; z) = \Gamma(c)\Gamma(c-a-b)/[\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)], \quad \operatorname{Re}(c-a-b) > 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial z} z^a F\,(a,\, b,\, c; z) = a z^{a-1} F\,(a+1,\, b,\, c; z)\,,$$

нетрудно видеть, что

$$\Gamma(-\alpha)\Gamma(1-\beta)\frac{\partial}{\partial x}D^{\alpha,\beta}_{ax,a}(x-a)^{-\beta}\varphi(x)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_a^x(t-a)^{-\alpha-\beta-1}\varphi(t)\left(\frac{t-a}{x-a}\right)^{\alpha+1}F\left(\alpha+1,\,1,\,1-\beta;\frac{t-a}{x-a}\right)dt=$$

$$=(x-a)^{-\alpha-\beta-1}\varphi(x)F(\alpha+1,\,1,\,1-\beta;1)+$$

$$+\int\limits_a^x(t-a)^{-\alpha-\beta-1}\varphi(t)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{t-a}{x-a}\right)^{\alpha+1}F\left(\alpha+1,\,1,\,1-\beta;\frac{t-a}{x-a}\right)dt=$$

$$=\varphi(x)F(\alpha+1,\,1,\,1-\beta;1)(x-a)^{-\alpha-\beta-1}-$$

$$-(\alpha+1)\int\limits_a^x\frac{\varphi(t)(t-a)^{-\beta}}{(x-a)^{\alpha+2}}F\left(\alpha+2,\,1,\,1-\beta;\frac{t-a}{x-a}\right)dt.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial x}D^{\alpha,\beta}_{ax,a}(x-a)^{-\beta}\varphi(x)=D^{\alpha+1,\beta}_{ax,a}(x-a)^{-\beta}\varphi(x)-\qquad(5)$$

$$-\varphi(x)/[(x-a)^{\alpha+\beta+1}(\alpha+\beta+1)\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\beta)].$$

Аналогично, опираясь на соотношение

$$\frac{\partial}{\partial z}z^{c-1}F\left(a,\,b,\,c;z\right)=(c-1)z^{c-2}F\left(a,\,b,\,c-1;z\right),$$

находим

$$\Gamma(1-\alpha)\Gamma(-\beta)\frac{\partial}{\partial x}(x-a)^{1-\alpha+\beta}D^{\beta,\alpha}_{bx,a}(x-a)^{-\beta-1}\varphi(x)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_x^b(t-a)^{-\alpha-\beta-1}\varphi(t)\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{-\alpha}F\left(\beta+1,\,1,1-\alpha;\frac{x-a}{t-a}\right)dt=$$

$$=-\varphi(x)F(\beta+1,\,1,\,-\alpha+1;1)(x-a)^{-\alpha-\beta-1}-$$

$$-\alpha(x-a)^{-\alpha-1}\int\limits_x^bF\left(\beta+1,\,1,-\alpha;\frac{x-a}{t-a}\right)(t-a)^{-\beta-1}\varphi(t)dt.$$

Отсюда имеем

$$\frac{\partial}{\partial x}(x-a)^{1-\alpha+\beta}D^{\beta,\alpha}_{bx,a}(x-a)^{-\beta-1}\varphi(x)=\qquad(6)$$

$$= (x-a)^{\beta-\alpha} D^{\beta,\alpha+1}_{bx,a}(x-a)^{-\beta-1}\varphi(x) + \frac{\varphi(x)(x-a)^{-\alpha-\beta-1}}{(\alpha+\beta+1)\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\beta)}.$$

Правило (4) теперь можно получить как следствие (2), (5) и (6).

Если при $\alpha > -1$ функция $D^{\beta}_{bx}\varphi(x)$ имеет дробную производную порядка $\alpha+1$ с началом в точке $a$, то $(\partial/\partial x)D^{\alpha}_{ax}D^{\beta}_{bx}\varphi(x) = D^{\alpha+1}_{ax}D^{\beta}_{bx}\varphi(x)$, поэтому в этом случае формулу (4) можно переписать в виде

$$D^{\alpha+1}_{ax}D^{\beta}_{bx}\varphi(x) = D^{\alpha+1,\beta}_{ax,a}(x-a)^{-\beta}\varphi(x) +$$
$$+ (x-a)^{\beta-\alpha} D^{\beta,\alpha+1}_{bx,a}(x-a)^{-\beta-1}\varphi(x). \tag{7}$$

*Третий закон композиции.* Пусть

$$(x-a)^{-\beta-1}\varphi(x) \in L[a,b],\ \ D^{\beta+1}_{bx}\varphi(x) \in C[a,b[,$$

тогда если $\alpha < 0$, $\beta < 0$, $\alpha+\beta < -1$, то

$$D^{\alpha}_{ax}\frac{\partial}{\partial x}D^{\beta}_{bx}\varphi(x) = D^{\alpha+1,\beta}_{ax,a}(x-a)^{-\beta}\varphi(x) +$$
$$+ (x-a)^{\beta-\alpha} D^{\beta,\alpha+1}_{bx,a}(x-a)^{-\beta-1}\varphi(x) + \sin\pi\alpha\, R^{\alpha,\beta}_{ab}\varphi(x), \tag{8}$$

где

$$R^{\alpha,\beta}_{ab}\varphi(x) = -\frac{(x-a)^{-\alpha-1}}{\sin\pi\alpha\,\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\beta)}\int\limits_a^b (t-a)^{-\beta-1}\varphi(t)dt.$$

Нетрудно видеть, что

$$D^{\alpha}_{ax}\frac{\partial}{\partial x}D^{\beta}_{bx}\varphi(x) = \lim_{\varepsilon\to+0}\Gamma^{-1}(-\alpha)\int\limits_a^{x-\varepsilon}(x-t)^{-\alpha-1}\frac{\partial}{\partial t}D^{\beta}_{bt}\varphi(t)dt =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to+0}[\varepsilon^{-\alpha-1}D^{\beta}_{bx-\varepsilon}\varphi(x) - (x-a)^{-\alpha-1}D^{\beta}_{bt}\varphi(t)|_{t=a} -$$
$$-(\alpha+1)\int\limits_a^{x-\varepsilon}(x-t)^{-\alpha-2}D^{\beta}_{bt}\varphi(t)dt]/\Gamma(-\alpha) = \sin\pi\alpha\, R^{\alpha,\beta}_{ab}\varphi(x) +$$
$$+\Gamma^{-1}(-\alpha)\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_a^{x-\varepsilon}(x-t)^{-\alpha-1}D^{\beta}_{bt}\varphi(t)dt,$$

поэтому

$$D^{\alpha}_{ax}\frac{\partial}{\partial x}D^{\beta}_{bx}\varphi(x) = \frac{\partial}{\partial x}D^{\alpha}_{ax}D^{\beta}_{bx}\varphi(x) + \sin\pi\alpha\, R^{\alpha,\beta}_{ab}\varphi(x). \tag{9}$$

Из (9) в соответствии с (7) и получается (8).

Второй закон композиции в случае, когда $\alpha+\beta=-1$, вытекает из равенства

$$\pi\frac{\partial}{\partial x}D_{ax}^{\alpha}D_{bx}^{-\alpha-1}\varphi(x)=-\sin\pi\alpha\times$$

$$\times\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\partial}{\partial x}\Bigg[\int\limits_a^{x-\varepsilon}\left(\frac{t-a}{x-a}\right)^{\alpha+1}\frac{\varphi(t)}{\alpha+1}F\left(\alpha+1,\,1,2+\alpha;\frac{t-a}{x-a}\right)dt+$$

$$+\int\limits_{x+\varepsilon}^{b}\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{-\alpha}\frac{\varphi(t)}{-\alpha}F\left(-\alpha,\,1,1-\alpha;\frac{x-a}{t-a}\right)dt,$$

$$\frac{z^\alpha}{\alpha}F\left(\alpha,\,1,\alpha+1;z\right)=-\ln(1-z)+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k}{k!}[\psi(k+1)-\psi(k+\alpha)](1-z)^k,$$

$$\lim_{z\to1-0}\Bigg[\frac{(1-z)^{\alpha+1}}{\alpha+1}F\left(\alpha+1,\,1,2+\alpha;1-z\right)+$$

$$+\frac{(1+z)^\alpha}{\alpha}F\left(-\alpha,\,1,1-\alpha;\frac{1}{1+z}\right)\Bigg]=\psi(-\alpha)-\psi(1+\alpha)=\pi\mathrm{ctg}\,(\alpha+1)\pi,$$

$$(\alpha)_k=\Gamma(\alpha+k)/\Gamma(\alpha),\ \psi(z)=\Gamma'(z)/\Gamma(z),$$

и формируется следующим образом. Пусть $\varphi(t)$ непрерывна по Гельдеру и интегрируема на $]a,b[$. Тогда для любого $\alpha<0$

$$\frac{\partial}{\partial x}D_{ax}^{\alpha}D_{bx}^{-\alpha-1}\varphi(x)=\cos\pi\alpha\,\varphi(x)-\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int\limits_a^b\left(\frac{t-a}{x-a}\right)^{\alpha+1}\frac{\varphi(t)dt}{t-x},$$

где интеграл понимается в смысле Коши.

**Литература**

1. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М. – Л.: ГИФМЛ, 1963. 358 с.
2. Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.
3. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М. – Л.: ГИТТЛ, 1951. 544 с.
4. Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 671 с.
5. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М.: ИЛ, 1957. 443 с.

Поступила в редакцию
31 октября 1986 г.

Кабардино-Балкарский
государственный университет

Институт математики
им. В. И. Романовского АН УзССР

# О непрерывных дифференциальных уравнениях и их разностных аналогах

Рассмотрим обобщенные конечно-разностные отношения

$$\Delta_n^\alpha \varphi(x) = \delta_n^{-\alpha} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} \varphi(x - k\delta_n),$$

где $\delta_n = \dfrac{(x-a)}{n} > 0$, $\begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{1}{k!}\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)$.

Если существует предел $D_{ax}^\alpha \varphi(t)$ обобщенных конечно-разностных отношений $\Delta_n^\alpha \varphi(x)$ при $n \to \infty$, то этот предел назовем *дробной* или *междупредельной по Летникову производной порядка $\alpha$ от функции $\varphi(t)$, взятой в пределах от $a$ до $x$.*

Пусть $\alpha$ – любое действительное число с целой частью $[\alpha] \leqslant \alpha < [\alpha]+1$, $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера. Тогда если $\alpha < 0$, $\varphi(t) \in L[a,x]$, то (см. [1, с. 521])

$$D_{ax}^\alpha \varphi(t) = \Gamma^{-1}(-\alpha) \int_a^x (x-t)^{-\alpha-1} \varphi(t) dt, \tag{1}$$

если же $\alpha > 0$ и $\varphi(t) \in C^{[\alpha]}[a,x]$, $\varphi^{([\alpha]+1)}(t) \in L[a,x]$, то

$$D_{ax}^\alpha \varphi(t) = \sum_{k=0}^{[\alpha]} \frac{\varphi^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (x-a)^{k-\alpha} + D_{ax}^{\alpha-[\alpha]-1} \varphi^{([\alpha]+1)}(t) = \tag{2}$$

$$= \left( \frac{\partial^{[\alpha]+1}}{\partial x^{[\alpha]+1}} \right) D_{ax}^{\alpha-[\alpha]-1} \varphi(t),$$

т. е. междупредельная производная $D_{ax}^\alpha \varphi(t)$ совпадает с дробной производной (дробным интегралом) в смысле Римана–Лиувилля порядка $\alpha > 0$ $(-\alpha > 0)$ от функции $\varphi(t)$ в точке $t = x$ с началом в точке $t = a$.

Формулы (1) и (2) получаются из равенства

$$D_{cx}^\alpha \varphi(t) = \frac{\operatorname{sign}(x-c)}{\Gamma(-\alpha)} \int_c^x \frac{\varphi(t)\,dt}{|x-t|^{\alpha+1}}, \quad c \in [a,b], \tag{3}$$

где интеграл понимается в смысле конечной части по Адамару [2], при $c = a$. Поэтому разумно выражение, стоящее в правой части (3), называть *дробной производной порядка $\alpha$ с началом в точке $c$* от функции $\varphi(t)$ в точке $x$.

Нахушев А. М. Доклады АН СССР. 1988, **300**:4, 796–799.
Представлено академиком А. Н. Тихоновым 03.12.1986

В связи с (3) *дробной производной порядка* $\alpha > 0$ *с началом в точке* $c \in [a, b]$ от функции $\varphi(t) \in L[a, b]$ в точке $x \in [a, b]$, $x \neq c$, можно назвать и предел

$$D^{\alpha}_{cx}\varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(1 + [\alpha] - \alpha)} \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{\partial^{[\alpha]+1}}{\partial x^{[\alpha]+1}} \int\limits_{c}^{x_\varepsilon} \frac{\varphi(t)\, dt}{|x - t|^{\alpha - [\alpha]}}, \tag{4}$$

$$x_\varepsilon = x + \varepsilon \operatorname{sign}(c - x).$$

Если функция $\varphi(t)$ в достаточно малой окрестности

$$x_\delta + x - \delta \leqslant 2t \leqslant x_\delta + x + \delta$$

точки $x$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $h > \alpha$, то из (4) при $0 < \alpha < 1$ в силу (3) имеем

$$D^{\alpha}_{cx}\varphi(t) - \varphi(x)|x - c|^{-\alpha}/\Gamma(1 - \alpha) = D^{\alpha}_{cx}[\varphi(t) - \varphi(x)]. \tag{5}$$

Предел правой части (5), когда $c = a \to -\infty$, в работе [3] назван дробной производной Марше.

Следуя В. Вольтерра (см. [4, с. 100]), *обыкновенным* (линейным) *непрерывным дифференциальным уравнением* назовем уравнение вида

$$M^{\alpha,\beta}_{ax}y(x) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m(x) D^{\alpha_m}_{ax}y(t) = f(x), \tag{6}$$

где $y(x)$ – неизвестная функция, $-\infty < \alpha_m,\ \alpha,\ \beta < \infty$, $\alpha < \beta$,

$$M^{\alpha,\beta}_{ax}y(x) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} a_\xi(x) D^{\xi}_{ax}y(t) d\xi. \tag{7}$$

Будет естественным назвать непрерывным или континуумальным дифференциальным уравнением любое уравнение относительно неизвестной функции $y(x)$, обладающее тем свойством, что множество всех входящих в него производных $D^{\alpha}_{cx}y(t)$ содержит локально-связный метрический континуум.

Уравнение, содержащее дробную производную от искомой функции, назовем дробным или междупредельным дифференциальным уравнением, а порядок входящей в него старшей производной – порядком уравнения.

В соответствии с (3) уравнение (6) можно назвать и гиперсингулярным интегральным уравнением Вольтерра.

При исследовании ядра дифференциальных операторов и при реализации многих оптимизационных задач важную роль играет вытекающий из (5)

**Аналог теоремы Ферма.** *Пусть интегрируемая на* $[a, b]$ *функция* $\varphi(t)$ *в точке* $x \in [a, b]$ *принимает наибольшее или наименьшее значение и существует такое* $\delta > 0$, *что* $\varphi(t)$ *на сегменте*

$$x_\delta + x - \delta \leqslant 2t \leqslant x_\delta + x + \delta$$

*удовлетворяет условию Гельдера с показателем* $h > \alpha$. *Тогда для любого* $\alpha \in [0, 1[$ *и отличного от* $x$ $c \in [a, b]$ *производная*

$$D^\alpha_{cx}\varphi(t) \geqslant \frac{\varphi(x)|x-c|^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

*в случае наибольшего значения и*

$$D^\alpha_{cx}\varphi(t) \leqslant \frac{\varphi(x)|x-c|^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

*в случае наименьшего значения.*

Обратим теперь внимание и на следующий факт. Если интегрируемая на $[a, b]$ функция $\varphi(t)$ в точке $x \in [a, b]$ принимает наибольшее значение и существует такое $\delta > 0$, что производная $\varphi'(t)$ на сегменте $x_\delta + x - \delta \leqslant 2t \leqslant x_\delta + x + \delta$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $h > \alpha - 1$, то для любого $\alpha \in ]1, 2[$ и отличного от $x$ $c \in [a, b]$

$$\operatorname{sign}(x-c) D^\alpha_{cx}\varphi(t) \leqslant \frac{\varphi(x)|x-c|^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha).} \tag{8}$$

Этот факт вместе с аналогом теоремы Ферма позволяет сформулировать аналоги принципов Хопфа и Заремба–Жиро для континуумальных дифференциальных операторов, как и для («дискретных») уравнений с дробными производными в младших членах [5].

С континуумальными дифференциальными операторами существенно связано отображение $\varphi(t) \to H^\alpha_{ax}\varphi(t)$, где $H^\alpha_{ax} = D^\alpha_{ax} H^0_{ax}$,

$$H^0_{ax}\varphi(t) \equiv \int\limits_a^x \varphi(t) \ln|x-t| dt = f_0(x), \quad a < x < b, \tag{9}$$

$$H^1_{ax}\varphi(t) = \int\limits_a^x (x-t)^{-1}\varphi(t) dt,$$

и интеграл понимается в смысле конечной части по Адамару. В частности, если $f_0(x) \in L[a,b] \cap C^1[a,b[$, то единственное решение $\varphi(x)$ уравнения (9) представимо в виде

$$\varphi(x) = -\int\limits_{-\infty}^{1} e_{\xi-1} D_{ax}^{\xi} f_0(t) d\xi, \qquad e_{\xi} = \exp\left(-\xi \Gamma'(1)\right).$$

Можно показать, что если $\varphi(t) \in L(a,b]$ и существует $H_{ax}^{\alpha}\varphi(t)$, то

$$H_{ax}^{\alpha}\varphi(t) = \begin{cases} e_{-\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha} e_{\alpha} D_{ax}^{\alpha-1}\varphi(t), & \alpha < 0, \\ e_{-\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha} e_{\alpha}\frac{\partial^{[\alpha]}}{\partial x^{[\alpha]}} D_{ax}^{\alpha-[\alpha]-1}\varphi(x), & \alpha > 0. \end{cases} \tag{10}$$

Обратимая замена $y(x) = H_{ax}^{0} z(t)$ и формула (10) дают возможность редуцировать локальные и нелокальные задачи для непрерывного дифференциального уравнения (6) к нагруженным линейным интегральным уравнениям второго рода. Пусть, например, требуется найти решение $y = y(x)$ непрерывного дифференциального уравнения порядка $\alpha \geqslant 1$

$$\int\limits_{0}^{\alpha} D_{ax}^{\xi} y \, d\xi = f(x) \in C^1[a,b], \tag{11}$$

если известно, что $D_{ax}^{\alpha} y \in C[a,b]$, и соблюдено нелокальное условие

$$\int\limits_{0}^{\alpha} \sum_{k=1}^{[\xi]} \frac{D_{aa}^{\xi-k} y}{\Gamma(\alpha-k+1)}(x-a)^{\alpha-k}\, d\xi = \psi(x), \qquad D_{aa}^{\beta} y = D_{ax}^{\beta} y|_{x=a}. \tag{12}$$

Действуя на обе части уравнения (11) оператором $D_{ax}^{-\alpha}$ и принимая во внимание (12), равенства (см. [6])

$$D_{ax}^{-\alpha} D_{ax}^{\xi} y = D_{ax}^{\xi-\alpha} y - \sum_{k=1}^{[\xi]+1} \frac{D_{aa}^{\xi-k} y}{\Gamma(\alpha-k+1)}(x-a)^{\alpha-k}, \qquad D_{aa}^{\xi-[\xi]-1} y = 0$$

и соотношение (10), получим

$$\psi(x) + D_{ax}^{-\alpha} f = \int\limits_{0}^{\alpha} H_{ax}^{\xi-\alpha} z \, d\xi = \int\limits_{0}^{\alpha} e_{\alpha-\xi}\frac{\partial}{\partial\xi} e_{\xi-\alpha} D_{ax}^{\xi-\alpha-1} z \, d\xi =$$

$$= D_{ax}^{\xi-\alpha-1} z\Big|_{0}^{\alpha} - \Gamma'(1)\int\limits_{0}^{\alpha} D_{ax}^{\xi-\alpha-1} z \, d\xi =$$

$$= \int_a^x z(t)dt - D_{ax}^{-\alpha-1} z - \Gamma'(1) \int_0^\alpha D_{ax}^{\xi-\alpha-1} z\, d\xi.$$

Следовательно, $z(x)$ является решением уравнения Вольтерра второго рода

$$z(x) - D_{ax}^{-\alpha} z - \Gamma'(1) \int_0^\alpha D_{ax}^{\xi-\alpha} z\, d\xi = \psi'(x) + D_{ax}^{1-\alpha} f$$

или

$$z(x) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{z(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} - \Gamma'(1) \int_a^x \frac{\mathrm{Vi}(\alpha, x-t)}{x-t} z(t)\, dt = g(x),$$

где

$$\mathrm{Vi}(\alpha, x) = \int_0^\alpha \frac{x(t)dt}{\Gamma(t)}, \quad g(x) = \psi'(x) + D_{ax}^{1-\alpha} f.$$

Разностные аналоги дробного дифференциального уравнения разумно называть *дробными* или *междупредельными разностными уравнениями.*

Междупредельное разностное уравнение

$$\sum_{k=0}^{n} A_{kn}(x) y(x - k\delta_n) = f(x), \tag{13}$$

где

$$A_{kn}(x) = \int_\alpha^\beta a_\xi(x) \begin{pmatrix} \xi \\ k \end{pmatrix} \delta_n^{-\xi} d\xi + \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m(x) \begin{pmatrix} \alpha_m \\ k \end{pmatrix} \delta_n^{-\alpha_m}$$

представляет собой один из разностных аналогов уравнения (6).

Аналог теоремы Ферма и оценка (8) дают возможность распространить принцип максимума для разностных уравнений [7] на случай дробных разностных уравнений порядка $\alpha \in ]0, 2]$ и вида (13).

### Литература

1. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.–Л.: ГИТТЛ, 1951. 544 с.
2. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978. 352 с.
3. Самко С. Г. Гиперсингулярные интегралы и их приложения. Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1984. 208 с.
4. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1982. 304 с.

5. Нахушев А. М. ДАН. 1977. Т. 234, № 2. С. 308–311.
6. Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 671 с.
7. Самарский А. А. Введение в численные методы. М.: Наука, 1982. 272 с.


Поступила в редакцию
15 декабря 1986 г.

Кабардино-Балкарский
государственный университет

# К теории дробного исчисления

**1. Определения дробного интегро-дифференцирования и их взаимосвязь.** Пусть $\alpha$ – любое действительное число, $[\alpha]$ – целая часть $\alpha$, $[\alpha] \leqslant \alpha < [\alpha]+1$, $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера.

Оператор $D_{ax}^{\alpha}$: $\varphi(t) \to D_{ax}^{\alpha}\varphi(t)$, где $\varphi(x) \in L[A, B]$,

$$D_{ax}^{\alpha}\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sign}(x-a)}{\Gamma(-\alpha)} \displaystyle\int\limits_a^x \dfrac{\varphi(t)\,dt}{|x-t|^{\alpha+1}}, & \alpha < 0, \\ \varphi(x), \quad \alpha = 0, & \\ \operatorname{sign}(x-a)\dfrac{\partial^{[\alpha]+1}}{\partial x^{[\alpha]+1}} D_{ax}^{\alpha-[\alpha]-1}\varphi(x), & \alpha > 0, \end{cases} \tag{1}$$

назовем оператором дробного (в смысле Римана–Лиувилля) интегро-дифференцирования порядка $|\alpha|$ с началом в точке $a \in [A, B]$. При $\alpha < 0$ $D_{ax}^{\alpha}\varphi(x)$ представляет собой дробный интеграл порядка $-\alpha$, а при $\alpha > 0$ – дробную производную порядка $\alpha$.

Отображение $\varphi(t) \to D_{ax}^{\alpha}\varphi(x)$, естественно называть интегральным или дифференциальным преобразованием Римана–Лиувилля в зависимости от того, если $\alpha < 0$ или $\alpha > 0$.

Интегральное преобразование Римана–Лиувилля можно переписать в виде

$$D_{ax}^{\alpha}\varphi(x) = \frac{\operatorname{sign}(x-a)}{\Gamma(-\alpha)}|x-a|^{-\alpha-1} \int\limits_a^x \left(1 - \frac{t-a}{x-a}\right)^{-\alpha-1} \varphi(t)\,dt =$$

$$= \frac{\operatorname{sign}(x-a)}{\Gamma(-\alpha)|x-a|^{\alpha+1}} \int\limits_a^x F\left(\alpha+1, \beta, \beta; \frac{t-a}{x-a}\right) \varphi(t)\,dt,$$

где $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ – гипергеометрическая функция Гаусса [1].

Нахушев А. М. Дифференц. уравнения, 1988, **24**:2, 313–324.

Исходя из этого, можно ввести обобщенный дробный интеграл $D_{ax}^{\alpha,\beta,\gamma}\varphi(x)$ порядка $-\alpha$ с началом в точке $a$ от функции $\varphi(t)$:

$$D_{ax}^{\alpha,\beta,\gamma}\varphi(x) = \frac{\operatorname{sign}(x-a)}{\Gamma(-\alpha)|x-a|^{\alpha+1}} \int\limits_a^x F\left(\alpha+1,\beta,\gamma;\frac{t-a}{x-a}\right)\varphi(t)\,dt, \qquad (2)$$

где $\alpha+\beta<\gamma\neq 0,\ -1,\ -2,\ \ldots$

Обобщенным интегральным преобразованием Римана–Лиувилля можно назвать (см. [2]) и преобразование вида

$$D_{cx,\,a}^{\alpha,\beta,\gamma}\varphi(x) = \frac{\operatorname{sign}(x-c)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(1-\beta)}|x-a|^{-\alpha-1}\times$$

$$\times\int\limits_c^x F\left(\alpha+1,\gamma,1-\beta;\left|\frac{t-a}{x-a}\right|^{\operatorname{sign}(x-c)}\right)\varphi(t)\,dt, \qquad (3)$$

$$\alpha+\beta+\gamma<1, \quad \alpha,\ \beta-1\neq 0,\ 1,\ 2,\ \ldots; \quad x,\ a,\ c\in[A,B].$$

Если $x>a$, то $D_{ax,\,a}^{\alpha,\beta,\gamma}\varphi(x) = D_{ax}^{\alpha,\gamma,1-\beta}\varphi(x)$.

Преобразование Эрдейи–Кобе $E_{ax}^{\alpha,\beta}$ определяется формулой [3]

$$E_{ax}^{\alpha,\beta}\varphi(x) = \frac{(x-a)^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x (x-t)^{\alpha-1}(t-a)^{\beta}\varphi(t)\,dt, \qquad (4)$$

$$x>a, \quad \alpha>0, \quad \beta>-1.$$

В силу (1) из (4) имеем

$$E_{ax}^{\alpha,\beta}\varphi(x) = (x-a)^{-\alpha-\beta}D_{ax}^{-\alpha}(x-a)^{\beta}\varphi(x) =$$

$$= \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x (x-t)^{\alpha-1}\left(1-\frac{x-t}{x-a}\right)^{\beta}\varphi(t)\,dt =$$

$$= \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x (x-t)^{\alpha-1}F\left(-\beta,\gamma,\gamma;\frac{x-t}{x-a}\right)\varphi(t)\,dt.$$

Поэтому разумно отображение

$$E_{ax}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}\varphi(x) = \frac{\operatorname{sign}(x-a)}{\Gamma(\alpha)}|x-a|^{-\alpha}\times$$

$$\times\int\limits_a^x |x-t|^{\alpha-1}F\left(-\beta,\gamma,\delta;\frac{x-t}{x-a}\right)\varphi(t)\,dt, \qquad (5)$$

$$\gamma-\beta-1<\delta\neq 0,\ -1,\ -2,\ \ldots$$

называть обобщенным преобразованием Эрдейи–Кобе. В соответствии с (2) и отображение $\varphi(t)\to|x-a|^{-\alpha-\beta}D_{ax}^{-\alpha,\gamma,\delta}|x-a|^{\beta}\varphi(x)$ обобщает преобразование Эрдейи–Кобе.

Введем оператор $H_{ax}^{\alpha,\beta,\gamma}$, который действует на $\varphi(t)\in L[A,B]$, по формуле

$$H_{ax}^{\alpha,\beta,\gamma}\varphi(x)=\frac{\operatorname{sign}(x-a)}{\Gamma(\gamma)}\int\limits_a^x|x-t|^{\gamma-1}F\left(\alpha,\beta,\gamma;\frac{x-t}{x-a}\right)\varphi(t)\,dt.$$

Исследованию свойств этого оператора при $a=0,\,1,\,\infty$ посвящены работы [5, 6] (см. также [4]). Легко видеть, что

$$H_{ax}^{\alpha,\beta,\gamma}\varphi(x)=|x-a|^{\gamma}E_{ax}^{\gamma,-\alpha,\,\beta,\,\gamma}\varphi(x).\tag{6}$$

Оператор $I_{ax}^{\alpha,\beta,\gamma}\colon\varphi(t)\to I_{ax}^{\alpha,\beta,\gamma}\varphi(x)$, где $\varphi(t)\in L[A,B]$, $\beta-\gamma<1$,

$$I_{ax}^{\alpha,\beta,\gamma}\varphi(x)=\frac{\operatorname{sign}(x-a)}{\Gamma(\alpha)|x-a|^{\alpha+\beta}}\int\limits_a^x|x-t|^{\alpha-1}F\left(\alpha+\beta,-\gamma,\alpha;\frac{x-t}{x-a}\right)\varphi(t)\,dt,$$

назовем обобщенным оператором дробного (в смысле Сайго [3]) интегрирования порядка $\alpha>0$ с началом в точке $a\in[A,B]$. Из (5) и (6) следует, что

$$I_{ax}^{\alpha,\beta,\gamma}\varphi(x)=|x-a|^{-\alpha-\beta}H_{ax}^{\alpha+\beta,-\gamma,\alpha}\varphi(x)=|x-a|^{-\beta}E_{ax}^{\alpha,-\alpha-\beta,-\gamma,\alpha}\varphi(x).$$

Важную роль в теории дробного исчисления играет оператор

$$I_{ab}^{\alpha}\varphi(x)=\left(D_{ax}^{\alpha}-\operatorname{sign}\alpha D_{bx}^{\alpha}\right)\varphi(x),\quad a<x<b,\tag{7}$$

который можно назвать оператором дробного интегро-дифференцирования порядка $|\alpha|$ с фиксированным началом и концом в точках $a$ и $b\in[A,B]$.

Нетрудно видеть, что

$$I_{ab}^{\alpha}\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(-\alpha)}\displaystyle\int\limits_a^b\frac{\varphi(t)\,dt}{|x-t|^{\alpha+1}}, & \alpha<0,\\[2ex] \dfrac{\partial^{[\alpha]+1}}{\partial x^{[\alpha]+1}}I_{ab}^{\alpha-[\alpha]-1}\varphi(x), & \alpha>0,\end{cases}\tag{8}$$

$$\lim_{\alpha\to-0}I_{ab}^{\alpha}\varphi(x)=2\varphi(x)\quad\forall\,\varphi(t)\in C[a,b],$$

$$\lim_{\alpha\to+0}I_{ab}^{\alpha}\varphi(x)=0\quad\forall\,\varphi(t)\in C^1[a,b].$$

В справедливости последних двух равенств убеждаемся следующим образом:

$$\lim_{\alpha\to-0} I_{ab}^{\alpha}\varphi(x) = \lim_{\alpha\to-0}\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\left[\int\limits_a^x \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha+1}} + \int\limits_x^b \frac{\varphi(t)\,dt}{(t-x)^{\alpha+1}}\right] =$$

$$= \lim_{\alpha\to-0}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left\{(x-a)^{-\alpha}\int\limits_0^1 \varphi\left[x-(x-a)\xi^{-1/\alpha}\right]d\xi + \right.$$

$$\left. + (b-x)^{-\alpha}\int\limits_0^1 \varphi\left[x+(b-x)\eta^{-1/\alpha}\right]d\eta\right\} = 2\varphi(x),$$

$$\lim_{\alpha\to+0} I_{ab}^{\alpha}\varphi(x) = \lim_{\alpha\to+0}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_a^b \frac{\varphi(t)\,dt}{|x-t|^{\alpha}} =$$

$$= \lim_{\alpha\to+0}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{x-b}^{x-a}\varphi(x-\xi)|\xi|^{-\alpha}d\xi = \varphi(a)-\varphi(b) +$$

$$+ \lim_{\alpha\to+0}\int\limits_{x-b}^{x-a}|\xi|^{-\alpha}\varphi_x(x-\xi)d\xi = -\int\limits_{x-b}^{x-a}\varphi_\xi(x-\xi)d\xi + \varphi(a)-\varphi(b) = 0.$$

Напомним, что $\ln(1-z) = -zF(1,1,2;z)$, $|\arg(1-z)| < \pi$, и вычислим

$$\lim_{\alpha\to-0}\Gamma(-\alpha)D_{ax}^{\alpha,1,2}\varphi(x) = \operatorname{sign}(x-a)\times$$

$$\times\lim_{\alpha\to-0}|x-a|^{-\alpha-1}\int\limits_a^x F\left(\alpha+1,1,2;\frac{t-a}{x-a}\right)\varphi(t)\,dt =$$

$$= (x-a)^{-1}\int\limits_a^x F\left(1,1,2;\frac{t-a}{x-a}\right)\varphi(t)\,dt =$$

$$= -\int\limits_a^x \frac{\varphi(t)}{t-a}\ln\left(1-\frac{t-a}{x-a}\right)dt.$$

Итак, установлено, что

$$\lim_{\alpha\to-0}\Gamma(-\alpha)D_{ax}^{\alpha,1,2}\varphi(x) = \int\limits_a^x \ln\left(\frac{x-t}{x-a}\right)\frac{\varphi(t)}{a-t}dt. \tag{9}$$

Отображение $\varphi(t) \to H^0_{ax}\varphi(x)$, где

$$H^0_{ax}\varphi(x) = \int\limits_a^x \varphi(t)\ln|x-t|\,dt, \qquad (10)$$

назовем дробным интегралом бесконечно малого порядка с началом в точке $a \in [A,B]$ от функции $\varphi(t) \in L[A,B]$, а оператор

$$H^1_{ax} = (\partial/\partial x)H^0_{ax} \qquad (11)$$

– оператором Адамара. В дальнейшем нам понадобится следующая

**Лемма 1.** *Пусть последовательность* $\{f_\varepsilon\}$, $1/\varepsilon = 1,2,3,\dots$, *непрерывно дифференцируемых на сегменте* $[a,b]$ *функций* $f_\varepsilon = f_\varepsilon(x)$ *сходится хотя бы в одной точке* $c \in [a,b]$, *а последовательность* $\{f'_\varepsilon\}$ *их производных* $f'_\varepsilon(x)$ *равномерно сходится на* $[a,b]$. *Тогда* $\{f_\varepsilon\}$ *равномерно сходится на* $[a,b]$, *ее предел – непрерывно дифференцируемая на этом сегменте функция и* $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} f'_\varepsilon(x) = \frac{d}{dx}\lim\limits_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ [7, с. 535].

Докажем, что для любой функции $\varphi(t)$, удовлетворяющей на $[a,b]$ условию Гельдера, справедливы равенства

$$H^1_{ax}\varphi(x) = \int\limits_a^x \frac{\varphi(t)dt}{x-t}, \qquad (12)$$

$$\lim_{\alpha\to -0}\Gamma(-\alpha)\frac{\partial}{\partial x}D^{\alpha,1,2}_{ax}\varphi(x) = (a-x)^{-1}H^1_{ax}\varphi(x), \qquad (13)$$

где интеграл понимается в смысле конечной части по Адамару [8]:

$$\int\limits_a^x \frac{\varphi(t)dt}{x-t} \equiv \left|\overline{\int\limits_a^x \frac{\varphi(t)dt}{x-t}}\right. = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int\limits_a^{x_\varepsilon}\frac{\varphi(t)dt}{x-t} + \varphi(x_\varepsilon)\ln\varepsilon\right], \qquad (14)$$

$x_\varepsilon = x + \varepsilon\,\mathrm{sign}\,(a-x)$. В самом деле, из (10) на основании (11) и леммы 1 имеем

$$H^1_{ax}\varphi(x) = \frac{\partial}{\partial x}H^0_{ax}\varphi(x) = \frac{\partial}{\partial x}\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_a^{x_\varepsilon}\varphi(t)\ln|x-t|dt =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_a^{x_\varepsilon}\varphi(t)\ln|x-t|dt = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\varphi(x_\varepsilon)\ln\varepsilon + \int\limits_a^{x_\varepsilon}\frac{\varphi(t)dt}{x-t}\right].$$

Аналогично, исходя из (9), проверяется и (13). Условие Гельдера гарантировало существование интеграла в смысле (14).

Пусть $\overset{\varkappa}{\mathrm{Lip}}\,[A,B]$ – множество функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих на $[A,B]$ условию Липшица $(0<\varkappa\leqslant 1)$ или Гельдера $(0<\varkappa<1)$ порядка $\varkappa$. Для функции $\varphi(t)$ из класса $\overset{\varkappa}{\mathrm{Lip}}\,[A,B]$ интеграл (12) можно вычислить одним из следующих способов:

$$\int\limits_a^x \frac{\varphi(t)dt}{x-t}=\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_a^x \varphi(t)\ln|x-t|dt=\lim_{\varepsilon\to 0}\Bigg\{[\varphi(x_\varepsilon)-\varphi(x)]\ln\varepsilon+$$

$$+\varphi(x)\ln|x-a|+\int\limits_a^{x_\varepsilon}\frac{\varphi(t)-\varphi(x)}{x-t}dt\Bigg\}=\int\limits_a^x\frac{\varphi(t)-\varphi(x)}{x-t}dt+\varphi(x)\ln|x-a|.$$

С оператором дробного интегро-дифференцирования существенно связаны сингулярные операторы вида

$$S_{ab}^{\alpha}\varphi(x)=\frac{\mathrm{sign}\,(b-a)}{\pi}\int\limits_a^b\left|\frac{t-a}{x-a}\right|^{\alpha}\frac{\varphi(t)dt}{t-x},$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Пусть

$$\dot\Gamma D_{ax}^{\alpha\to-1}\varphi(x)=\lim_{\alpha\to-1}\frac{\partial}{\partial\alpha}\Gamma(-\alpha)D_{ax}^{\alpha}\varphi(x),$$

$$\dot\Gamma I_{ab}^{\alpha\to-1}\varphi(x)=\lim_{\alpha\to-1}\frac{\partial}{\partial\alpha}\Gamma(-\alpha)I_{ab}^{\alpha}\varphi(x).$$

В силу определения (1) получаем

$$\dot\Gamma D_{ax}^{\alpha\to-1}\varphi(x)=\,\mathrm{sign}\,(a-x)\lim_{\alpha\to-1}\int\limits_a^x\frac{\varphi(t)\ln|x-t|}{|x-t|^{\alpha+1}}dt.$$

Стало быть,

$$\dot\Gamma D_{ax}^{\alpha\to-1}\varphi(x)=\,\mathrm{sign}\,(a-x)H_{ax}^{0}\varphi(x),\qquad \dot\Gamma I_{ax}^{\alpha\to-1}\varphi(x)=-\int\limits_a^b\varphi(t)\ln|x-t|dt.$$

Нетрудно заметить, что если функция $\varphi(t)/(t-x)$ интегрируема на сегменте $a\leqslant t\leqslant b$ в смысле (14), то

$$\frac{\partial}{\partial x}\dot\Gamma I_{ab}^{\alpha\to-1}\varphi(x)=H_{bx}^{1}\varphi(x)-H_{ax}^{1}\varphi(x), \tag{15}$$

если же $\varphi(t) \in \overset{\varkappa}{\mathrm{Lip}}\,[a,b]$, то

$$\left(H^1_{bx} - H^1_{ax}\right)\varphi(x) = \pi S^0_{ab}\varphi(x). \tag{16}$$

Формулы (15), (16) широко используются в теории краевых задач для уравнений смешанного типа с оператором Лаврентьева–Бицадзе в главной части [9].

Рассмотрим обобщенные конечно-разностные отношения

$$\Delta^\alpha_n\varphi(x) = \delta_n^{-\alpha}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \left(\begin{array}{c}\alpha\\ k\end{array}\right)\varphi(x-k\delta_n),$$

где $\delta_n = (x-a)/n$, $\left(\begin{array}{c}\alpha\\ k\end{array}\right) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)/k!$, $x > a$.

Если существует предел обобщенных конечно-разностных отношений $\Delta^\alpha_n\varphi(x)$ при $n \to \infty$, то этот предел назовем дробной или междупредельной по Летникову производной порядка $|\alpha|$ от функции $\varphi(t)$, взятой в пределах от $a$ до $x$.

А. В. Летниковым установлено (см. [10, с. 521]), что если $\alpha < 0$ и $\varphi(t) \in L[a,x]$, то

$$\lim_{n\to\infty}\Delta^\alpha_n\varphi(x) = D^\alpha_{ax}\varphi(x); \tag{17}$$

если же $\alpha > 0$ и $\varphi(t) \in C^{[\alpha]}[a,x]$, $\varphi^{([\alpha]+1)}(t) \in L[a,x]$, то

$$\lim_{n\to\infty}\Delta^\alpha_n\varphi(x) = \sum_{k=0}^{[\alpha]}\frac{\varphi^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(x-a)^{k-\alpha} + $$
$$+ D^{\alpha-[\alpha]-1}_{ax}\varphi^{([\alpha]+1)}(x) = D^\alpha_{ax}\varphi(x). \tag{18}$$

Поскольку задача дифференцирования функции, заданной приближенно, является некорректной [11], то определение дробной производной по Летникову может быть успешно использовано при реализации на компьютерах задач дробного исчисления. В частности, выраженная формулой (17), (18) взаимосвязь определений дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана–Лиувилля и Летникова весьма полезна при введении дискретного (разностного) аналога операций дробного дифференцирования и интегрирования.

**2. Формула обращения дробного интеграла бесконечно малого порядка и обыкновенные непрерывные дифференциальные уравнения.** Если придерживаться определения производной по Летникову, то задача обращения оператора $H^\alpha_{ax} \equiv D^\alpha_{ax}H^0_{ax}$ приводит к обыкновенным непрерывным (по терминологии Вольтерра [12, с. 100]) дифференциальным уравнениям. К таким уравнениям относится, например, уравнение

$$M_{ax}^{\alpha,\beta}y(x) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m(x)D_{ax}^{\alpha_m}y(x) = f(x), \qquad (19)$$

где $y(x)$ – неизвестная функция,

$$M_{ax}^{\alpha,\beta}y(x) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} a_\xi(x)D_{ax}^{\xi}y(x)d\xi. \qquad (20)$$

Б. Мандельбройт [13] (см. также [12, с. 99]) показал, что функция, доставляющая экстремум величины (20), удовлетворяет уравнению вида (19).

С целью обращения оператора $H_{ax}^0$ и установления его связи с оператором $M_{ax}^{\alpha,\beta}$ рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра первого рода с логарифмическим ядром

$$H_{ax}^0\varphi(x) = f(x), \quad a < x < b. \qquad (21)$$

Справедлива следующая

**Лемма 2.** *Пусть $\varphi(t) \in L[a,b]$ и существует $H_{ax}^\alpha\varphi(x)$. Тогда если $a_\mu = \exp(-\mu\Gamma'(1))$, то*

$$-H_{ax}^\alpha\varphi(x) = \begin{cases} a_{-\alpha}\dfrac{\partial}{\partial\alpha}a_\alpha D_{ax}^{\alpha-1}\varphi(x), & \alpha < 0, \\ a_{-\alpha}\dfrac{\partial}{\partial\alpha}a_\alpha \dfrac{\partial^{[\alpha]}}{\partial x^{[\alpha]}}D_{ax}^{\alpha-[\alpha]-1}\varphi(x), & \alpha > 0. \end{cases}$$

Действительно, для всех $\mu < 0$ имеем

$$D_{ax}^{\mu}H_{ax}^0\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(-\mu)}\int\limits_a^x \frac{dt}{(x-t)^{\mu+1}}\int\limits_a^t \varphi(\xi)\ln(t-\xi)d\xi =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(-\mu)}\int\limits_a^x \varphi(\xi)d\xi\int\limits_\xi^x (x-t)^{-\mu-1}\ln(t-\xi)dt.$$

Во внутреннем интеграле произведем замену $t = \xi + (x-\xi)\eta$. В результате получим

$$H_{ax}^{\mu}\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(-\mu)}\int\limits_a^x (x-\xi)^{-\mu}\varphi(\xi)d\xi\int\limits_0^1 \frac{\ln\eta(x-\xi)}{(1-\eta)^{\mu+1}}d\eta.$$

Отсюда, принимая во внимание, что

$$\int_0^1 \frac{\ln t dt}{(1-t)^{\mu+1}} = \lim_{\varepsilon\to 1}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\int_0^1 t^{\varepsilon-1}(1-t)^{-\mu-1}dt = \Gamma(-\mu)\lim_{\varepsilon\to 1}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon-\mu)} =$$

$$= \frac{\Gamma(-\mu)}{\Gamma(1-\mu)}\left[\Gamma'(1) - \frac{\Gamma'(1-\mu)}{\Gamma(1-\mu)}\right] \equiv -\frac{\gamma_\mu}{\mu},$$

с учетом равенства $\Gamma(1-\mu) = -\mu\Gamma(-\mu)$ находим

$$\int_0^1 (1-\eta)^{-\mu-1}\ln\eta(x-\xi)d\eta = -\left[\ln(x-\xi)+\gamma_\mu\right]/\mu.$$

Но это говорит о том, что для любого $\mu < 0$

$$H^\mu_{ax}\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\int_a^x (x-\xi)^{-\mu}\left[\ln(x-\xi)+\gamma_\mu\right]\varphi(\xi)d\xi. \qquad (22)$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial\mu}a_\mu\frac{(x-\xi)^{-\mu}}{\Gamma(1-\mu)} = -\frac{(x-\xi)^{-\mu}}{\Gamma(1-\mu)}a_\mu\left[\ln(x-\xi)+\gamma_\mu\right],$$

то формулу (22) можно переписать в виде

$$H^\mu_{ax}\varphi(x) = -a_{-\mu}\frac{\partial}{\partial\mu}a_\mu D^{\mu-1}_{ax}\varphi(x). \qquad (23)$$

Из (23) при $\mu = \alpha < 0$ следует лемма 2.

Пусть теперь $\alpha > 0$. Тогда из (1) и (23) имеем

$$H^\alpha_{ax}\varphi(x) = \frac{\partial^{[\alpha]+1}}{\partial x^{[\alpha]+1}}H^{\alpha-[\alpha]-1}_{ax}\varphi(x) =$$

$$= \frac{\partial^{[\alpha]+1}}{\partial x^{[\alpha]+1}}a_{1+[\alpha]-\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}a_{\alpha-[\alpha]-1}D^{\alpha-[\alpha]-2}_{ax}\varphi(x) =$$

$$= -a_{-\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}a_\alpha\frac{\partial^{[\alpha]}}{\partial x^{[\alpha]}}D^{\alpha-[\alpha]-1}_{ax}\varphi(x),$$

что и требовалось доказать.

Пользуясь леммой 2 и тем, что постоянная Эйлера $-\Gamma'(1) > 0$, легко видеть, что

$$-\int_{-\infty}^1 a_\alpha H^\alpha_{ax}\varphi(x)d\alpha = a_\alpha D^{\alpha-1}_{ax}\varphi(x)\Big|_{-\infty}^1 = a_1\varphi(x).$$

Следовательно,

$$\varphi(x) = -\int\limits_{-\infty}^{1} a_{\alpha-1} H_{ax}^{\alpha}\varphi(x)d\alpha = -\int\limits_{-\infty}^{1} a_{\alpha-1} D_{ax}^{\alpha} H_{ax}^{0}\varphi(x)d\alpha. \qquad (24)$$

Из (24) заключаем: если $f(t) \in L[a,b] \cap C^1[a,b]$, то единственное решение уравнения (21) задается формулой

$$\varphi(x) = -\int\limits_{-\infty}^{1} a_{\xi-1} D_{ax}^{\xi} f(x)d\xi = -a_{-1} M_{ax}^{-\infty,1} f(x). \qquad (25)$$

Известную (см. [14, с. 575]) в случае, когда $f(t) \in C^2[a,b]$, формулу обращения

$$\varphi(x) = \int\limits_{a}^{x} f''(t)dt \int\limits_{0}^{\infty} (x-t)^{\nu} \exp\left(\Gamma'(1)\nu\right) \Gamma^{-1}(\nu+1)d\nu -$$

$$- f'(a) \int\limits_{0}^{\infty} x^{\nu} \exp\left(\Gamma'(1)\nu\right) \Gamma^{-1}(\nu+1)d\nu$$

уравнения (замкнутого цикла) (21) нетрудно получить из (25).

Рассмотрим теперь уравнение

$$\left|\overline{\int\limits_{a}^{x} \frac{\varphi(t)}{x-t}}dt = f(x), \qquad a < x < b, \right. \qquad (26)$$

с правой частью $f(x) \in \overset{\varkappa}{\mathrm{Lip}}[a,b]$. В классе функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих на сегменте $a \leqslant t \leqslant x$ условию Гельдера, уравнение (26) эквивалентно уравнению

$$H_{ax}^{0}\varphi(x) = \int\limits_{a}^{x} f(t)dt.$$

Поэтому на основании (25) можно утверждать, что единственное решение $\varphi(x)$ уравнения (26) задается формулой

$$\varphi(x) = -M_{ax}^{-\infty,0} f(x) \equiv -\int\limits_{-\infty}^{1} a_{\xi-1} D_{ax}^{\xi} \int\limits_{a}^{x} f(t)dtd\xi = -\int\limits_{-\infty}^{0} a_{\alpha} D_{ax}^{\alpha} f(x)d\alpha.$$

**3. Правила композиции операторов дробного интегро-дифференцирования с различными началами.** Закон композиции $D^{\alpha}_{ax}D^{\beta}_{ax} = D^{\alpha+\beta}_{ax}$операторов дробного интегрирования порядка $\alpha < 0$ и $\beta < 0$ с началом в одной и той же точке $a \in [A, B]$ допускает следующее обобщение.

**Лемма 3.** *Пусть* $\varphi(t) \in L[a, b] \cap C]a, b[$. *Тогда для любых* $\alpha < 0$, $\beta < 0$ *и* $x \in ]a, b[$

$$D^{\alpha}_{ax}D^{\beta}_{bx}\varphi(x) = D^{\alpha,\beta,1}_{ax,a}(x-a)^{-\beta}\varphi(x) + (x-a)^{\beta-\alpha+1}D^{\beta,\alpha,1}_{bx,a}(x-a)^{-\beta-1}\varphi(x).$$

Доказательство начнем с очевидных равенств

$$\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\beta)D^{\beta}_{ax}D^{\beta}_{bx}\varphi(x) = \int\limits_a^x (x-\xi)^{-\alpha-1}d\xi \left[\int\limits_\xi^x + \int\limits_x^b\right] \frac{\varphi(t)dt}{(t-\xi)^{\beta+1}} =$$

$$= \int\limits_a^x \varphi(t)dt \int\limits_a^t \frac{(x-\xi)^{-\alpha-1}}{(t-\xi)^{\beta+1}}d\xi + \int\limits_x^b \varphi(t)dt \int\limits_a^x (x-\xi)^{-\alpha-1}(t-\xi)^{-\beta-1}d\xi. \quad (27)$$

В первом и втором внутренних интегралах произведем замену $\xi = a + (t-a)\eta$ и $\xi = a+(x-a)\eta$ соответственно. В результате получим, что правая часть (27) равна

$$\int\limits_a^x \frac{(t-a)^{-\beta}\varphi(t)}{(x-a)^{\alpha+1}}dt \int\limits_0^1 (1-\eta)^{-\beta-1}\left(1-\frac{t-a}{x-a}\eta\right)^{-\alpha-1} d\eta +$$

$$+ \int\limits_x^b \frac{(t-a)^{-\beta-1}}{(x-a)^{\alpha}}\varphi(t)dt \int\limits_0^1 (1-\eta)^{-\alpha-1}\left(1-\frac{x-a}{t-a}\eta\right)^{-\beta-1} d\eta =$$

$$= \frac{\Gamma(-\beta)}{\Gamma(1-\beta)}(x-a)^{-\alpha-1}\int\limits_a^x (t-a)^{-\beta}F\left(\alpha+1,\, 1, 1-\beta; \frac{t-a}{x-a}\right)\varphi(t)dt +$$

$$+ \frac{\Gamma(-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}\int\limits_x^b (t-a)^{-\beta-1}F\left(\beta+1,\, 1, 1-\alpha; \frac{x-a}{t-a}\right)\varphi(t)dt,$$

что и требовалось доказать.

**Теорема 1.** *Пусть* $\varphi(t) \in L[a, b] \cap C]a, b[$. *Тогда** *для любых* $\alpha < 0$, $\beta < 0$, *удовлетворяющих условию* $\alpha + \beta < -1$:

$$\frac{\partial}{\partial x}D^{\alpha}_{ax}D^{\beta}_{bx}\varphi(x) = D^{\alpha+1,\beta,1}_{ax,a}(x-a)^{-\beta}\varphi(x)+(x-a)^{\beta-\alpha}D^{\beta,\alpha+1,1}_{bx,a}(x-a)^{-\beta-1}\varphi(x). \quad (28)$$

---

*В [2, с. 159] коэффициент $\Gamma(\beta+1)/\Gamma(-\beta)$ лишний.

Хорошо известно [1, 15], что

$$\frac{\partial}{\partial z} z^a F\left(a,\, b,\, c; z\right) = a z^{a-1} F\left(a+1,\, b,\, c; z\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial z} z^{c-1} F\left(a,\, b,\, c; z\right) = (c-1) z^{c-2} F\left(a,\, b,\, c-1; z\right),$$

$$\lim_{z\to 1-0} F\left(a,\, b,\, c; z\right) = \Gamma(c)\Gamma(c-a-b)/[\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)],$$

если $\operatorname{Re}(c-a-b) > 0$.

Опираясь на эти свойства гипергеометрической функции, нетрудно убедиться в достоверности следующих вычислений:

$$\Gamma(-\alpha)\Gamma(1-\beta)\frac{\partial}{\partial x} D^{\alpha,\beta,1}_{ax,a}(x-a)^{-\beta}\varphi(x) =$$

$$= (x-a)^{-\alpha-\beta-1} F(\alpha+1, 1, 1-\beta; 1)\varphi(x) +$$

$$+ \int\limits_a^x (t-a)^{-\alpha-\beta-1}\varphi(t)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{t-a}{x-a}\right)^{\alpha+1} F\left(\alpha+1,\, 1, 1-\beta; \frac{t-a}{x-a}\right) dt =$$

$$= F(\alpha+1, 1, 1-\beta; 1)\varphi(x)(x-a)^{-\alpha-\beta-1} -$$

$$-(\alpha+1)\int\limits_a^x \frac{\varphi(t)(t-a)^{-\beta}}{(x-a)^{\alpha+2}} F\left(\alpha+2,\, 1, 1-\beta; \frac{t-a}{x-a}\right) dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} D^{\alpha,\beta,1}_{ax,a}(x-a)^{-\beta}\varphi(x) =$$

$$= -\frac{\varphi(x)(x-a)^{-\alpha-\beta-1}}{(\alpha+\beta+1)\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\beta)} + D^{\alpha+1,\beta,1}_{ax,a}(x-a)^{-\beta}\varphi(x), \tag{29}$$

$$\Gamma(1-\alpha)\Gamma(-\beta)\frac{\partial}{\partial x}(x-a)^{1-\alpha+\beta} D^{\beta,\alpha,1}_{bx,a}(x-a)^{-\beta-1}\varphi(x) =$$

$$= -(x-a)^{-\alpha-\beta-1} F(\beta+1, 1, 1-\alpha; 1)\varphi(x) +$$

$$+ \int\limits_x^b (t-a)^{-\alpha-\beta-1}\varphi(t)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{-\alpha} F\left(\beta+1,\, 1, 1-\alpha; \frac{x-a}{t-a}\right) dt =$$

$$= -(x-a)^{-\alpha-\beta-1} F(\beta+1, 1, 1-\alpha; 1)\varphi(x) -$$

$$-\alpha(x-a)^{-\alpha-1}\int\limits_x^b F\left(\beta+1,\, 1, -\alpha; \frac{x-a}{t-a}\right)(t-a)^{-\beta-1}\varphi(t) dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(x-a)^{1-\alpha+\beta} D_{bx,a}^{\beta,\alpha,1}(x-a)^{-\beta-1}\varphi(x) = \tag{30}$$

$$= \frac{\varphi(x)(x-a)^{-\alpha-\beta-1}}{(\alpha+\beta+1)\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\beta)} + (x-a)^{\beta-\alpha} D_{bx,a}^{\beta,\alpha+1,1}(x-a)^{-\beta-1}\varphi(x).$$

Правило композиции (28) вытекает из леммы 3 и равенств (29), (30).

**Теорема 2.** *Если $\varphi(t)$ удовлетворяет условию Гельдера и интегрируема на $]a,b[$, то для всех $\alpha \in ]0,1[$*

$$D_{ax}^{\alpha} D_{bx}^{-\alpha}\varphi(x) = \cos\pi\alpha\, \varphi(x) + \sin\pi\alpha\, S_{ab}^{\alpha}\varphi(x). \tag{31}$$

Достоверность закона композиции (31) нетрудно усмотреть из следующих истинных в силу лемм 1, 3 равенств:

$$D_{ax}^{\alpha} D_{bx}^{-\alpha}\varphi(x) = \frac{\partial}{\partial x} D_{ax}^{\alpha-1} D_{bx}^{-\alpha}\varphi(x) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\partial}{\partial x}\left[D_{ax-\varepsilon,\,a}^{\alpha-1,-\alpha,1}(x-a)^{\alpha} + (x-a)^{2-2\alpha} D_{bx+\varepsilon,\,a}^{-\alpha,\alpha-1,1}(x-a)^{\alpha-1}\right]\varphi(x).$$

Поскольку для любого $\alpha \in ]0,1[$ $D_{ax}^{\alpha} D_{ax}^{-\alpha}\varphi(x) = \varphi(x)$, то из (31) получаем формулу для дробной производной потенциала со степенным ядром

$$D_{ax}^{\alpha} I_{ab}^{-\alpha}\varphi(x) = 2\cos^2\frac{\pi\alpha}{2}\,\varphi(x) + \sin\pi\alpha\, S_{ab}^{\alpha}\varphi(x). \tag{32}$$

При $a=0$, $b=1$, $\varphi(x)\equiv\nu(x)$, $\alpha = 2/(m+2)$, $m = 1, 2, \ldots$, из (32) имеем

$$\frac{d}{dx}\int_0^1 \left[\int_0^x |\xi-y|^{-m/(m+2)}(x-\xi)^{-2/(m+2)}\right]\nu(y)dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{y}{x}\right)^{2/(m+2)} \frac{\nu(y)dy}{y-x} + \pi\mathrm{tg}\,\frac{\pi m}{2m+4}\,\nu(x). \tag{33}$$

Формула (33), устанавливающая связь интеграла Коши с интегралами Римана–Лиувилля, впервые получена Ф. Трикоми [15, гл. VI, § 7] в случае, когда $m=1$, и С. Геллерстедтом [17] в общем случае, и она играет важную роль при доказательстве существования решения задачи Трикоми для уравнений смешанного типа с оператором $y^m\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ в главной части. Легко увидеть, что при выводе формулы (33) Геллерстедт [17, с. 71–73] нигде не пользуется тем, что $m$ нечетно. Ему достаточно, чтобы положительное число $\beta = m/(2m+4) < 1/2$.

Пусть соблюдены условия теоремы 2. Тогда из (32) и равенства $D_{ax}^{-\alpha} D_{ax}^{\alpha}\varphi(x) = \varphi(x)$ имеем [18, 19]

$$D_{bx}^{-\alpha}\varphi(x) = \cos\pi\alpha\, D_{ax}^{-\alpha}\varphi(x) + \sin\pi\alpha\, D_{ax}^{-\alpha} S_{ax}^{\alpha}\varphi(x).$$

**Лемма 4.** *Пусть* $(x-a)^{-\alpha}\varphi(x) \in L[a,b]$, $D^{\alpha}_{bx}\varphi(x) \in C[a,b[$. *Тогда для любых* $\alpha \in ]0,1[$ *и* $x \in ]a,b[$

$$D^{-\alpha}_{ax} D^{\alpha}_{bx}\varphi(x) = \sin\pi\alpha\, R^{-\alpha}_{ab}\varphi(x) - D^{1-\alpha}_{ax} D^{\alpha-1}_{bx}\varphi(x), \tag{34}$$

$$R^{-\alpha}_{ab}\varphi(x) = \left(S^{1-\alpha}_{ab} - S^{-\alpha}_{ab}\right)\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_a^b \left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\alpha} \frac{\varphi(t)dt}{x-a}. \tag{35}$$

Лемма 4 вытекает из равенств $\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha) = \pi/\sin\pi\alpha$,

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left[D^{-\alpha}_{ax-\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x}D^{\alpha-1}_{bx} + \frac{\partial}{\partial x}D^{-\alpha}_{ax-\varepsilon}D^{\alpha-1}_{bx} - \sin\pi\alpha\, R^{-\alpha}_{ab}\right]\varphi(x) = 0.$$

**Теорема 3.** *Пусть* $\varphi(x) \in \overset{\varkappa}{Lip}\,]a,b[$, $(x-a)^{-\alpha}\varphi(x)$ *и* $I^{\alpha}_{ab}\varphi(x) \in L[a,b]$. *Тогда для любого* $\alpha \in ]0,1[$

$$D^{-\alpha}_{ax} I^{\alpha}_{ab}\varphi(x) = 2\sin\frac{\pi\alpha}{2}\,\varphi(x) + \sin\pi\alpha\, S^{-\alpha}_{ab}\varphi(x). \tag{36}$$

Формула (36) следует из (31), (34) и (35):

$$D^{-\alpha}_{ax} I^{\alpha}_{ab}\varphi(x) = \left(D^{-\alpha}_{ax}D^{\alpha}_{ax} - D^{-\alpha}_{ax}D^{\alpha}_{bx}\right)\varphi(x) = \varphi(x) + D^{1-\alpha}_{ax}D^{\alpha-1}_{bx}\varphi(x) -$$
$$- \sin\pi\alpha\, R^{-\alpha}_{ab}\varphi(x) = [1+\cos(1-\alpha)\pi]\varphi(x) + \sin(1-\alpha)\pi\, S^{1-\alpha}_{ab}\varphi(x) -$$
$$- \sin\pi\alpha\, R^{-\alpha}_{ab}\varphi(x) = 2\sin^2(\pi\alpha/2)\,\varphi(x) +$$
$$+ \sin\pi\alpha\left(S^{-\alpha}_{ab} + R^{-\alpha}_{ab}\right)\varphi(x) - \sin\pi\alpha\, R^{-\alpha}_{ab}\varphi(x).$$

Пусть функция $\psi(x)$ такова, что $\varphi(x) \equiv D^{-\alpha}_{bx}\psi(x) \in \overset{\varkappa}{\mathrm{Lip}}]a,b[$, $(x-a)^{-\alpha}\varphi(x)$ и $I^{\alpha}_{ab}\varphi(x) \in L[a,b]$. Тогда

$$D^{-\alpha}_{ax}\psi(x) = \cos\pi\alpha\, D^{-\alpha}_{bx}\psi(x) - \sin\pi\alpha\, S^{-\alpha}_{ab}D^{-\alpha}_{bx}\psi(x). \tag{37}$$

Действительно, согласно теореме 3, имеем

$$D^{-\alpha}_{ax} I^{\alpha}_{ab} D^{-\alpha}_{bx}\psi(x) = D^{-\alpha}_{ax}(D^{\alpha}_{ax} - D^{\alpha}_{bx})D^{-\alpha}_{bx}\psi(x) =$$
$$= (D^{-\alpha}_{bx} - D^{-\alpha}_{ax})\psi(x) = 2\sin^2(\pi\alpha/2)\, D^{-\alpha}_{bx}\psi(x) + \sin\pi\alpha\, S^{-\alpha}_{ab}D^{-\alpha}_{bx}\psi(x).$$

Формула (37) в случае, когда $D^{-\alpha}_{bx}\psi(x) = (x-a)^{-\alpha_1}(b-x)^{-\beta_1}\psi_0(x)$, $\alpha_1$, $\beta_1 \in [0, 1-\alpha]$, $\psi_0(x) \in \overset{\varkappa}{\mathrm{Lip}}[a,b]$, другим методом получена в [20].

**Теорема 4.** *Пусть суммируемая на* $[a,b]$ *функция* $\varphi(t) \in \overset{\varkappa}{Lip}]a,c[$ *при* $c > x$, $\varphi(t) \in \overset{\varkappa}{Lip}]c,b[$ *при* $x > c$. *Тогда для всех* $x \neq a$, $b$, $c$

$$D^{\alpha}_{cx} I^{-\alpha}_{ab}\varphi(x) = [2\cos^2(\pi\alpha/2) + \mathrm{sign}(x-c)\sin\pi\alpha\,(S^{\alpha}_{ca} + S^{\alpha}_{cb})]\varphi(x).$$

Эта формула, которая весьма полезна при решении задачи Геллерстедта [17], является следствием (32) и равенств

$$D^{\alpha}_{cx} I^{-\alpha}_{ac} \varphi(x) = [1 - \operatorname{sign}(x-c)] \cos^2(\pi\alpha/2)\varphi(x) + \operatorname{sign}(x-c) S^{\alpha}_{ac}\varphi(x),$$

$$D^{\alpha}_{cx} I^{-\alpha}_{ac} \varphi(x) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int\limits_a^c \varphi(\eta) d\eta \frac{\partial}{\partial x} \int\limits_c^x \left(\frac{\xi-\eta}{x-\xi}\right)^{\alpha} \frac{d\xi}{\xi-\eta} =$$

$$= \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int\limits_a^c \varphi(\eta) d\eta \frac{\partial}{\partial x} \int\limits_0^{(x-c)/(c-\eta)} t^{-\alpha}(1+t)^{-1} dt = \sin \pi\alpha \, S^{\alpha}_{ca}\varphi(x), \quad x > c,$$

$$D^{\alpha}_{cx} I^{-\alpha}_{ac} \varphi(x) = D^{\alpha}_{ay} I^{-\alpha}_{ac} \varphi(a+c-y), \quad y = a+c-x > a,$$

$$D^{\alpha}_{cx} I^{-\alpha}_{cb} \varphi(x) = D^{\alpha}_{bz} I^{-\alpha}_{cb} \varphi(b+c-z) = -\sin \pi\alpha \, S^{\alpha}_{cb}\varphi(x), \quad z = b+c-x > b.$$

Автор выражает искреннюю благодарность М. С. Салахитдинову, соавтору леммы 3 и теоремы 1, за обсуждение результатов работы.

## Литература

1. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М. – Л.: ГИФМЛ, 1963. 358 с.
2. Нахушев А. М., Салахитдинов М. С. Нелокальные задачи для уравнений в частных производных и их приложения к моделированию и автоматизации проектирования сложных систем. Нальчик. 1986. С. 158–159.
3. Saigo M. Math. Japon. 1979. Vol. 24, no. 1. Pp. 377–385.
4. Love E. R. Proc. Edinburgh Math. Soc. 1967. Vol. 15, no. 3. Pp. 169–198.
5. Higgins T. P. J. Soc. Indust. Appl. Math. 1963. Vol. 11, no. 6. Pp. 886–893.
6. Wimp Jet. Proc. Glasgow Math. Assoc. 1965. Vol. 7, no. 3. Pp. 42–44.
7. Кудрявцев Л. Д. Математический анализ. М., 1970.
8. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М., 1978.
9. Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М., 1981.
10. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М. – Л., 1951.
11. Самарский А. А. Введение в численные методы. М., 1982.
12. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. М., 1982.
13. Mandelbrojt S. Rend. R. Accad. dei Lincei. 1925. Vol. 1, no. 6. Pp. 151–156.
14. Андре Анго. Математика для электро- и радиоинженеров. М., 1965.
15. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М., 1957.
16. Tricomi F. Sulle equazioni lineari alle derivate pazziali di 2° ordine di tipo misto // Mem. Lincei. 1923. Ser. 5, 14. Fasc. 7.
17. Gellerstedt S. Sur un probléme aux limites pour une éguation lineaire aux dériveés partielles du second ordre type mixte: Thés pour le doctorat. 1935.
18. Самко С. Г. Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, № 2. С. 298–314.
19. Рубин Б. С. Дифференц. уравнения. 1980. Т. 26, № 5. С. 917–927.
20. Wolfersdorf L. Math. Zeit. 1965. Vol. 90, no. 1. Pp. 24–28.

Поступила в редакцию
16 апреля 1987 г.

Кабардино-Балкарский
государственный университет

# Дробный интеграл Мегуми Сайго и его связь с законом взвешенной композиции операторов дробного интегрирования в смысле Римана–Лиувилля

Пусть $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера, $F(a, b, c; z)$ – гипергеометрическая функция Гаусса, $\alpha > 0$, $\beta$ и $\gamma$ – действительные числа.

Образ $I_{0x}^{\alpha,\beta,\gamma}\varphi$ функции $\varphi(x)$, которая определена в интервале $0 < x < r$, при отображении

$$I_{0x}^{\alpha,\beta,\gamma}\varphi = \frac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1} F(\alpha+\beta, -\gamma, \alpha; 1-t/x)\varphi(t)dt. \tag{1}$$

M. Saigo [1] (см. также [2, с. 33], [3], [4]) назвал дробным интегралом порядка $\alpha$ от функции $\varphi(x)$.

Из определения (1) при $\alpha + \beta = 0$ и равенства $F(0, b, c; z) = 1$ для любой функции $\varphi(x) \in L[0, r]$ получаем

$$I_{0x}^{\alpha,-\alpha,\gamma}\varphi = D_{0x}^{-\alpha}\varphi(t) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1}\varphi(t)dt, \tag{2}$$

где символ $D_{0x}^{-\alpha}$ – означает оператор дробного (в смысле Римана–Лиувилля) интегрирования порядка $\alpha$ с началом в точке 0 и с концом в точке $x > 0$.

Через $L^{\mu,\nu}[0, r]$ обозначим пространство функций $\varphi(x)$ с конечной нормой

$$\|\varphi\|_{\mu,\nu} = \int\limits_0^r x^\mu \log^\nu\left(\frac{1}{x}\right)|\varphi(x)|\,dx.$$

Функция $F(\alpha + \beta, -\gamma, \alpha; 1 - t/x)$ при $x > 0$ и $t \to 0$ ограничена, если $\beta < \gamma$ обращается в бесконечность логарифмического порядка при $\beta = \gamma$ и в бесконечность порядка $\beta - \gamma$, если $\beta > \gamma$. Поэтому функция $\varphi(x)$ будет принадлежать области определения оператора $I_{0x}^{\alpha,\beta,\gamma}$, если $\varphi(x) \in L^{0,0}[0, r] = L[0, r]$ при $\beta < \gamma$, $\varphi(x) \in L^{0,1}[0, r]$ при $\beta = \gamma$ и $\varphi(x) \in L^{\gamma-\beta,0}[0, r]$, когда $\beta > \gamma$.

Справедлива следующая

Нахушев А. М., Нахушева З. А. Доклады АМАН. 2000, **5**:1, 36–39.

**Теорема.** *Пусть* $\alpha+\beta<1$, $\gamma<0$, $\alpha>-\gamma$;

$$\varphi(x)\in\begin{cases} L[0,r] & \text{при} \quad \beta<\gamma, \\ L^{0,1}[0,r] & \text{при} \quad \beta=\gamma, \\ L^{\gamma-\beta,0}[0,r] & \text{при} \quad \beta>\gamma. \end{cases}$$

*Тогда*

$$I_{0x}^{\alpha,\beta,\gamma}\varphi=D_{0x}^{\gamma}t^{-\alpha-\beta}D_{0t}^{-\alpha-\gamma}\varphi(\xi). \tag{3}$$

Действительно, в силу (2)

$$D_{0x}^{\gamma}t^{-\alpha-\beta}D_{0t}^{-\alpha-\gamma}\varphi(\xi)=\frac{1}{\Gamma(-\gamma)\Gamma(\alpha+\gamma)}\int\limits_0^x\frac{t^{-\alpha-\beta}dt}{(x-t)^{1+\gamma}}\int\limits_0^t\frac{\varphi(\xi)d\xi}{(t-\xi)^{1-\alpha-\gamma}}. \tag{4}$$

Формула Дирихле перестановки порядка интегрирования дает основания записать

$$\Phi(x)\equiv\int\limits_0^x\frac{t^{-\alpha-\beta}dt}{(x-t)^{1+\gamma}}\int\limits_0^t\frac{\varphi(\xi)d\xi}{(t-\xi)^{1-\alpha-\gamma}}=$$

$$=\int\limits_0^x\varphi(\xi)d\xi\int\limits_\xi^x(x-t)^{-\gamma-1}(t-\xi)^{\alpha+\gamma-1}t^{-\alpha-\beta}dt. \tag{5}$$

Во внутреннем интеграле произведем замену переменной интегрирования по формуле $t=x-(x-\xi)\eta$. В результате будем иметь

$$\Phi(x)=x^{-\alpha-\beta}\int\limits_0^x\varphi(\xi)(x-\xi)^{-\alpha-1}d\xi\times$$

$$\times\int\limits_0^1\eta^{-\gamma-1}(1-\eta)^{\alpha+\gamma-1}\left(1-\frac{x-\xi}{x}\eta\right)^{-\alpha-\beta}d\eta. \tag{6}$$

Так как $\alpha+\gamma>0$, то можно воспользоваться формулой Эйлера и придать равенству (6) следующий вид:

$$\Phi(x)=x^{-\alpha-\beta}B(-\gamma,\alpha+\gamma)\int\limits_0^x\varphi(\xi)(x-\xi)^{-\alpha-1}F\left(\alpha+\beta,-\gamma,\alpha;1-\frac{\xi}{x}\right)d\xi, \tag{7}$$

где $B(x,y)=\Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$ – бета-функция.

Из (4), (6) и (7) заключаем, что

$$D_{0x}^{\gamma} t^{-\alpha-\beta} D_{0t}^{-\alpha-\gamma}\varphi(\xi) = \frac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x (x-\xi)^{\alpha-1} F\left(\alpha+\beta, -\gamma, \alpha; 1-\frac{\xi}{x}\right)\varphi(\xi)d\xi.$$

Отсюда в соответствии с (1) получаем (3).

Рассмотрим уравнение

$$I_{0x}^{\alpha,\beta,\gamma}\varphi = \psi(x), \tag{8}$$

где $\alpha+\beta<1$, $\gamma<0$, $\alpha+\gamma>0$.

В силу теоремы уравнение (8) эквивалентно уравнению

$$D_{0x}^{\gamma} t^{-\alpha-\beta} D_{0t}^{-\alpha-\gamma}\varphi(\xi) = \psi(x). \tag{9}$$

Пусть $n-1<-\gamma\leqslant n$, $n=1,2,\ldots$ Для того, чтобы уравнение (9) с правой частью $\psi(x)\in L[0,r]$ имело решение $\varphi(x)$ такое, что

$$x^{-\alpha-\beta} D_{0x}^{-\alpha-\gamma}\varphi(\xi) \in L[0,r], \tag{10}$$

необходимо и достаточно выполнение следующих двух условий: функция $D_{0x}^{-\gamma-n}\psi(t)$ абсолютно непрерывна на $[0,r]$, т. е.

$$D_{0x}^{-\gamma-n}\psi(t) \in AC[0,r]; \tag{11}$$

$$\lim_{x\to 0} D_{0x}^{-\gamma-n}\psi(t) = 0, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\partial^k}{\partial x^k} D_{0x}^{-\gamma-n}\psi(t) = 0 \tag{12}$$

при $k=1,2,\ldots,n-1$.

Если выполнены условия (11) и (12), то решение уравнения (9) из класса (10) почти всюду на $[0,r]$ удовлетворяет уравнению

$$D_{0x}^{-\alpha-\gamma}\varphi(t) = x^{\alpha+\beta} D_{0x}^{-\gamma}\psi(t). \tag{13}$$

Пусть $m-1<\alpha+\gamma\leqslant m$, $m=1,\ 2,\ \ldots$, $x^{\alpha+\beta}D_{0x}^{-\gamma}\psi(t)\in L[0,r]$.

Интегральное уравнение Абеля (13) разрешимо в $L[0,r]$ тогда и только тогда, когда

$$D_{0x}^{\alpha+\gamma-m} t^{\alpha+\beta} D_{0t}^{-\gamma}\psi(\xi) \in AC[0,r], \tag{14}$$

$$\lim_{x\to 0} D_{0x}^{\alpha+\gamma-m} t^{\alpha+\beta} D_{0t}^{-\gamma}\psi(\xi) = 0, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\partial^k}{\partial x^k} D_{0x}^{\alpha+\gamma-m} t^{\alpha+\beta} D_{0t}^{-\gamma}\psi(\xi) = 0. \tag{15}$$

Если выполнены условия (14) и (15), то решение уравнения (13) единственно и почти всюду на $[0,r]$ представимо в виде

$$\varphi(x) = D_{0x}^{\alpha+\gamma} t^{\alpha+\beta} D_{0t}^{-\gamma}\psi(\xi). \tag{16}$$

Пусть $0 < \alpha + \gamma < 1$, $0 < -\gamma < 1$. Тогда формулу обращения (16) можно переписать в виде

$$\varphi(x) = \frac{\partial}{\partial x} D_{0x}^{\alpha+\gamma-1} t^{\alpha+\beta} \frac{\partial}{\partial t} D_{0t}^{-\gamma-1} \psi(\xi) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha-\gamma)\Gamma(1+\gamma)} \int\limits_0^x \frac{t^{\alpha+\beta}dt}{(x-t)^{\alpha+\gamma}} \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_0^t \frac{\psi(\xi)d\xi}{(t-\xi)^{-\gamma}}. \tag{17}$$

Для любой абсолютно непрерывной на $[0, r]$ функции $\psi(x)$, обращающейся в нуль при $x = 0$, справедлива формула

$$\frac{\partial}{\partial x} \int\limits_0^x \frac{\psi(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{-\gamma}} = \int\limits_0^x \psi'(\xi)(x-\xi)^{\gamma} d\xi. \tag{18}$$

При выполнении условия (18) из (17) имеем

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha-\gamma)\Gamma(1+\gamma)} \frac{\partial}{\partial x} \int\limits_0^x \frac{t^{\alpha+\beta}dt}{(x-t)^{\alpha+\gamma}} \int\limits_0^t \frac{\psi'(\xi)d\xi}{(t-\xi)^{-\gamma}}.$$

Отсюда, после перестановки порядка интегрирования и замены $t = x - (x-\xi)\eta$, получаем

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha-\gamma)\Gamma(1+\gamma)} \frac{\partial}{\partial x} x^{\alpha+\beta} \int\limits_0^x \psi'(\xi)(x-\xi)^{1-\alpha} d\xi \times$$

$$\times \int\limits_0^1 \eta^{-\alpha-\gamma}(1-\eta)^{\gamma} \left(1 - \frac{x-\xi}{x}\eta\right)^{\alpha+\beta} d\eta =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \frac{x^{\alpha+\beta}}{\Gamma(2-\alpha)} \int\limits_0^x (x-\xi)^{1-\alpha} F\left(-\alpha-\beta,\, 1-\alpha-\gamma, 2-\alpha; 1-\frac{\xi}{x}\right) \psi'(\xi) d\xi. \tag{19}$$

Из (19) согласно (1) имеем

$$\varphi(x) = \frac{\partial}{\partial x} I_{0x}^{2-\alpha,-\beta-2,\gamma+\alpha-1} \psi'. \tag{20}$$

Уравнение (8) можно переписать в виде

$$H_{0x}^{\alpha+\beta,-\gamma,\alpha} \varphi = x^{\alpha+\beta} \psi(x),$$

где оператор $H_{0x}^{a,b,c}$ с параметром $c > 0$ действует на $\varphi(x) \in L[0,r]$ по формуле

$$H_{0x}^{a,b,c}\varphi = \frac{1}{\Gamma(c)} \int\limits_0^x (x-t)^{c-1} F\left(a,b,c;1-\frac{t}{x}\right)\varphi dt.$$

Это утверждение является тривиальным следствием известной связи [2, с. 33] между оператором $H_{0x}^{a,b,c}$ и обобщенными преобразованиями Эрдейи–Кобе и Сайго.

В заключение отметим, что формулы (3), (16) и (20) играют важную роль при исследовании краевых задач со смещением (по терминологии А. М. Нахушева) для вырождающихся уравнений в частных производных, когда граничные условия задаются операторами дробного интегрирования и дифференцирования в обобщенном смысле, в особенности по М. Сайго. К такого типа задачам относятся задачи с локальным и нелокальным смещением, которые были объектом анализа в работах [1], [3–9].

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 00-01-00311).*

**Литература**

1. Saigo M. A remark on integral operators involving the Gauss hupergeometric functions // Math. Rep. of College of General Education. Kyushu Un. 1978. Vol. XI, no. 2. Pp. 135–143.
2. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М.: Высш. шк., 1995. 301 с.
3. Saigo M. A certain boundary value problem for the Euler–Darboux equation II // Math. Japon. 25. 1979. No. 2. Pp. 211–220.
4. Saigo M. A certain boundary value problem for the Euler–Darboux equation III // Math. Japon. 25. 1981. No. 1. Pp. 103–119.
5. Saigo M. Repin O. A., Kilbas A. A. On a non-local boundary vaiue problem for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type // Int. J. Math. Stat. Sci. 1996. Vol. 5, no. 1. Pp. 103–117.
6. Репин О. А. О задаче Гурса для нагруженного уравнения Геллерстедта // Труды второго Международного семинара «Дифференциальные уравнения и их приложения». Самара, 1998. С. 133–139.
7. Kilbas A. A., Repin O. A., Saigo M. Solution in closed from of boundary value problem for degenerate equation of hyperbolic type // Kyungpook Mathematical Jornal. 1996. Vol. 36, no. 2. Pp. 261–273.
8. Репин О. А. Нелокальная краевая задача для одного вырождающегося гиперболического уравнения // ДАН. 1994. Т. 335, № 3. С. 295–296.
9. Килбас А. А., Репин О. А. Задача со смещением для параболо-гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 6. С. 799–805.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН

# О положительности операторов непрерывного и дискретного дифференцирования и интегрирования весьма важных в дробном исчислении и в теории уравнений смешанного типа

**1. Континуальная производная и ее связь с дискретной производной дробного порядка.** Пусть: $u = u\,(x)$ – скалярная функция с областью определения $D\,(u) = \{x\colon x \in \mathbb{R},\, a < x < b\}$;

$$\Delta_n^\alpha u\,(x) = \left(\frac{n}{x-a}\right)^\alpha \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{\alpha}{m} u\left(x - \frac{x-a}{n} m\right) \tag{1}$$

– междупредельное конечно-разностное отношение порядка $\alpha \in \mathbb{R}$ в точке $x \in D\,(u)$;

$$D_{ax}^\alpha u = \lim_{n \to \infty} \Delta_n^\alpha u\,(x) \tag{2}$$

– летниковская производная порядка $\alpha$ от функции $u\,(x)$, взятой в пределах от $a$ до $x$ [1, с. 28].

Как известно, биномиальный коэффициент

$$\binom{\alpha}{m} = \frac{\alpha\,(\alpha-1)\cdots(\alpha-m+1)}{m!} = \frac{\Gamma\,(\alpha+1)}{m!\Gamma\,(\alpha-m+1)}, \tag{3}$$

где $\Gamma\,(z)$ – гамма-функция, которую можно определить следующим образом [2, с. 26]:

$$\Gamma\,(z) \cos \frac{\pi z}{2} = \int\limits_0^\infty t^{z-1} \cos t\, dt, \quad 0 < \operatorname{Re} z < 1, \tag{4}$$

$$\Gamma\,(z+1) = z\Gamma\,(z) \quad \forall\, x + iy. \tag{5}$$

А. В. Летников доказал (см. [1, с. 28] или [3, с. 521], что если $u \in L\,[a\,b]$ и $\alpha < 0$, то из (1), (2) вытекает основная формула

$$D_{ax}^\alpha u = \frac{1}{\Gamma\,(-\alpha)} \int\limits_a^x \frac{u\,(t)\, dt}{(x-t)^{\alpha+1}}, \quad a < x \leqslant b. \tag{6}$$

Если же $0 < \alpha \geqslant [\alpha]$, где $[\alpha]$ – целая часть $\alpha$, и функция $D_{ax}^{\{\alpha\}}$, $\{\alpha\}$ – дробная часть $\alpha$, в промежутке $a < x < b$ имеет все производные до порядка $[\alpha]+1$, то

$$D_{ax}^\alpha u = \frac{\partial^{[\alpha]+1}}{\partial x^{[\alpha]+1}} D_{ax}^{\{\alpha\}} u. \tag{7}$$

---

Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1998, **34**:1, 101–109.

Введем функцию $J_\alpha^\beta(m,\,n,\,x)=\int\limits_\alpha^\beta\left(\dfrac{n}{x-a}\right)^t\dbinom{t}{m}\,dt.$

Выражение $\Delta_n^{[\alpha,\,\beta]}u\,(x)=\sum\limits_{m=0}^{n}(-1)^m\,J_\alpha^\beta(m,\,n,\,x)\,u\left(x-\dfrac{x-a}{n}m\right)$ назовем континуальным конечно-разностным отношением порядка $[\alpha,\,\beta]$.

Если существует предел $D_{ax}^{[\alpha,\,\beta]}u$ континуальных конечно-разностных отношений $\Delta_n^{[\alpha,\,\beta]}u\,(x)$ при $n\to\infty$, то этот предел разумно назвать континуальной производной порядка $[\alpha,\,\beta]$ от функции $u\,(x)$ с началом в точке $a$ и концом в точке $x\in\,]a,\,b]$:

$$D_{ax}^{[\alpha,\,\beta]}u=\lim_{n\to\infty}\Delta_n^{[\alpha,\,\beta]}u\,(x)\,. \tag{8}$$

Пусть $\beta>0$, функция $u\,(x)$ при $a<x<b$ имеет все производные до порядка $\beta$ и они абсолютно суммируемы. Тогда из (2) в силу (3), (6) и (7) нетрудно видеть, что

$$D_{ax}^{[\alpha,\,\beta]}u=\int\limits_\alpha^\beta D_{ax}^t u\,dt. \tag{9}$$

При $x>a$ летниковская производная $D_{ax}^t u$ как функция переменной $t$ непрерывна на сегменте $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$. Поэтому на основании теоремы о среднем значении для интегралов существует такое $\varepsilon=\varepsilon\,(x)$, что $\alpha<\varepsilon\,(x)<\beta$ для любого $x\in\,]a,\,b]$:

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\int\limits_\alpha^\beta D_{ax}^t u\,dt=D_{ax}^\varepsilon u. \tag{10}$$

Отсюда и из равенства (9) следует, что $D_{ax}^{[\alpha,\,\beta]}u=(\beta-\alpha)\,D_{ax}^\varepsilon u$.

Оператор $D_{ax}^{[\alpha,\,\beta]}$ назовем оператором непрерывного интегрирования порядка $[\alpha,\,\beta]$ в случае, когда $\beta\leqslant 0$, оператором непрерывного (континуального) дифференцирования при $\alpha\geqslant 0$ и оператором непрерывного интегро-дифференцирования, если $\alpha<0$, а $\beta>0$.

**2. Формулы дробного и непрерывного интегрирования по частям, взаимная сопряженность операторов $\boldsymbol{D_{ax}^\beta}$, $\boldsymbol{D_{ax}^{[\alpha,\,\beta]}}$ и $\boldsymbol{D_{bx}^\beta}$, $\boldsymbol{D_{bx}^{[\alpha,\,\beta]}}$.** Через $L^p\,[a,\,b]$ обозначим пространство всех измеримых на сегменте $[a,\,b]$ функций $u\,(x)$ с конечной нормой

$$\|u\|=\left[\int\limits_a^b|u\,(x)|^p\,dx\right]^{1/p},\quad p\geqslant 1.$$

Пусть $\alpha < \beta \leqslant 0$, $p$ и $q \geqslant 1$, $1/p + 1/q \leqslant 1 - \beta$ и в случае $1/p + 1/q = 1 - \beta$ числа $p$ и $q \neq 1$. Тогда для любой функции $u \in L^p\,[a,\,b]$ и $v \in L^q\,[a,\,b]$ справедливы равенства

$$\left(u,\, D^{\beta}_{ax} v\right)_0 = \left(D^{\beta}_{bx} u,\, v\right)_0, \tag{11}$$

$$\left(u,\, D^{[\alpha,\,\beta]}_{ax} v\right)_0 = \left(D^{[\alpha,\,\beta]}_{bx} u,\, v\right)_0, \tag{12}$$

где

$$(u,\, v)_0 = \int\limits_a^b u\,(x)\, v\,(x)\; dx \tag{13}$$

– скалярное произведение в пространстве $L^2\,[a,\,b]$,

$$D^{\beta}_{bx} u = -\frac{1}{\Gamma\,(-\beta)} \int\limits_b^x \frac{u\,(t)\; dt}{|x - t|^{\beta+1}} \tag{14}$$

– дробная производная отрицательного порядка $\beta$ от функции $u\,(x)$, взятой в пределах от $b$ до $x < b$,

$$D^{[\alpha,\,\beta]}_{bx} u = \int\limits_{\alpha}^{\beta} D^{t}_{bx} u\, dt. \tag{15}$$

Равенство (11) является следствием формулы Дирихле (теоремы Фубини) и известно как формула дробного интегрирования по частям [4, с. 42], формула (12) – следствие (11).

Формулы (11) и (12) говорят о взаимной сопряженности операторов $D^{\beta}_{ax}$, $D^{[\alpha,\,\beta]}_{ax}$ и $D^{\beta}_{bx}$, $D^{[\alpha,\,\beta]}_{bx}$ соответственно [5].

**3. О положительности оператора $\boldsymbol{D^{\alpha}_{ax} + D^{\alpha}_{bx}}$ при $\boldsymbol{-1 \leqslant \alpha < 0}$.** В дробном исчислении и в теории уравнений смешанного типа важную роль играет потенциал (см. [1, с. 50])

$$J^{\alpha}_{ab} u(x) = \frac{1}{\Gamma\,(-\alpha)} \int\limits_a^b \frac{u\,(t)\; dt}{|x - t|^{\alpha+1}}, \quad \alpha = \mathrm{const} < 0, \tag{16}$$

с плотностью $u\,(t)$ и со степенным ядром $|x - t|^{-\alpha-1} / \Gamma\,(-\alpha)$. В силу (6) и (14) ясно, что $J^{\alpha}_{ab} = D^{\alpha}_{ax} + D^{\alpha}_{bx}$.

Воспользуемся обозначением

$$\langle u,\, u\rangle_{\alpha} = \left(u,\, J^{\alpha}_{ab} u\right)_0. \tag{17}$$

Справедлива

**Теорема 1.** *Пусть* $0 > \alpha > -1$, $u$ *– суммируемая на* $[a,\, b]$ *функция такая, что* $\langle u,\, u\rangle_\alpha < \infty$. *Тогда*

$$\langle u,\, u\rangle_\alpha = \frac{1}{2\pi\cos\left(\pi\alpha/2\right)}\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty\left\{\left[\int\limits_a^b u\left(x\right)\cos\left(xy\right)\,dx\right]^2+\left[\int\limits_a^b u\left(x\right)\sin\left(xy\right)\,dx\right]^2\right\}y^\alpha\,dy, \qquad (18)$$

$\langle u,\, u\rangle_\alpha = 0$ *тогда и только тогда, когда* $u = 0$.

**Доказательство.** В равенстве (4) произведем замену переменной интегрирования по формуле $t = \xi\eta$, где $\xi$ – любое положительное число. В результате будем иметь

$$\Gamma\left(z\right)\cos\left(\pi z/2\right) = \xi^z\int\limits_0^\infty \eta^{z-1}\cos\left(\xi\eta\right)\,d\eta, \quad 0 < \operatorname{Re} z < 1. \qquad (19)$$

Отсюда при $z = \alpha+1$, $\xi = |x-t|$ получаем

$$\Gamma\left(\alpha+1\right)\cos\left[\pi\left(\alpha+1\right)/2\right] = |x-t|^{\alpha+1}\int\limits_0^\infty \eta^\alpha\cos\left[\eta\left|x-t\right|\right]\,d\eta$$

или

$$\Gamma\left(\alpha+1\right)\sin\left(\pi\alpha/2\right)|x-t|^{-\alpha-1} = -\int\limits_0^\infty \eta^\alpha\cos\left[\eta\left(x-t\right)\right]\,d\eta. \qquad (20)$$

С учетом (16) и (20) равенство (17) запишем в виде

$$-\Gamma\left(-\alpha\right)\Gamma\left(\alpha+1\right)\sin\left(\pi\alpha/2\right)\langle u,\, u\rangle_\alpha =$$

$$= \int\limits_0^\infty \eta^\alpha\,d\eta\int\limits_a^b\int\limits_a^b u\left(x\right)u\left(t\right)\cos\left(\eta x-\eta t\right)\,dx\,dt =$$

$$= \int\limits_0^\infty \eta^\alpha\,d\eta\int\limits_a^b\int\limits_a^b u\left(x\right)u\left(t\right)\left[\cos\left(\eta x\right)\cos\left(\eta t\right)+\sin\left(\eta x\right)\sin\left(\eta t\right)\right]\,dx\,dt =$$

$$= \int\limits_0^\infty \eta^\alpha d\eta\left[\int\limits_a^b u\left(x\right)\cos\left(\eta x\right)dx\int\limits_a^b u\left(t\right)\cos\left(\eta t\right)dt+\right.$$

$$+\int\limits_a^b u(x)\sin(\eta x)\,dx\int\limits_a^b u(t)\sin(\eta t)\,dt\Bigg]. \tag{21}$$

Поскольку

$$-\Gamma(-\alpha)\,\Gamma(\alpha+1)\sin(\pi\alpha/2) = -\alpha\Gamma(-\alpha)\,\Gamma(\alpha)\sin(\pi\alpha/2) =$$

$$=\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)\sin(\pi\alpha/2) = \pi\sin(\pi\alpha/2)/\sin(\pi\alpha) = \pi/\left[2\cos(\pi\alpha/2)\right],$$

то из равенства (21) следует справедливость (18).

Докажем теперь вторую часть теоремы. Пусть $\langle u,\, u\rangle_\alpha = 0$. Тогда из (18) имеем равенства

$$\int\limits_a^b u(x)\cos(xy)\,dx = 0, \quad \int\limits_a^b u(x)\sin(xy)\,dx = 0, \tag{22}$$

справедливые для всех $y \geqslant 0$. Поскольку

$$\cos(-xy) = \cos xy,\ \sin(-xy) = -\sin xy,$$

то из (22) следует, что

$$\int\limits_a^b u(x)\exp(-ixy)\,dx = 0,\ -\infty < y < \infty,$$

где $i$ – мнимая единица. Отсюда, при $y = 2\pi n/(b-a)$, $n = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots,$ получаем

$$\int\limits_a^b u(x)\exp\left(-\frac{2\pi n i x}{b-a}\right)dx = 0 \ \ \forall \pm n = 0,\ 1,\ 2, \ldots \tag{23}$$

Функция $u(x)$ суммируема на сегменте $[a,\, b]$, поэтому интеграл Лебега

$$v(x) = \int\limits_a^x u(t)\,dt, \quad a \leqslant x \leqslant b, \tag{24}$$

абсолютно непрерывен на этом сегменте. Из (23) при $n = 0$ и (24) при $x = a$ следует, что $v(b) = 0$ и $v(a) = 0$. Функция

$$f(x) = v(x) - \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b v(x)\,dx \equiv v(x) - \overline{v} \tag{25}$$

такова, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0. \tag{26}$$

Из (23) с помощью интегрирования по частям и с учетом (26) находим, что

$$\int_a^b f(x)\exp\left(-\frac{2\pi nix}{b-a}\right)dx = 0, \quad \pm n = 0,\,1,\,2,\ldots \tag{27}$$

Абсолютно непрерывная функция $f(x)$ в силу (25) удовлетворяет условию $f(a) = f(b)$ и, следовательно, по второй теореме Вейерштрасса при любом $\varepsilon > 0$ тригонометрический полином

$$F(x) = \sum_{n=-m}^{m} a_n \exp\left(-\frac{2\pi nix}{b-a}\right)$$

таков, что $|f(x) - F(x)| < \varepsilon$. Поэтому на основании (27) можно записать $\|f\|_0^2 = (f,\, f - F)_0 \leqslant \varepsilon\,(|f|\,,\,1)_0 \leqslant \varepsilon\,\|f\|_0\,\|1\|_0$, где $\|f\| = \sqrt{(f,\,f)_0}$ – норма в $L^2\,[a,\,b]$, $\|1\|_0 = \sqrt{b-a}$. Отсюда в силу произвольности $\varepsilon$ следует, что $f(x) = 0$, т. е. $v(x) = \overline{v}$, и, стало быть, $v'(x) = u(x) = 0$ почти всюду на $[a,\,b]$.

Начиная с соотношения (23), нами по существу доказана следующая, на наш взгляд, хорошо известная

**Лемма 1.** *Пусть* $u(x)$ *– суммируемая на сегменте* $[a,\,b]$ *функция, удовлетворяющая счетной системе (23) однородных интегральных уравнений Фредгольма первого рода. Тогда* $u(x) = 0$ *почти всюду на* $[a,\,b]$.

Существуют различные определения положительного оператора. Линейный симметричный оператор $A$ с областью определения $D(A)$, действующий в гильбертовом пространстве $H$ со скалярным произведением $(u,\,v)$, $u,\,v \in H$, будем называть положительным, если замыкание $\overline{D(A)} = H$, квадратичная форма $(Au,\,u) \geqslant 0$ и $(Au,\,u) = 0$ тогда и только тогда, когда $u = 0$.

В гильбертовом пространстве $L^2\,[a,\,b]$ оператор $J_{ab}^{\alpha}$, $-1 < \alpha < 0$, симметричен: $(J_{ab}^{\alpha}u,\,v)_0 = (u,\,J_{ab}^{\alpha}v)_0$ и на основании теоремы 1 $(u,\,J_{ab}^{\alpha}u)_0 \geqslant 0$, причем $(u,\,J_{ab}^{\alpha}u)_0 = 0$ тогда и только тогда, когда $u = 0$. Следовательно, оператор $J_{ab}^{\alpha}$ положителен.

**4. Об одном классе положительных ядер.** Интеграл вида

$$J(u, u) = \int_a^b \int_a^b K(x, y)\, u(x)\, u(y)\, dx\, dy \tag{28}$$

с симметричным ядром $K(x, y) = K(y, x)$ принято называть интегралом Гильберта или квадратичной формой с бесконечным числом переменных [6, с. 155].

Симметричное ядро $K(x, y)$ называется положительным, если $J(u, u) \geqslant 0$ для любой функции $u(x) \in C[a, b]$. Поскольку $\langle u, u\rangle_\alpha \geqslant 0$, то квадратичная форма (28) является интегралом Гильберта с положительным в силу (18) ядром $K(x, y) = |x-y|^{-\alpha-1}/\Gamma(-\alpha)$, $-1 < \alpha < 0$.

Тот факт, что ядро $|x-y|^{-\beta}$, $0 < \beta < 1$, является положительным в смысле теории интегральных уравнений, доказан Ф. Трикоми [7, с. 180], [8, с. 385].

Широкий класс положительных ядер выделяет

**Теорема 2.** *Пусть $\varphi(t)$ – непрерывная, положительная, убывающая и суммируемая на полусегменте $0 < t \leqslant b-a$ функция, которая имеет возрастающую, непрерывную производную $\varphi'(t)$ при $0 < t < b-a$. Тогда ядро $K(x, y) = \varphi(|x-y|)$, $a < x$, $y < b$, положительно.*

Предварительно докажем лемму, которая может представлять самостоятельный интерес и в теории рядов Фурье.

**Лемма 2.** *Пусть $f(x)$ – неотрицательная, убывающая и ненулевая функция из класса $C[0, 1]$, которая имеет возрастающую непрерывную производную $f'(x)$ при $0 < x < 1$. Тогда*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \pi n x, \quad 0 < x < 1, \tag{29}$$

*где*

$$a_0 = 2\int_0^1 f(x)\, dx > 0, \quad a_n = 2\int_0^1 f(x) \cos \pi n x dx \geqslant 0, \tag{30}$$

*причем $a_n > 0$ для всех $n = 1, 2 \ldots$, если $f'(x)$ – строго возрастающая функция.*

Так как функция $f(x)$ монотонна и непрерывна на сегменте $[0, 1]$, то разложение (29) является следствием теоремы Дирихле.

Функция $f(x) \geqslant 0$, $f(x) \not\equiv 0$ и $f(x) \in C[0, 1]$, поэтому $a_0 > 0$.

Пусть $F(x) = f(x/(\pi n))$, $x \in [0, \pi n)$, $n = 1, 2\ldots$ Легко видеть, что

$$a_n = \frac{2}{\pi n} \int\limits_0^{\pi n} F(t) \cos t \, dt = \frac{2}{\pi n} \sum_{r=0}^{n-1} \int\limits_{\pi r}^{\pi(r+1)} F(t) \cos t \, dt.$$

Отсюда после замены $x = t - \pi r$ и с учетом равенства $\cos(x + \pi r) = (-1)^r \cos x$ получаем

$$a_n = \frac{2}{\pi n} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \int\limits_0^{\pi} F(x + \pi r) \cos x \, dx$$

или

$$a_n = \frac{2}{\pi n} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \int\limits_0^{\pi/2} F(x + \pi r) \cos x \, dx +$$

$$+ \frac{2}{\pi n} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \int\limits_{\pi/2}^{\pi} F(x + \pi r) \cos x \, dx.$$

Стало быть,

$$a_n = \frac{2}{\pi n} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \int\limits_0^{\pi/2} F(x + \pi r) \cos x \, dx -$$

$$- \frac{2}{\pi n} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \int\limits_0^{\pi/2} F\left(t + \frac{2r+1}{2}\pi\right) \sin t \, dt, \tag{31}$$

откуда и из теоремы о среднем значении интеграла заключаем: существуют числа $x_1$ и $x_2$ такие, что $0 < x_i < 1$, $i = 1, 2$, и

$$a_n = \frac{2}{\pi n} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r F\left(\frac{\pi}{2} x_1 + \pi r\right) - \frac{2}{\pi n} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r F\left(\frac{\pi}{2} x_2 + \frac{2r+1}{2}\pi\right). \tag{32}$$

В случае $n \equiv 0 \pmod 2$ из (32) имеем

$$a_n = \frac{2}{\pi n} \sum_{i=0}^{(n-2)/2} \left[F\left(\frac{\pi}{2} x_1 + 2\pi i\right) - F\left(\frac{\pi}{2} x_1 + (2i+1)\pi\right) -\right.$$

$$\left. - F\left(\frac{\pi}{2} x_2 + \frac{2i+1}{2}\pi\right) + F\left(\frac{\pi}{2} x_2 + \frac{4i+3}{2}\pi\right)\right]$$

или

$$a_n = \frac{2}{\pi n} \sum_{i=0}^{(n-2)/2} \int\limits_{\pi x_1/2+2i\pi}^{(x_2+1)\pi/2+2i\pi} \left[F'(y+\pi) - F'(y)\right] dy. \tag{33}$$

Допустим теперь, что $n \equiv 1 \pmod 2$. Тогда равенство (32) можно переписать в виде

$$\begin{gathered} a_n = \frac{2}{\pi n} \left\{ F\left(\frac{\pi}{2}x_1 + \pi(n-1)\right) - F\left(\frac{\pi}{2}(x_2+1) + \pi(n-1)\right) + \right. \\ + \sum_{i=0}^{(n-3)/2} \left[ F\left(\frac{\pi}{2}x_1 + 2\pi i\right) - F\left(\frac{\pi}{2}x_2 + \frac{4i+1}{2}\pi\right) - \right. \\ \left.\left. - F\left(\frac{\pi}{2}x_1 + (2i+1)\pi\right) + F\left(\frac{\pi}{2}x_2 + \frac{4i+3}{2}\pi\right)\right]\right\}, \end{gathered} \tag{34}$$

откуда нетрудно видеть, что

$$\begin{gathered} a_n = \frac{2}{\pi n} \left[ F\left(\frac{\pi}{2}x_1 + \pi(n-1)\right) - F\left(\frac{\pi}{2}(x_2+1) + \pi(n-1)\right)\right] + \\ + \frac{2}{\pi n} \sum_{i=0}^{(n-3)/2} \int\limits_{\pi x_1/2+2i\pi}^{(x_2+1)\pi/2+2i\pi} \left[F'(x+\pi) - F'(x)\right] dx. \end{gathered} \tag{35}$$

Поскольку $F'(x)$ – возрастающая функция, а $F(x)$ – убывающая, то из (33) и (35) вытекает (30). Если $F'(x)$ строго возрастает, то $a_n > 0$ для всех $n = 1, 2, \ldots$

Доказанная лемма позволяет весьма просто убедиться в справедливости теоремы 2.

Действительно, не нарушая общности, в (28) можно положить $a = 0$, $b = 1$ и рассмотреть интеграл Гильберта

$$J_\varepsilon(u, u) = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 f_\varepsilon(|x-y|)\, u(x)\, u(y)\, dx dy,$$

где $f_\varepsilon(x) = \varphi(x+\varepsilon)$ при $0 \leqslant x \leqslant 1-\varepsilon$ и $f_\varepsilon(x) = \varphi(1)\exp(\varepsilon - \varepsilon^2 - \varepsilon x)$ при $1-\varepsilon \leqslant x \leqslant 1$.

Функция $f_\varepsilon(x)$ удовлетворяет условиям леммы и при $\varepsilon \to 0$ стремится к $\varphi(x)$. Поэтому

$$J(u, u) = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \varphi(|x-y|)\, u(x)\, u(y)\, dx\, dy =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^1 \int_0^1 \left[ \frac{a_0^\varepsilon}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^\varepsilon \cos \pi n (x-y) \right] u(x)\, u(y)\, dx\, dy,$$

где $a_n^\varepsilon = 2 \int\limits_0^1 f_\varepsilon(x) \cos \pi n x\, dx \geqslant 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Отсюда видно, что

$$J(u, u) = \frac{1}{2} a_0^0 \left[ \int_0^1 u(x)\, dx \right]^2 +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^0 \left\{ \left[ \int_0^1 u(x) \cos \pi n x\, dx \right]^2 + \left[ \int_0^1 u(x) \sin \pi n x\, dx \right]^2 \right\}, \tag{36}$$

$$a_0^0 = 2 \int_0^1 \varphi(x)\, dx > 0, \quad a_n^0 = 2 \int_0^1 \varphi(x) \cos \pi n x\, dx \geqslant 0.$$

Равенство (36) установлено в [9, с. 84] для специального ядра вида

$$\varphi(|x-y|) = |x-y|^{-m/(m+2)} P_0 \left( c\, |x-y|^{4/(m+2)} \right), \quad P_0(0) \neq 0, \tag{37}$$

которое возникает при исследовании задачи Трикоми для уравнения смешанного типа $y^m u_{xx} + u_{yy} - cu = 0$, $m \equiv 1 \pmod 2$. При этом в [9] требуется достаточная малость спектрального параметра $c > 0$, ибо равенство (36) доказывается в случае, когда функция $\varphi(x)$ из (37) такова, что $\varphi(x) > 0$, $\varphi'(x) < 0$, $\varphi''(x) > 0$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Хорошо известно, что положительность ядра равносильна положительности всех его собственных значений [10, с. 95]. В связи с этим следует отметить, что уравнение Фредгольма второго рода

$$u(x) = \lambda \int_a^b \varphi(|x-y|)\, u(y)\, dy + \psi(x),$$

$\lambda = \mathrm{const} \leqslant 0$, $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 2, $\psi(x) \in C[a, b]$, имеет и притом единственное решение $u(x) \in C[a, b]$.

**5. Теорема о положительности интегрального оператора, обобщающего оператор $J_{ab}^{\alpha}$.** Рассмотрим интегральный оператор $\mathcal{P}_{01}^{\varphi}$, который действует на суммируемую функцию $u(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ по формуле

$$\mathcal{P}_{01}^{\varphi} = \int_0^1 \varphi(|x-y|)\, u(y)\, dy, \tag{38}$$

где функция $\varphi(x)$ на сегменте $[0,1]$ удовлетворяет условию монотонности $\mathbf{M}$, которое определяется следующим образом.

Функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условию монотонности $\mathbf{M}$ тогда и только тогда, когда, для любых $x$ и $y$ из $]0,\ 1[$

$$\begin{gathered}\varphi(x) \in C^1\,]0,\ 1]\,,\quad \varphi(x) \geqslant 0,\quad \int\limits_0^1 \varphi(x)\,dx < \infty,\\ \varphi(x) \geqslant \varphi(y)\,,\quad \varphi'(x) < \varphi'(y)\quad \forall\, x < y.\end{gathered} \tag{39}$$

Потенциал (38) представляет собой некоторое обобщение потенциала (16). При $\varphi(x) = x^{-\alpha-1}/\Gamma(-\alpha)$ оператор $\mathcal{P}^{\varphi}_{01}$ совпадает с $J^{\alpha}_{01}$.

Функция $\varphi(x) = -\log x$ удовлетворяет условию $\mathbf{M}$ и в этом случае

$$\mathcal{P}^{\varphi}_{01} u(x) = -\int\limits_0^1 \log|x-y|\, u(y)\, dy \tag{40}$$

является логарифмическим потенциалом с плотностью $u(x)$.

Имеет место

**Теорема 3.** *Пусть функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условию* $\mathbf{M}$. *Тогда для любой суммируемой на $[0,\ 1]$ функции $u(x)$ интеграл Гильберта*

$$J(u,\ u) = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \varphi(|x-y|)\, u(x)\, u(y)\, dxdy \geqslant 0 \tag{41}$$

*и $J(u,\ u) = 0$ тогда и только тогда, когда $u(x) = 0$ для почти всех $x \in [0,\ 1]$.*

Неравенство (41), т. е. положительность ядра $K(x,\ y) = \varphi(|x-y|)$, следует из теоремы 2, поэтому остановимся на второй части теоремы 3.

В силу (38) и (39) форма $J(u,\ u)$ представима в виде (36). В силу леммы 2 коэффициенты этого представления таковы, что $a^0_0 > 0$, $a^0_n > 0$ для всех $n = 1,\ 2, \ldots$ Следовательно,

$$\int\limits_0^1 u(x) \cos \pi n x\, dx = 0,\quad \int\limits_0^1 u(x) \sin \pi n x\, dx = 0,\quad n = 0,\ 1,\ 2, \ldots,$$

т. е.

$$\int\limits_0^1 u(x) \exp(-2\pi n i x)\, dx = 0 \quad \forall \pm n = 0,\ 1,\ 2, \ldots$$

Отсюда, на основании леммы 1 получаем $u(x) = 0$ почти всюду на $[0,\ 1]$.

В пространстве $L^2\,[0,\,1]$ оператор $\mathcal{P}_{01}^{\varphi}$ симметричен и, согласно теореме 3, $(u,\,\mathcal{P}_{01}^{\varphi}u) \geqslant 0$, причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $u = 0$. Это означает положительность оператора $\mathcal{P}_{01}^{\varphi}$ с ядром $\varphi$, удовлетворяющим условию **M**.

**6. О положительности операторов дискретного и непрерывного интегрирования.** Введем в рассмотрение оператор, действующий на суммируемую на $[a,\,b]$ функцию $u\,(x)$ по формуле

$$J_{ab}^{[\alpha,\,\beta]}u\,(x) = \int\limits_a^b \frac{V_i\,(-\beta,\,-\alpha,\,|x-y|)}{|x-y|}u\,(y)\,dy, \tag{42}$$

где $-1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 0$,

$$V_i\,(\gamma,\,\delta,\,x) = \int\limits_\gamma^\delta \frac{x^t dt}{\Gamma\,(t)}, \quad x \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \gamma \leqslant \delta. \tag{43}$$

Функция

$$\nu\,(x;\,\mu) = \int\limits_0^\infty \frac{x^{\mu+t}dt}{\Gamma\,(1+\mu+t)} = \frac{1}{x}\int\limits_{\mu+1}^\infty \frac{x^\tau d\tau}{\Gamma\,(\tau)}$$

называется функцией Вольтерра [11, с. 261]. Очевидно, что

$$x\nu\,(x;\,\mu) = V_i\,(\mu+1,\,-\infty,\,x)$$

– специальная функция, введенная в [12], [13, с. 16]. Легко видеть, что $J_{ab}^{[\alpha,\,\beta]} = D_{ax}^{[\alpha,\,\beta]} + D_{bx}^{[\alpha,\,\beta]}$.

Действительно, согласно (9), (15) и (16),

$$D_{ax}^{[\alpha,\,\beta]}u + D_{bx}^{[\alpha,\,\beta]}u = \int\limits_\alpha^\beta \left(D_{ax}^t + D_{bx}^t\right)u\,dt = \int\limits_\alpha^\beta J_{ab}^t u dt \int\limits_a^b \frac{|x-y|^{-t-1}}{\Gamma\,(-t)}u\,(y)\,dy =$$

$$= \int\limits_a^b u\,(y)\,dy \int\limits_\alpha^\beta \frac{|x-y|^{-t-1}}{\Gamma\,(-t)}dt = \int\limits_a^b \frac{u\,(y)}{|x-y|}dy \int\limits_{-\beta}^{-\alpha} \frac{|x-y|^\tau}{\Gamma\,(\tau)}d\tau.$$

Функция $\varphi\,(x) = V_i\,(-\beta,\,-\alpha,\,x)\,/x$ при $-1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 0$ удовлетворяет условию **M**. Поэтому оператор $J_{ab}^{[\alpha,\,\beta]}$ положителен в $L^2\,[a,\,b]$.

Рассмотрим билинейный функционал

$$\langle u,\,v\rangle^\alpha = \frac{1}{2}\left[(u,\,D_{ax}^\alpha v)_0 + (D_{ax}^\alpha u,\,v)_0\right], \tag{44}$$

определенный на множестве абсолютно суммируемых функций $u(x)$ и $v(x)$, для которых справедливо равенство (11) с $\beta = \alpha \in \,]-1,\, 0[\,$.

Из (44) видно, что

$$\langle u,\, u\rangle^{\alpha} = (u,\, D^{\alpha}_{ax} u)_0 = \frac{1}{2}\left[(u,\, D^{\alpha}_{ax} u)_0 + (u,\, D^{\alpha}_{bx} u)_0\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\,(u,\, J^{\alpha}_{ab} u)_0 = \frac{1}{2}\,\langle u,\, u\rangle_{\alpha}\,. \tag{45}$$

Отсюда на основании теоремы 1 заключаем, что $\langle u,\, u\rangle^{\alpha} \geqslant 0$, $\langle u,\, u\rangle^{\alpha} = 0$ тогда и только тогда, когда $u = 0$ почти везде на $[a,\, b]$. Функционал (44) удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения.

Через $\boldsymbol{H}^{\alpha}[a,\, b]$ обозначим пространство с внутренним произведением, где для каждой пары его элементов в $u(x)$ и $v(x)$ из $L[a,\, b]$ формулой (44) определено скалярное произведение, а норму введем следующим образом:

$$\|u\|_{\alpha} = \sqrt{\langle u,\, u\rangle^{\alpha}} \quad \forall\, u \in \boldsymbol{H}^{\alpha}[a,\, b]\,. \tag{46}$$

Итак, пусть $\boldsymbol{H}^{\alpha}[a,\, b]$ – гильбертово пространство действительных функций с конечной нормой (46). Очевидно, $\boldsymbol{H}^{0}[a,\, b] = L^2[a,\, b]$. Из (45) и (46) вытекает, что

$$(u,\, D^{\alpha}_{ax} u)_0 = (u,\, D^{\alpha}_{bx} u)_0 \geqslant 0 \quad \forall\, u \in \boldsymbol{H}^{\alpha}[a,\, b] \tag{47}$$

и $(u,\, D^{\alpha}_{ax} u)_0 = 0$ тогда и только тогда, когда $u$ – нулевой элемент пространства $\boldsymbol{H}^{\alpha}[a,\, b]$.

Это пространство (пополненное, если оно неполное) является энергетическим [14, с. 64] и в силу (18) соотношение (46) можно переписать в виде

$$\|u\|_{\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{\pi\cos(\pi\alpha/2)}}\times$$

$$\times\left\{\int\limits_0^{\infty}\left[\left(\int\limits_a^b u(x)\cos xy\,dx\right)^2 + \left(\int\limits_a^b u(x)\sin xy\,dx\right)^2\right] y^{\alpha} dy\right\}^{1/2}.$$

Согласно (37), норму в $\boldsymbol{H}^{\alpha}[0,\, 1]$ можно ввести и таким образом:

$$\|u\|_{\alpha} = \left\{\frac{a_0}{2}\left(\int\limits_0^1 u(x)\,dx\right)^2 + \right.$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[ \left( \int\limits_0^1 u(x) \cos \pi n x \, dx \right)^2 + \left( \int\limits_0^1 u(x) \sin \pi n x \, dx \right)^2 \right] \Bigg\}^{1/2},$$

где $a_0 = 1/ (\Gamma(1-\alpha))$, $a_n = (1/ (\Gamma(\alpha))) \int\limits_0^1 x^{-\alpha-1} \cos \pi n x \, dx > 0$.

Пусть $\boldsymbol{H}^{[\alpha, \beta]}[a, b]$ – гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle u, v\rangle^{[\alpha, \beta]} = (1/2) \left[ \left(u, D_{ax}^{[\alpha, \beta]} v\right)_0 + \left(D_{ax}^{[\alpha, \beta]} u, v\right)_0 \right]$ и с конечной нормой $\|u\|_{[\alpha, \beta]} = \sqrt{\langle u, u\rangle^{[\alpha, \beta]}}$, $-1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 0$.

Как и выше, можно доказать, что если $-1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 0$, то для любого $u \in \boldsymbol{H}^{[\alpha, \beta]}[a, b]$ имеем

$$\left(u, D_{ax}^{[\alpha, \beta]} u\right)_0 = \left(u, D_{bx}^{[\alpha, \beta]} u\right)_0 \geqslant 0. \tag{48}$$

Неравенству (47) при $a = 0$, $b = 1$, $\alpha = -2/3$ можно придать вид

$$\int\limits_0^1 v(x) \, dx \int\limits_0^x (x-y)^{-1/3} v(y) \, dy \geqslant 0. \tag{49}$$

Это неравенство впервые доказано Ф. Трикоми в [6, с. 43], [8, с. 385], правда, в указанных работах $v(x) = z_y(x, 0)$, где $z(x, y)$ – решение уравнения $yz_{xx} + z_{yy} = 0$, которое обращается в нуль на характеристике $x = (2/3)(-y)^{3/2}$, $y < 0$.

**7. О положительности операторов дробного дифференцирования и континуального интегрирования порядка $[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}] \in [-1, 1]$.** Пусть $\mathcal{A}_0^{\alpha}[1, b]$ – множество всех функций $u(x)$, имеющих абсолютно непрерывный на $[a, b]$ дробный интеграл порядка $1-\alpha$ с началом в точке $a$ и концом в точке $x$, который обращается в нуль при $x = a$. Справедлива

**Теорема 4.** *Для любого $\alpha \in [0, 1]$ и любой функции $u(x) \in \mathcal{A}_0^{\alpha}[a, b]$ скалярное произведение $(u, D_{ax}^{\alpha} u)_0 \geqslant 0$ и $(u, D_{ax}^{\alpha} u)_0 = 0$ тогда и только тогда, когда $u = 0$.*

Действительно, так как $D_{ax}^{\alpha-1} u \in \mathcal{A}_0^{\alpha}[a, b]$, то в силу теоремы Тамаркина [11, с. 574] существует и притом единственная функция $v(x) \in L[a, b]$ такая, что $u(x) = D_{ax}^{-\alpha} v$. Поэтому

$$(u, D_{ax}^{\alpha} u)_0 = \left(D_{ax}^{-\alpha} v, D_{ax}^{\alpha} D_{ax}^{-\alpha} v\right)_0 = \left(v, D_{ax}^{-\alpha} v\right)_0.$$

Отсюда и из оценки (46) нетрудно убедиться в положительности оператора $D^{\alpha}_{ax}$. Пользуясь теоремой 4, можно доказать, что если $u \in \mathcal{A}^t_0\,[a,\,b]$ для всех $t \in [\alpha,\,\beta] \subset [0,\,1]$, то $\left(u,\, D^{[\alpha,\,\beta]}_{ax} u\right)_0 \geqslant 0$.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96–01–00–508).*

**Литература**

1. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М., 1995.
2. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М., 1973.
3. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 2. М. – Л., 1951.
4. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, 1987.
5. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10, № 1. С. 100–111.
6. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. М., 1960.
7. Трикоми Ф. О линейных уравнениях смешанного типа. М.–Л., 1947.
8. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М., 1957.
9. Gellerstedt S. Sur un piobléme aux limites pour une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre de type mixté. Uppsala, 1935.
10. Смирнов В. И. Курс высшей математики. М. – Л., 1951. Т. 4.
11. Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М., 1966.
12. Нахушев А. М. Докл. АН СССР. 1988. Т. 300, № 4. С. 796–799.
13. Нахушев А. М. Об уравнениях состояния непрерывных одномерных систем и их приложения. Нальчик. 1995.
14. Михлин С. Г. Линейные уравнения в частных производных. М., 1977.
15. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. М., 1982.
16. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., 1977.
17. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 2. С. 313–324.

Поступила в редакцию
28 марта 1997 г.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и автоматизации
КБНЦ РАН

# Об одной формуле обращения интегрального уравнения Абеля

Уравнение

$$D^{[-\alpha,\,0]}_{ax} u = v(x), \quad a < x < \infty, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{1}$$

где $D^{[-\alpha,\,0]}_{ax} u$ – оператор непрерывного интегрирования порядка $[-\alpha, 0]$ с началом в конечной точке $a$ и с концом в точке $x \in ]a,\, \infty[$ (см. [1]), *назовем непрерывным интегральным уравнением Абеля.*

Нахушев А. М. Доклады АМАН. 1998. **3**:2, 10–11.

Решение уравнения (1) будем искать в классе функций $u(x)$, абсолютно интегрируемых на полуоси $x \geqslant 0$. В этом классе уравнение (1) эквивалентно уравнению

$$\int\limits_{-\alpha}^{0} D_{ax}^{t} u dt = v(x), \quad a < x < \infty$$

или, что одно и то же, уравнению

$$\int\limits_{0}^{\alpha} D_{ax}^{-t} u dt = v(x), \quad a < x < \infty.$$

Предполагается, что $v(x)$ непрерывно дифференцируема на всей оси $x$, кроме отдельных точек, в которых $v(x)$ и $v'(x)$ терпят разрыв первого рода, причем на каждом конечном интервале оси $x$ таких точек имеется лишь конечное число; $v(x) = 0$ для всех $x < 0$; $v(x)$ при $x \to +\infty$ возрастает не быстрее показательной функции, т. е. существуют такие постоянные $k > 0$ и $x_0 \geqslant 0$, что

$$|v(x)| < k \exp(x_0 x). \tag{2}$$

Другими словами, правая часть $v(x)$ уравнения (1) является функцией-оригиналом преобразования Лапласа

$$\hat{v}(y) = \int\limits_{0}^{\infty} v(x) \exp(-yx) dx. \tag{3}$$

Решение $u = u(x)$ будем искать как функцию-оригинал изображения

$$\hat{u}(y) = \int\limits_{0}^{\infty} u(y) \exp(-yx) dx. \tag{4}$$

Хорошо известно, что для всякого оригинала $v(x)$ изображение $\hat{v}(x)$ определено в полуплоскости $\operatorname{Re} y > x_0$, где $x_0$ – показатель роста (1), и является в этой полуплоскости аналитической функцией комплексного переменного $y = y_1 + iy_2$. Известно также, что если $u(x)$ является оригиналом и $\hat{u}(y)$ служит ее изображением, то в любой точке своей непрерывности функция $u(x)$

$$u(y) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \hat{u}(y) \exp(yx) dy, \tag{5}$$

где интеграл берется вдоль любой прямой $\mathrm{Re}\, a > x_0$ и понимается в смысле главного значения [2, с. 402].

Найдем преобразование Лапласа функции-оригинала $D_{0x}^{-t}u$ для всех $t > 0$

$$\widehat{D_{0x}^{-t}u} = \frac{1}{\Gamma(t)} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^y \frac{u(\tau)d\tau}{(y-\tau)^{1-t}} \exp(-yx)dx,$$

где $\Gamma(t)$ – гамма-функция Эйлера.

Отсюда на основании теоремы свертывания получим

$$\widehat{D_{0x}^{-t}u} = \frac{1}{\Gamma(t)} \hat{u}(y) \frac{\Gamma(t)}{y^t},$$

т. е.

$$\widehat{D_{0x}^{-t}u} = y^{-t}\hat{u}(y). \tag{6}$$

Теорема свертывания или теорема Бореля гласит: $\hat{u}_1 \cdot \hat{u}_2 = \widehat{u_1 * u_2}$, где свертка

$$u_1 * u_2 = \int\limits_0^x u_1(\tau)u_2(x-\tau)d\tau.$$

Из (1), (3), (4) и (6) находим

$$\int\limits_{-\alpha}^0 y^{-t}\hat{u}(y)dt = \hat{v}(y) \Rightarrow \frac{y^\alpha - 1}{\log\, y}\hat{u}(y) = \hat{v}(y).$$

Стало быть,

$$\hat{u}(y) = \frac{\hat{v}(y)}{y^\alpha - 1}\log y. \tag{7}$$

Подставляя $\hat{u}(y)$ из (7) в (5), приходим к следующей *формуле обращения непрерывного интегрального уравнения Абеля*

$$u(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\log y}{y^\alpha - 1}\hat{v}(y)\exp(yx)dy.$$

**Литература**


1. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 1. С. 101–109.
2. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексной переменной. М. – Л.: ГИТТЛ, 1951.


Научно-исследовательский институт
прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН

# Видоизмененная задача Коши для оператора дробного дифференцирования с фиксированными началом и концом

Задача со смещением для уравнения Геллерстедта

$$\operatorname{sign} y \cdot |y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0,\ a < x < b$$

с нелокальным краевым условием

$$\frac{d^k}{dx^k}\{(x-a)^\beta D_{ax}^{1-\beta} u\,[\Theta_a(x)] - (b-x)^\beta D_{bx}^{1-\beta} u\,[\Theta_b(x)]\} = \gamma(x),$$

где $\beta = m/(2m+4)$, в силу теоремы 5.4.1 работы [1, с. 225] приводит к уравнению вида

$$I_{ab}^\alpha\, u[x] \equiv (D_{ax}^\alpha - D_{bx}^\alpha) u[x] = \delta(x).$$

Здесь $I_{ab}^\alpha$ – оператор дробного дифференцирования порядка $\alpha$ с фиксированными началом $a$ и концом $b$ [1, с. 33].

Настоящая работа является продолжением исследования, начатого в [2], и в ней изучается видоизмененная задача Коши для оператора $I_{ab}^\alpha$.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} I_{ab}^{\alpha-1} u(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad I_{ab}^\alpha u(x) = 0. \tag{1}$$

Общее решение уравнения (1) имеет вид

$$u(x) = [(x-a)(b-x)]^{(\alpha-1)/2} B_0, \tag{2}$$

где $B_0$ – произвольная постоянная.

Из (2) видно, что задача Коши в видоизмененной постановке

$$\lim_{x\to a} (x-a)^{(1-\alpha)/2} u(x) = u_a, \tag{3}$$

или $\lim\limits_{x\to b} (b-x)^{(1-\alpha)/2} u(x) = u_b$, где $u_a$ и $u_b$ – заданные числа, для уравнения (1) однозначно разрешима.

Решение $u(x)$ видоизмененной задачи Коши (3) для уравнения $I_{ab}^\alpha u(x) = v(x)$ при $0 < \alpha < 1$ в соответствии с (2), если оно существует, представимо в виде

$$u(x) = u_a \left[\frac{(x-a)(b-x)}{b-a}\right]^{(\alpha-1)/2} +$$

Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 2000, **36**:7, 903–908.

$$+\frac{1}{2}D_{ax}^{-\alpha}v-\frac{1}{2\pi}\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha\pi}{2}D_{ax}^{1-\alpha}[(t-a)(b-t)]^{(1-\alpha)/2}V_\alpha(t), \tag{4}$$

$$V_\alpha(t)=\int\limits_a^b[(\tau-a)(b-\tau)]^{(\alpha-1)/2}(\tau-t)^{-1}D_{a\tau}^{-1}v\,d\tau$$

и предполагается, что $D_{ax}^{-1}v=\varphi(x)[(x-a)(b-x)]^{\delta-\alpha}$, а $\varphi(x)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $h>1-\alpha$.

Нетрудно заметить, что

$$V_\alpha(t)=\varphi(t)S_a^b(\mu,\mu;t)+\Phi_a^b(\mu,\mu;t), \tag{5}$$

$$S_a^b(\nu,\mu;x)=\int\limits_a^b(\tau-a)^{\nu-1}(b-\tau)^{\mu-1}(\tau-x)^{-1}d\tau,\qquad \mu=\delta+\frac{1-\alpha}{2}>0, \tag{6}$$

$$\Phi_a^b(\nu,\mu;t)=\int\limits_a^b(\tau-a)^{\nu-1}(b-\tau)^{\mu-1}(\tau-t)^{-1}(\varphi(\tau)-\varphi(t))d\tau. \tag{7}$$

При $\nu=\mu\neq 1,2,\ldots$ формулу (6) можно переписать в виде равенств

$$S_a^b(\mu,\mu;t)=-\pi\,\mathrm{ctg}\,(\mu\pi)[(t-a)(b-t)]^{\mu-1}+$$

$$+B(\mu,\mu-1)(b-t)^{\mu-1}(b-a)^{\mu-1}F\left(1-\mu,\mu,\,2-\mu;\frac{t-a}{b-a}\right),$$

$$S_a^b(\mu,\mu;t)=\pi\,\mathrm{ctg}\,(\mu\pi)[(t-a)(b-t)]^{\mu-1}-$$

$$-B(\mu-1,\mu)(b-a)^{2\mu-2}F\left(2-2\mu,1,\,2-\mu;\frac{b-t}{b-a}\right),$$

которые дают нам основания утверждать, что

$$\lim_{t\to a}\{S_a^b(\mu,\mu;t)+\pi\,\mathrm{ctg}\,(\mu\pi)[(t-a)(b-t)]^{\mu-1}\}=B(\mu,\mu-1)(b-a)^{2\mu-2}, \tag{8}$$

$$\lim_{t\to b}\{S_a^b(\mu,\mu;t)-\pi\,\mathrm{ctg}\,(\mu\pi)[(t-a)(b-t)]^{\mu-1}\}=-B(\mu,\mu-1)(b-a)^{2\mu-2}. \tag{9}$$

Пусть $\mu=1/2+k,\ k=0,1,\ldots,$ тогда из (8) и (9) имеем

$$\begin{gathered}\lim_{t\to a}S_a^b(\mu,\mu;t)=B(\mu,\mu-1)(b-a)^{2\mu-2},\\ \lim_{t\to b}S_a^b(\mu,\mu;t)=-B(\mu,\mu-1)(b-a)^{2\mu-2}.\end{gathered} \tag{10}$$

Итак, если $0<\mu<1$, то

$$\begin{gathered}\lim_{t\to a}(t-a)^{1-\mu}S_a^b(\mu,\mu;t)=-\pi\,\mathrm{ctg}\,(\mu\pi)(b-a)^{\mu-1},\\ \lim_{t\to b}(b-t)^{1-\mu}S_a^b(\mu,\mu;t)=\pi\,\mathrm{ctg}\,(\mu\pi)(b-a)^{\mu-1}.\end{gathered} \tag{11}$$

Если же $1 < \mu \neq 2, 3, \ldots$, то

$$\begin{aligned} \lim_{t\to a} S_a^b(\mu,\ \mu; t) &= B(\mu, \mu-1)(b-a)^{2\mu-2}, \\ \lim_{t\to b} S_a^b(\mu, \mu; t) &= -B(\mu, \mu-1)(b-a)^{2\mu-2}, \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \lim_{t\to a} \left[S_a^b(1,1;t) + \ln(t-a)\right] &= \ln(b-a), \\ \lim_{t\to b} \left[S_a^b(1,1;t) - \ln(b-t)\right] &= -\ln(b-a). \end{aligned} \tag{13}$$

Как видно из (12),

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to a} S_a^b(2,2;t) = (b-a)^2/2, \\ &\lim_{t\to b} S_a^b(2,2;t) = \frac{(b-a)^2}{2} + (b-a)^2 F_*(0,1,2;1). \end{aligned} \tag{14}$$

Так как

$$F_*(0,1,2;1) = \int_0^1 \ln(1-t)dt = -1,$$

то

$$\lim_{t\to b} S_a^b(2,\ 2;t) = -\frac{(b-a)^2}{2}. \tag{15}$$

При $\nu = \mu = 3, 4, \ldots$ можно записать

$$S_a^b(\mu,\mu;x) = (x-a)^{\mu-1} S_a^b(1,\mu;x) + \sum_{j=0}^{\mu-2} \binom{\mu-1}{j} (x-a)^j R_j^\mu(x), \tag{16}$$

где

$$R_j^\mu(x) = \int_a^b (t-x)^{\mu-2-j}(b-t)^{\mu-1}dt.$$

Поскольку для всех $j \leqslant \mu - 2$ имеем

$$\lim_{x\to a} R_j^\mu(x) = R_j^\mu(a) = \int_a^b (t-a)^{\mu-2-j}(b-t)^{\mu-1}dt =$$

$$= (b-a)^{2\mu-2-j} \int_0^1 \tau^{\mu-2-j}(1-\tau)^{\mu-1}d\tau,$$

$$\lim_{x\to b} R_j^\mu(x) = R_j^\mu(b) = \int_a^b (-1)^{\mu-2-j}(b-t)^{2\mu-3-j}dt,$$

то справедливы представления

$$R_j^\mu(a) = (b-a)^{2\mu-2-j} B(\mu-1-j,\mu),$$

$$R_j^\mu(b) = (-1)^{\mu-j}(2\mu-2-j)^{-1}(b-a)^{2\mu-2-j}.$$

Последние формулы и (16) подтверждают, что для всех $\mu = 3,\, 4,\, \ldots$

$$\lim_{x\to a} S_a^b(\mu,\mu;x) = B(\mu-1,\,\mu)(b-a)^{2\mu-2}, \tag{17}$$

$$\lim_{x\to b} S_a^b(\mu,\mu;x) = (b-a)^{\mu-1}\lim_{x\to b} S_a^b(1,\mu;x) +$$
$$+ (b-a)^{2\mu-2}\sum_{j=0}^{\mu-2}\binom{\mu-1}{j}\frac{(-1)^{m-j}}{2\mu-2-j}. \tag{18}$$

В силу (6)

$$\lim_{x\to b} S_a^b(1,\mu;x) = (\mu-1)(b-a)^{\mu-1}F_*(2-\mu,1,2;1),$$

а поскольку, согласно определению,

$$F_*(2-\mu,\,1,\,2;1) = \int_0^1 (1-t)^{\mu-2}\ln(1-t)dt = -(\mu-1)^{-2},$$

следовательно, для всех $\mu = 3, 4, \ldots$

$$(\mu-1)\lim_{x\to b} S_a^b(1,\mu;x) = -(b-a)^{\mu-1}. \tag{19}$$

Далее очевидно, что

$$\frac{1}{\mu-1} - \sum_{j=0}^{\mu-2}\binom{\mu-1}{j}\frac{(-1)^{\mu-j}}{2\mu-2-j} = \sum_{j=0}^{\mu-1}\binom{\mu-1}{j}\frac{(-1)^{\mu-1-j}}{2\mu-2-j} = B(\mu-1,\mu), \tag{20}$$

ибо

$$B(\mu-1,\mu) = \int_0^1 t^{\mu-2}(1-t)^{\mu-1}dt = \sum_{j=0}^{\mu-1}\binom{\mu-1}{j}(-1)^{\mu-1-j}\int_0^1 t^{2\mu-3-j}dt.$$

Поэтому из равенств (18)–(20) заключаем, что

$$\lim_{x\to b} S_a^b(\mu,\mu;x) = -B(\mu-1,\mu)(b-a)^{2\mu-2},\ \mu = 3,4,\ldots$$

Отсюда и из формул (8)–(15), (17) вытекает

**Лемма 1.** *Пусть* $\mu > 0$, $a = a_1$, $b = a_2$. *Тогда для всех* $\mu > 1$

$$\lim_{x\to a_i}\{S_a^b(\mu,\mu;x) + (-1)^{i+1}\pi[(x-a)(b-x)]^{\mu-1}\mathrm{ctg}\,(\mu\pi)\} =$$

$$= (-1)^{i+1}B(\mu,\mu-1)(b-a)^{2\mu-2};$$

$$\lim_{x\to a_i}[S_a^b(1,1;x) + (-1)^{i+1}\ln|x-a_i|] = (-1)^{i+1}\ln(b-a) \quad \textit{при} \quad \mu = 1;$$

*если* $0 < \mu < 1$, *то*

$$\lim_{x\to a_i}|x-a_i|^{1-\mu}S_a^b(\mu,\mu;x) = (-1)^i\pi\mathrm{ctg}\,(\mu\pi)(b-a)^{\mu-1}.$$

Вернемся к (4) и изучим поведение решения $u(x)$ вблизи особых точек $a$ и $b$. Из формулы (7), поскольку $|\varphi(\tau)-\varphi(x)| \leqslant C|x-\tau|^h$, где $C$ – постоянная Гельдера, а $h$ – показатель Гельдера, получаем

$$|\Phi_a^b(\mu,\mu;x)| \leqslant C\int_a^b[(t-a)(b-t)]^{\mu-1}|x-t|^{h-1}dt. \tag{21}$$

Если $\mu \geqslant 1$, то из (21) видно, что функция $\Phi_a^b$ имеет конечные пределы при $x \to a$ или $b$. Допустим, что $0 < \mu < 1$, поэтому в силу (6) $\delta < (\alpha+1)/2$. Непосредственным вычислением нетрудно показать, что

$$M_a^b(\mu,h;x) = \int_a^b[(t-a)(b-t)]^{\mu-1}|x-t|^{h-1}dt =$$

$$= \int_a^x[(t-a)(b-t)]^{\mu-1}(x-t)^{h-1}dt + \int_x^b[(t-a)(b-t)]^{\mu-1}(t-x)^{h-1}dt =$$

$$= (x-a)^{\mu+h-1}\int_0^1\tau^{\mu-1}(1-\tau)^{h-1}(b-a)^{\mu-1}\left(1-\frac{\tau(x-a)}{b-a}\right)^{\mu-1}d\tau +$$

$$+ (b-x)^{\mu+h-1}\int_0^1\tau^{\mu-1}(1-\tau)^{h-1}(b-a)^{\mu-1}\left(1-\frac{\tau(b-x)}{b-a}\right)^{\mu-1}d\tau.$$

Отсюда заключаем, что

$$M_a^b(\mu,h;x) = (b-a)^{\mu-1}B(\mu,h)[(x-a)^{\mu+h-1}F\left(1-\mu,\mu,\mu+h;\frac{x-a}{b-a}\right) +$$

$$+ (b-x)^{\mu+h-1}F\left(1-\mu,\mu,\mu+h;\frac{b-x}{b-a}\right). \tag{22}$$

Далее нам потребуется известная [3, с. 294] формула

$$\lim_{z\to+1} F(\alpha,\,\beta,\,\gamma;z) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}, \quad \mathrm{Re}\,(\gamma-\alpha-\beta)>0. \tag{23}$$

Из (22) и (23) следует, что если $1-h<\mu<1$, то

$$\begin{gathered}\lim_{x\to a} M_a^b(\mu,h;x) = (b-a)^{2\mu+h-2}B(\mu,h)\frac{\Gamma(\mu+h)\Gamma(\mu+h-1)}{\Gamma(2\mu+h-1)\Gamma(h)} = \\ =(b-a)^{2\mu+h-2}B(\mu,h+\mu-1), \\ \lim_{x\to b} M_a^b(\mu,h;x) = (b-a)^{2\mu+h-2}B(\mu,h+\mu-1).\end{gathered} \tag{24}$$

Если же $0<\mu<1-h$, то, согласно равенству

$$F(1-\mu,\mu,\,\mu+h;z) = (1-z)^{\mu+h-1}F(2\mu+h-1,h,\mu+h;z),$$

формула (22) принимает вид

$$\begin{gathered}M_a^b(\mu,h;x) = (b-a)^{-h}B(\mu,h)[(x-a)(b-x)]^{\mu+h-1}\times \\ \times\left[F\left(2\mu+h-1,h,\mu+h;\frac{x-a}{b-a}\right)+F\left(2\mu+h-1,h,\mu+h;\frac{b-x}{b-a}\right)\right].\end{gathered} \tag{25}$$

Таким образом, если $0<\mu<1-h$, то из (25) и (23) вытекает соотношение

$$\begin{gathered}\lim_{x\to a}(x-a)^{1-\mu-h}M_a^b(\mu,h;x) = \\ = B(\mu,h)(b-a)^{\mu-1}\left\{1+\frac{\Gamma(\mu+h)\Gamma(1-\mu-h)}{\Gamma(1-\mu)\Gamma(\mu)}\right\},\end{gathered}$$

из которого, принимая во внимание, что $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\pi/\sin(\pi z)$, находим

$$\begin{gathered}\lim_{x\to a}(x-a)^{1-\mu-h}M_a^b(\mu,h;x) = \lim_{x\to b}(b-x)^{1-\mu-h}M_a^b(\mu,h;x) = \\ = B(\mu,h)(b-a)^{\mu-1}\left[1+\frac{\sin(\mu\pi)}{\sin((\mu+h)\pi)}\right].\end{gathered} \tag{26}$$

Пусть теперь $\mu=1-h$. Тогда из (22) или (25) имеем

$$\begin{gathered}M_a^b(\mu,1-\mu;x) = (b-a)^{\mu-1}B(\mu,1-\mu)\times \\ \times\left[F\left(1-\mu,\,\mu,\,1;\frac{x-a}{b-a}\right)+F\left(1-\mu,\,\mu,\,1;\frac{b-x}{b-a}\right)\right].\end{gathered} \tag{27}$$

Из формулы [4, с. 66] (см. также [5])

$$B(\alpha,\beta)F(\alpha,\,\beta,\,\alpha+\beta;z)=F(\alpha,\,\beta,\,1;1-z)[\psi(1-\beta)-\psi(\alpha)-\ln(1-z)]+$$
$$+F_*(\alpha,\,\beta,\,1-\varepsilon;1-z)-F_*(\alpha,\,\beta-\varepsilon,\,1;1-z)+F_*(\alpha+\varepsilon,\,\beta,\,1;1-z),\quad(28)$$

где

$$F_*(\alpha,\beta-\varepsilon,\gamma;z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int\limits_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-zt)^{-\alpha}\ln t\,dt,$$

$$F_*(\alpha+\varepsilon,\beta,\gamma;z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int\limits_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-zt)^{-\alpha}\ln(1-zt)dt,$$

имеем

$$B(1-\mu,\mu)F(1-\mu,\,\mu,\,1;z)=-\ln(1-z)F(1-\mu,\,\mu,\,1;1-z)+$$
$$+F_*(1-\mu,\,\mu,\,1-\varepsilon;1-z)-F_*(1-\mu,\mu-\varepsilon,\,1;1-z)+F_*(1-\mu+\varepsilon,\,\mu,\,1;1-z).\quad(29)$$

По определению

$$F_*(1-\mu,\mu,1-\varepsilon;0)=\frac{1}{\Gamma(\mu)\Gamma(1-\mu)}\int\limits_0^1 t^{\mu-1}(1-t)^{-\mu}\ln(1-t)dt,$$

а так как

$$\int\limits_0^1 t^{\mu-1}(1-t)^{-\mu}\ln(1-t)dt=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\int\limits_0^1 t^{\mu-1}(1-t)^{\varepsilon-\mu}dt=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}B(\mu,\varepsilon-\mu+1)=$$

$$=\Gamma(\mu)\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\frac{\Gamma(\varepsilon+1-\mu)}{\Gamma(\varepsilon+1)}=\Gamma(\mu)[\psi(1-\mu)-\psi(1)]\Gamma(1-\mu),$$

то

$$F_*(1-\mu,\mu,1-\varepsilon;0)=\psi(1-\mu)-\psi(1).\quad(30)$$

Аналогично находим, что

$$F_*(1-\mu,\mu-\varepsilon,1;0)=\psi(\mu)-\psi(1).\quad(31)$$

Очевидно,

$$\lim_{z\to1}F_*(1-\mu+\varepsilon,\mu,1;1-z)=0.\quad(32)$$

Известно, что $\psi(1-z)-\psi(z)=\pi\mathrm{ctg}\,(\pi z)$, поэтому из (30) и (31) заключаем:

$$F_*(1-\mu,\mu,1-\varepsilon;0)-F_*(1-\mu,\mu-\varepsilon,1;0)=\pi\mathrm{ctg}\,(\pi\mu).$$

Отсюда и из (29), (32), поскольку

$$B(1-\mu,\mu)=\Gamma(1-\mu)\Gamma(\mu)=\frac{\pi}{\sin(\pi\mu)},\quad F(1-\mu,\mu,1;0)=1,$$

получаем соотношение

$$\lim_{x\to a}\frac{F(1-\mu,\mu,1;(b-x)/(b-a))}{\ln[(b-a)/(x-a)]}=\frac{\sin(\pi\mu)}{\pi},$$

воспользовавшись которым, из (27) получаем

$$\lim_{x\to a}\frac{M_a^b(\mu,1-\mu;x)}{\ln[(b-a)/(x-a)]}=(b-a)^{\mu-1},\quad \mu=1-h. \tag{33}$$

Идентичное рассуждение приводит нас к формуле

$$\lim_{x\to b}\frac{M_a^b(\mu,1-\mu;x)}{\ln[(b-a)/(b-x)]}=(b-a)^{\mu-1},\quad \mu=1-h,$$

из которой, и из (24), (26), (33), следует

**Лемма 2.** *Пусть* $\mu>0$, $h>0$. *Тогда*

$$\lim_{x\to a}M_a^b(\mu,h;x)=\lim_{x\to b}M_a^b(\mu,h;x)=$$

$$=(b-a)^{2\mu-h-2}B(\mu,\,h+\mu-1),\ \textit{если}\quad 1-h<\mu<1;$$

$$\lim_{x\to a}(x-a)^{1-\mu-h}M_a^b(\mu,h;x)=\lim_{x\to b}(b-x)^{1-\mu-h}M_a^b(\mu,h;x)=$$

$$=B(\mu,h)[1+\sin(\mu\pi)/\sin((\mu+h)\pi)](b-a)^{\mu-1},\quad \textit{если}\quad 0<\mu<1-h;$$

$$\lim_{x\to a}\frac{M_a^b(\mu,1-\mu;x)}{\ln[(b-a)/(x-a)]}=$$

$$=\lim_{x\to b}\frac{M_a^b(\mu,1-\mu;x)}{\ln[(b-a)/(b-x)]}=(b-a)^{\mu-1},\quad \textit{если}\quad \mu=1-h.$$

Рассмотрим теперь функцию

$$\Phi_\alpha(x)=[(x-a)(b-x)]^{(1-\alpha)/2}V_\alpha(x).$$

Отсюда с учетом (5) имеем

$$\Phi_\alpha(x)=[(x-a)(b-x)]^{(1-\alpha)/2}[\varphi(x)S_a^b(\mu,\mu;x)+\Phi_a^b(\mu,\mu,x)].$$

Пусть $\delta > (\alpha+1)/2$, а тогда в силу (6) $\mu > 1$. Из леммы 1 получаем

$$\lim_{x\to a_i} S_a^b(\mu,\mu;x) = (-1)^{i+1}(b-a)^{2\mu-2}B(\mu,\mu-1).$$

Поскольку с учетом формулы (7)

$$\Phi_a^b(\mu,\mu;a_i) = \lim_{x\to a_i} \Phi_a^b(\mu,\mu;x) < \infty,$$

то ясно, что функция $\Phi_\alpha(x)$ при $x \to a$ или $b$ обращается в нуль порядка не ниже $(1-\alpha)/2$. Следовательно,

$$D_{ax}^{1-\alpha}\Phi_\alpha(t) = \frac{d}{dx}D_{ax}^{-\alpha}\Phi_\alpha(t) = D_{ax}^{-\alpha}\frac{d}{dt}\Phi_\alpha(t). \tag{34}$$

Введем обозначение: $\omega(x) = [(x-a)(b-x)]^{(\alpha-1)/2}D_{ax}^{-1}v$. Очевидно, что

$$\omega(x) = \varphi(x)[(x-a)(b-x)]^{\mu-1}. \tag{35}$$

Известно, что если функция $A(x)$ конечна, непрерывна и обладает первой производной или, самое большее, обращается в бесконечность порядка меньшего чем первый, то можно записать

$$\int_a^b \frac{A(t)dt}{t-x} = A(b)\ln(b-x) - A(a)\ln(x-a) - \int_a^b A'(t)\ln|t-x|dt. \tag{36}$$

Из (35) следует, что при $\mu > 0$ $\omega(a) = \omega(b) = 0$. Поэтому если предположить, что $\varphi(x) \in C^1[a,b]$ и в (36) положить $\omega(x) = A(x)$, то будем иметь

$$V_\alpha(x) = \int_a^b \frac{\omega(t)dt}{t-x} = -\int_a^b \omega'(t)\ln|t-x|dt. \tag{37}$$

На основании (35) находим

$$\omega'(x) = \varphi_1(x)[(x-a)(b-x)]^{\mu-2}, \tag{38}$$

где $\varphi_1(x) = \varphi'(x)(x-a)(b-x) + (\mu-1)\varphi(x)(a+b-2x)$.

Если функция $\nu \in L[a,b]$ и удовлетворяет условию Гельдера в интервале $a < x < b$, то

$$\frac{d}{dx}\int_a^b \nu(t)\ln|t-x|dt = -\int_a^b \frac{\nu(t)dt}{t-x}. \tag{39}$$

Пусть $\varphi'(x)$ удовлетворяет условию Гельдера. Тогда очевидно, что $\varphi_1(x)$ удовлетворяет этому же условию на $[a,b]$. В силу (38) и (37) из (39) находим

$$dV_\alpha(x)/dx = \int_a^b \varphi_1(t)[(t-a)(b-t)]^{\mu-2}(t-x)^{-1}dt =$$

$$= \varphi_1(x)S_a^b(\mu-1,\mu-1;x) + \Phi_{1a}^b(\mu-1,\mu-1;x). \qquad (40)$$

Здесь $\Phi_{1a}^b(\mu-1,\mu-1;x)$ определяется формулой (7), где вместо $\varphi$ ставится $\varphi_1$.

Так как $\mu > 1$, то из леммы 1 заключаем: функция $S_a^b(\mu-1,\mu-1;x)$ при $x \to a$ или $b$ обращается в бесконечность порядка $2-\mu$, если $1 < \mu < 2$, в бесконечность логарифмического порядка при $\mu = 2$ и стремится к конечному пределу, если $\mu > 2$.

Пусть $h_1$ – показатель Гельдера функции $\varphi'(x)$ на $[a,b]$:

$$|\varphi'(\tau) - \varphi'(x)| \leqslant C|x-\tau|^{h_1};$$

$h_0$ – наименьшее из чисел $h$ и $h_1$. Как видно из обозначения, функция $\varphi_1(x)$ на $[a,b]$ удовлетворяет условию Гельдера с показателями $h_0$:

$$|\varphi_1(\tau) - \varphi_1(x)| \leqslant C|x-\tau|^{h_0}.$$

Отсюда и из определения функции $\Phi_{1a}^b(\mu-1,\mu-1;x)$ следует неравенство

$$\Phi_{1a}^b(\mu-1,\mu-1;x) \leqslant CM_a^b(\mu-1,h_0;x).$$

Это неравенство и лемма 2 позволяют сделать следующее утверждение: если $2-h_0 < \mu$, то функция $\Phi_{1a}^b(\mu-1,\mu-1;x)$ при $x \to a$ или $b$ стремится к конечному пределу; при $1 < \mu < 2-h_0$ она не может обращаться в бесконечность порядка $> 2-\mu-h_0$; если же $\mu = 2-h_0$, то

$$|\Phi_{1a}^b(\mu-1,\mu-1;x)| \leqslant C\ln[(x-a)(b-x)].$$

Из представления (40) теперь можно сделать следующий вывод: функция $dV_\alpha(x)/dx$ при $x \to a$ или $b$ не может обращаться в бесконечность порядка выше $2-\mu$, если $1 < \mu < 2$, и в бесконечность выше логарифмического порядка при $\mu = 2$ и стремится к конечному пределу, если $\mu > 2$; $\Phi'_\alpha(x)$ при $x \to a$ или $b$ не может обращаться в бесконечность порядка выше $(\alpha+1)/2$. А тогда из формулы (34) вытекает, что функция $D_{ax}^{1-\alpha}\Phi(t)$ при $x \to a$ или $b$ не может обращаться в бесконечность порядка выше $(1-\alpha)/2 = \mu - \delta$.

Остается изучить поведение функции $D_{ax}^{-\alpha}v$ вблизи особых точек $a$ и $b$. Для этого можно записать

$$D_{ax}^{-\alpha}v = \frac{d}{dx}D_{ax}^{-\alpha}D_{ax}^{-1}v = \frac{d}{dx}D_{ax}^{-\alpha}\varphi(t)[(t-a)(b-t)]^{\delta-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{d}{dx}(x-a)^{\delta}\times$$

$$\times(b-a)^{-\alpha+\delta}\int\limits_0^1 \varphi(a+(x-a)\tau)\tau^{\delta-\alpha}(1-\tau)^{\alpha-1}\left(1-\frac{x-a}{b-a}\tau\right)^{\delta-a}d\tau, \quad (41)$$

откуда следует, что функция $D_{ax}^{-\alpha}v \in C[a,b]$ при $\delta > 1$.

Пусть $0 < \delta \leqslant 1$, тогда из (41) получаем

$$\lim_{x\to a}(x-a)^{1-\delta}D_{ax}^{-\alpha}v = \varphi(a)\Gamma(\delta-\alpha+1)(b-a)^{\delta-\alpha}/\Gamma(\delta). \quad (42)$$

Из этого же соотношения нетрудно показать, что функция $D_{ax}^{1-\alpha}v$ при $x \to b$ не может обращаться в бесконечность порядка выше $1-\delta$, когда $\delta < 1$, и в бесконечность выше логарифмического порядка при $\delta = 1$.

Таким образом, окончательный вывод таков: решение $u(x)$, задаваемое равенством (4), будет удовлетворять условию (3), если выполнено соотношение $\lim\limits_{x\to a}(x-a)^{(1-\alpha)/2}D_{ax}^{-\alpha}v = 0$. В силу (42) это равенство имеет место, если $\delta > (1+\alpha)/2$.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96-01-9-00508).*

**Литература**

1. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М., 1995.
2. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 1. С. 101–109.
3. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М.: Физматлит, 1953.
4. Нахушев А. М. Некоторые краевые задачи для уравнения смешанного типа с двумя линиями параболического вырождения // Дис. ... к.ф.-м.н. Новосибирск, 1966.
5. Волкодавов В. Ф., Лернер М. Е., Николаев И. Я., Киселев В. А. Таблицы некоторых функций Римана, интегралов и рядов. Куйбышев, 1982.

Поступила в редакцию
10 ноября 1999 г.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и автоматизации
КБНЦ РАН

# Структурные и качественные свойства оператора, обратного оператору дробного интегро-дифференцирования с фиксированными началом и концом

**Введение.** Решение $u\,(x,\,y)$ задачи Трикоми для уравнения Геллерстедта

$$\operatorname{sign} y \cdot |y|^m\, u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad m = \mathrm{const}\ \geqslant 0$$

в смешанной области стандартного вида при определенных допущениях относительно входных данных обладает следующим фундаментальным свойством:

$$u_y\,(x,\,0) = \gamma D^{\alpha}_{0x} u\,(t,\,0) + f\,(x)\,,$$

где $\gamma = \mathrm{const}\ > 0$, $D^{\alpha}_{0x}$ – оператор дробного дифференцирования порядка $\alpha = 2/\,(m+2)$, $f\,(x)$ – однозначно определенная и непрерывная на сегменте $0 \leqslant x \leqslant 1$ функция.

К дробному дифференциальному исчислению приходим и при решении смешанных задач для гиперболо-параболических уравнений, а также при математическом моделировании биологических явлений [1] или переноса субстанции в средах с фрактальной геометрией. В частности, если исходить не из лебеговой размерности фракталов, а из хаусдорфовой, то классическое уравнение неразрывности $au_t = -\,q_x$, в случаях закона Фика или Фурье: $q\,(x,\,t) = -\,bu_x$, целесообразно заменить уравнением вида

$$aD^{\alpha}_{0x} u\,(x,\,t) = -\,q_x \quad \text{или} \quad b\int\limits_0^1 D^{\alpha}_{0x} u\,(x,\,t)\,d\alpha = -\,q_x,$$

где $a,\,b = \mathrm{const}\ > 0$.

В теории уравнений математической биологии и в дробном исчислении [1] важную роль играют операторы $I^{\alpha}_{ab} = D^{\alpha}_{ax} - \operatorname{sign}\alpha D^{\alpha}_{bx}$, $D^{[\alpha,\,\beta]}_{ax}$, введенные в [2].

В настоящей работе, являющейся продолжением работы [2], исследуются структурные и качественные свойства оператора, обратного $I^{\alpha}_{ab}$.

**1. О структурном свойстве оператора, обратного оператору Карлемана.** Рассмотрим уравнение Карлемана

$$I^{\alpha}_{ab} u = v\,(x)\,,\ a < x < b,\ -1 < \alpha < 0, \tag{1}$$

Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 2000, **36**:8, 1093–1100.

с правой частью $v(x)$ вида

$$v(x) = \varphi(x)\left[(x-a)(b-x)\right]^{\delta-\alpha-1}, \tag{2}$$

где $\varphi(x)$ удовлетворяет условию Гельдера на $[a, b]$, а $\delta = \mathrm{const} > 0$.

Решение уравнения (1) будем искать в классе функций $u(x)$, представимых в виде

$$u(x) = \psi(x)\left[(x-a)(b-x)\right]^{\delta-1}, \tag{3}$$

где $\psi(x)$ – непрерывная по Гельдеру функция на $[a, b]$. Пусть

$$Z(x) = (x-a)^{1+\alpha/2}(b-x)^{-\alpha/2} \equiv Z(\alpha; x),$$

тогда, как хорошо известно [3, с. 579], в классе функций, удовлетворяющих условиям (2) и (3), имеем

$$\frac{u(x)}{\Gamma(-\alpha)} = \frac{\sin\left[(\alpha+1)\pi\right]}{4\pi\sin^2\left[(\alpha+1)\pi/2\right]}\frac{d}{dx}\int\limits_a^x \frac{v(t)\,dt}{(x-t)^{-\alpha}} - \frac{\sin^2\left[(\alpha+1)\pi\right]}{4\pi^2\sin^2\left[(\alpha+1)\pi/2\right]}\times$$

$$\times\int\limits_a^x \frac{Z(t)}{(x-t)^{-\alpha}}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int\limits_a^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1}}\int\limits_\tau^b \frac{v(s)\,ds}{Z(s)(s-\tau)^{-\alpha}}\right\}dt.$$

Отсюда, принимая во внимание, что

$$\sin(\alpha\pi+\pi) = -\sin(\alpha\pi), \quad \sin\left[(\alpha+1)\pi/2\right] = \cos(\alpha\pi/2),$$

$$D_{ax}^{-\alpha-1}v = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int\limits_a^x (x-t)^{\alpha}v(t)\,dt,$$

$$\sin(-\pi\alpha) = \frac{\pi}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(\alpha+1)}, \quad \frac{\partial}{\partial x}D_{ax}^{-\alpha-1} = D_{ax}^{-\alpha},$$

получаем

$$4u(x)\cos^2\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) = D_{ax}^{-\alpha}v + D_{ax}^{-\alpha-1}Z(t)\frac{\partial}{\partial t}D_{at}^{\alpha}D_{b\tau}^{-\alpha-1}\frac{v(s)}{Z(s)}. \tag{4}$$

Согласно теореме о дробной производной от потенциала со степенным ядром [1, с. 50]

$$D_{ax}^{\beta}I_{ab}^{-\beta}u = 2\cos^2(\pi\beta/2)\,u(x) + \sin(\pi\beta)\,S_{ab}^{\beta}u(x),$$

$$S_{ab}^{\beta}u(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_a^b \left|\frac{t-a}{x-a}\right|^{\beta}\frac{u(t)\,dt}{t-x}.$$

С учетом этих равенств имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} D_{at}^{\alpha} D_{b\tau}^{-\alpha-1} \frac{v(s)}{Z(s)} = D_{at}^{\alpha+1} D_{b\tau}^{-\alpha-1} \frac{v(s)}{Z(s)} =$$

$$= \cos(\pi(\alpha+1)) \frac{v(t)}{Z(t)} + S_{ab}^{\alpha+1} \frac{v(t)}{Z(t)} \sin((\alpha+1)\pi).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial t} D_{at}^{\alpha} D_{b\tau}^{-\alpha-1} \frac{v(s)}{Z(s)} = -\cos(\pi\alpha) \frac{v(t)}{Z(t)} - \sin(\alpha\pi) S_{ab}^{\alpha+1} \frac{v(t)}{Z(t)}, \tag{5}$$

а тогда соотношение (4) принимает вид

$$4u(x)\cos^2\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) =$$

$$= D_{ax}^{-\alpha} v - D_{ax}^{-\alpha-1} v \cos(\pi\alpha) - D_{ax}^{-\alpha-1} Z(t) S_{ab}^{\alpha+1} \frac{v(t)}{Z(t)} \sin(\alpha\pi). \tag{6}$$

Полученная формула выражает весьма важное функциональное свойство оператора, обратного оператору $I_{ab}^{\alpha}$: если $u(x)$ – решение уравнения Карлемана (1), то [3, с. 579]

$$2D_{ax}^{\alpha} u = v(x) + \operatorname{tg}\frac{\alpha\pi}{2} \frac{1}{\pi} \int_a^b \left[\frac{(t-a)(b-t)}{(x-a)(b-x)}\right]^{\alpha/2} \frac{v(t)\,dt}{t-x}, \tag{7}$$

$$2D_{bx}^{\alpha} u = v(x) - \operatorname{tg}\frac{\alpha\pi}{2} \frac{1}{\pi} \int_a^b \left[\frac{(t-a)(b-t)}{(x-a)(b-x)}\right]^{\alpha/2} \frac{v(t)\,dt}{t-x}. \tag{8}$$

**2. О структурном свойстве оператора, обратного оператору дробного дифференцирования с фиксированными началом и концом.** Оператор

$$I_{ab}^{\alpha} u(x) = \left(D_{ax}^{\alpha} - \operatorname{sign}\alpha D_{bx}^{\alpha}\right) u(x),\ a < x < b, \tag{9}$$

назван нами оператором дробного интегро-дифференцирования порядка $|\alpha|$ с фиксированными началом и концом в точках $a$ и $b$ [4].

Как видно из (9), оператор $I_{ab}^{\alpha}$ определяется следующим образом:

$$I_{ab}^{\alpha} u(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^b \frac{u(t)\,dt}{|x-t|^{\alpha+1}},\ \alpha < 0;$$

$$I_{ab}^{\alpha}u=\frac{\partial^{[\alpha]+1}}{\partial x^{[\alpha]+1}}I_{ab}^{\alpha-[\alpha]-1}u\left(x\right),\ \alpha>0,$$

где $[\alpha]$ – целая часть $\alpha<[\alpha]+1$.

Предположим, что $\alpha>[\alpha]=m$, и рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m+1}}I_{ab}^{\alpha-m-1}u\left(x\right)=v\left(x\right),\ \ a<x<b,\tag{10}$$

с правой частью $v\left(x\right)$, представимой в виде

$$D_{ax}^{-m-1}v\left(x\right)=\varphi\left(x\right)\left[\left(x-a\right)\left(b-x\right)\right]^{\delta+m-\alpha},\tag{11}$$

где $\varphi(x)$ на сегменте $[a,\,b]$ удовлетворяет условию Гельдера, $\delta=\mathrm{const}>0$. Решение уравнения (10) будем искать в классе функций $u\left(x\right)$, представимых в виде (3) и таких, что $I_{ab}^{\alpha-m-1}u\left(x\right)\in C^{m+1}\,]a,\,b[$.

Любое решение $u\left(x\right)$ уравнения (10) представимо в виде

$$I_{ab}^{\alpha-m-1}u\left(x\right)=D_{ax}^{-m-1}v+a_k\left(x-a\right)^k\tag{12}$$

или

$$I_{ab}^{\alpha-m-1}u\left(x\right)=\left(-1\right)^{m-1}D_{bx}^{-m-1}v+b_k\left(b-x\right)^k,\tag{13}$$

где под (диагонально) повторяющимся индексом $k$ подразумевается суммирование от 0 до $m$, $a_k$ и $b_k$ – постоянные величины. Имеет место и обратное утверждение: *каковы бы ни были постоянные* $a_k$ *и* $b_k$, *любое решение* $u(x)$ *уравнения* (12) *или* (13) *является решением уравнения* (10). Чтобы изучить структуру ядра оператора $I_{ab}^{\alpha}$ при $\alpha>0$, рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m+1}}I_{ab}^{\beta}u\left(x\right)=0,\quad\beta=\alpha-m-1.$$

Как видно из (12), (13) при $v=0$, любой элемент $u\in\ker I_{ab}^{\alpha}$ удовлетворяет уравнению $I_{ab}^{\beta}u\left(x\right)=a_k\left(x-a\right)^k$, $k=\overline{0,\,m}$, откуда и из (7) заключаем, что

$$2D_{ax}^{\beta}u=a_k\left(x-a\right)^k+$$

$$+\pi^{-1}a_k\mathrm{tg}\,\left(\beta\pi/2\right)\left[\left(x-a\right)\left(b-x\right)\right]^{-\beta/2}S_a^b\left(\beta/2+k+1,\,\beta/2+1;x\right).\tag{14}$$

Здесь

$$S_a^b\left(\nu,\,\mu;\,x\right)=\int\limits_a^b\frac{\left(\tau-a\right)^{\nu-1}\left(b-\tau\right)^{\mu-1}}{\tau-x}\,d\tau.\tag{15}$$

**3. Представления интеграла $S_a^b(\nu,\,\mu;\,x)$ через гипергеометрические функции.** Интеграл в смысле главного значения по Коши от функции $\varphi(x)$ можно определить и следующим образом:

$$\int\limits_a^b \frac{\varphi(t)\,dt}{t-x} = \lim_{\varepsilon\to+0}\Gamma(\varepsilon)\left[D_{bx}^{-\varepsilon}\varphi - D_{ax}^{-\varepsilon}\varphi\right]. \tag{16}$$

Сингулярный интеграл (15), согласно (16), записывается в виде

$$S_a^b(\nu,\,\mu;\,x) = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int\limits_x^b (t-a)^{\nu-1}(b-t)^{\mu-1}(t-x)^{\varepsilon-1}\,dt - \right.$$

$$\left. - \int\limits_a^x (t-a)^{\nu-1}(b-t)^{\mu-1}(x-t)^{\varepsilon-1}\,dt\right].$$

Если в первом интеграле произвести замену $t=b-(b-x)\,\tau$, а во втором положить $t=a+(x-a)\,\tau$, то в результате получим

$$S_a^b(\nu,\,\mu;\,x) = \lim_{\varepsilon\to0}(b-a)^{\mu+\nu+\varepsilon-2}\left[(1-z)^{\mu+\varepsilon-1}\int\limits_0^1 \tau^{\mu-1}(1-\tau)^{\varepsilon-1}\times\right.$$

$$\left.\times\,(1-(1-z)\,\tau)^{\nu-1}\,d\tau - z^{\nu+\varepsilon-1}\int\limits_0^1 \tau^{\nu-1}(1-\tau)^{\varepsilon-1}(1-zt)^{\mu-1}\,d\tau\right], \tag{17}$$

где $z=(x-a)\,/\,(b-a)$, $1-z=(b-x)\,/\,(b-a)$.

Пусть $B(x,\,y)=\Gamma(x)\,\Gamma(y)\,/\Gamma(x+y)$ – бета-функция, $z<1$. Тогда

$$F(\alpha,\,\beta,\,\gamma;\,z) = \frac{1}{B(\beta,\,\gamma-\beta)}\int\limits_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-zt)^{-\alpha}\,dt. \tag{18}$$

С учетом (18) равенство (17) примет вид

$$\begin{gathered} S_a^b(\nu,\,\mu;\,x) = (b-a)^{\mu+\nu-2}\times \\ \times\lim_{\varepsilon\to0}\left[B(\mu,\,\varepsilon)(1-z)^{\mu+\varepsilon-1}F(1-\nu,\,\mu,\,\mu+\varepsilon;1-z) - \right. \\ \left. - B(\nu,\,\varepsilon)\,z^{\nu+\varepsilon-1}F(1-\mu,\,\nu,\,\nu+\varepsilon;z)\right]. \end{gathered} \tag{19}$$

Далее на основании первой формулы Больца

$$F(\alpha,\,\beta,\,\gamma;\,z) = (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\,\gamma-\beta,\,\gamma;z) \tag{20}$$

имеем

$$F(1-\mu,\,\nu,\,\nu+\varepsilon;z)=(1-z)^{\mu+\varepsilon-1}\,F(\mu+\nu+\varepsilon-1,\,\varepsilon,\,\nu+\varepsilon;z)\,.$$

Если $\alpha+\beta-\gamma\neq 0,\,\pm1,\,\pm2,\,\ldots$, то, как известно,

$$F(\alpha,\,\beta,\,\gamma;\,1-z)=\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)}F(\alpha,\,\beta,\,\alpha+\beta-\gamma+1;z)+$$

$$+\,z^{\gamma-\alpha-\beta}\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}F(\gamma-\alpha,\,\gamma-\beta,\,1+\gamma-\alpha-\beta;z)\,. \qquad (21)$$

При $\nu\neq 1,2,\ldots$ и достаточно малых значениях $\varepsilon$ в силу (21) справедлива формула

$$F(1-\nu,\,\mu,\,\mu+\varepsilon;1-z)=$$

$$=\frac{\Gamma(\mu+\varepsilon)\,\Gamma(\nu+\varepsilon-1)}{\Gamma(\mu+\nu+\varepsilon-1)\,\Gamma(\varepsilon)}F(1-\nu,\,\mu,\,2-\nu-\varepsilon;z)+$$

$$+\,z^{\nu+\varepsilon-1}\frac{\Gamma(\mu+\varepsilon)\,\Gamma(1-\nu-\varepsilon)}{\Gamma(1-\nu)\,\Gamma(\mu)}F(\mu+\nu+\varepsilon-1,\,\varepsilon,\,\varepsilon+\nu;z)\,.$$

Следовательно, после соответствующих преобразований, можно записать

$$S_a^b(\nu,\,\mu;x)=(b-a)^{\mu+\nu-2}\lim_{\varepsilon\to0}\left\{\frac{\Gamma(\mu)\,\Gamma(\nu+\varepsilon-1)}{\Gamma(\mu+\nu+\varepsilon-1)}(1-z)^{\mu+\varepsilon-1}\times\right.$$

$$\times\,F(1-\nu,\,\mu,\,2-\nu-\varepsilon;z)+z^{\nu+\varepsilon-1}(1-z)^{\mu+\varepsilon-1}\times$$

$$\left.\times\,F(\mu+\nu+\varepsilon-1,\,\varepsilon,\,\varepsilon+\nu;\,z)\left[\frac{\Gamma(1-\nu-\varepsilon)}{\Gamma(1-\nu)}-\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu+\varepsilon)}\right]\Gamma(\varepsilon)\right\}.$$

Отсюда, принимая во внимание равенства:

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)=\pi/\sin(\pi x)\,,\ \ \varepsilon\,\Gamma(\varepsilon)=\Gamma(\varepsilon+1)\,,$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\Gamma(\nu+\varepsilon)\,\Gamma(1-\nu-\varepsilon)-\Gamma(\nu)\,\Gamma(1-\nu)}{\varepsilon\,\Gamma(1-\nu)\,\Gamma(\nu+\varepsilon)}\Gamma(\varepsilon+1)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\sin(\pi\nu)-\sin((\nu+\varepsilon)\,\pi)}{\varepsilon\sin((\nu+\varepsilon)\,\pi)}=-\pi\mathrm{ctg}\,(\pi\nu)\,,$$

где $\nu\neq 1,\,2,\ldots,\ F(\alpha,\,0,\,\gamma;\,z)=1$, находим

$$S_a^b(\nu,\,\mu;x)=-\pi\mathrm{ctg}\,(\nu\pi)\,z^{\nu-1}(1-z)^{\mu-1}(b-a)^{\mu+\nu-2}\,+$$

$$+\,B(\mu,\,\nu-1)\,(1-z)^{\mu-1}(b-a)^{\mu+\nu-2}\,F(1-\nu,\,\mu,\,2-\nu;z)\,. \qquad (22)$$

Итак, доказано, что если $\nu \neq 1, 2, \ldots$, то

$$S_a^b(\nu,\, \mu; x) = -\pi \mathrm{ctg}\,(\nu\pi)\,(x-a)^{\nu-1}(b-x)^{\mu-1} +$$

$$+B(\mu,\, \nu-1)\,(b-x)^{\mu-1}(b-a)^{\nu-1}F\left(1-\nu,\, \mu,\, 2-\nu; \frac{x-a}{b-a}\right). \qquad (23)$$

Равенство (22) при $\mu \neq 1, 2, \ldots$ можно переписать и в следующем виде:

$$S_a^b(\nu,\, \mu;\, x) = \pi \mathrm{ctg}\,(\mu\pi)\,(x-a)^{\nu-1}(b-x)^{\mu-1} -$$

$$-(b-a)^{\mu+\nu-2}B(\mu-1,\, \nu)\,F\left(2-\mu-\nu,\, 1,\, 2-\mu; \frac{b-x}{b-a}\right). \qquad (24)$$

Действительно, в силу (21) имеем

$$F(1-\nu,\, \mu,\, 2-\nu; z) = \frac{\Gamma(2-\nu)\,\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(2-\nu-\mu)}F(1-\nu,\, \mu,\, \mu; 1-z) +$$

$$+(1-z)^{1-\mu}\frac{\Gamma(2-\nu)\,\Gamma(\mu-1)}{\Gamma(1-\nu)\,\Gamma(\mu)}F(1,\, 2-\mu-\nu,\, 2-\mu; 1-z). \qquad (25)$$

Поскольку $F(1-\nu,\, \mu,\, \mu; 1-z) = z^{\nu-1}$,

$$B(\mu,\, \nu-1)\frac{\Gamma(2-\nu)\,\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(2-\nu-\mu)} = \frac{\Gamma(\mu)\,\Gamma(1-\mu)\,\Gamma(\nu-1)\,\Gamma(1-(\nu-1))}{\Gamma(\mu+\nu-1)\,\Gamma(1-(\mu+\nu-1))} =$$

$$= \frac{\pi \sin[\pi(\mu+\nu-1)]}{\sin(\mu\pi)\sin[(\nu-1)\pi]} = \pi\left(\mathrm{ctg}\,(\nu\pi) + \mathrm{ctg}\,(\mu\pi)\right),$$

$$B(\mu,\, \nu-1)\frac{\Gamma(2-\nu)\,\Gamma(\mu-1)}{\Gamma(1-\nu)\,\Gamma(\mu)} = \frac{\Gamma(\mu-1)\,\Gamma(2-\nu)\,\Gamma(\nu-1)}{\Gamma(\mu+\nu-1)\,\Gamma(1-\nu)} =$$

$$= \frac{\Gamma(\mu-1)\,(1-\nu)\,\Gamma(\nu-1)}{\Gamma(\mu+\nu-1)} = -\frac{\Gamma(\mu-1)\,\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu+\nu-1)} = -B(\mu-1,\, \nu),$$

то (24) является следствием (23) и (25). Равенство (24) без доказательства приведено в [5, с. 304] и в [6, с. 164] без предположения, что $\mu \neq 1, 2, \ldots$

Очевидно, что

$$S_a^b(1,\, 1;\, x) = \int\limits_a^b (\tau - x)^{-1}\, d\tau = \ln\frac{b-x}{x-a}.$$

Из (19) и равенств $\Gamma(\varepsilon+1) = \varepsilon\,\Gamma(\varepsilon)$, $F(0,\, \mu,\, \mu+\varepsilon; 1-z) = 1$ имеем

$$(b-a)^{1-\mu}S_a^b(1,\, \mu;\, x) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{\Gamma(\mu)\,\Gamma(\varepsilon+1)}{\Gamma(\mu+\varepsilon)}(1-z)^{\mu+\varepsilon-1} - z^{\varepsilon}F(1-\mu,\,1,\,1+\varepsilon;\,z)\right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left[\frac{\Gamma(\mu)\,\Gamma(\varepsilon+1)}{\Gamma(\mu+\varepsilon)}(1-z)^{\mu+\varepsilon-1} - z^{\varepsilon}F(1-\mu,\,1,\,1+\varepsilon;\,z)\right]. \qquad (26)$$

Пусть $\psi(z)$ – логарифмическая производная $\Gamma(z)$:

$$\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z).$$

Тогда из (26) находим:

$$(b-a)^{1-\mu}\,S_a^b(1,\,\mu;\,x) = [\psi(1)-\psi(\mu)]\,(1-z)^{\mu-1} +$$

$$+ (1-z)^{\mu-1}\ln(1-z) - (1-z)^{\mu-1}\ln z - \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\partial F(1-\mu,\,1,\,1+\varepsilon;z)}{\partial\varepsilon}.$$

Согласно (18),

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}F(1-\mu,\,1,\,1+\varepsilon;z) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\varepsilon\int_0^1(1-t)^{\varepsilon-1}(1-zt)^{\mu-1}\,dt =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\int_0^1(1-zt)^{\mu-1}\,d(1-t)^{\varepsilon} =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left[-1+(\mu-1)\,z\int_0^1(1-t)^{\varepsilon}(1-zt)^{\mu-2}\,dt\right] =$$

$$= (1-\mu)\,z\int_0^1(1-zt)^{\mu-2}\ln(1-t)\,dt = (1-\mu)\,zF_*(2-\mu,\,1,\,2;z),$$

где

$$F_*(\alpha,\,\beta,\,\gamma;z) \equiv F_*(\alpha,\,\beta,\,\gamma-\varepsilon;z) =$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-zt)^{-\alpha}\ln(1-t)\,dt$$

– функция, введенная нами в [7] (см. также [8]). Таким образом, установлено, что

$$(b-a)^{1-\mu}\,S_a^b(1,\,\mu;\,x) = (1-z)^{\mu-1}\left[\psi(1)-\psi(\mu)+\ln\frac{1-z}{z}\right] +$$

$$+ (\mu-1)\,zF_*(2-\mu,\,1,\,2;z)$$

или
$$S_a^b(1,\,\mu;\,x)=(b-x)^{\mu-1}\left[\psi(1)-\psi(\mu)+\ln\frac{b-x}{x-a}\right]+$$
$$+(\mu-1)(x-a)(b-a)^{\mu-2}F_*\left(2-\mu,\,1,\,2;\frac{x-a}{b-a}\right).$$
Далее, нетрудно заметить, что
$$S_a^b(2,\,\mu;\,x)=\frac{1}{\mu}(b-a)^{\mu}+(x-a)\,S_a^b(1,\,\mu;\,x).$$

Пусть теперь $\nu=3,\,4,\,5,\ldots$, тогда на основании формулы бинома Ньютона интеграл (15) можно записать в виде
$$S_a^b(\nu,\,\mu;\,x)=\sum_{j=0}^{\nu-1}\binom{\nu-1}{j}(x-a)^j\int\limits_a^b(t-x)^{\nu-2-j}(b-t)^{\mu-1}\,dt=$$
$$=(x-a)^{\nu-1}S_a^b(1,\,\mu;\,x)+\sum_{j=0}^{\nu-2}\binom{\nu-1}{j}(x-a)^j\int\limits_a^b(t-x)^{\nu-2-j}(b-t)^{\mu-1}\,dt.$$
Пусть $m_j=\nu-2-j$. Очевидно, что $m_j\geqslant 0$ для всех $j\leqslant\nu-2$ и
$$\int\limits_a^b(t-x)^{m_j}(b-t)^{\mu-1}\,dt=\left(\int\limits_a^x+\int\limits_x^b\right)(t-x)^{m_j}(b-t)^{\mu-1}\,dt.$$
Если в первом интеграле правой части этого равенства положить $t=a+(x-a)\,\tau$, во втором – $t=b-(b-x)\,\tau$, а затем воспользоваться формулой (18), то получим
$$\int\limits_a^b(t-x)^{m_j}(b-t)^{\mu-1}\,dt=B(\mu,\,m_j+1)(b-x)^{\mu+m_j}-$$
$$-(b-a)^{\mu-1}(a-x)^{m_j+1}B(1,\,m_j+1)\,F\left(1-\mu,\,1,\,\nu-j;\frac{x-a}{b-a}\right).$$
Поэтому для любого $\nu=3,\,4,\,5,\ldots$ справедлива формула
$$S_a^b(\nu,\,\mu;\,x)=(x-a)^{\nu-1}S_a^b(1,\,\mu;\,x)+$$
$$+\sum_{j=0}^{\nu-2}\binom{\nu-1}{j}(x-a)^j\Big[(b-x)^{\mu+m_j}B(\mu,\,m_j+1)-$$
$$-(b-a)^{\mu-1}(a-x)^{m_j+1}B(1,\,m_j+1)\,F\left(1-\mu,\,1,\,\nu-j;\frac{x-a}{b-a}\right)\Big].$$

**4. Об общем представлении всех решений уравнения (10) (продолжение п. 2).** Пусть $2\varepsilon = -\beta = m + 1 - \alpha$. Тогда из (14) имеем

$$2D_{ax}^{-2\varepsilon}u = a_k\left(x-a\right)^k -$$

$$-\left(a_k \mathrm{tg}\left(\pi\varepsilon\right)/\pi\right)\left[\left(x-a\right)\left(b-x\right)\right]^{\varepsilon} S_a^b\left(-\varepsilon+k+1,\, 1-\varepsilon; x\right), \qquad (27)$$

где $k = \overline{0,\, m}$.

Поскольку $k+1-\varepsilon \neq 1, 2, \ldots$, то из (23) при $\nu = k+1-\varepsilon$, $\mu = 1-\varepsilon$ находим

$$S_a^b\left(k+1-\varepsilon,\, 1-\varepsilon; x\right) = \pi \mathrm{ctg}\left(\pi\varepsilon\right)\left(x-a\right)^{k-\varepsilon}\left(b-x\right)^{-\varepsilon} + B\left(k-\varepsilon,\, 1-\varepsilon\right) \times$$

$$\times\left(b-x\right)^{-\varepsilon}\left(b-a\right)^{k-\varepsilon} F\left(\varepsilon-k,\, 1-\varepsilon,\, 1-k+\varepsilon; \frac{x-a}{b-a}\right). \qquad (28)$$

В силу (28) уравнение (27) эквивалентно уравнению Абеля

$$D_{ax}^{-2\varepsilon}u = \sum_{k=0}^{m} A_k f^k\left(x\right), \qquad (29)$$

где

$$A_k = -\left(2\pi\right)^{-1}\mathrm{tg}\left(\pi\varepsilon\right) a_k B\left(1-\varepsilon,\, k-\varepsilon\right)\left(b-a\right)^{k-\varepsilon},$$
$$f^k\left(x\right) = \left(x-a\right)^{\varepsilon} F\left(\varepsilon-k,\, 1-\varepsilon,\, 1+\varepsilon-k; \tfrac{x-a}{b-a}\right). \qquad (30)$$

Функция $f^k\left(x\right)$ обращается в нуль при $x = a$, поэтому

$$D_{ax}^{2\varepsilon} f^k\left(t\right) = \frac{\partial}{\partial x} D_{ax}^{2\varepsilon-1} f^k\left(t\right) = D_{ax}^{2\varepsilon-1}\frac{d}{dt} f^k\left(t\right). \qquad (31)$$

Легко видеть, что

$$\frac{df^k\left(x\right)}{dx} = \left(b-a\right)^{\varepsilon-1}\frac{d}{dz}\left[z^{\varepsilon} F\left(\varepsilon-k,\, 1-\varepsilon,\, 1+\varepsilon-k; z\right)\right],$$

откуда, поскольку $cF'\left(a,\, b,\, c;\, z\right) = abF\left(a+1,\, b+1,\, c+1; z\right)$, выводим формулу

$$\frac{df^k\left(x\right)}{dx} = \left(b-a\right)^{\varepsilon-1}\left[\varepsilon z^{\varepsilon-1} F\left(\varepsilon-k,\, 1-\varepsilon,\, 1+\varepsilon-k; z\right) + \right.$$

$$\left. + \varepsilon_k z^{\varepsilon} F\left(\varepsilon-k+1,\, 2-\varepsilon,\, 2+\varepsilon-k; z\right)\right], \qquad (32)$$

где $\varepsilon^k = \left(\varepsilon-k\right)\left(1-\varepsilon\right)/\left(1+\varepsilon-k\right)$.

Из формул (31), (32) вытекает справедливость равенств

$$\Gamma\left(1-2\varepsilon\right) D_{ax}^{2\varepsilon-1}\frac{d}{dt} f^k\left(t\right) =$$

$$= (b-a)^{\varepsilon-1} \int\limits_a^x (x-t)^{-2\varepsilon} \left[ \varepsilon \left( \frac{t-a}{b-a} \right)^{\varepsilon-1} F\left( \varepsilon - k,\, 1-\varepsilon,\, 1+\varepsilon-k; \frac{t-a}{b-a} \right) + \right.$$

$$\left. + \varepsilon_k \left( \frac{t-a}{b-a} \right)^{\varepsilon} F\left( \varepsilon - k + 1,\, 2-\varepsilon,\, 2+\varepsilon-k; \frac{t-a}{b-a} \right) \right] dt =$$

$$= \varepsilon \left(x-a\right)^{-\varepsilon} \int\limits_0^1 \tau^{\varepsilon-1} \left(1-\tau\right)^{-2\varepsilon} F\left(\varepsilon-k,\, 1-\varepsilon,\, 1+\varepsilon-k; z\tau\right) d\tau +$$

$$+ \frac{\varepsilon_k}{b-a} \left(x-a\right)^{1-\varepsilon} \int\limits_0^1 \tau^{\varepsilon} \left(1-\tau\right)^{-2\varepsilon} F\left(\varepsilon-k+1,\, 2-\varepsilon,\, 2+\varepsilon-k; z\tau\right) d\tau.$$

Известно, что

$$F\left(a,\, b,\, c; z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(a\right)_n \left(b\right)_n}{n! \left(c\right)_n} z^n, \;\; |z| < 1, \;\; c \neq 0,\, -1,\, \ldots$$

Следовательно,

$$\Gamma\left(1-2\varepsilon\right) D_{ax}^{2\varepsilon} f^k\left(t\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \left[ \frac{\varepsilon \left(\varepsilon-k\right)_n \left(1-\varepsilon\right)_n}{\left(x-a\right)^{\varepsilon} \left(1+\varepsilon-k\right)_n} \int\limits_0^1 \tau^{\varepsilon-1+n} \left(1-\tau\right)^{-2\varepsilon} d\tau + \right.$$

$$\left. + \frac{\varepsilon_k \left(x-a\right)^{1-\varepsilon} \left(\varepsilon-k+1\right)_n \left(2-\varepsilon\right)_n}{\left(b-a\right) \left(2+\varepsilon-k\right)_n} \int\limits_0^1 \tau^{\varepsilon+n} \left(1-\tau\right)^{-2\varepsilon} d\tau \right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \left[ \frac{\varepsilon \left(\varepsilon-k\right)_n \left(1-\varepsilon\right)_n \Gamma\left(\varepsilon+n\right) \Gamma\left(1-2\varepsilon\right)}{\left(x-a\right)^{\varepsilon} \left(1+\varepsilon-k\right)_n \Gamma\left(1-\varepsilon+n\right)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\varepsilon_k \left(x-a\right)^{1-\varepsilon} \left(\varepsilon-k+1\right)_n \left(2-\varepsilon\right)_n \Gamma\left(1+\varepsilon+n\right) \Gamma\left(1-2\varepsilon\right)}{\left(b-a\right) \left(2+\varepsilon-k\right)_n \Gamma\left(2-\varepsilon+n\right)} \right].$$

Таким образом, справедливо равенство

$$D_{ax}^{2\varepsilon} f^k\left(t\right) = \frac{\varepsilon}{\left(x-a\right)^{\varepsilon}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\varepsilon-k\right)_n \left(\varepsilon\right)_n \Gamma\left(\varepsilon\right)}{n! \left(1+\varepsilon-k\right)_n \Gamma\left(1-\varepsilon\right)} z^n +$$

$$+ \frac{\varepsilon_k \left(x-a\right)^{1-\varepsilon}}{\left(b-a\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(1+\varepsilon-k\right)_n \left(1+\varepsilon\right)_n \Gamma\left(1+\varepsilon\right)}{n! \left(2+\varepsilon-k\right)_n \Gamma\left(2-\varepsilon\right)} z^n, \tag{33}$$

которое эквивалентно формуле

$$(b-a)^{\varepsilon}\, D_{ax}^{2\varepsilon} f^{k}(t) = \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\Gamma(1-\varepsilon)} z^{-\varepsilon} F(\varepsilon-k,\, \varepsilon,\, \varepsilon+1-k; z) +$$

$$+\frac{\varepsilon_k \Gamma(1+\varepsilon)}{\Gamma(2-\varepsilon)} z^{1-\varepsilon} F(\varepsilon-k+1,\, \varepsilon+1,\, \varepsilon+2-k; z)\,.$$

Воспользуемся в последнем равенстве рекуррентным соотношением [9, с. 292]

$$(\alpha z/\gamma)\, F(\alpha+1,\, \beta+1,\, \gamma+1; z) = F(\alpha,\, \beta+1,\, \gamma; z) - F(\alpha,\, \beta,\, \gamma; z)\,,$$

из которого в силу равенства $\Gamma(2-\varepsilon) = (1-\varepsilon)\,\Gamma(1-\varepsilon)$ следует, что

$$\frac{\varepsilon_k \Gamma(1+\varepsilon)}{\Gamma(2-\varepsilon)} z F(\varepsilon-k+1,\, -\varepsilon+1,\, \varepsilon-k+2; z) =$$

$$= \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\Gamma(1-\varepsilon)} \left[F(\varepsilon-k,\, \varepsilon+1,\, \varepsilon-k+1; z) - F(\varepsilon-k,\, \varepsilon,\, \varepsilon-k+1; z)\right].$$

В результате будем иметь

$$D_{ax}^{2\varepsilon} f^{k}(t) = \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\Gamma(1-\varepsilon)} \left[(b-a)\, z\right]^{-\varepsilon} F(\varepsilon-k,\, \varepsilon+1,\, \varepsilon-k+1; z)\,.$$

Отсюда на основании формулы Больца (20), получаем

$$D_{ax}^{2\varepsilon} f^{k}(t) = \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\Gamma(1-\varepsilon)} \left[(b-a)\, z\,(1-z)\right]^{-\varepsilon} F(1,\, -k,\, \varepsilon-k+1; z)\,. \tag{34}$$

Известно [10, с. 62], что гипергеометрический полином

$$F(1,\, -k,\, \varepsilon-k+1; z) = F(-k,\, 1,\, \varepsilon-k+1; z) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{j!\,(-z)^{j}}{(\varepsilon-k+1)_{j}}.$$

Легко видеть, что

$$\binom{\varepsilon}{k} F(-k,\, 1,\, \varepsilon-k+1; z) = \mathcal{P}_k^{(\varepsilon-k,\, -\varepsilon)}(1-2z)$$

и полином Якоби

$$\mathcal{P}_k^{(\varepsilon-k,\, -\varepsilon)}(1-2z) = \sum_{j=0}^{k} \binom{\varepsilon}{j} \binom{k-\varepsilon}{k-j} (-z)^{k-j} (1-z)^{j}\,.$$

Из (34) заключаем, что любое решение $u\,(x)$ уравнения Абеля (29) представимо в виде

$$u(x)=[(x-a)(b-x)]^{-\varepsilon}\sum_{k=0}^{m}B_kF\left(-k,\,1,\,\varepsilon-k+1;\frac{x-a}{b-a}\right),\qquad(35)$$

где $B_k=A_k\,(b-a)^{\varepsilon}\,\Gamma\,(1+\varepsilon)\,/\Gamma\,(1-\varepsilon)$ или, как это видно из (30),

$$B_k=-\,(2\pi)^{-1}\left[\varepsilon a_k\,(b-a)^k\,B\,(1-\varepsilon,\,k-\varepsilon)\,\Gamma\,(\varepsilon)\,/\Gamma\,(1-\varepsilon)\right]\mathrm{tg}\,(\pi\varepsilon)\,.$$

Таким образом, доказано, что любой элемент $u\,(x)$ ядра $I_{ab}^{\alpha}$ при $\alpha>0$ представим в виде (35).

Из (7) и (11) вытекает, что любое решение $u\,(x)$ уравнения Карлемана $I_{ab}^{\beta}u\,(x)=D_{ax}^{-m-1}v$, $\beta=\alpha-m-1$, представимое в виде (3), является решением уравнения Абеля

$$2D_{ax}^{\beta}u=D_{ax}^{-m-1}v+\frac{1}{\pi}\mathrm{tg}\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)\int\limits_a^b\left[\frac{(t-a)\,(b-t)}{(x-a)\,(b-x)}\right]^{\beta/2}\frac{D_{at}^{-m-1}v}{t-x}dt.\qquad(36)$$

Подействовав на обе части равенства (36) оператором $D_{at}^{-\beta}$, получим

$$2u\,(x)=D_{ax}^{-\alpha}v+\frac{1}{\pi}\mathrm{tg}\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)\times$$

$$\times\,D_{ax}^{m+1-\alpha}\int\limits_a^b\left[\frac{(\tau-a)\,(b-\tau)}{(t-a)\,(b-t)}\right]^{(\alpha-m-1)/2}\frac{D_{a\tau}^{-m-1}v\,d\tau}{\tau-t}.$$

Оператор $I_{ab}^{\alpha}$ является линейным, поэтому любое решение уравнения $I_{ab}^{\alpha}u\,(x)=v\,(x)$ с правой частью $v\,(x)$, удовлетворяющей условию (11), в классе функций $u\,(x)$, представимых в виде (3) и таких, что $I_{ab}^{\alpha-[\alpha]-1}u\,(x)\in C^{[\alpha]+1}\,]a,\,b[$, определяется формулой

$$u\,(x)=[(x-a)\,(b-x)]^{(\alpha-[\alpha]-1)/2}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{[\alpha]}B_kF\left(-k,\,1,\,\frac{[\alpha]+3-\alpha}{2}-k;\frac{x-a}{b-a}\right)+\frac{1}{2}D_{ax}^{-\alpha}v+$$

$$+\,\frac{1}{2\pi}\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha-[\alpha]-1}{2}\pi\right)D_{ax}^{[\alpha]+1-\alpha}\int\limits_a^b\left[\frac{(\tau-a)(b-\tau)}{(t-a)(b-t)}\right]^{(\alpha-[\alpha]-1)/2}\frac{D_{a\tau}^{-[\alpha]-1}v\,d\tau}{\tau-t}.$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96-01-9-00508).*

**Литература**

1. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М., 1995.
2. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 1. С. 101–109.
3. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., 1977.
4. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 2. С. 313–324.
5. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1971.
6. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, 1987.
7. Нахушев А. М. Некоторые краевые задачи для уравнения смешанного типа с двумя линиями параболического вырождения: Дис. ... к.ф.-м.н. Новосибирск, 1966.
8. Волкодавов В. Ф., Лернер М. Е., Николаев Н. Я., Киселев В. А. Таблицы некоторых функций Римана, интегралов и рядов. Куйбышев, 1982.
9. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М.: Физматлит, 1953.
10. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М., 1957.

Поступила в редакцию
25 августа 1998 г.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и автоматизации
КБНЦ РАН

# Еще раз об одном свойстве оператора Римана–Лиувилля

Рассмотрим оператор Римана–Лиувилля $D_{ax}^{\alpha}$, порядка $|\alpha| < 1$, область определения $D_{\alpha}[a,b]$ которого принадлежит пространству $L[a,b]$ функций $\varphi(x)$ интегрируемых по Риману на сегменте $[a,b]$:

$$D_{ax}^{\alpha}\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_a^{x-\varepsilon} (x-t)^{-\alpha-1}\varphi(t)dt \quad \text{при} \ \alpha < 0,$$

$$D_{ax}^{\alpha}\varphi(x) = \frac{\partial}{\partial x} D_{ax}^{\alpha-1}\varphi(t) \quad \text{при} \ \alpha > 0,$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера.

Выражение $(\varphi,\psi)_{[a,b]}$ отождествим со скалярным произведением в пространстве $L^2[a,b]$:

$$(\varphi,\psi)_{[a,b]} = \int\limits_a^b \varphi(x)\psi(x)dx.$$

Справедливо следующее утверждение.

Нахушев А. М. Доклады АМАН. 2001, **5**:2, 42–43.

**Теорема.** *Пусть функция* $\psi = \psi(x)$ *является неотрицательной, невозрастающей и непрерывной на сегменте* $[a, b]$. *Тогда для любой функции* $\varphi \in D_\alpha[a, b]$ *имеет место неравенство*

$$(\varphi, \psi\, D^\alpha_{ax}\varphi)_{[a,b]} \geqslant 0 \tag{1}$$

*и* $(\varphi, \psi\, D^\alpha_{ax}\varphi)_{[a,b]} = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\varphi = 0$.

Действительно, из второй формулы среднего значения интеграла Римана [1, с. 385] следует, что если функция $f = f(x)$ интегрируема, а функция $g = g(x)$ не возрастает, непрерывна и неотрицательна на сегменте $[a, b]$, то найдется число $\xi$ между $a$ и $b$ такое, что

$$(f, g)_{[a,b]} = g(a) D^{-1}_{a\xi} f(t). \tag{2}$$

В формуле (2) положим $f(x) = \varphi(x) D^\alpha_{ax}\varphi(t)$, $g(x) = \psi(x)$. В результате получим

$$(\varphi\, D^\alpha_{ax}\varphi, \psi)_{[a,b]} = \psi(a)(\varphi,\, D^\alpha_{ax}\varphi)_{[a,\xi]}. \tag{3}$$

В работе [2] (см. также [3, с. 55]) обращено внимание на то, что для любого числа $\alpha \in ]-1, 0]$ и $c \in ]a, b]$ оператор $D^\alpha_{ax}$ является положительно определенным:

$$(\varphi\, D^\alpha_{ax}\varphi)_{[a,c]} \geqslant 0, \quad (\varphi\, D^\alpha_{ax}\varphi)_{[a,c]} = 0 \iff \varphi(x) = 0 \ \ \forall\, x \in [a, c]. \tag{4}$$

Предложение (4) остается истинным и для любого $\alpha \in [0, 1[$.

В самом деле, по предположению функция

$$\Phi(x) = D^\alpha_{ax}\varphi(t), \quad 0 < \alpha < 1, \quad a \leqslant x \leqslant c, \tag{5}$$

является ограниченной. Стало быть, к обоим частям равенства (5) можно применить оператор $D^{-\alpha}_{ax}$:

$$D^{-\alpha}_{ax}\Phi(x) = D^{-\alpha}_{ax} D^\alpha_{at}\varphi(\xi) = \varphi(x) - (x - a)^{\alpha-1} D^{\alpha-1}_{aa}\varphi / \Gamma(\alpha),$$

где $D^{\alpha-1}_{aa}\varphi = \lim\limits_{x\to a} D^{\alpha-1}_{aa}\varphi(t)$. Из ограниченности функции $\varphi(x)$ на сегменте $[a, c]$ вытекает, что $D^{\alpha-1}_{aa}\varphi = 0$. Поэтому замена (5) является обратимой и

$$\varphi(x) = D^{-\alpha}_{ax}\Phi(t), \quad 0 < \alpha < 1. \tag{6}$$

Далее в силу (5) и (6) для любой функции $\varphi(x) \in D_\alpha[a, c]$, $0 < \alpha < 1$, можно записать:

$$(\varphi, D^\alpha_{ax}\varphi)_{[a,c]} = (D^{-\alpha}_{ax}\Phi, \Phi)_{[a,c]} \geqslant 0;$$

$$(\Phi, D^{-\alpha}_{ax}\Phi)_{[a,c]} = 0 \iff \Phi = 0 \quad \forall\, x \in [a, c]; \quad \Phi = 0 \iff \varphi = 0. \tag{7}$$

Поскольку $\psi(a) > 0$, то из (3) и (4) получаем (1).

Пользуясь истинными предложениями (3) и (7) легко доказать и вторую часть теоремы.

Доказанная теорема играет важную роль при математическом моделировании широкого класса процессов и явлений в средах с фрактальной структурой, в основе которых лежат уравнения в частных производных смешанного типа [3].

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 00-01-00311а).*

**Литература**

1. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. М.: Наука, 1979. 720 с.
2. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10, № 1. С. 100–111.
3. Нахушев А. М. Элементы дробного исчисления и их применение. Нальчик: КБНЦ РАН, 2000. 299 с.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН

Научное издание

# ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ СО СМЕЩЕНИЕМ, ТЕОРИИ НАГРУЖЕННЫХ УРАВНЕНИЙ И ДРОБНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Формат 70×100 1/16
Гарнитура Times
Усл.-п. л. 29,74. Уч.-изд. л. 31,65
Тираж 300 экз.

Издатель – Российская академия наук

Компьютерная верстка: Ф. Т. Богатырёва

Публикуется в авторской редакции

Печать – УНИД РАН

Отпечатано в экспериментальной цифровой типографии РАН

Издается по решению Научно-издательского совета
Российской академии наук (НИСО РАН) от 11.04.2024
и распространяется бесплатно