

Адыгская (Черкесская)
Международная академия наук

Институт прикладной математики
и автоматизации КБНЦ РАН

ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ А. М. НАХУШЕВА

Москва – 2023

УДК 517
ББК 22

Научные редакторы:

Т. Ш. Кальменов, А. В. Псху, А. П. Солдатов

Составители:

А. Х. Аттаев, М. О. Мамчуев, С. Х. Геккиева

Избранные труды А. М. Нахушева / Т. Ш. Кальменов, А. В. Псху, А. П. Солдатов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2023. – 711 с. – ISBN 978-5-9221-1981-8.

Издание содержит избранные труды выдающегося советского и российского математика Адама Маремовича Нахушева, относящиеся к основным направлениям его творческой деятельности: теории краевых задач со смещением, теории нагруженных уравнений, теории дифференциальных уравнений основных и смешанных типов, вопросам дробного исчисления и математическому моделированию.

Результаты работ, включенных в данное издание, актуальны и востребованы в современных научных исследованиях.

Книга будет полезна научным работникам, аспирантам и студентам.

Оригинал-макет издания подготовлен в Институте прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН.

В книге сохранены все авторские выделения текста.

Книга издана в рамках реализации проекта президента Адыгской (Черкесской) международной академии наук Арсена Башировича Каноква «Адыги-2040. Вектор развития».

© ФИЗМАТЛИТ, 2023

© Институт прикладной математики и автоматизации – филиал Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный научный центр «Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук», 2023

Содержание

<i>Вступительное слово</i>	8
<i>О жизни и научной деятельности Адама Маремовича Нахушева</i>	9
1966	
Об одной задаче смешанного типа для уравнения $y(y-1)u_{xx} + u_{yy} = 0$	15
Краевая задача для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения	20
1967	
Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа с двумя линиями параболического вырождения	24
О некоторых задачах для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения	40
1968	
Об одном трехмерном аналоге задачи Геллерстедта	75
Об одной краевой задаче для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа	88
1969	
О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа	92
Новая краевая задача для одного вырождающегося гиперболического уравнения	111
1970	
Критерий единственности задачи Дирихле для уравнения смешанного типа в цилиндрической области	116
Методика постановки корректных задач для линейных гиперболических уравнений второго порядка на плоскости	118
Об одной задаче А. В. Бицадзе	124
Многомерный аналог задачи Дарбу для гиперболических уравнений . . .	128
О задаче Дарбу для гиперболических уравнений	133
1971	
О задаче Дарбу для вырождающихся гиперболических уравнений . . .	138
О задаче А. В. Бицадзе для уравнения смешанного типа в многомерных областях	147
1972	
К априорным оценкам для задач Трикоми и Дарбу	155
К теории вырождающихся гиперболических уравнений в многомерных областях	168
О корректной постановке задач для уравнений смешанного типа в многомерных областях	172

1973

- О правильной постановке краевых задач для параболических уравнений со знакопеременной характеристической формой 176

1974

- Обратные задачи для вырождающихся уравнений и интегральные уравнения Вольтерра третьего рода 184
- К теории уравнений смешанного типа в многомерных областях 198

1975

- Об одной смешанной задаче для вырождающихся эллиптических уравнений 206
- К теории краевых задач для вырождающихся гиперболических уравнений . 212

1976

- О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка 215
- Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения теплопроводности . . 222

1977

- Краевые задачи для нагруженных параболических уравнений и их приложения к прогнозу уровня грунтовых вод 225
- Задача Штурма–Лиувилля для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с дробными производными в младших членах 231
- К теории краевых задач для уравнения смешанного гиперболо-параболического типа 237

1978

- К теории линейных краевых задач для уравнения второго порядка смешанного гиперболо-параболического типа 242
- Нелокальная задача и задача Гурса для нагруженного уравнения гиперболического типа и их приложения к прогнозу почвенной влаги 250

1979

- Краевые задачи для нагруженных интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа и некоторые их приложения к прогнозу почвенной влаги 255

1980

- Критерий единственности решения задачи Дарбу для одного вырождающегося гиперболического уравнения влагопереноса 267

1981

- О справедливости одной априорной оценки 274

1982

- Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод 277

1983

- Нагруженные уравнения и их приложения 289

1985

- О нелокальных краевых задачах со смещением и их связи с нагруженными уравнениями 302

1988

- К теории дробного исчисления 315
- О законе композиции операторов дробного интегро-дифференцирования с различными началами 329
- О непрерывных дифференциальных уравнениях и их разностных аналогах . 334

1992

- Эффект локализации особенности градиента решения задачи Дарбу для уравнения Геллерстедта и критерий его непрерывности 339
- Критерий непрерывности градиента решения задачи Дарбу для уравнения Геллерстедта 344

1994

- Об уравнениях состояния непрерывных одномерных систем и их аналогах в дробном исчислении 365

1995

- О континуальных аналогах реологических уравнений состояния и логистическом законе изменения вязкоупругих свойств полимера 371

1996

- Об одном классе дифференциальных уравнений состояния дробного порядка в сплошных средах с памятью 377

1997

- О положительности интегральных операторов, весьма важных в дробном исчислении и в теории уравнений смешанного типа 381

1998

- О положительности операторов непрерывного и дискретного дифференцирования и интегрирования весьма важных в дробном исчислении и в теории уравнений смешанного типа 385
- Об одной формуле обращения интегрального уравнения Абеля 399

1999

- К вопросу информационно-математического моделирования межэтнических конфликтов и этногенеза 401

2000

- Дробный интеграл Мегуми Сайго и его связь с законом взвешенной композиции операторов дробного интегрирования в смысле Римана-Лиувилля . . 408
- Видоизмененная задача Коши для оператора дробного дифференцирования с фиксированными началом и концом 413
- Структурные и качественные свойства оператора, обратного оператору дробного интегро-дифференцирования с фиксированными началом и концом . . 423
- Математические модели вязкоупругого тела 436

2001

Еще раз об одном свойстве оператора Римана–Лиувилля	442
Дробное исчисление как математическая основа уравнений состояния фрактальных сред	444

2002

Об априорных оценках для уравнения с обобщенным оператором Трикоми в главной части	450
О некоторых эффективных параметрах открытых временных систем регио- нального управления	457

2003

Прямая задача теории сопла Лаваля	462

2004

Fractional calculus – a fundamental basis for boundary value problems with shift and mathematical physics of fractals	469
О некоторых базовых элементах математических моделей системы монито- ринга экологии горной и предгорной территорий	476
О локальных историометрических циклах Кавказской войны	493

2005

Селевая активность в сопоставлении с вариациями солнечной активности . .	499
Некоторые факты из теории краевых задач со смещением	506

2006

О задаче Дирихле для уравнений смешанного типа	542

2007

Вклад академика И. Н. Векуа в развитие теории уравнений смешанного типа	555
К проблеме математического моделирования региональных социально- экономических систем	564

2008

О базовых уравнениях математических моделей процессов переноса в систе- мах с фрактальной структурой	579
К теории нагруженных уравнений	589

2009

О некоторых модельных уравнениях движения почвенной влаги	607
On some synergetic input-output systems and their state equations	615

2010

Нагруженные уравнения математической экономики	621

2011

Задача Дирихле для нагруженного уравнения смешанного типа в цилиндри- ческой области	628

2012

Об одном классе нагруженных уравнений в частных производных дробного порядка 637

О некоторых математических моделях критических событий фрактальной структуры, происходящих в режиме с обострением 645

2013

Об одной задаче начально-граничного управления для дифференциального уравнения смешанного типа 650

On some classes of loaded equations and their applications 660

2014

Some generalizations of Bouguer–Lambert–Beer law, and algorithms for calculating the distribution of the concentration of the absorbing molecules on the track of the laser radiation 665

О внутреннекраевых условиях со смещением, возникающих при дискретизации краевых задач для уравнений в частных производных второго порядка 673

К теории краевых задач для нагруженных интегральных уравнений . . . 679

2016

Разностный метод решения задачи Дирихле для уравнения эллиптического типа 684

Библиография научных трудов А. М. Нахушева 686

Вступительное слово

Дорогие друзья!

Представляем Вашему вниманию избранные труды выдающегося математика Адама Маремовича Нахушева.

Адам Нахушев – ученый с мировым именем, внесший весомый вклад в развитие науки и образования России, чьи работы пополнили золотой фонд математики. Его идеи и мысли оказали значительное влияние на развитие целых научных направлений и способствовали появлению новых.

Адам Маремович был превосходным наставником, создавшим свою научную школу. Его многочисленные ученики и последователи сейчас активно работают во многих регионах России, в странах ближнего и дальнего зарубежья, продолжая дело своего Учителя.

Талантливый организатор, он поднял высшее математическое образование в родной республике на новый уровень – открыл новые кафедры и лаборатории, его усилиями в Кабардино-Балкарии создан первый на юге России научно-исследовательский математический институт, вошедший в структуру Российской академии наук.

Будучи всецело преданным науке и любящим свой народ, Адам Маремович стал одним из организаторов Адыгской (Черкесской) международной академии наук. Сегодня это признанная во всем мире авторитетная, плодотворно работающая международная научная организация, объединяющая сотни ученых из разных стран.

Михаил Ломоносов признавал за математикой «первенство в человеческом знании» и называл ее «прекраснейшей наукой».

Софья Ковалевская сравнивала математику с поэзией.

Бертран Рассел считал, что «правильный взгляд на математику открывает не только истину, но и безупречную красоту».

Адам Маремович имел счастье видеть красоту математики и обладал уникальным качеством открывать, приумножать и дарить ее людям.

Эта книга – дань памяти великому ученому и достойному сыну адыгского народа.

Арсен Каноков,

*сенатор, представитель исполнительного органа
Кабардино-Балкарской Республики в Совете Федера-
ции Федерального собрания Российской Федерации,
президент Адыгской (Черкесской) международной
академии наук, доктор экономических наук*

О жизни и научной деятельности Адама Маремовича Нахушева

Имя выдающегося советского и российского ученого, специалиста в области прикладной и теоретической математики, доктора физико-математических наук, профессора Адама Маремовича Нахушева широко известно в научном сообществе.

Адам Маремович Нахушев родился 5 декабря 1938 года в селении Заюково Эльбрусского района Кабардино-Балкарской АССР.

Еще в студенческие годы (1955–1961 гг.) А. М. Нахушевым был получен ряд научных результатов, связанных с проблемой интегрирования уравнения Риккати в квадратурах и диофантовыми уравнениями. Результаты исследований были опубликованы в 5 научных работах. На заседаниях семинара выдающегося ученого, доктора технических наук, доктора физико-математических наук, члена-корреспондента Академии артиллерийских наук Феликса Исидоровича Франкля в Кабардино-Балкарском государственном университете Адам Маремович познакомился также с элементами дробного исчисления и его применения, что в дальнейшем нашло отражение в его исследованиях, связанных с газовой динамикой трансзвуковых течений. А. М. Нахушев был убежден, что «факел большой науки в КБГУ зажег Феликс Исидорович Франкль» и встречу с этим замечательным ученым считал большой удачей своей жизни.

Важнейший этап научной деятельности А. М. Нахушева начался в Институте математики Сибирского отделения Академии наук СССР под руководством выдающегося математика, члена-корреспондента Академии наук СССР Андрея Васильевича Бицадзе. Сформулированные им научные направления были развиты А. М. Нахушевым и легли в основу дальнейшей научной деятельности Адама Маремовича и его учеников.

Первые фундаментальные результаты А. М. Нахушева относятся к теории уравнений смешанного типа. В 1966 году Адам Маремович принял участие в работе Международного конгресса математиков в Москве, на котором выступил с докладом «Краевые задачи для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения». В этом же году успешно защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук.

В 1969 году А. М. Нахушев ввел понятие краевых задач со смещением для основных типов уравнений в частных производных, впоследствии названных в России и за рубежом «задачами Нахушева». Две опубликованные в этом же году работы Адама Маремовича стали основополагающими в теории нелокальных краевых задач. Подход, предложенный

Адамом Маремовичем и легший в основу его докторской диссертации, успешно защищенной в 1971 году, оказался весьма эффективным и дал начало новому направлению в теории уравнений в частных производных – теории краевых задач со смещением.

Другой цикл работ А. М. Нахушева посвящен задачам Дарбу и Трикоми для гиперболических уравнений с нехарактеристическим вырождением и уравнений смешанного эллипτικο-гиперболического типа. Здесь им получены весьма тонкие и оригинальные результаты.

Значителен вклад Адама Маремовича в теорию прямых и обратных краевых задач для вырождающихся уравнений, уравнений смешанного гиперболо-параболического типа и параболических уравнений со знакопеременной характеристической формой, имеющих важное прикладное значение.

После доклада А. М. Нахушева на I Республиканской конференции математиков по дифференциальным уравнениям в г. Ашхабаде в 1972 году начались интенсивные исследования краевых задач для параболических уравнений с меняющимся направлением времени.

Существенный вклад А. М. Нахушев внес также в развитие теории краевых задач для гиперболических и смешанных уравнений второго порядка в многомерных областях. Ему принадлежат: метод получения априорных оценок для многомерного аналога задач Дарбу и Трикоми, критерий единственности решения задачи Дирихле для уравнений второго порядка смешанного типа в многомерных цилиндрических областях, доказательство единственности и существования решения трехмерного аналога задачи Геллерстедта. А. М. Нахушевым (совместно с А. В. Бицадзе) сформулирован многомерный аналог теоремы о среднем значении для одномерного волнового уравнения.

В 1976 году в журнале «Дифференциальные уравнения» была опубликована статья, в которой Адам Маремович впервые дал общее определение нагруженных уравнений. Именно эта публикация стала отправной точкой для многочисленных исследований в этом направлении. Понятия нагруженных уравнений возникали в разное время в различных разделах математики, развиваясь и существуя независимо друг от друга. Адаму Маремовичу удалось увидеть и понять их общую природу, взаимосвязь и создать единую теорию таких уравнений. Важность исследования нагруженных уравнений связана с их многочисленными приложениями практически во всех областях математики и естествознания.

Особое место в научном творчестве Адама Маремовича Нахушева занимают результаты, относящиеся к теории дробного исчисления, вопросам его применения в теории дифференциальных уравнений целого и дробного порядков, при моделировании различных физических

и социально-исторических процессов и явлений, а также в вопросах математической экономики.

Дальнейшие исследования в области уравнений смешанного типа, вырождающихся и нагруженных уравнений привели к установлению А. М. Нахушевым ряда качественно новых свойств для таких уравнений и их решений, которые были доказаны и сформулированы на языке дробного интегро-дифференцирования. Все это, в свою очередь, дало толчок развитию дробного исчисления как самостоятельно заслуживающего внимания раздела современного анализа. Были обнаружены новые свойства операторов дробного интегрирования и дифференцирования, которые заняли важное место в дробном исчислении и теории уравнений дробного порядка и оказали существенное влияние на их дальнейшее развитие.

Как отмечал сам Адам Маремович, «в настоящее время дробное (интегральное и дифференциальное) исчисление в теории фракталов и систем с памятью приобретает такое же важное значение, как и классический анализ в физике (механике) сплошных сред». Многочисленные исследования последних лет красноречиво подтверждают это утверждение.

А. М. Нахушев большое внимание уделял задачам прикладного характера, в особенности имеющим значение для предотвращения последствий чрезвычайных ситуаций природного характера. В ряде работ (2004–2008 гг.) им была обоснована гипотеза о сильной корреляции между региональным проявлением функции солнечной активности и параметрами потенциальных источников чрезвычайных ситуаций природного характера, а также разработаны принципиально новые системные модели, проблемно-ориентированные на прогнозирование стока горных рек, селевых, лавинных и паводковых явлений, основанные на концепции фрактала и теории движения взвешенных наносов, неравномерного бурного течения на быстротоке, предложенных в работах Ф. И. Франкля.

Предложенные А. М. Нахушевым математические модели склоновых процессов, а также исследование влияния пятнообразовательной деятельности Солнца на интенсивность чрезвычайных ситуаций природного характера, происходящих на территории Кабардино-Балкарской Республики, вызвали большой интерес и получили дальнейшее развитие в работах его учеников.

Нельзя не отметить вклад А. М. Нахушева в развитие направления, касающегося исследования социально-исторических и этнических процессов. Идея проверить выводы А. Л. Чижевского на материале длившейся сто лет Кавказской войны возникла при подготовке выступления на открытии конференции «Культурно-историческая общность

народов Северного Кавказа и проблемы гуманизации межнациональных отношений на современном этапе», которая проводилась в Карачаево-Черкесской Республике под эгидой ЮНЕСКО в 1997 году. Было введено понятие «локальные историометрические циклы» и отмечено, что в рамки тех же циклов укладываются и заметные события в культурной жизни, масштабные эпидемии и природные катаклизмы.

На протяжении всей жизни активная научная деятельность Адама Маремовича успешно совмещалась с педагогической и организационной. В 1964 году в Новосибирском государственном университете началась его научно-образовательная деятельность. С 1971 по 1973 год он являлся научным руководителем группы и семинара по уравнениям смешанного типа и соруководителем семинара отдела общей теории функций по современному анализу Института математики Сибирского отделения Академии наук СССР.

В период работы в Институте математики СО АН СССР Адам Маремович получил 6 поощрений и наград, а в 1971 году за успехи, достигнутые в научно-исследовательской работе, награжден юбилейной медалью «За доблестный труд в ознаменование 100-летия со дня рождения В. И. Ленина».

Вернувшись в конце 1973 года в Кабардино-Балкарию, Адам Маремович продолжил активную научно-организационную деятельность. По его инициативе в Кабардино-Балкарском государственном университете были созданы три кафедры (кафедра теории функций и функционального анализа, кафедра вычислительной математики и кафедра информатики и математического обеспечения автоматизированных систем). С 1977 по 1990 год Адам Маремович руководил созданным по его инициативе НИИ прикладной математики и механики КБГУ. С 1987 по 1991 год был главным конструктором программного продукта для технических средств морской спутниковой связи ОКР «Волна-2».

В 1990 году А. М. Нахушевым был создан Центр математики, информатики, вычислительной техники и связи при Международном фонде развития малых народов и этнических групп.

В сложные 90-е годы XX века активная научная и гражданская позиция Адама Маремовича смогла убедить многих, что в Кабардино-Балкарии создана и работает научная школа и здесь есть все условия для создания и успешного функционирования научно-исследовательского математического института. Благодаря общим усилиям и поддержке руководства Кабардино-Балкарии, а также таких выдающихся ученых, как А. В. Бицадзе, А. А. Самарский, М. Ч. Залиханов, А. К. Микитаев, 26 августа 1991 года Госкомитетом РСФСР по делам науки и высшей школы было принято решение о создании в Кабардино-Балкарской Рес-

публике Научно-исследовательского института прикладной математики и автоматизации и назначении его директором Нахушева Адама Маремовича. В 1993 году Институт вошел в состав Российской академии наук.

В 1992 году по инициативе А. М. Нахушева организована Адыгская (Черкесская) международная академия наук (АМАН), объединяющая ученых стран ближнего и дальнего зарубежья. В этом же году Адам Маремович был избран действительным членом и президентом АМАН. В 1994 году вышел первый номер журнала «Доклады Адыгской (Черкесской) международной академии наук», организатором и главным редактором которого являлся А. М. Нахушев.

Особое внимание А. М. Нахушев уделял делу подготовки научных кадров. Под руководством А. М. Нахушева были подготовлены специалисты высшей квалификации, доктора и кандидаты наук из многих регионов России, стран ближнего и дальнего зарубежья (включая Москву, регионы Юга России, Сибири и Дальнего Востока, страны Азии и Закавказья, Турцию и др.).

Под руководством А. М. Нахушева было организовано более 50 международных, всесоюзных и всероссийских конференций, симпозиумов и школ для молодых ученых в области дифференциальных уравнений, нелокальных краевых задач и родственных проблем математической биологии, информатики и физики.

Адам Маремович удостоен многих наград и званий. В 1995 году был избран действительным членом Российской академии естественных наук, в 1996 – Петровской академии наук и искусств, в 2001 – почетным академиком Испанской академии наук, технологий и профессионального образования, в 2002 году – почетным членом Академии наук Абхазии.

Его заслуги также высоко оценены государством: А. М. Нахушев дважды являлся лауреатом Государственной премии КБР в области науки и техники (1997, 2002 гг.), был удостоен званий заслуженного деятеля науки Кабардино-Балкарской Республики (1981 г.), Республики Адыгея (1993 г.), Карачаево-Черкесской Республики (1996 г.), в 1997 году ему было присвоено почетное звание «Заслуженный деятель науки Российской Федерации», был награжден орденом Дружбы (2003 г.), орденом Почета (2010 г.), медалями: «За освоение целинных и залежных земель» (1957 г.), «За доблестный труд в ознаменование 100-летия со дня рождения В. И. Ленина» (1971 г.), «За заслуги перед Республикой Адыгея» (1993 г.), «За заслуги в развитии науки Республики Казахстан» (2006 г.).

А. М. Нахушев является автором более 250 научных работ, представляющих собой фундаментальные исследования в области современного анализа, теории дифференциальных уравнений и математического моделирования.

В настоящее время научная школа А. М. Нахушева объединяет сотни ученых, работающих во многих регионах России и за рубежом. Ученники и последователи развивают идеи Адама Маремовича, продолжают научные направления, заложенные в его работах на многие годы вперед.

Настоящее издание содержит избранные труды А. М. Нахушева, относящиеся к основным направлениям его научной деятельности. Представлены результаты, полученные, начиная с 60-х годов прошлого века, в теории краевых задач со смещением, нагруженных уравнений, задач в многомерных областях, уравнений смешанного типа, дробного исчисления и математического моделирования.

Оригинал-макет издания подготовлен в Институте прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН. В составлении оригинал-макета приняли участие сотрудники института: Ф. Т. Богатырева, Л. Х. Гадзова, Р. А. Киржинов, Ф. М. Лосанова, М. Г. Мажгихова, Р. Х. Макаова, Ф. Г. Хуштова, Л. М. Энеева, Б. И. Эфендиев.

Книга издана в рамках реализации проекта президента Адыгской (Черкесской) международной академии наук Арсена Башировича Канокова «Адыги-2040. Вектор развития».

Об одной задаче смешанного типа для уравнения

$$y(y-1)u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Уравнение

$$Lu \equiv k(y)u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (1)$$

где $k(y) = y^2 - y$, является уравнением смешанного типа; оно эллиплично при $y < 0$ и $y > 1$, гиперболично при $0 < y < 1$, а вдоль прямых $y = 0$, $y = 1$ вырождается параболически. Семейства кривых

$$x \pm 1/4k'\sqrt{-k} \pm 1/8 \arcsin k' = \text{const}$$

являются действительными характеристиками уравнения (1), причем прямые $y = 0$, $y = 1$ представляют собой геометрическое место точек возврата этого семейства.

1. Введем следующие обозначения:

$$\omega(y) = 1/4k'\sqrt{-k} + 1/8 \arcsin k', \quad \tilde{y}(y) = -(3/2a)^{2/3}(\omega \mp \pi/16)^{2/3},$$

$$0 \leq y \leq 1, \quad (2)$$

$$\omega(y) = 1/4k'\sqrt{k} - 1/8 \ln |k' + 2\sqrt{k}|, \quad \tilde{y}(y) = (3\omega/2a)^{2/3}, \quad y \leq 0, y \geq 1,$$

$$\xi(x, y) = (x + \omega - \pi/16)/a, \quad \eta(x, y) = (x - \omega + \pi/16)/a,$$

$$a \equiv \text{const}, \quad \tilde{x} = x/a; \quad (3)$$

$$\pi/8 < a < \pi/4, \quad b(\tilde{y}) = [\tilde{y}'(y)]^{-2}\tilde{y}''(y), \quad \tilde{\omega}(y) = \exp \left(\frac{1}{2} \int_0^{\tilde{y}} b(s) ds \right).$$

На плоскости переменных x, y рассмотрим точки

$$A_1(0, 0), \quad A_0(\pi/8, 0), \quad A_2(a, 0), \quad B(a - \pi/16, 1/2), \quad A_3(a, 1),$$

$$A_4(0, 1), \quad A(a - \pi/8, 1), \quad B_1(\pi/16, 1/2).$$

Пусть D^* – конечная односвязная область, ограниченная: 1) дугой $\sigma_0: (x - a/2)^2 + \omega^2 = a^2/4, y \leq 0$; 2) дугой $\sigma_1: (x - a/2)^2 + \omega^2 = a^2/4, y \geq 1$; 3) характеристиками $A_1B_1: \eta = \pi/8a, B_1A_4: \xi = 0, A_2B: \xi = 1 - \pi/8a, BA_3: \eta = 1$ уравнения (1). Пусть далее $B_0(D)$ – точка пересечения характеристик $A_0B_0: \eta = \pi/4a$ и $AB_0: \xi = 1 - \pi/8a$ ($AD: \eta = 1 - \pi/8a$ и B_1A_4); D – подобласть D^* , лежащая выше кривой DAB ; D^+ – эллиптическая часть области D ; $\Delta(\Delta^*)$ – гиперболическая часть D , расположенная выше кривой A_4DA (ABA_3); D^- – область характеристического четырехугольника AB_0A_0D .

Следуя А. В. Бицадзе [1], *правильным* в области D^* решением уравнения (1) назовем решение $u(x, y)$, обладающее следующими свойствами: 1) u непрерывно всюду в замкнутой области $\bar{D}^*$, за исключением точек A, A_0, A_2 и, быть может, точек A_1, A_3, A_4 где оно обращается в ∞ порядка $\alpha < 1/6$; 2) $u_y(u_x)$ – непрерывна всюду в замкнутой области $\bar{D}^*$, за исключением, быть может, точек $A, A_i, i = 0, \dots, 4$ и характеристик, выходящих из этих точек, где она обращается в ∞ порядка $< 5/6 (< 7/6)$ и $< 1 (< 1)$ соответственно; 3) u дважды непрерывно дифференцируемо всюду в D^* , за исключением, быть может, границы области D^- .

Задача 1. Найти *правильное* в области D^* решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям:

$$(\tilde{\omega}u)_{\sigma_0} = \varphi_0(\tilde{x}), \quad (\tilde{\omega}u)_{\sigma_1} = \varphi_1(\tilde{x}), \quad 0 < \tilde{x} < 1; \quad (4)$$

$$(\tilde{\omega}u)_{AB_0} = \psi_1(\eta), \quad x_0 < \eta \leq \pi/4a;$$

$$(\tilde{\omega}u)_{AD} = \psi_2(\xi), \quad 0 \leq \xi < x_0 = 1 - \pi/8a,$$

где $\tilde{\omega}$ задается формулами (2), (3) причем в (2) перед $\pi/16$ берется знак минус, а φ_i, ψ_i представимы в виде

$$\varphi_0(\tilde{x}) = \alpha_0(\tilde{x})\tilde{x}^{-\varkappa_0}(1 - \tilde{x})^{-\alpha/2}, \quad \varphi_1(\tilde{x}) = \alpha_1(\tilde{x})(\tilde{x} - \tilde{x}^2)^{-\varkappa_1},$$

$$\psi_1(\eta) = \beta_1(\eta)(\eta - x_0)^{-\alpha}(\pi/4a - \eta)^{1/6-\alpha}, \quad \psi_2(\xi) = \beta_2(\xi)(x_0 - \xi)^{-\alpha},$$

где $\alpha_i \in C^2$ ($0 \leq \tilde{x} \leq 1$), $\alpha_0(1) \neq 0$; $\beta_1 \in C^4$ ($x_0 \leq \eta \leq \pi/4a$), $\beta_i(x_0) \neq 0$, $\beta_1(\pi/4a) \neq 0$, $\beta_2 \in C^4$ ($0 \leq \xi \leq x_0$), $1/12 > \varkappa_i \equiv \text{const}$.

2. Единственность решения задачи 1 непосредственно вытекает из единственности решения задачи Гурса для уравнения (1) в области D^- с данными на характеристиках AB_0, AD и из следующих двух лемм.

Лемма 1. Пусть $u(x, y)$ – *правильное* в области Δ (Δ^*) решение уравнения (1), обращающееся в нуль на AD (AB). Тогда

$$\int_0^{x_1} u(x, 1)u_y(x, 1)dx \geq 0 \quad \left(\int_{x_1}^a u(x, 1)u_y(x, 1)dx \geq 0 \right), \quad x_1 = a - \pi/8.$$

Лемма 2. Пусть $u(x, y)$ – *правильное* в области D^+ решение уравнения (1), обращающееся в нуль на σ_1 . Тогда

$$\int_0^a u(x, 1)u_y(x, 1)dx \leq 0.$$

Справедливость леммы 1 устанавливается методом Ф. И. Франкля [2]. Лемма 2 доказывается так же, как и в случае уравнения Трикоми [2].

3. Доказательство существования решения.

Лемма 3. Пусть:

- 1) $u \in C(\overline{D}^+)$; 2) $u \in C^1(\overline{D}^+ - A_3 - A_4)$;
- 3) $u \in C^2(D^+)$, $L(u) \equiv 0$ в D^+ ; 4) $(u)_{\sigma_1} = 0$, $u_y(x, 1) + 1/5 u(x, 1) = 0$ при $0 < x < a$. Тогда $u \equiv 0$ в D^+ .

Лемма 4. Пусть u удовлетворяет условиям леммы 1 и

$$u_y(x, 1) + \frac{1}{5}u(x, 1) = 0$$

при $0 < x < x_1$. Тогда $u \equiv 0$ в $\overline{D}$.

Лемма 3 просто следует из известного принципа экстремума Заремба–Жиро [3, 4], а лемма 4 – следствие леммы 1.

В уравнении (1) перейдем к переменным Франкля [5] $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ и к новой функции $v = \tilde{\omega}u$. Тогда v будет удовлетворять уравнению

$$\tilde{y}v_{\tilde{x}\tilde{x}} + v_{\tilde{y}\tilde{y}} + c(\tilde{y})v = 0, \quad (5)$$

где $c(\tilde{y}) = 1/2(b_{\tilde{y}} + 1/2b^2)$, а область D (D^+ , Δ , Δ^*) перейдет в область $\tilde{D}$ ($\tilde{D}^+$, $\tilde{\Delta}$, $\tilde{\Delta}^*$) ограниченную нормальным контуром

$$\tilde{\sigma}_1: (\tilde{x} - 1/2)^2 + 4/9\tilde{y}^3 = 1/4,$$

и характеристиками $\tilde{A}_4\tilde{D}$, $\tilde{D}\tilde{A}$, $\tilde{A}\tilde{B}$, $\tilde{B}\tilde{A}_3$ уравнения (1).

Без труда можно показать, что

$$\tilde{y} = (y - 1)a^{-2/3}F^{2/3}(-1/2, 3/2, 5/2, 1 - y)$$

в $\overline{D}$, следовательно, $c(\tilde{y})$ при $\tilde{y} > -(3\pi/16a)^{2/3}$ ($y > 0$) в силу (3) допускает производные любого порядка, причем $c(0) > 0$.

Задача 2. Найти правильное в области $\tilde{D}^+$ решение уравнения (5), удовлетворяющее условиям: $(v)_{\tilde{\sigma}_1} = \varphi_1(\tilde{x})$ при $0 < \tilde{x} < 1$, $(v_{\tilde{y}})_{\tilde{y}=0} = \nu(\tilde{x})$ при $0 < \tilde{x} < x_0$, $x_0 < \tilde{x} < 1$.

Задача 3. Найти правильное в области $\tilde{\Delta}$ ($\tilde{\Delta}^*$) решение уравнения (5), удовлетворяющее условиям $(v)_{\tilde{A}\tilde{D}} = \psi_2(\xi)$ при $0 \leq \xi < x_0$; $(v_{\tilde{y}})_{\tilde{y}=0} = \nu(\tilde{x})$ при $0 < \tilde{x} < x_0$ ($v = \psi_1(\eta)$ на $\tilde{A}\tilde{B}$ при $x_0 < \eta \leq 1$; $v_{\tilde{y}} = \nu(\tilde{x})$ при $\tilde{y} = 0$ и $x_0 < \tilde{x} < 1$).

В обеих задачах полагается, что $\nu(\tilde{x}) \in C^1(0 < \tilde{x} < x_0, x_0 < \tilde{x} < 1)$, но может обращаться в ∞ порядка $< 5/6$ при $\tilde{x} = 0$, x_0 , 1 .

В единственности решения задач 2 и 3 убеждается с помощью лемм 3 и 4, а доказательство существования проводится по схеме, предложенной С. Геллерстедтом в работе [6].

Лемма 5. Пусть: 1) существуют решения задачи 1 в области D ; 2) $\tau(x) = (v)_{\tilde{y}=0}$, $\nu(x) = (v_{\tilde{y}})_{\tilde{y}=0}$. Тогда

$$\tau(x) = \gamma \int_0^1 \nu(t) [L(x, t) - |t - x|^{-1/3} +$$

$$+ (t + x - 2tx)^{-1/3}] dt + \Phi(x), \quad 0 < x < 1; \quad (6)$$

$$\tau(x) = \gamma \int_x^{x_0} \nu(t)(t-x)^{-1/3} P((t-x)^{4/3}) dt + \Psi_2(x), \quad 0 < x < x_0; \quad (7)$$

$$\tau(x) = \gamma \int_{x_0}^x \nu(t)(x-t)^{-1/3} P((x-t)^{4/3}) dt + \Psi_1(x), \quad x_0 < x < 1; \quad (8)$$

где: 1) $\gamma \equiv \text{const}$, $L \in C(0 \leq x, t \leq 1)$, $L \in C^2(0 < x, t < 1)$, причем при $x = t$ ($x = t = 0, 1$) первые производные могут обращаться в ∞ как $\ln|x-t|$ ($(t+x-2tx)^{-1/3}$); 2) $\Phi \in C^3(0 < x < 1)$ и при $x = 0, 1$ обращается в ∞ порядка $2\kappa_1$; 3) $P((x-t)^{4/3})$ допускает производные любого порядка при $x \neq t$, причем $P(0) = 1$ и первые производные при $x = t$ обращаются в нуль порядка не ниже $1/3$; 4) $\Psi_2 \in C^3(0 \leq x < x_0)$, $\Psi_1 \in C^3(x_0 < x \leq 1)$, а при $x = x_0$ Ψ_i обращается в ∞ порядка α .

Лемма 5 непосредственно следует из конструктивных свойств решений задач 2 и 3.

Из (6), (7) и (8) после ряда преобразований, вполне аналогичных преобразованиям, применяемым в случае задачи Трикоми, для определения $\nu(x)$ получим сингулярное интегральное уравнение

$$\begin{aligned} \nu(x) = & \lambda \int_0^{x_0} \nu(t) \left[\left(\frac{t-x_0}{x-x_0} \right)^{2/3} \frac{1}{t-x} + \left(\frac{t+x_0-2tx_0}{x-x_0} \right)^{2/3} \frac{1}{t+x-2tx} \right] dt - \\ & - \lambda \int_{x_0}^1 \nu(t) \left[\left(\frac{t-x_0}{x-x_0} \right)^{2/3} \frac{1}{t-x} - \left(\frac{t+x_0-2tx_0}{x-x_0} \right)^{2/3} \frac{1}{t+x-2tx} \right] dt + \\ & + \lambda \int_0^1 \nu(t) k(x, t) dt + h(x), \quad \lambda = \frac{1}{\pi\sqrt{3}}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $h(x) \in C^2(0 < x < x_0, x_0 < x < 1)$; $h(x)$ при $x = x_0$ обращается в ∞ порядка $\alpha + 2/3$ и в ∞ такого же порядка в точках $x = 0, x = 1$, если $2\kappa_1 = \alpha$; ядро $k(x, t)$ обладает следующими свойствами: 1) оно регулярно при $0 < x, t < 1$ и $x \neq t$, при $x = t$ первые производные могут обращаться в ∞ порядка $\leq \varepsilon + 2/3$; 2) при $0 < x, t < 1$ и $x \neq x_0$ удовлетворяет неравенству

$$|k(x, t)| \leq M_1(x-x_0)^{-2/3} [|L(x_0, t)| + |x-x_0|^{1-\varepsilon} |\ln(t+x-2tx)|] + M_2,$$

где $0 < M_i \equiv \text{const}$, ε — сколь угодно малое положительное число.

Заменой переменного интегрирования $t = (s + 1)/2$ уравнение (9) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}(y) = & \lambda \int_{-1}^{y_0} \tilde{\nu}(s) \left[\left(\frac{s - y_0}{y - y_0} \right)^{2/3} \frac{1}{s - y} + \left(\frac{1 - sy_0}{y - y_0} \right)^{2/3} \frac{1}{1 - sy} \right] ds - \\ & - \lambda \int_{y_0}^1 \tilde{\nu}(s) \left[\left(\frac{s - y_0}{y - y_0} \right)^{2/3} \frac{1}{s - y} - \left(\frac{1 - sy_0}{y - y_0} \right)^{2/3} \frac{1}{1 - sy} \right] ds + \\ & + \lambda \int_{-1}^1 \tilde{\nu}(s) \tilde{k}(y, s) ds + \tilde{h}(y), \end{aligned} \quad (10)$$

где $y = 2x - 1$, $y_0 = 2x_0 - 1$, $\tilde{\nu}(y) = \nu((y + 1)/2)$.

Уравнение (10) при $\tilde{k}(y, s) \equiv 0$ изучено Геллерстедтом [7]. Используя его результаты и опираясь на единственность решения задач 1, 2, 3, нетрудно показать, что уравнение (9) безусловно разрешимо (в классе искомых решений) и его решение $\nu(x) \in C^1(0 < x < x_0, x_0 < x < 1)$, причем оно обращается в ∞ порядка $\alpha + 2/3$ при $x = 0, x_0, 1$.

Зная $\nu(x)$ из (9), с помощью задач 2 и 3 докажем существование решения задачи 1 в области D .

Построение решения $u(x, y)$ задачи 1 в области D^- принципиальной трудности не представляет и поэтому мы ограничимся приведением окончательного результата.

Существует решение $u(x, y)$ задачи 1 в области D^- , и оно обладает следующими свойствами: 1) $u \in (\overline{D}^- - A - A_0)$, а в точках A, A_0 обращается в ∞ порядка α ; 2) $\partial u / \partial \xi$ непрерывна всюду в замкнутой области $\overline{D}^-$, за исключением характеристики AB_0 и точки A_0 , где она обращается в ∞ порядка $\alpha + 5/6$ при $y \neq 1$ и в ∞ порядка $\alpha + 1$ в точках A, A_0 ; 3) $\partial u / \partial \eta$ непрерывна всюду в $\overline{D}^-$, за исключением характеристик AD, A_0B_0 , где она обращается в ∞ порядка $\alpha + 5/6$ при $y \neq 1, y \neq 0$ и в ∞ порядка $\alpha + 1$ в точках A, A_0 ; 4) пусть $(\tilde{\omega}u)_{A_0B_1} = \tilde{\psi}_1(\eta)$, $\pi/8a \leq \eta < \pi/4a$; $(\tilde{\omega}u)_{A_0B_0} = \tilde{\psi}_2(\xi)$, $0 < \xi \leq x_0$, а ω задается формулами (2), (3), где перед $\pi/16$ остается знак $+$. Тогда

$$\tilde{\psi}_1^{(i)}(\eta) = b_i(\eta)(\pi/4a - \eta)^{-\alpha-i}, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4;$$

$$\tilde{\psi}_2^{(i)}(\xi) = a_i(\xi)\xi^{-\alpha-i}(x_0 - \xi)^{1/6-\alpha-i}, \quad i = 1, 2, 3, 4;$$

$$\tilde{\psi}_2^{(i)}(\xi) = a_0(\xi)\xi^{-\alpha}, \quad i = 0,$$

где $b_i \in C(\pi/8a \leq \eta \leq \pi/4a)$, $a_i \in C(0 \leq \xi \leq x_0)$, $b_i(\pi/4a) \neq 0$, $a_i(0) \neq 0$, (i) означает порядок производной.

Построение решения $u(x, y)$ задачи 1 в области $D^* - (D + D^-)$ проводится так же, как в области D , исходя из только что перечисленных свойств функции u на характеристиках A_0B_1 и A_0B_0 .

Выражаю глубокую благодарность А. В. Бицадзе, предложившему исследовать краевые задачи для уравнения типа (1) в областях, содержащих обе линии вырождения, и под руководством которого выполнена настоящая работа, и С. А. Терсенову за ценные советы и внимание.

Литература

1. Бицадзе А. В. Доклады АН СССР. 1950. Т. 70, № 4.
2. Франкль Ф. И. Изв. АН СССР, сер. матем. 1945. Т. 9, № 2. С. 121–143.
3. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. Москва, 1959.
4. Agmon S., Nirenberg L., Protter M. Com. Pure and Appl. Math. 1953. Vol. 6. P. 455.
5. Франкль Ф. И. Изв. АН СССР, сер. матем. 1945. Т. 9, № 5. С. 387–422.
6. Gellerstedt S. Sur un problème aux limites pour une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre de type mixte, Thèse, Uppsala, 1935.
7. Gellerstedt S. Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik. 1937. Vol. 23 A, no. 3. Pp. 1–23.

Поступила в редакцию
6 мая 1965 г.

Институт математики
СО АН СССР

Краевая задача для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения

В статье исследуется одна краевая задача для уравнения

$$y(y-1)u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (1)$$

в специальном образом построенной смешанной области, которая содержит внутри себя интервалы линий вырождения $y = 0$, $y = 1$.

Примем следующие обозначения:

$$\omega(y) = \begin{cases} 1/4(2y-1)\sqrt{y-y^2} + 1/8 \arcsin(2y-1), & 0 \leq y \leq 1, \\ 1/4(2y-1)\sqrt{y^2-y} - 1/8 \ln |2y-1 + 2\sqrt{y^2-y}|, & y \leq 0, y \geq 1; \end{cases}$$

$$\tilde{x} = x/a, \quad a = \text{const}, \quad \pi/8 < a < \pi/4; \quad (2)$$

$$\tilde{y}(y) = \begin{cases} -(3/2a)^{2/3}(\omega \mp \pi/16)^{2/3} & \text{при } 0 \leq y \leq 1, \\ (3\omega/2a)^{2/3} & \text{при } y \leq 0, y \geq 1; \end{cases} \quad (3)$$

$$a\xi_1(x, y) = x + \omega - \pi/16, \quad a\eta_1(x, y) = x - \omega + \pi/16;$$

$$b(\tilde{y}) = [\tilde{y}'(y)]^{-2} \tilde{y}''(y), \quad \tilde{\omega}(y) = \exp \left(\frac{1}{2} \int_0^{\tilde{y}} b(s) ds \right). \quad (4)$$

На плоскости переменных x, y рассмотрим точки

$$A_1(0, 0), \quad A_0(\pi/8, 0), \quad A_2(a, 0), \quad B(a - \pi/16, 1/2), \quad A_3(a, 1), \\ A_4(0, 1), \quad A(a - \pi/8, 1), \quad B_1(\pi/16, 1/2), \quad A_5(a - \pi/8, 0).$$

Пусть D^* – конечная односвязная область, ограниченная: 1) дугой $\sigma_0 : (x-a/2)^2 + \omega^2 = a^2/4, y \leq 0$; 2) дугой $\sigma_1 : (x-a/2)^2 + \omega^2 = a^2/4, y \geq 1$; 3) характеристиками $A_1B_1 : \eta_1 = \pi/8a, B_1A_4 : \xi_1 = 0, A_2B : \xi_1 = 1 - \pi/8a, BA_3 : \eta_1 = 1$ уравнения (1). Пусть, далее, $B_0(D_0)$ – точка пересечения характеристик $A_0B_0 : \eta_1 = \pi/4a$ и A_2B ($AD_0 : \eta_1 = 1 - \pi/8a$ и B_1A_4); C – точка пересечения характеристик A_0B_1 и A_3A_5 ; D – часть области D^* , лежащая выше кривой D_0AB ; D^+ – эллиптическая часть области D ; Δ (Δ^*) – гиперболическая часть D , расположенная выше кривой A_4D_0A (ABA_3); D^- – область характеристического четырехугольника $A_0B_0AD_0$.

Исследуемая задача (задача А) заключается в нахождении функции $u(x, y)$ со следующими свойствами:

1) $u \in C(\overline{D^*} - A_0 - A_2)$ и в точке A_0 (A_2) обращается (может обращаться) в ∞ порядка $\alpha < 1/6$ (логарифмического порядка);

2) u_y (u_x) – непрерывна всюду в замкнутой области $\overline{D^*}$, за исключением A_0 и, быть может, A, A_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) и характеристик, выходящих из них, где она обращается в ∞ порядка $< 5/6$ ($< 7/6$) и < 1 (< 1) соответственно;

3) u – дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения (1) всюду в D^* , за исключением, быть может, характеристик, выходящих из точек A_0, A, A_5 ;

4) u удовлетворяет краевым условиям:

$$(\tilde{\omega}u)_{\sigma_1} = \varphi_1(\tilde{x}), \quad 0 \leq \tilde{x} \leq 1, \quad (5)$$

$$(\tilde{\omega}u)_{A_4D_0} = \psi_1(\eta_1), \quad 0 \leq \eta_1 \leq x_0, \quad (6)$$

$$(\tilde{\omega}u)_{A_3B} = \psi_2(\xi_1), \quad x_0 \leq \xi_1 \leq 1, \quad (7)$$

$$(\tilde{\omega}u)_{BB_0} = \psi_3(\eta_1), \quad 1 \leq \eta_1 \leq \pi/4a, \quad (8)$$

$$(\tilde{\omega}u)_{\sigma_0} = \varphi_0(\tilde{x}), \quad 0 \leq \tilde{x} < 1, \quad (9)$$

где $\tilde{\omega}$ определена формулой (4) причем в (3) перед $\pi/16$ берется знак минус, а $x_0 = 1 - \pi/8a$.

Относительно заданных функций делаются следующие предположения:

$$\varphi_1(\tilde{x}) \in C^2(0 < \tilde{x} < 1), \quad \varphi_1(\tilde{x}) = O(1) (\tilde{x} - \tilde{x}^2)^{\alpha_1},$$

$$\begin{aligned}
\psi_1(\eta_1) &\in C^7(0 < \eta_1 \leq x_0), \quad \psi_1^{(i)}(\eta_1) = O(1)\eta_1^{\varkappa_2-i}, \\
\psi_2(\xi_1) &\in C^7(x_0 \leq \xi_1 < 1), \quad \psi_2^{(i)}(\xi_1) = O(1)(1 - \xi_1)^{\varkappa_2-i}, \\
5/6 < \varkappa_i &\equiv \text{const}, \quad i = 0, 1, \\
\psi_3(\eta_1) &\in C(1 \leq \eta_1 \leq \pi/4a), \quad \psi_3(\eta_1) \in C^4(1 < \eta_1 < \pi/4a), \\
\psi_3'(\eta_1) &= O\{(\pi/4a - \eta_1)^{-\alpha-5/6}\}, \quad \varphi_0(\tilde{x}) \in C(0 \leq \tilde{x} < 1), \\
\varphi_0(\tilde{x}) &\in C^2(0 < \tilde{x} < 1),
\end{aligned}$$

$\psi_3(\varphi_0)$ в точке $\eta_1 = 1$ ($\tilde{x} = 1$) может обращаться в ∞ порядка $\leq 2/3$ (логарифмического порядка).

Задача A не может иметь более одного решения. Это утверждение легко доказывается методом интегральных неравенств [1, 2], опираясь на единственность решения задачи Гурса для уравнения (1) в области D^- с данными на характеристиках AD_0 , AB_0 . При этом нужно учесть тот факт, что коэффициент $y(y-1)$ для $0 \leq y \leq 1$ удовлетворяет условию Ф. И. Франкля [3], которое обеспечивает единственность решения задачи Трикоми.

Доказательство существования решения $u(x, y)$ задачи A состоит из следующих восьми основных этапов:

1. В области D^+ изучается краевая задача типа задачи Хольмгре-на [4]:

$$(\tilde{\omega}u)_{\sigma_1} = \varphi_1(\tilde{x}), \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{y}}(\tilde{\omega}u) = \nu(\tilde{x}), \quad y = 1, \quad 0 < \tilde{x} < 1, \quad \tilde{x} \neq x_0.$$

2. В области $\Delta(\Delta^*)$, рассматривается задача типа сингулярной задачи Трикоми, где решение $u(x, y)$ уравнения (1) определяют по граничному условию (6) ((7)), зная $\nu(\tilde{x})$ во внутренних точках отрезка A_4A (AA_3) прямой $y = 1$.

3. Из установленных конструктивных свойств решений этих двух задач выводятся основные функциональные соотношения между $\tau(\tilde{x}) = u(a\tilde{x}, 0)$ и $\nu(\tilde{x})$, принесенные из эллиптической и гиперболических частей смешанной области D на линию вырождения $y = 1$.

4. В области D доказывается существование решения $u(x, y)$ задачи Геллерстедта с данными (5)–(7). Это достигается сведением ее к эквивалентному сингулярному интегральному уравнению.

5. Исследуется поведение функции u на AD_0 и AB .

6. Решается задача Гурса в области D^- с данными на характеристиках AD_0 и ABB_0 .

7. Пусть

$$\begin{aligned}
(\tilde{\omega}u)_{A_0B_1} &= \Psi(\eta_1), \quad \pi/8a \leq \eta_1 \leq \pi/4a, \\
(\tilde{\omega}u)_{A_0B_0} &= \Psi_2(\xi_1), \quad 0 < \xi_1 \leq x_0,
\end{aligned} \tag{10}$$

где $\tilde{\omega}$ определена формулой (4), причем в (3) перед $\pi/16$, на этот раз, берется знак плюс.

Устанавливается, что:

а) $\Psi_1(\eta_1) \in C(\pi/8a \leq \eta_1 < \pi/4a)$ и в точке A_0 , $\eta = \pi/4a$, имеет особенность порядка α относительно $\pi/4a - \eta_1$.

б) $\Psi_1(\eta_1) \in C^4(\pi/8a \leq \eta_1 < \pi/4a, \eta_1 \neq 1)$, а при $\eta_1 = 1$ $\Psi'_1(\eta_1)$ может обращаться в ∞ , но порядка не выше $2/3$.

в) $\Psi_2(\xi_1) \in C(0 < \xi_1 \leq x_0)$ и в точке A_0 имеет особенность порядка α относительно ξ_1 .

г) $\Psi_2(\xi_1) \in C^4(0 < \xi_1 < x_0)$ а при $\xi_1 = x_0$ $\Psi'_2(\xi_1)$ обращается, вообще говоря, в ∞ порядка не выше $2/3$.

8. В области $D^* \setminus (D \cup D^-)$ доказывается существование решения $u(x, y)$ задачи Геллерстедта с данными (9), (10).

Вопрос существования в области D решения $u(x, y)$ задачи Геллерстедта (п. 4) редуцируется к следующей эквивалентной системе сингулярных интегральных уравнений:

$$\nu_i(x) \mp \lambda \int_{-1}^1 \nu_i(t) K_i(x, t) dt - \int_{-1}^1 \nu_i(t) L_i(x, t) dt = h_i(x), \quad (11)$$

где $i = 1$ при $-1 < x < x^0$; $i = 2$ при $x^0 < x < 1$; $x^0 = 2x_0 - 1$; $\nu_1(x) = \nu_2(x) = \nu((x+1)/2)$, $\lambda = -1/\pi\sqrt{3}$; а h_i, L_i — известные функции;

$$K_i(x, t) = \left(\frac{1 - (-1)^i t}{1 - (-1)^i x} \right)^{2/3} \left(\frac{1}{t - x} + \frac{(-1)^i}{1 - tx} \right).$$

При сделанных выше предположениях относительно гладкости граничных данных ψ_i, φ_1 функции h_i будут по крайней мере таковы, что $h_1 \in C^5(-1 < x \leq x^0)$, $h_2 \in C^5(x^0 \leq x < 1)$, $h_i(x) = O(1)((-1)^i - x)^{1/3}$.

Ядро $L_i(x, t)$ является регулярным. Более того, оно допускает производные любого порядка в области определения, когда $x \neq t$, а при $x = t$ первые производные обращаются, вообще говоря, в ∞ как $|x - t|^{-2/3} \ln |x - t|$; при наличии особенности у производных их можно выделить в явном виде хотя бы в окрестности прямой $x = t$.

Уравнение (11), когда $L_i \equiv 0$, впервые было изучено Геллерстедтом в работе [2] (см. также [5]). Используя его результаты, сингулярное интегральное уравнение (11) можно свести к эквивалентному уравнению Фредгольма второго рода, безусловная разрешимость которого непосредственно вытекает из единственности сформулированных выше задач.

Функция $\nu_i(x)$, являющаяся решением уравнения (11), принадлежит классу $C^4(|x| < 1, x \neq x^0)$ и в точках $x = \pm 1, x = x^0$ не может обращаться в ∞ порядка $> 1/3$. В справедливости этого факта можно убедиться так же, как в случае задачи Трикоми [6].

После того как найдено $\nu(\tilde{x})$, решением задачи Хольмгрена в области D^+ и решением сингулярной задачи Трикоми в областях Δ (Δ^*) строим решение задачи A в области D .

Построение решения задачи A в остальной части области D^* проводится по предложенной выше схеме (см. [7]).

В заключение сделаем следующие замечания:

1. Степень гладкости функции Ψ_i в основном определяется гладкостью $\nu_i(x)$.

2. Особенность порядка α у решения $u(x, y)$ задачи A в точке A_0 вызвана исключительно тем, что функция $\psi'_3(\eta_1)$ в точке B_0 обращается в ∞ порядка $\alpha + 5/6$.

3. Функция $u_y(x, 0)$ в точке A_5 не может обращаться в ∞ порядка выше $1/2$.

4. $u(x, 0)$ в точке A_2 может иметь логарифмическую особенность лишь потому, что $\frac{\partial}{\partial \xi_1} u(x, y)$ обращается, вообще говоря в ∞ порядка $\leq 5/6$ вдоль всей характеристики AB_0 .

5. Решение $u(x, y)$ задачи A в случае, когда длина a линии перехода равна $\pi/4$, получается из случая $a = \pi/4 - \varepsilon$ предельным переходом при $\varepsilon \rightarrow 0$. При этом $u(x, y)$ и ее производные в точках A_1 и A_2 ведут себя одинаково.

Литература

1. Трикоми Ф. О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа. М.-Л., 1947.
2. Gellerstedt S. Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik. 1936. Vol. 23 A, no. 3. Pp. 1–23.
3. Франкль Ф. И. Прикладная математика и механика. 1946. Т. 10, № 3. С. 421–424.
4. Holmgren E. Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik. 1926. Vol. 19 B, no. 14.
5. Manwell A. R. Arch. Rat. Mech. Analysis. 1963. Vol. 12, no. 1. Pp. 249–272.
6. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959.
7. Нахушев А. М. Доклады АН СССР. 1966. Т. 166, № 3. С. 536–539.

Поступила в редакцию
15 декабря 1965 г.

Институт математики
СО АН СССР

Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа с двумя линиями параболического вырождения

В работе в качестве модельного уравнения смешанного эллиптического-гиперболического типа с двумя непересекающимися линиями параболического вырождения рассматривается уравнение

$$y(y-1)u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (1)$$

в области, содержащей внутри себя интервалы обеих прямых $y = 0$, $y = 1$.

1°. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\omega(y) &= 1/4k'\sqrt{-k} + 1/8 \arcsin k', \\ \tilde{y}(y) &= -(3/2a)^{2/3}(\omega \mp \pi/16)^{2/3},\end{aligned}\quad (2)$$

$$0 \leq y \leq 1,$$

$$\omega(y) = 1/4k'\sqrt{k} - 1/8 \ln |k' + 2\sqrt{k}|, \quad \tilde{y}(y) = (3\omega/2a)^{2/3}, \quad (3)$$

$$y \leq 0, y \geq 1, \quad k(y) = y(y-1),$$

$$a \equiv \text{const}, \quad \tilde{x} = x/a, \quad \pi < 8a < 2\pi, \quad (4)$$

$$a\xi_1(x, y) = x + \omega - \pi/16, \quad a\eta_1(x, y) = x - \omega + \pi/16, \quad (5)$$

$$b(\tilde{y}) = [\tilde{y}'(y)]^{-2}\tilde{y}''(y), \quad \tilde{\omega}(y) = \exp \left(\frac{1}{2} \int_0^{\tilde{y}} b(s) ds \right). \quad (6)$$

На плоскости переменных x, y рассмотрим точки

$$A_1(0, 0), \quad A_0(\pi/8, 0), \quad A_2(a, 0), \quad B(a - \pi/16, 1/2), \quad A_3(a, 1),$$

$$A_4(0, 1), \quad A(a - \pi/8, 1), \quad B_1(\pi/16, 1/2), \quad A_5(a - \pi/8, 0).$$

Пусть D^* – конечная односвязная область, ограниченная: 1) дугой $\sigma_1: (x-a/2)^2 + \omega^2 = a^2/4, y \geq 1$; 2) дугой $\sigma_0: (x-a/2)^2 + \omega^2 = a^2/4, y \leq 0$; характеристиками $A_1B_1: \eta_1 = \pi/8a, B_1A_4: \xi_1 = 0, A_2B: \xi_1 = 1 - \pi/8a, BA_3: \eta_1 = 1$ уравнения (1). Пусть далее $B_0(\mathcal{D}_0)$ – точка пересечения характеристик $A_0B_0: \eta_1 = \pi/4a$ и $AB_0: \xi_1 = 1 - \pi/8a$ ($A\mathcal{D}_0: \eta_1 = 1 - \pi/8a$ и B_1A_4); D – часть области D^* , лежащая выше кривой $\mathcal{D}_0AB$; D^+ – эллиптическая часть области D ; $\Delta (\Delta^*)$ – гиперболическая часть области D , лежащая выше кривой $A_4\mathcal{D}_0A (ABA_3)$.

Задача 1. Найти функцию $u(x, y)$ со следующими свойствами:

1) $u \in C(D^* - A_0 - A_2)$ и в точке $A_0 (A_2)$ обращается (может обращаться) в ∞ порядка $\alpha < 1/6$ (логарифмического порядка);

2) $u_y (u_x)$ – непрерывна всюду в замкнутой области $\overline{D^*}$, за исключением A_0 , u , быть может, A, A_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) и характеристик, выходящих из них, где она обращается в ∞ порядка $< 5/6$ ($< 7/6$) $u < 1$ (< 1) соответственно;

3) u – регулярное решение уравнения (1) всюду в D^* , за исключением, быть может, характеристик, выходящих из точек A_0, A, A_5 ;

4) u – удовлетворяет краевым условиям:

$$(\tilde{\omega}u)_{\sigma_1} = \varphi_1(\tilde{x}), \quad 0 \leq \tilde{x} \leq 1, \quad (7)$$

$$(\tilde{\omega}u)_{A_4\mathcal{D}_0} = \psi_1(\eta_1), \quad 0 \leq \eta_1 \leq x_0, \quad (8)$$

$$(\tilde{\omega}u)_{A_3B} = \psi_2(\xi_1), \quad x_0 \leq \xi_1 \leq 1; \quad (9)$$

$$(\tilde{\omega}u)_{BB_0} = \psi_3(\eta_1), \quad 1 \leq \eta_1 \leq \pi/4a, \quad (10)$$

$$(\tilde{\omega}u)_{\sigma_0} = \varphi_0(\tilde{x}), \quad 0 \leq \tilde{x} < 1, \quad (11)$$

где $\tilde{\omega}$ определена формулой (6), причем в (2) перед $\pi/16$ берется знак минус, а $x_0 = 1 - \pi/8a$.

Относительно функций φ_i, ψ_i делаются следующие предположения:

$$\varphi_1(\tilde{x}) \in C^2(0 < \tilde{x} < 1), \quad \varphi_1(\tilde{x}) = O(1)(\tilde{x} - \tilde{x}^2)^{x_1}, \quad (12)$$

$$\psi_1(\eta_1) \in C^7(0 < \eta_1 \leq x_0), \quad \psi_1^{(i)}(\eta_1) = O(1)\eta_1^{x_2-i}, \quad i = 0, 1, \quad (13)$$

$$\psi_2(\xi_1) \in C^7(x_0 \leq \xi_1 < 1), \quad \psi_2^{(i)}(\xi_1) = O(1)(1 - \xi_1)^{x_2-i}, \quad (14)$$

$$\psi_3(\eta_1) \in C(1 \leq \eta_1 \leq \pi/4a), \quad \psi_3(\eta_1) \in C^4(1 < \eta_1 < \pi/4a), \quad (15)$$

$$1 < \chi_i \equiv \text{const}, \quad \psi_3'(\eta_1) = O(1)(\pi/4a - \eta_1)^{-\alpha-5/6}, \quad (16)$$

$\psi_3'(\eta_1)$ при $\eta_1 = 1$ может обращаться в ∞ порядка $\leq 2/3$;

$$\varphi_0(\tilde{x}) \in C(0 \leq \tilde{x} < 1), \quad \varphi_0(\tilde{x}) \in C^2(0 < \tilde{x} < 1),$$

причем φ_0 в точке $\tilde{x} = 1$ обращается, вообще говоря, в ∞ логарифмического порядка.

Единственность решения задачи 1 доказывается точно так же, как и в случае задачи А, рассмотренной в [2].

2°. 1. В уравнении (1) перейдем к переменным

$$\tilde{x} = x/a, \quad \tilde{y} = (3\omega/2a)^{2/3} \quad \text{при} \quad y \geq 1,$$

$$\tilde{y} = -(3/2a)^{2/3}(\pi/16 - \omega)^{2/3} \quad \text{при} \quad 0 < y \leq 1$$

и к функции $z = \tilde{\omega}u$. Тогда z будет удовлетворять уравнению

$$\tilde{y}z_{\tilde{x}\tilde{x}} + z_{\tilde{y}\tilde{y}} + c(\tilde{y})z = 0, \quad (17)$$

где $-4c(\tilde{y}) = 2b_{\tilde{y}} + b^2$ допускает производные любого порядка, причем $c(0) > 0$ (см. [2], [3]).

Если M – некоторое множество на плоскости переменных x, y , то его образ на плоскости переменных $\tilde{x}, \tilde{y}$, в дальнейшем будем обозначать через $\tilde{M}$. Очевидно $\tilde{D}^+$ есть конечная односвязная область, ограниченная нормальным контуром

$$\tilde{\sigma}_1: (\tilde{x} - 1/2)^2 + 4/9\tilde{y}^3 = 1/4, \quad \tilde{y} \geq 0 \quad (18)$$

уравнения (17) и отрезком $\tilde{A}_4\tilde{A}$ прямой $\tilde{y} = 0$.

Задача 2 (Хольмгрена). Найти регулярное в области $\tilde{D}^+$ решение уравнения (17), удовлетворяющее краевым условиям (7)

$$z = \varphi_1(\tilde{x}), \quad (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \tilde{\sigma}_1, \quad 0 \leq \tilde{x} \leq 1;$$

и

$$z_{\tilde{y}} = \nu(\tilde{x}), \quad \tilde{y} = 0, \quad 0 < \tilde{x} < 1, \quad \tilde{x} \neq x_0, \quad (19)$$

где $\nu(\tilde{x}) \in C^1(0 < \tilde{x} < 1, \tilde{x} \neq x_0)$ и при $\tilde{x} = 0, x_0, 1$ может обращаться в ∞ порядка $< 2/3$.

Для удобства перейдем в уравнении (17) к новым переменным:

$$x = 2\tilde{x} - 1, \quad y = 2^{2/3}\tilde{y}. \quad (20)$$

Тогда (17), (7) и (19) примут следующий вид:

$$Tz \equiv yz_{xx} + z_{yy} = -4^{-2/3}c(4^{-1/3}y)z = c_0(y)z, \quad (21)$$

$$z = \varphi_1((x+1)/2) = \tilde{\varphi}(x), \quad (x, y) \in \sigma, \quad |x| \leq 1, \quad (22)$$

$$z_y = 4^{-1/3}\nu((x+1)/2) = \tilde{\nu}(x), \quad y = 0, \quad |x| < 1, \quad x \neq 2x_0 - 1. \quad (23)$$

Преобразование (20) переводит $\tilde{D}^+$ в область Ω , ограниченную кривой $\sigma: x^2 + \frac{4}{9}y^3 = 1$ и отрезком $|x| \leq 1, y = 0$.

Функция Грина задачи 2 в области Ω задается формулой [4]

$$G(x, y; \xi, \eta) = u(x, y; \xi, \eta) + v(x, y; \xi, \eta), \quad (24)$$

где

$$u = \gamma_1(r_1^2)^{-1/6}F\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}; 1 - \frac{r^2}{r_1^2}\right), \quad v = -(R^2)^{-1/6}u(x, y; \bar{\xi}, \bar{\eta}), \quad (25)$$

$$\left. \begin{matrix} r^2 \\ r_1^2 \end{matrix} \right\} = (x - \xi)^2 + \frac{4}{9}(y^{3/2} \mp \eta^{3/2})^2, \quad R^2 = \xi^2 + \frac{4}{9}\eta^3, \quad (26)$$

$$\bar{\xi} = \xi/R^2, \quad \bar{\eta}^{3/2} = \eta^{3/2}/R^2, \quad 4\pi\Gamma(1/3)\gamma_1 = (4/3)^{1/3}\Gamma^2(1/6). \quad (27)$$

В работе [2] доказано, что существует единственное решение z задачи 2 и оно представимо в виде

$$z = z_0(x, y) + Z(x, y) + \int_{-1}^1 \tilde{\nu}(t)N(t, x, y)dt, \quad (28)$$

где

$$z_0 = N_0 + F = - \int_{-1}^1 \tilde{\nu}(\xi)G(\xi, 0; x, y)d\xi + \int_{-1}^1 \tilde{\varphi}(\xi)A_\xi[G(\bar{\xi}, \bar{\eta}; x, y)]d\xi, \quad (29)$$

$$A_\xi \equiv \eta \frac{d\eta}{d\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta},$$

а черта над (ξ, η) означает, что $(\xi, \eta) \in \sigma$; Z и N соответственно являются решениями следующих безусловно разрешимых уравнений Фредгольма:

$$Z(x, y) + \int_{\Omega} c_0(\eta) G(\xi, \eta; x, y) Z(\xi, \eta) d\xi d\eta = Z_0(x, y), \quad (30)$$

$$N(t, x, y) + \int_{\Omega} c_0(\eta) G(\xi, \eta; x, y) N(t, \xi, \eta) d\xi d\eta = N_0(t, x, y), \quad (31)$$

$$\begin{aligned} Z_0 &= - \int_{\Omega} c_0(\eta) G(\xi, \eta; x, y) F d\xi d\eta, \\ N_0 &= \int_{\Omega} c_0(\eta) G(t, 0; \xi, \eta) d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (32)$$

2. Из (32) имеем

$$N_0(y, x, 0) = \mathfrak{R}(x, y) = \int_{\Omega} c_0(\eta) G(\xi, \eta; x, 0) G(y, 0; \xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (33)$$

Ниже будет доказано, что функция $\mathfrak{R}(x, y) \in C^\infty(-1 < x, y < 1, x \neq y)$, а при $x = y$ первые производные имеют логарифмическую особенность, которую удастся выделить в явном виде.

Рассмотрим функцию

$$\mathfrak{R}_i(x, y) = \int_{\Omega} \eta^i G(\xi, \eta; x, 0) G(y, 0; \xi, \eta) d\xi d\eta, \quad i \geq 0. \quad (34)$$

Из (24)–(27) легко увидеть, что

$$G(\xi, \eta; x, 0) = \gamma_1(R_x^2)^{-1/6} - \gamma_1(\bar{R}_x^2)^{-1/6}, \quad (35)$$

где

$$R_x^2 = (x - \xi)^2 + 4/9\eta^3, \quad \bar{R}_x^2 = (1 - x\xi)^2 + 4/9x^2\eta^3.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_i(x, y) &= \gamma_1^2 \int_{\Omega} \eta^i (R_x R_y)^{-1/3} d\xi d\eta - \gamma_1^2 \int_{\Omega} \eta^i [(R_x \bar{R}_y)^{-1/3} + \\ &+ (\bar{R}_x R_y)^{-1/3} - (\bar{R}_x \bar{R}_y)^{-1/3}] d\xi d\eta = \gamma_1^2 \mathfrak{R}_i^1(x, y) + \mathfrak{R}_i^2(x, y). \end{aligned} \quad (36)$$

Очевидно, $\mathfrak{R}_i^2(x, y) \in C^\infty(-1 < x, y < 1)$ при любом $i \geq 0$. Интеграл $\mathfrak{R}_i^1$ после перехода к повторному и преобразования посредством подстановки $\eta = (9/4)^{1/3}[(1 - \xi^2)(1 - t)]^{1/3}$ примет вид

$$\mathfrak{R}_i^1(x, y) = \alpha_i \int_{-1}^1 (1 - \xi^2)^{i/3} (\zeta \zeta_0)^{1/6} F_1 \left(1, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{i+4}{3}; \zeta, \zeta_0 \right) d\xi, \quad (37)$$

где $0 < a_i \equiv \text{const}$; $\zeta = \zeta(x) = (1 - \xi^2)/(1 + x^2 - 2x\xi)$; $\zeta_0 = \zeta(y)$; F_1 — гипергеометрическая функция переменных ζ, ζ_0 ; $0 \leq \zeta, \zeta_0 \leq 1$.

Имеет место следующее тождество (см. [4] § 17):

$$\begin{aligned} & B(1, \gamma - 1) F_1(1, \beta, \beta, \gamma; u, v) + \\ & + B(1, 1 + 2\beta - \gamma) F_1(1, \beta, \beta, 2 + 2\beta - \gamma; 1 - u, 1 - v) + \\ & + \exp(\gamma\pi i) B(1 + 2\beta - \gamma, \gamma - 1) (-u)^{-\beta} (-v)^{-\beta} F_1(1 + 2\beta - \gamma, \beta, \beta, 2\beta; 1/u, 1/v), \end{aligned}$$

где B — бета-функция, $-\pi < \arg(-u), \arg(-v) < \pi$, $\text{Im } u, \text{Im } v \leq 0$. Отсюда, опираясь на известное соотношение

$$(1 - v)^{-\alpha} F(\alpha, \beta, \beta + \beta'; (u - v)/(1 - v)) = F_1(\alpha, \beta, \beta + \beta'; u, v)$$

и на тот факт, что

$$F_1(\alpha, \beta, \beta, \gamma; u, v) = F_1(\alpha, \beta, \beta; v, u),$$

получаем

$$\begin{aligned} F_1 \left(1, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{i+4}{3}; \zeta, \zeta_0 \right) &= a(i) F_1 \left(1, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{3-i}{3}; 1 - \zeta, 1 - \zeta_0 \right) + \\ &+ b(i) (\zeta \zeta_0)^{-1/6} \zeta^{-i/3} (1 - \zeta)^{i/3} F \left(-\frac{i}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}; \frac{\zeta_0 - \zeta}{\zeta_0(1 - \zeta)} \right), \quad \zeta_0 \geq \zeta, \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} F_1 \left(1, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{i+4}{3}; \zeta, \zeta_0 \right) &= a(i) F_1 \left(1, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{3-i}{3}; 1 - \zeta, 1 - \zeta_0 \right) + \\ &+ b(i) (\zeta \zeta_0)^{-1/6} \zeta_0^{-i/3} (1 - \zeta_0)^{i/3} F \left(-\frac{i}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}; \frac{\zeta - \zeta_0}{\zeta(1 - \zeta_0)} \right), \quad \zeta \geq \zeta_0, \end{aligned} \quad (39)$$

где $a(i) = (1 + i)/i$, $b(i) = \Gamma(-i/3)\Gamma(i/3 + 4/3)/\Gamma(1/3)$, $i/3 \neq 0, 1, \dots$

Пусть $x \leq y$. Тогда из (37), (38) и (39) имеем

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_i^1(x, y) &= \mathcal{L}_i^*(x, y) + \\ &+ m_i \int_{-1}^{(x+y)/2} (y - \xi)^{2i/3} F \left(-\frac{i}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}; \frac{(y - x)(y + x - 2\xi)}{(y - \xi)^2} \right) d\xi + \end{aligned}$$

$$+ m_i \int_{(x+y)/2}^1 (\xi - x)^{2i/3} F\left(-\frac{i}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}; \frac{(y-x)(2\xi - x - y)}{(\xi - x)^2}\right) d\xi = \mathcal{L}_i^* + I_1 + I_2.$$

Здесь и в дальнейшем $\mathcal{L}_i^*$ означает некоторую функцию из класса $C^\infty(-1 < x, y < 1)$, а m_i – некоторую постоянную, отличную от нуля.

В интегралах I_1 и I_2 сделаем замену $\xi = (x - yt)/(1 - t)$ и $\xi = (y - xt)/(1 - t)$ соответственно. Тогда их сумма I примет вид

$$I = m_i(y - x)^{\frac{2i}{3}+1} \left\{ \int_{-1}^{(1+x)/(1+y)} + \int_{-1}^{(1-y)/(1-x)} \right\} (1 - t)^{\frac{-2i}{3}-2} \times \\ \times F\left(-\frac{i}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}; 1 - t^2\right) dt.$$

Теперь нетрудно увидеть, что

$$I = m_i(y - x)^{\frac{2i}{3}+1} \left\{ \int_{(1+x)/(1+y)}^1 + \int_{(1-y)/(1-x)}^1 \right\} (1 - t)^{\frac{-2i}{3}-2} F_p(t) dt + \\ + m_i(y - x)^{2i/3+1} = J + m_i(y - x)^{2i/3+1}, \quad p > 2i/3, \\ F_p(t) = F\left(-\frac{i}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}; 1 - t^2\right) - \sum_{k=0}^p \frac{(-i/3)_k (1/6)_k}{(1/3)_k k!} (1 - t^2)^k$$

и символ $(\lambda)_k$ обозначает величину $\Gamma(\lambda + k)/\Gamma(\lambda)$.

После простой замены переменной интегрирования в интегралах, входящих в J , получаем

$$J = m_i(1 + y)^{1+2i/3} \int_0^1 t^{-2-2i/3} F_p(x^*t(2 - x^*t)) dt + \\ + m_i(1 - x)^{1+2i/3} \int_0^1 t^{-2-2i/3} F_p(y^*t(2 - y^*t)) dt,$$

где $x^* = (y - x)/(1 + y)$, $y^* = (y - x)/(1 - x)$. Поэтому J есть функция типа $\mathcal{L}_i^*$.

Таким образом доказано, что функция $\mathfrak{R}_i$ из (34) в силу (36), (37) представима в виде

$$\mathfrak{R}_i(x, y) = m_i|y - x|^{1+2i/3} + \mathcal{L}_i^*, \quad i/3 \neq 0, 1, 2, \dots \quad (40)$$

Нет сомнения в том, что (40) законно и при $x \geq y$.

Пусть теперь $i/3 = 0, 1, 2, \dots$ Тогда

$$\mathfrak{R}_i(x, y) = m_i |y - x|^{1+2i/3} \ln |y - x| + \mathcal{L}_i^*. \quad (41)$$

Для доказательства достаточно распространить тождества (38) и (39) на рассматриваемые значения i . Это делается так же, как и для гипергеометрических функций одной переменной [5]. А именно: записываем (38), (39) для $i = 3m + \varepsilon$, где $m = 0, 1, 2, \dots$; ε – сколь угодно малое положительное число, а затем переходим к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Поскольку $c_0(y) \in C^\infty(y > -(3\pi/8a)^{2/3})$, то по формуле Тейлора можно записать:

$$c_0(y) = \sum_{i=0}^q d_i y^i + O(y^q), \quad d_0 = c_0(0) < 0, \quad q \geq 1.$$

Следовательно (см. (33), (34), (40), (41)),

$$N_0(t, x, 0) = \sum_{i=0}^q d_i \mathfrak{R}_i(x, t) + \mathfrak{M}_{\bar{q}}(x, t), \quad (42)$$

где $\mathfrak{M}_{\bar{q}} \in C^\infty(-1 < x, t < 1, x \neq t)$, $\mathfrak{M}_{\bar{q}} \in C^{\bar{q}}(-1 < x, t < 1)$, если $\bar{q} = 1 + 2[q/3]$ и $q/3 \neq 1, 2, 3, \dots$; если же $q/3 \neq 1, 2, 3, \dots$, то $\mathfrak{M}_{\bar{q}} \in C^{\bar{q}-1}(-1 < x, t < 1)$, причем $\bar{q}$ -я производная при $x = t$ может обращаться в ∞ порядка не выше логарифмического.

3. Очевидно функция $N_0(t, x, y)$ является решением однородной задачи Хольмгрена для уравнения

$$TN_0 + c_0(y)G(t, 0; x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega.$$

Из аналитического характера решений эллиптического уравнения с аналитическими коэффициентами (см., например, [6]) безусловно вытекает, что $N_0 \in C^\infty(\Omega, |t| < 1)$.

Более того, оказывается, что N_0 имеет производные любого порядка по x и t , когда $(x, y) \in \Omega \cup \{y = 0, |x| < 1, x \neq t, |t| < 1\}$. Действительно, пусть $t < t + \varepsilon < x$, а Ω_1 (Ω_2) – подобласть области Ω , где $\xi < t + \varepsilon$ ($\xi > t + \varepsilon$). В силу (24) и (32) достаточно установить, что указанным выше свойством обладает функция

$$U_1(t, x, y) + U_2(t, x, y) = \left(\int_{\Omega_1} + \int_{\Omega_2} \right) c_0(\eta) u(\xi, \eta; x, y) u(t, 0; \xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Легко видеть, что U_1 (U_2) имеет производные всех порядков по $x(t)$ при $(x, y) \in \Omega \cup \{y = 0, |x| < 1, |t| < 1\}$ и их можно получить непосредственным дифференцированием под знаком интеграла. То, что U_1 (U_2)

допускает производные по $t(x)$, устанавливается с помощью известного тождества $u_x(\xi, \eta; x, y) = -u_\xi(\xi, \eta; x, y)$ последовательным применением операции дифференцирования и интегрирования по частям.

Исходя из интегрального уравнения (31) и приведенных здесь свойств функции N_0 , можно показать (см. [4] гл. 1, § 17, где рассмотрен случай $0 < c_0(y) \equiv \text{const}$), что функция

$$N(t, x, 0) \in C^\infty(-1 < x, t < 1, x \neq t)$$

и представима в форме (42).

4. В (28) вернемся к переменным $\tilde{x}, \tilde{y}$, по формуле (20) и в результате положим $\tilde{y} = 0, \tilde{x} = x$. Тогда, согласно (29), будем иметь

$$\tau(x) = \gamma_1 \int_0^1 \nu(t) [L(x, t) - |t - x|^{-1/3} + (t + x - 2tx)^{-1/3}] dt + \Phi(x), \quad (43)$$

где

$$\gamma_1 L(x, t) = N(2t - 1, 2x - 1, 0), \quad \Phi(x) = F(2x - 1, 0) + Z(2x - 1, 0).$$

Из (29) с учетом того, что

$$\begin{aligned} A_\xi[G(\xi, \eta; x, y)] &= \gamma_1/(2\eta)(1 - x^2 - 4/9y^3)(r_1^2)^{-7/6} \times \\ &\times \mathcal{F}(1/6, 7/6, 1/3; 1 - (r/r_1)^2), \end{aligned} \quad (44)$$

получаем (см. [4], [9])

$$F(x, 0) = (4/9)^{1/3} \gamma_1 / 2 (1 - x^2) \int_{-1}^1 \tilde{\varphi}(\xi) (1 - \xi^2)^{-1/3} (1 + x^2 - 2x\xi)^{-7/6} d\xi.$$

Отсюда, согласно (12), имеем, что $F(x, 0) \in C^\infty(|x| < 1)$, причем $F''(x, 0)$ при $x \rightarrow \pm 1$ может обращаться в ∞ порядка $\leq 2 - 2\kappa_1$, если $\kappa_1 < 1$. Далее, в силу (44) ясно, что $F(x, y)$ допускает в $\Omega \cup \{y = 0, |x| < 1\}$ производные любого порядка по x . Опираясь на эти свойства функции F , без труда можно убедиться в том, что функция $Z(x, 0)$ из (30) обладает следующими свойствами: 1) $Z(x, 0) \in C^\infty(|x| \leq 1)$ и в точках $x = \pm 1$ имеет нуль порядка ≥ 1 ; 2) $Z(x, 0) \in C^\infty(|x| < 1)$; 3) $Z''(x, 0)$ при $x \rightarrow \pm 1$ может обращаться в ∞ порядка не выше логарифмического.

5. Пусть существует решение задачи 1. Тогда имеет место (43) и следующие два фундаментальных соотношения между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принятые из гиперболической части $\tilde{\Delta} \cup \tilde{\Delta}^*$ смешанной области $\tilde{D}$ на линию вырождения $\tilde{y} = 0$:

$$\tau(x) = \gamma \int_0^x \nu(t) (x - t)^{-1/3} P((x - t)^{4/3}) dt + \Psi_1(x), \quad 0 < x < x_0, \quad (45)$$

$$\tau(x) = \gamma \int_x^1 \nu(t)(t-x)^{-1/3} P((x-t)^{4/3}) dt + \Psi_2(x), \quad x_0 < x < 1, \quad (46)$$

где: 1) $P((x-t)^{4/3})$ допускает производные любого порядка при $x \neq t$, причем $P(0) = 1$ и первые производные при $x = t$ обращаются в нуль порядка не ниже $1/3$; 2) Ψ_i — функция, зависящая только от ψ_i , $i = 1, 2$; $\Psi_1 \in C^6(0 < x \leq x_0)$, $\Psi_2 \in C^6(x_0 \leq x < 1)$; 3) Ψ'_1 (Ψ'_2) в худшем случае ведет себя так же, как $x^{\chi_2-1}((1-x)^{\chi_2-1})$, когда $x \rightarrow 0$ ($x \rightarrow 1$); 4) $2\Gamma(5/6)\Gamma(1/3)\gamma = (4/3)^{1/3}\Gamma(1/6)$.

Сформулированный результат содержится в [2, 3].

3°. 1. Докажем существование решения системы (43), (45), (46). С этой целью исключим $\tau(x)$ из (43), (45). Тогда

$$\int_0^x \nu(t)(x-t)^{-1/3} P((x-t)^{4/3}) dt = H_1(x) + \int_0^1 \nu(t)[L(x, t) + l(x, t)] dt, \quad (47)$$

где

$$\gamma H_1(x) = \Phi(x) - \Psi_1(x), \quad l(x, t) = (t+x-2tx)^{-1/3} - |t-x|^{-1/3}.$$

Уравнение (47) (считаем правую часть пока известной) является обобщенным уравнением Абеля. Известным методом (см. [7]) оно сводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\nu(x) + \int_0^x \nu(t)(x-t)^{1/3} P_1((x-t)^{2/3}) dt = \bar{H}_1(x) + \bar{L}(x) + \bar{l}(x), \quad (48)$$

где

$$\bar{L}(x) = \int_0^1 \nu(t) L_0(x, t) dt, \quad L_0(x, t) = \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{L(\xi, t) d\xi}{(x-\xi)^{2/3}}, \quad (49)$$

$$\bar{H}_1(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{H_1(t) dt}{(x-t)^{2/3}},$$

$$\bar{l}(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x \int_0^1 \frac{\nu(t) l(\xi, t)}{(x-\xi)^{2/3}} dt d\xi,$$

а $P_1 \in C(0 \leq x, t \leq 1)$, и имеет такую же гладкость (в смысле дифференцируемости), что и его аргумент $(x-t)^{2/3}$, причем $P_1(0) \neq 0$. Известно [8], что

$$\bar{l}(x) = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}\nu(x) - \int_0^1 \nu(t) K^-(x, t) dt,$$

где $K^- = (t/x)^{2/3}[1/(t-x) - 1/(x+t-2tx)]$, и интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Следовательно, (20) можно переписать в виде

$$\nu(x) - \lambda \int_0^x \nu(t)(x-t)^{1/3} P_1((x-t)^{2/3}) dt = \rho(x), \quad \lambda \pi \sqrt{3} = -1, \quad (50)$$

$$\frac{1}{\lambda} \rho(x) = -\overline{H}_1(x) + \int_0^1 \nu(t) K^-(x, t) dt - \int_0^1 \nu(t) L_0(x, t) dt.$$

После обращения уравнения (50) и простых преобразований легко увидеть, что

$$\nu(x) = -\lambda \int_0^1 \nu(t) K^-(x, t) dt = h_1^*(x) + \int_0^1 \nu(t) L_1^*(x, t) dt, \quad 0 < x < x_0,$$

где

$$\begin{aligned} h_1^*(x) &= -\lambda \overline{H}_1(x) - \lambda^2 \int_0^x \overline{H}_1(\xi)(x-\xi)^{1/3} Q_1((x-\xi)^{2/3}) d\xi, \\ L_1^*(x, t) &= -\lambda L_0(x, t) - \lambda^2 \int_0^x L_0(\xi, t)(x-\xi)^{1/3} Q_1((x-\xi)^{2/3}) d\xi + \\ &\quad + \lambda^2 \int_0^x K^-(\xi, t)(x-\xi)^{1/3} Q_1((x-\xi)^{2/3}) d\xi, \end{aligned}$$

$(x-t)^{1/3} Q_1$ – резольвента ядра $(x-t)^{1/3} P_1$.

Аналогично из (43)–(46) находим

$$\nu(x) + \lambda \int_0^1 \nu(t) K^+(x, t) dt = h_2^*(x) + \int_0^1 \nu(t) L_2^*(x, t) dt, \quad (51)$$

где

$$K^+(x, t) = \left(\frac{1-t}{1-x} \right)^{2/3} \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1}{t+x-2tx} \right), \quad x_0 < x < 1,$$

а h_2^* , L_2^* – известные функции, зависящие от Ψ_2 и L соответственно.

Исключительно для удобства перепишем (50), (51) в виде

$$S_\nu^i \equiv \nu_i(x) + (-1)^i \lambda \int_{-1}^1 \nu_i(t) K_i(x, t) dt = h_i(x) + \int_{-1}^1 \nu(t) L_i(x, t) dt, \quad (52)$$

где

$$\nu_1(x) = \nu_2(x) = \nu \left(\frac{x+1}{2} \right), \quad x \neq x_0 = 2x_0 - 1, \quad h_i(x) = h_i^* \left(\frac{x+1}{2} \right),$$

$$K_i(x, t) = \left(\frac{1 - (-1)^i t}{1 - (-1)^i x} \right)^{2/3} \left(\frac{1}{t-x} + \frac{(-1)^i}{1-tx} \right),$$

$$L_i^* \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}, \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \right) = 2L_i(x, t), \quad i = 1, 2.$$

Как известно [9], сингулярное интегральное уравнение (52) в случае, когда $L_i \equiv 0$, можно свести к эквивалентному интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Применяемый для этой цели метод ниже будет использован для регуляризации уравнения (52).

2. Пусть

$$A_i(x) = h_i(x) + \int_{-1}^1 \nu(t) L_i(x, t) dt.$$

Определим функцию $A^i(x)$ таким образом: $A^1 = A_1$, $A^2 = p_1$, если $-1 < x < x_0$; $A^1 = p_2$, $A^2 = A_2$, если $x_0 < x < 1$. Здесь $p_i(x)$ — некоторая функция, непрерывная, по Гельдеру, в области определения.

Уравнение (52) можно переписать в виде $S_\nu^i = A^i$. Обратим оператор S^i в классе искомых ν . Тогда

$$4\nu_i(x) = 3A^i(x) - (-1)^i 3\lambda \int_{-1}^1 A^i(t) K^i(x, t) dt, \quad (53)$$

где

$$K^i = \left(\frac{1-t^2}{1-x^2} \right)^{1/3} \left(\frac{1}{t-x} + \frac{(-1)^i}{1-tx} \right).$$

Поскольку $\nu_1(x) = \nu_2(x)$ при $|x| < 1$, $x \neq x^0$, то из (53) имеем

$$p_2^1(x) = R_2^1(x) \pm \lambda \int_{-1}^1 p_2^1(t) K_1^2(x, t) dt, \quad (54)$$

где

$$R_2^1(x) = A_2^1(x) \pm \lambda \int_{-1}^1 A_2^1(t) K_2^1(x, t) dt$$

и верхний знак берется при $-1 \leq x \leq x^0$, нижний — при $x^0 \leq x \leq 1$. Здесь и ниже $M_j^i(x) = M_i(x)$, если $-1 < x < x^0$; $M_j^i(x) = M_j(x)$, если $x^0 < x < 1$; $K_j^i(x, t) = K^i$, если $-1 < t < x^0$; $K_j^i(x, t) = K^j$, если

$x^0 < t < 1$. Как показал Геллерстедт, сингулярное интегральное уравнение (54) эквивалентно уравнению Фредгольма

$$p_2^1(x) + \lambda \int_{-1}^1 p_2^1(s) \bar{K}_1^2(x, s) ds = \chi_2^1(x), \quad (55)$$

где

$$\frac{4}{3} \chi_2^1 = R_2^1 \pm \lambda \int_{-1}^1 R_2^1(s) \left(\frac{1-s^2}{1-x^2} \right)^{1/3} \bar{\Gamma}_2^1(x, s) ds \equiv E(R_2^1), \quad (56)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}^1(x, s) &= \left[\frac{(x^0 - s)(1+x)}{|x^0 - x|(1+s)} \right]^{1/3} \left(\frac{1}{s-x} + \frac{1}{1-sx} \right), \\ -\bar{\Gamma}^2(x, s) &= \left[\frac{(x^0 - s)(1-x)}{|x^0 - x|(1-s)} \right]^{1/3} \left(\frac{1}{s-x} - \frac{1}{1-sx} \right), \end{aligned}$$

$\bar{K}_1^2$ – регулярное ядро и допускает мажоранту в форме $M|x^0 - x|^{-1/3}$. Это ядро выписывается в явном виде и поэтому нетрудно увидеть, что оно при $-1 < x, s < 1$, $x, s \neq 0$ имеет производные всех порядков.

Из единственности решения задачи Геллерстедта для уравнения $Tz = 0$ в области $\tilde{D}$ с данными на $\tilde{\sigma}_1$ и на характеристиках $\tilde{A}_4\tilde{\mathcal{D}}_0$ и $\tilde{A}_3\tilde{B}$ вытекает безусловная разрешимость уравнения (55). Пусть Γ_2^1 – ее резольвента. Тогда

$$p_2^1(x) = \chi_2^1(x) - \lambda \int_{-1}^1 \chi_2^1(s) \Gamma_2^1(x, s) ds \equiv \bar{E}(\chi_2^1). \quad (57)$$

Далее можно записать

$$R_2^1(x) = H_2^1(x) + \int_{-1}^1 \nu_1(s) l_2^1(x, s) ds,$$

$$H_i(x) = h_i(x) - (-1)^i \lambda \int_{-1}^1 h_2^1(t) K_2^1(x, t) dt = \tilde{E}(h_i), \quad l_i(x, s) = \tilde{E}(L_i).$$

Следовательно, в силу (56)

$$\frac{4}{3} \chi_2^1(x) = \bar{H}_2^1(x) + \int_{-1}^1 \nu_1(t) \bar{l}_2^1(x, t) dt,$$

где $\bar{H}_2^1(x) = E(H_2^1)$, $\bar{l}_2^1(x, t) = E(l_2^1)$.

Последнее учтем в (57). В результате получим

$$p_2^1(x) = \bar{h}_2^1(x) + \int_{-1}^1 \nu_2(t) \bar{L}_2^1(x, t) dt, \quad (58)$$

где $4\bar{h}_2^1(x) = 3\bar{E}(\bar{H}_2^1)$, $4\bar{L}_2^1(x, t) = 3\bar{E}(\bar{l}_2^1)$.

Таким образом,

$$A^1(x) = h^1(x) + \int_{-1}^1 \nu_1(t) L^1(x, t) dt, \quad (59)$$

где $h^1(x) = h_1(x)$, $L^1(x, t) = L_1(x, t)$, если $-1 < x < x^0$; $h^1(x) = \bar{h}_2(x)$, $L^1(x, t) = \bar{L}_2(x, t)$, если $x^0 < x < 1$.

Подставим выражение (59) в (53) ($i = 1$). В результате после перестановки порядка интегрирования в повторном особом интеграле, где один интеграл обыкновенный, получим

$$\nu_1(x) - \int_{-1}^1 \nu_1(t) \tilde{L}(x, t) dt = \tilde{h}(x), \quad (60)$$

где

$$\frac{4}{3} \tilde{L}(x, t) = L^1(x, t) + \lambda \int_{-1}^1 L^1(s, t) K^1(x, s) ds \equiv U(L^1), \quad \tilde{h} = U(h^1).$$

Интегральное уравнение (60) (относительно свойств ядра и свободного члена см. ниже) является Фредгольмовым, и оно в классе иско- мых решений эквивалентно (52). Так как решение задачи 1 единственно, то (60) безусловно разрешимо.

3. Нетрудно убедиться в том, что

$$h_1(x) \in C^5(-1 < x \leq x^0), \quad h_1(x) = O(1)(1+x)^{1/3},$$

$$h_2(x) \in C^5(x^0 \leq x < 1), \quad h_2(x) = O(1)(1-x)^{1/3}.$$

Пусть $-1 < x < x^0$. Тогда

$$\begin{aligned} H_2^1(x) = h_1(x) + \lambda \int_{-1}^{x^0} h_1(t) \left(\frac{1-t^2}{1-x^2} \right)^{1/3} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{1-tx} \right) dt + \\ + \lambda \int_{x^0}^1 h_2(t) \left(\frac{1-t^2}{1-x^2} \right)^{1/3} \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1}{1-tx} \right) dt. \end{aligned}$$

Отсюда из основания известных свойств интеграла типа Коши (см. [10] § 21, 22) заключаем: 1) $H_2^1(x) \in C^{(4,\delta)}(-1 < x < x^0)$, т. е. допускает производную 4-го порядка, удовлетворяющую условию Гельдера с показателем δ , $0 < \delta < 1$; 2) H_2^1 при $x \rightarrow -1$ ($x \rightarrow x^0$) обращается в ∞ порядка $\leq 1/3$ (логарифмического порядка).

Ясно, что $H_2^1(x) \in C^{(4,\delta)}(x^0 < x < 1)$, и в точке $x = 1$ ведет себя так же, как и при $x = -1$.

Если $-1 < x < x^0$, то очевидно

$$\begin{aligned} \overline{H}_2^1(x) &= H_2^1(x) + \lambda (|x^0 - x|(1 - x))^{-1/3} \times \\ &\times \int_{-1}^{x^0} H_2^1(s) [(x^0 - s)(1 - s)]^{1/3} \left(\frac{1}{s - x} + \frac{1}{1 - sx} \right) ds + \\ &+ \lambda (|x^0 - x|(1 + x))^{-1/3} \int_{x^0}^1 H_2^1(s) [(s - x^0)(1 + s)]^{1/3} \left(\frac{1}{s - x} - \frac{1}{1 - sx} \right) ds. \end{aligned}$$

Следовательно, $\overline{H}_2^1(x) \in C^{(4,\delta)}(-1 < x < x^0)$, а при $x \rightarrow -1$, x^0 может обращаться в ∞ порядка $\leq 1/3$. Этими свойствами она обладает и при $x^0 < x < 1$.

Используя свойства функций F_2^1 , $\bar{h}_2^1$, h^1 , увидим, наконец, что

$$\tilde{h}(x) \in C^{(4,\delta)}(|x| < 1, x \neq x^0),$$

а при $x \rightarrow \pm 1$, x^0 может обращаться в ∞ порядка $\leq 1/3$.

4. Из (49) после дифференцирования под знаком интеграла имеем

$$L_0(x, t) = \int_0^x L_\xi(\xi, t)(x - \xi)^{-2/3} d\xi.$$

Доказанный в п. 2, пп. 2 результат позволяет заключить, что L_x представима в виде

$$L_x = \mu \ln |x - t| + \mathcal{L}^*(x, t),$$

где 1) $\mu = \mu_1 \equiv \text{const}$ при $x \leq t$, $\mu = \mu_2 \equiv \text{const}$ при $x \geq t$; 2) $\mathcal{L}^*$ — некоторая функция, допускающая производные любого порядка, когда $0 < x, t < 1$, причем на прямой $x = t$ первые производные могут иметь лишь интегрируемые особенности (см. (41), (42)). Кроме этого, $\mathcal{L}^*$ обладает таким свойством, что особенности у ее производных, если они имеются, можно выделить в явном виде.

Опираясь на свойства функций $\mathcal{L}^*$ и P , из (45) нетрудно убедиться, что: 1) $L_i(x, t) \in C(-1 \leq x, t \leq 1)$, $L_i(x, t) \in C^\infty(-1 < x, t < 1, x \neq t)$

и при $x = t$ первые производные обращаются, вообще говоря, в ∞ , как $|x - t|^{-2/3} \ln |x - t|$; 2) особенности у производных от L_i можно выделить в явном виде; 3) ядро $\tilde{L}$ интегрального уравнения (60) принадлежит $C^\infty(-1 < x, t < 1, x \neq t, x \neq x_0)$ и в точках $x = \pm 1, x_0$ может иметь неподвижные особенности порядка $\leq 1/3$, причем первые ее производные при $x = t$ могут обращаться в ∞ , как $|x - t|^{-2/3} \ln |x - t|$.

5. Пусть $\mu(x) \in C^{(0,\delta)}(a \leq x \leq b)$. Тогда (см. [8, с. 90])

$$\frac{d}{dx} \int_a^b \mu(t) \ln |t - x| dt = - \int_a^b \frac{\mu(t)}{t - x} dt. \quad (61)$$

Если же $\mu(x) \in C^1(a < x < b)$, а $\mu'(x)$ в точках $x = a, x = b$ имеет лишь особенность порядка < 1 , то

$$\int_a^b \frac{\mu(t)}{t - x} dt = \mu(b) \ln(b - x) - \mu(a) \ln(x - a) - \int_a^b \mu'(t) \ln |t - x| dt. \quad (62)$$

Из (61), (62) прямо следует, что если $\mu(x) \in C^{(m,\delta)}(a < x < b)$, а $\mu^{(m)}(x)$ при $x \rightarrow a, b$ не обращается в ∞ порядка > 1 , то интеграл типа Коши с плотностью μ также принадлежит этому классу.

Опираясь на эти факты, можно показать, что решение $\nu_i(x)$ уравнения (52) принадлежит $C^4(|x| < 1, x \neq x^0)$ и в точках $x = \pm 1, x^0$ может обращаться в ∞ порядка $\leq 1/3$. Следовательно, $\nu(x) \in C^4(0 < x < 1, x \neq x_0)$, а при $x = 0, x_0, 1$ может иметь особенность порядка $\leq 1/3$.

После того, как найдено $\nu(x)$ решением задачи Хольмгрена в области $\tilde{D}^+$ и сингулярной задачи Трикоми в областях $\tilde{\Delta}, \tilde{\Delta}^*$, строим решение $u(x, y)$ задачи 1 в области D . Следует отметить, что $u(x, y)$ как функция соответствующих характеристических координат внутри характеристических дуг $A_4 \mathcal{D}_0$ и AB имеет по крайней мере такую же степень гладкости, что и $\nu(x)$ [1, 2].

Возможность построения решения $u(x, y)$ задачи 1 в остальной части $D^* \setminus D$ области D^* доказана в работе [2].

Литература

1. Нахушев А. М. Доклады АН СССР. 1966. Т. 170, № 1. С. 38–40.
2. Нахушев А. М. Сибирский матем. журнал. 1967. Т. 8, № 1. С. 39–68.
3. Нахушев А. М. Доклады АН СССР. 1966. Т. 166, № 3. С. 536–540.
4. Gellerstedt S. Sur un problème aux limites pour une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre de type mixte. Thèse, Uppsala, 1935.
5. Франкль Ф. И. Изв. АН СССР, серия матем. 1945. Т. 8, № 5. С. 195–224.
6. Леви Е. Е. Усп. матем. 1940. Вып. 8. С. 249–292.
7. Гурса Э. Курс математического анализа. Т. 3, ч. 2. М., 1934.
8. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959.

9. Gellerstedt S. Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik. 1937. Vol. 26 A, no. 3.
 10. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962.

Поступила в редакцию
 20 мая 1966 г.

Институт математики
 СО АН СССР

О некоторых задачах для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения

Рассмотрим уравнение

$$L(u) \equiv k(y)u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (1)$$

где $k = y^2 - y$. Это уравнение относится к уравнениям смешанного типа: оно эллиплично при $y < 0$ и $y > 1$, гиперболично при $0 < y < 1$, а вдоль прямых $y = 0$, $y = 1$ вырождается параболически. Кривые

$$x \pm (1/4)k'\sqrt{-k} \pm (1/8) \arcsin k' = \text{const}$$

являются вещественными характеристиками уравнения (1), причем прямые $y = 0$, $y = 1$ представляют собой геометрическое место точек возврата этих кривых.

Ниже будут исследованы некоторые задачи для уравнения (1) в областях, содержащих внутри себя интервалы прямых $y = 0$ и $y = 1$.

1. Постановка задачи А. Введем следующие обозначения:

$$\omega(y) = \begin{cases} (1/4)k'\sqrt{-k} + (1/8) \arcsin k' & \text{при } 0 \leq y \leq 1, \\ (1/4)k'\sqrt{-k} - (1/8) \ln |k' + 2\sqrt{k}| & \text{при } y \leq 0, y \geq 1, \end{cases} \quad (2)$$

$$\tilde{y}(y) = \begin{cases} -(3/2a)^{2/3}(\omega \mp \pi/16)^{2/3} & \text{при } 0 \leq y \leq 1, \\ (3\omega/2a)^{2/3} & \text{при } y \leq 0, y \geq 1, \end{cases} \quad (3)$$

$$\tilde{x} = x/a, \quad a \equiv \text{const}, \quad \pi/8 < a < \pi/4, \quad (4)$$

$$a\xi_1(x, y) = x + \omega - \pi/16, \quad a\eta_1(x, y) = x - \omega + \pi/16, \quad (5)$$

$$b(\tilde{y}) = \left(\frac{d\tilde{y}}{dy} \right)^{-2} \frac{d^2\tilde{y}}{dy^2}, \quad \tilde{\omega}(y) = \exp \left(\frac{1}{2} \int_0^{\tilde{y}} b(s) ds \right). \quad (6)$$

На плоскости переменных x, y рассмотрим точки

$$\begin{aligned} A_1(0, 0), \quad A_2(0, 0), \quad A_0(\pi/8, 0), \quad B(a - \pi/16, 1/2), \\ A_3(a, 1), \quad A_4(0, 1), \quad A(a - \pi/8, 1), \quad B_1(\pi/16, 1/2). \end{aligned}$$

Пусть D^* – конечная односвязная область, ограниченная: 1) дугой $\sigma_0: (x-a/2)^2 + \omega^2 = a^2/4, y \leq 0$; 2) дугой $\sigma_1: (x-a/2)^2 + \omega^2 = a^2/4, y \geq 1$; 3) характеристиками $A_1B_1: \eta_1 = \pi/8a, B_1A_4: \xi_1 = 0, A_2B: \xi_1 = 1 - \pi/8a, BA_3: \eta_1 = 1$ уравнения (1). Пусть, далее, $B_0(D)$ – точка пересечения характеристик $A_0B_0: \eta_1 = \pi/4a$ и $AB_0: \xi_1 = 1 - \pi/8a$ ($AD: \eta_1 = 1 - \pi/8a$ и B_1A_4); C – точка пересечения характеристик A_0B_1 и $BC: \eta_1 = 1$; D – часть области D^* , лежащая выше кривой DAB ; D^+ – эллиптическая часть области D ; $\Delta(\Delta^*)$ – гиперболическая часть D , лежащая выше кривой A_4DA (ABA_3); D^- – область характеристического четырехугольника A_0B_0AD ; $D_1(D_0)$ – подобласть области D^- , лежащая выше (ниже) характеристики BC .

Следуя А. В. Бицадзе [1], *правильным в области D^* решением уравнения (1)* назовем такое его решение $u(x, y)$, которое обладает следующими свойствами: 1) u непрерывно всюду в замкнутой области $\bar{D}^*$, за исключением точек A, A_0 и, быть может, точек A_1, A_2, A_3, A_4 , где оно обращается в бесконечность (∞) порядка $\alpha < 1/6$; 2) $u_y(u_x)$ непрерывна всюду в замкнутой области $\bar{D}^*$, за исключением точек A, A_0 и, быть может, A_1, A_2, A_3, A_4 и характеристик, выходящих из них, где она обращается в ∞ порядка $< 5/6$ ($< 7/6$) и < 1 (< 1) соответственно; 3) u дважды непрерывно дифференцируемо всюду в D^* , за исключением, быть может, границы области D^- .

Задача А. Найти правильное в области D^* решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям:

$$(\tilde{\omega}u)_{\sigma_0} = \varphi_1(\tilde{x}), \quad 0 < \tilde{x} < 1, \quad (7)$$

$$(\tilde{\omega}u)_{\sigma_0} = \varphi_0(\tilde{x}), \quad 0 < \tilde{x} < 1, \quad (8)$$

$$(\tilde{\omega}u)_{AB_0} = \psi_1(\eta_1), \quad x_0 < \eta_1 \leq \pi/4a, \quad (9)$$

$$(\tilde{\omega}u)_{AD} = \psi_2(\xi_1), \quad 0 \leq \xi_1 < x_0, \quad (10)$$

где $\tilde{\omega}$ задается формулой (6), причем в (3) перед $\pi/16$ берется знак минус, а $x_0 = 1 - \pi/8a$. Относительно заданных функций φ_i, ψ_i предполагается, что они представимы в виде

$$\varphi_1(\tilde{x}) = \alpha_1(\tilde{x})(\tilde{x} - \tilde{x}^2)^{-\kappa_1}, \quad (11)$$

$$\varphi_0(\tilde{x}) = \alpha_0(\tilde{x})\tilde{x}^{-\kappa_0}(1 - \tilde{x})^{\alpha/2}, \quad (12)$$

$$\psi_1(\eta_1) = \beta_1(\eta_1)(\eta_1 - x_0)^{-\alpha}(\pi/4a - \eta_1)^{1/6-\alpha}, \quad (13)$$

$$\psi_2(\xi_1) = \beta_2(\xi_1)(x_0 - \xi_1)^{-\alpha}, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_i &\in C^2(0 \leq \tilde{x} \leq 1), \quad \beta_1 \in C^4(x_0 \leq \eta_1 \leq \pi/4a), \\ \beta_2 &\in C^4(0 \leq \xi_1 \leq x_0), \quad \beta_i(x_0) \neq 0, \quad \beta_1(\pi/4a) \neq 0, \\ \alpha_0(1) &\neq 0, \quad a \ 1/12 > \kappa_i \equiv \text{const.} \end{aligned}$$

2. Единственность решения задачи А.

Лемма 1. Пусть $u(x, y)$ – правильное в области $\Delta(\Delta^*)$ решение уравнения (1), обращающееся в нуль на AD (AB). Тогда

$$\int_0^{x_1} u(x, 1)u_y(x, 1)dx \geq 0 \quad \left(\int_{x_1}^a u(x, 1)u_y(x, 1)dx \geq 0 \right),$$

где $x_1 = a - \pi/8$.

Лемма 2. Пусть $u(x, y)$ – правильное в области D^+ решение уравнения (1), обращающееся в нуль на σ_1 . Тогда

$$\int_0^a u(x, 1)u_y(x, 1)dx \leq 0.$$

Доказательство леммы 1 проводится методом Ф. И. Франкля [2]. В области Δ справедливо тождество

$$uL(u) \equiv \frac{\partial}{\partial x}(ku u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(u u_y) - ku_x^2 - u_y^2 = 0. \quad (15)$$

Пусть Δ_ε – подобласть Δ , ограниченная характеристиками

$$(A_4D)_\varepsilon: \xi_1 = \varepsilon/a, \quad (AD)_\varepsilon: \eta_1 = x_0 - \varepsilon/a$$

и отрезком $(A_4A)_\varepsilon$ прямой $y = 1$, где ε – сколь угодно малое положительное число. Проинтегрируем (15) по области Δ_ε и воспользуемся формулой Грина. В результате получим

$$\int_{\varepsilon}^{x_1-\varepsilon} u(x, 1)u_y(x, 1)dx = J_1(\varepsilon) + \iint_{\Delta_\varepsilon} (ku_x^2 + u_y^2)dx dy = J_1(\varepsilon) + J_2(\varepsilon), \quad (16)$$

где

$$J_1(\varepsilon) = - \left(\sqrt{-k}u^2 \right) (D_\varepsilon) + \frac{1}{4} \int_{(A_4D)_\varepsilon} \frac{-k'u^2}{\sqrt{-k}} dy + \frac{1}{4} \int_{(DA)_\varepsilon} \frac{k'u^2}{\sqrt{-k}} dy. \quad (17)$$

Интегралы, входящие в (17), неотрицательны, так как $k' = 2y - 1 \geq 0$ при $y \geq 1/2$. Следовательно,

$$J_1(\varepsilon) \geq - \left(\sqrt{-k}u^2 \right) (D_\varepsilon). \quad (18)$$

В характеристических переменных $\xi = x_1 - a\eta_1$, $\eta = x_1 - a\xi_1$ уравнение (1) записывается в виде

$$\sqrt{-k}(u_\xi - u_\eta) = m(y)u_{\xi\eta}, \quad m(y) = -8k^2/k'. \quad (19)$$

Пусть $\tilde{\Delta}_\varepsilon(\tilde{A}_{4\varepsilon}, \tilde{D}_\varepsilon, \tilde{A}_\varepsilon)$ – образ $\Delta_\varepsilon(A_{4\varepsilon}, D_\varepsilon, A_\varepsilon)$ на плоскости переменных ξ, η . Легко показать, что якобиан преобразования

$$D(x, y)/D(\xi, \eta) = 1/2\sqrt{-k},$$

а $ku_x^2 + u_y^2 = 4ku_\xi u_\eta$, поэтому

$$J_2(\varepsilon) = -2 \iint_{\tilde{\Delta}_\varepsilon} \sqrt{-k} u_\xi u_\eta d\xi d\eta. \quad (20)$$

Из (19) заключаем

$$\sqrt{-k} u_\xi u_\eta = \sqrt{-k} u_\eta^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial m}{\partial \xi} u_\eta^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} (m u_\eta^2). \quad (21)$$

С учетом (21) равенство (20) можно переписать в виде

$$J_2(\varepsilon) = 2 \iint_{\tilde{\Delta}_\varepsilon} \sqrt{-k} \Phi(y) u_\eta^2 d\xi d\eta - \oint_{(\tilde{A}\tilde{A}_4\tilde{D})_\varepsilon} m(y) u_\eta^2 d\eta,$$

где $\Phi(y) = 1 + 2(k/k')$. Очевидно, $\Phi(y) \geq 0$ при $0 \leq y \leq 1$, а $m(y) = 0$ при $\eta = \xi$. Следовательно,

$$J_2(\varepsilon) \geq \int_{(\tilde{A}\tilde{D})_\varepsilon} m(y) u_\eta^2 d\eta. \quad (22)$$

Из (16), в силу (18) и (22), имеем

$$\int_{\varepsilon}^{x_1-\varepsilon} u(x, 1) u_y(x, 1) dx \geq - \left(\sqrt{-k} u^2 \right) (D_\varepsilon) + \int_{(AD)_\varepsilon} m(y) u_\eta^2 d\eta.$$

Отсюда непосредственно вытекает справедливость леммы 1 в случае области Δ .

Лемма 1 в случае области Δ^* доказывается так же, как в случае области Δ . Доказательство леммы 2 такое же, как и в случае уравнения Трикоми [3]. Опираясь на леммы 1 и 2 и на единственность решения задачи Гурса для уравнения (1) в области D^- с данными на характеристиках AB_0, AD (см. п. 3), легко убедиться в единственности решения задачи A .

3. Задача Гурса для уравнения (1) в области D^- .

Задача A_1 . Найти функцию $u(x, y)$ со следующими свойствами:

- 1) u непрерывна в замкнутой области $\overline{D^-}$ всюду за исключением точек A и A_0 , где она обращается в ∞ порядка $\alpha < 1/6$; 2) $u \in C^2(D^-)$, $L(u) = 0$ в D^- ; 3) u удовлетворяет краевому условию (9), (10).

1°. В уравнении (1) перейдем к переменным Франкля [4] $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ и к новой функции z по формуле

$$z(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{\omega}u, \quad \tilde{x} = x/a, \quad \tilde{y} = -(3/2a)^{2/3}(\pi/16 - \omega)^{2/3}. \quad (23)$$

Тогда оно преобразуется в уравнение

$$\tilde{y}z_{\tilde{x}\tilde{x}} + z_{\tilde{y}\tilde{y}} + c(\tilde{y})z = 0, \quad (24)$$

где

$$c(\tilde{y}) = -(1/2)b_{\tilde{y}} + (b^2).$$

Легко показать, что

$$\tilde{y} = (y - 1)a^{-2/3}F^{2/3}(-1/2, 3/2, 5/2; 1 - y), \quad (25)$$

где F – гипергеометрическая функция. Следовательно, если $0 < y \leq 1$, то $\tilde{y}$ допускает производные любого порядка. Очевидно, этим свойством обладает и $c(\tilde{y})$ как функция от $\tilde{y}$ при $\tilde{y} > -(3\pi/16a)^{2/3}$ ($y > 0$).

В характеристических переменных

$$\xi = \xi_1 = \tilde{x} - (2/3)(-\tilde{y})^{-2/3}, \quad \eta = \eta_1 = \tilde{x} + (2/3)(-\tilde{y})^{-2/3} \quad (26)$$

уравнение (24) записывается в виде

$$E(1/6, 1/6)z = c_1(\xi, \eta)(\eta - \xi)^{-2/3}z = 0, \quad (27)$$

где

$$E(1/6, 1/6) \equiv \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{6} \frac{1}{\eta - \xi} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} \right),$$

$$c_1(\xi, \eta) = (1/4)(4/3)^{2/3}c(\tilde{y}), \quad \tilde{y} = -(3/4)^{2/3}(\eta - \xi)^{2/3}. \quad (28)$$

Обозначим снова через $D_1(A, B, C, D)$ образ области D_1 (точек A, B, C, D) на плоскости переменных ξ, η .

Для любой функции $z(\xi, \eta) \in C^2(D_1)$ имеет место следующее тождество [5]:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} [zR(\xi, \eta; x, y)] - R(\xi, \eta; x, y)E\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)z = \\ & = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[z \left(\frac{\partial R}{\partial \eta} - \frac{1}{6} \frac{R}{\eta - \xi} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[z \left(\frac{\partial R}{\partial \xi} + \frac{1}{6} \frac{R}{\eta - \xi} \right) \right], \end{aligned} \quad (29)$$

где R – функция Римана для уравнения Эйлера–Дарбу

$$E\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)z = 0 \quad (30)$$

и задается формулой

$$R(\xi, \eta; x, y) = (\eta - \xi)^{1/3} (y - \xi)^{-1/6} (\eta - x)^{-1/6} F(1/6, 1/6, 1; \sigma), \quad (31)$$

$$\sigma = (x - \xi)(\eta - y) / (\xi - y)(x - \eta).$$

Допустив существование решения задачи A_1 , проинтегрируем тождество (29) по области $(x < \xi < x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon < \eta < y, (x, y) \in D_1)$, где ε — сколь угодно малое положительное число. В полученном равенстве учтем, что

$$R(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon; x, y) = O(\varepsilon^{1/3}), \quad (x, y) \in D_1,$$

и перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. В результате после элементарных преобразований придем к следующему заключению: если существует решение задачи A_1 , то в области D_1 оно удовлетворяет интегральному уравнению

$$z(x, y) - \int_{x_0}^x d\xi \int_{x_0}^y z(\xi, \eta) c_0(\xi, \eta) R(\xi, \eta; x, y) d\eta = z_0(x, y), \quad (32)$$

где

$$c_0(\xi, \eta) = -c_1(\xi, \eta)(\eta - \xi)^{-2/3}, \quad (33)$$

$$z_0(x, y) = \int_{x_0}^y \left(\psi'_1(\eta) + \frac{1}{6} \frac{\psi_1(\eta)}{\eta - x_0} \right) R(x_0, \eta; x, y) d\eta +$$

$$+ \int_{x_0}^x \left(\psi'_2(\xi) + \frac{1}{6} \frac{\psi_2(\xi)}{\xi - x_0} \right) R(\xi, x_0; x, y) d\xi. \quad (34)$$

Исходя из свойств функций R, ψ_1, ψ_2 (см. (13), (14) и (31)), можно показать:

1) $z_0(z, y)$ — решение задачи Гурса (задачи A_1) для уравнения (30) в области D_1 , удовлетворяющее граничному условию (9), (10), а именно,

$$(z)_{AB} = \psi_1(y), \quad x_0 < y \leq 1; \quad (z)_{AD} = \psi_2(y), \quad 0 \leq x < x_0;$$

2) если существует решение уравнения Вольтерра (32), то оно совпадает с решением задачи A_1 в D_1 .

Очевидно, решение уравнения (32) всегда можно представить в виде

$$z(x, y) = z_0(x, y) + Z(x, y), \quad (35)$$

где Z удовлетворяет уравнению

$$Z(x, y) - \int_{x_0}^x d\xi \int_{x_0}^y Z(\xi, \eta) c_0(\xi, \eta) R(\xi, \eta; x, y) d\eta = Z_0(x, y), \quad (36)$$

$$Z_0(x, y) = \int_{x_0}^x d\xi \int_{x_0}^y z_0(\xi, \eta) c_0(\xi, \eta) R(\xi, \eta; x, y) d\eta.$$

В силу (28), (31), (33), (34), $Z \in C(\overline{D}_1)$, если оно существует. Из этого факта, на основании единственности и существования функций Римана для уравнения (27) [5], вытекает существование и единственность решения Z уравнения (36).

Функция $z(x, y)$ в (35) обладает следующими свойствами:

- 1) $z \in C(\overline{D}_1 - A)$ и в точке $A(x_0, x_0)$ обращается в ∞ порядка α ;
- 2) $z_x(z_y)$ непрерывна всюду в $\overline{D}_1$, за исключением характеристики $AB: x = x_0$ ($AD: y = x_0$), где она обращается в ∞ порядка $\alpha + 5/6$ при $y \neq x_0$ ($x \neq x_0$) и в ∞ порядка $\alpha + 1$ в точке A ;
- 3) $z(x, 1) \in C^4(0 \leq x < x_0)$, $z(0, y) \in C^4(x_0 < y \leq 1)$.

Достаточно показать, что указанными выше свойствами $z(x, y)$ обладает функция $z_0(x, y)$.

Из (31) следует

$$\begin{aligned} R(x_0, \eta; x, y) &= (\eta - x_0)^{1/3} (y - x_0)^{-1/6} (\eta - x)^{-1/6} F(1/6, 1/6, 1; \sigma_1), \\ R(\xi, x_0; x, y) &= (x_0 - \xi)^{1/3} (y - \xi)^{-1/6} (x_0 - x)^{-1/6} F(1/6, 1/6, 1; \sigma_2), \\ R(x_0, y; x, y) &= (y - x_0)^{1/6} (y - x)^{-1/6}, \\ R(x, x_0; x, y) &= (x_0 - x)^{1/6} (y - x)^{-1/6}, \end{aligned} \tag{37}$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= (x - x_0)(\eta - y) / (x_0 - y)(x - \eta), \\ \sigma_2 &= (x - \xi)(x_0 - y) / (\xi - y)(x - x_0). \end{aligned}$$

Пусть (см. (34))

$$\begin{aligned} z_1(x, y) &= \int_{x_0}^y \Phi_1(\eta) R(x_0, \eta; x, y) d\eta, \\ z_2(x, y) &= \int_{x_0}^x \Phi_2(\xi) R(\xi, x_0; x, y) d\xi, \end{aligned} \tag{38}$$

где

$$\Phi_1(\eta) = \psi'_1(\eta) + \frac{1}{6} \frac{\psi_1(\eta)}{\eta - x_0}, \quad \Phi_2(\xi) = \psi'_2(\xi) + \frac{1}{6} \frac{\psi_2(\xi)}{\xi - x_0}.$$

На основании (13), (14) можно записать

$$\Phi_1(\eta) = \overline{\beta}_1(\eta)(\eta - x_0)^{-\alpha-1}, \quad \Phi_2(\xi) = \overline{\beta}_2(\xi)(x_0 - \xi)^{-\alpha-1}, \tag{39}$$

где

$$\bar{\beta}_1 \in C^3(x_0 \leq \eta \leq 1), \quad \bar{\beta}_2 \in C^3(0 \leq \xi \leq x_0), \quad \bar{\beta}_i(x_0) \neq 0.$$

Учтем в (38) равенства (37) и (39):

$$z_1(x, y) = (y - x_0)^{-1/6} \int_{x_0}^y \frac{(\eta - x_0)^{-\alpha-2/3}}{(\eta - x)^{1/6}} \bar{\beta}_1(\eta) F(1/6, 1/6, 1; \sigma_1) d\eta, \quad (40)$$

$$z_2(x, y) = (x_0 - x)^{-1/6} \int_{x_0}^x \frac{(x_0 - \xi)^{-\alpha-2/3}}{(y - \xi)^{1/6}} \bar{\beta}_2(\xi) F(1/6, 1/6, 1; \sigma_2) d\xi. \quad (41)$$

В (40) и (41) произведем подстановку $t = \frac{y - \eta}{y - x_0}$, $t = \frac{x_0 - \xi}{x_0 - x}$ соответственно:

$$z_1 = \frac{(y - x_0)^{1/6-\alpha}}{(y - x)^{1/6}} \int_0^1 (1 - t)^{-\alpha-2/3} \left(1 - \frac{y - x_0}{y - x} t\right)^{-1/6} \bar{\beta}_1 F dt, \quad (42)$$

$$z_2 = - \left(\frac{x_0 - x}{y - x_0}\right)^{1/6} (x_0 - x)^{-\alpha} \int_0^1 t^{-\alpha-2/3} \left(1 + \frac{x_0 - x}{y - x_0} t\right)^{-1/6} \beta_2 F dt. \quad (43)$$

Принимая во внимание (37), из (38) будем иметь

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} = \int_{x_0}^y \Phi_1(\eta) \frac{\partial R(x_0, \eta; x, y)}{\partial x} d\eta,$$

$$\frac{\partial z_2}{\partial x} = R(x, x_0; x, y) \Phi_2(x) + \int_{x_0}^x \Phi_2(\xi) \frac{\partial R(\xi, x_0; x, y)}{\partial x} d\xi,$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial y} = R(x_0, y; x, y) \Phi_1(y) + \int_{x_0}^y \Phi_1(\eta) \frac{\partial R(x_0, \eta; x, y)}{\partial y} d\eta,$$

$$\frac{\partial z_2}{\partial y} = \int_{x_0}^x \Phi_2(\xi) \frac{\partial R(\xi, x_0; x, y)}{\partial y} d\xi.$$

Непосредственным вычислением с использованием формулы автотрансформации для гипергеометрических функций (см. [3]) убеждаемся, что

$$\begin{aligned} \partial R(x_0, \eta; x, y) / \partial x = & (y - x_0)^{-1/6} (\eta - x_0)^{1/3} (\eta - x)^{-7/6} [f_1(x_0, \eta; x, y) + \\ & + (y - x_0)^{-2/3} (\eta - x_0)^{2/3} (\eta - x)^{-2/3} (\eta - y) (y - x)^{-1/3} f_2(x_0, \eta; x, y)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial R(\xi, x_0; x, y)/\partial x &= (x_0 - x)^{-7/6}(x_0 - \xi)^{1/3}(y - \xi)^{-1/6}[f_1(\xi, x_0; x, y) + \\
&+ (x_0 - x)^{-2/3}(x_0 - \xi)^{2/3}(y - \xi)^{-2/3}(x_0 - y)(y - x)^{-1/3}f_2(\xi, x_0; x, y)], \\
\partial R(x_0, \eta; x, y)/\partial y &= (y - x_0)^{-7/6}(\eta - x_0)^{1/3}(\eta - x)^{-1/6}[-f_1(x_0, \eta; x, y) + \\
&+ (y - x_0)^{-2/3}(\eta - x_0)^{2/3}(\eta - x)^{-2/3}(x_0 - x)(y - x)^{-1/3}f_2(x_0, \eta; x, y)], \\
\partial R(\xi, x_0; x, y)/\partial y &= (x_0 - x)^{-1/6}(x_0 - \xi)^{1/3}(y - \xi)^{-7/6}[-f_1(\xi, x_0; x, y) + \\
&+ (x_0 - x)^{-2/3}(x_0 - \xi)^{2/3}(y - \xi)^{-2/3}(\xi - x)(y - x)^{-1/3}f_2(\xi, x_0; x, y)],
\end{aligned}$$

где

$$f_1(x_0, \eta; x, y) = \frac{1}{6}F(1/6, 1/6, 1; \sigma_1), \quad f_2(x_0, \eta; x, y) = \frac{1}{36}F(5/6, 5/6, 2; \sigma_2).$$

С учетом этих равенств нетрудно показать, что

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z_1}{\partial x} &= (x_0 - x)^{-\alpha-5/6}(y - x_0)^{1/6-\alpha}(y - x)^{\alpha-1/3}m_1(x, y) \times \\
&\times F(1/6 - \alpha, 1/3 - \alpha, 4/3 - \alpha; (y - x_0)/(y - x)) + \\
&+ (x_0 - x)^{-\alpha-5/6}(y - x_0)^{-7/6-\alpha}(y - x)^{\alpha-4/3}m_2(x, y) \times \\
&\times F(1 - \alpha, 7/6 - \alpha, 3 - \alpha; (y - x_0)/(y - x)), \\
\frac{\partial z_2}{\partial x} &= (x_0 - x)^{-\alpha-5/6}(y - x)^{-1/6}\bar{\beta}_2(x) + \\
&+ (x_0 - x)^{-\alpha-5/6}(y - x)^{-1/6}m_3(x, y)F(1/6, 1, 4/3 - \alpha; (x_0 - x)/(y - x)) + \\
&+ (x_0 - x)^{-\alpha-5/6}(y - x)^{-7/6}(y - x_0)m_4(x, y)F(5/6, 1, 2 - \alpha; (x_0 - x)/(y - x)), \\
\frac{\partial z_1}{\partial y} &= (y - x_0)^{-\alpha-5/6}(y - x)^{-1/6}[\bar{\beta}_1(y) + m_5(x, y) \times \\
&\times F(1/6, 1, 4/3 - \alpha; (y - x_0)/(y - x))] + \\
&+ (y - x_0)^{-\alpha-5/6}(y - x)^{-7/6}(x_0 - x)m_6(x, y)F(5/6, 1, 2 - \alpha; (y - x_0)/(y - x)), \\
\frac{\partial z_2}{\partial y} &= (y - x_0)^{-\alpha-5/6}(y - x)^{\alpha-1/3}(x_0 - x)^{1/6-\alpha}m_7(x, y) \times \\
&\times F(1/6 - \alpha, 1/3 - \alpha, 4/3 - \alpha; (x_0 - x)/(y - x)) + \\
&+ (y - x_0)^{-\alpha-5/6}(y - x)^{\alpha-4/3}(x_0 - x)^{7/6-\alpha}m_8(x, y) \times \\
&\times F(7/6 - \alpha, 1 - \alpha, 3 - \alpha; (x_0 - x)/(y - x)),
\end{aligned}$$

где $m_i(x, y) \in C^0(\bar{D}_1)$ ($i = 1, 2, \dots, 8$). Следовательно (не забывая, что $z_0 = z_1 + z_2$), можно записать

$$\frac{\partial z_0}{\partial x} = O[(x_0 - x)^{-\alpha-5/6}(y - x)^{-1/6}], \quad (44)$$

$$\frac{\partial z_0}{\partial y} = O[(y - x_0)^{-\alpha-5/6}(y - x)^{-1/6}]. \quad (45)$$

Непосредственно легко проверить, что

$$\frac{\partial^i R(x_0, \eta; x, 1)}{\partial x^i} = O[(\eta - x_0)^{1/3}(\eta - x)^{-1/6-i}], \quad (46)$$

$$\frac{\partial^i R(\xi, x_0; x, 1)}{\partial x^i} = O[(x_0 - \xi)^{1/3}(x_0 - x)^{-1/6-i}], \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Пусть

$$z(x, 1) = (z)_{BC} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq x_0. \quad (47)$$

Из (35), (36), (38), (39) на основании (46) заключаем

$$\psi^{(i)}(x) = a_i(x)(x_0 - x)^{1/6-\alpha-i}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (48)$$

где $a_i \in C(0 \leq x \leq x_0)$, причем $a_i(x_0) \neq 0$. Аналогично доказывается, что

$$(z)_{DC} = z(0, y) \in C^4(x_0 < y \leq 1). \quad (49)$$

Равенства (42)–(45), (47)–(49) устанавливают нужные свойства функции $z(x, y)$.

2°. Исследуем теперь задачу Гурса для области D_0 с данными на BC и BB_0 . С этой целью перейдем в (1) к переменным $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ и к функции z :

$$z(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{\omega}u, \quad \tilde{x} = x/a, \quad \tilde{y} = -(3/2a)^{2/3}(\pi/16 + \omega)^{2/3}. \quad (50)$$

Тогда z будет удовлетворять уравнению (24), где $c(\tilde{y})$ допускает производные любого порядка $\tilde{y} > -(3\pi/16a)^{2/3}$.

Замена переменных

$$\xi = \eta_1 - 1, \quad \eta = \xi_1 - 1 + \pi/4a \quad (51)$$

преобразует (24) в (27).

Образ области D_0 (точек A_0, B_0, B, C) на плоскости переменных ξ, η обозначим снова через D_0 (A_0, B_0, B, C).

Из (9) и (47), согласно (23) и (26), можно записать

$$(z)_{BB_0} = (\omega_0/\omega_1)_{BB_0}\psi_1(\eta_1), \quad 1 \leq \eta_1 \leq \pi/4a; \quad (52)$$

$$(z)_{BC} = (\omega_0/\omega_1)_{BC}\psi(\xi_1), \quad 0 \leq \xi_1 \leq x_0, \quad (53)$$

где $\omega_0(\omega_1)$ совпадает с $\tilde{\omega}$ в формуле (50) ((23)).

Учитывая (51) в (52), (53), получаем

$$(z)_{BB_0} = f_1(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq \xi_0 = \pi/4a - 1; \quad (54)$$

$$(z)_{BC} = f_2(\eta), \quad \xi_0 \leq \eta \leq \eta_0 = \pi/8a, \quad (55)$$

где f_1 и f_2 , в силу (13) и (48), представимы в виде

$$f_1 = \Phi_0(\xi)(\xi_0 - \xi)^{1/6-\alpha}, \quad \Phi_0 \in C^4(0 \leq \xi \leq \xi_0); \quad (56)$$

$$f_2^{(i)} = \Phi_i(\eta)(\eta_0 - \eta)^{1/6-\alpha-i}, \quad \Phi_i \in C(\xi_0 \leq \eta \leq \eta_0); \quad (57)$$

$$\Phi_0(\xi_0) \neq 0, \quad \Phi_i(\eta_0) \neq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Подлежащая исследованию задача заключается в нахождении правильного в области $D_0(0 < \xi < \xi_0, \xi_0 < \eta < \eta_0)$ решения уравнения (27), которое удовлетворяет условиям (54), (55).

Как и в предыдущем пункте, можно показать, что решение z этой задачи представимо в форме (35), где

$$\begin{aligned} z_0(x, y) = & R(0, \eta_0; x, y)f_1(0) + \int_0^x \left(f_1'(\xi) + \frac{1}{6} \frac{f_1(\xi)}{\xi - \eta_0} \right) R(\xi, \eta_0; x, y) d\xi + \\ & + \int_{\eta_0}^y \left(f_2'(\eta) + \frac{f_2(\eta)}{6\eta} \right) R(0, \eta; x, y) d\eta, \end{aligned} \quad (58)$$

а Z – решение уравнения Вольтерра

$$\begin{aligned} Z(x, y) - \int_0^x d\xi \int_{\eta_0}^y Z(\xi, \eta) c_0(\xi, \eta) R(\xi, \eta; x, y) d\eta = \\ = \int_0^x d\xi \int_{\eta_0}^y Z_0(\xi, \eta) c_0(\xi, \eta) R(\xi, \eta; x, y) d\eta. \end{aligned}$$

Пусть

$$z_1 = \int_0^x F_1(\xi) R(\xi, \eta_0; x, y) d\xi, \quad z_2 = \int_{\eta_0}^y F_2(\eta) R(0, \eta; x, y) d\eta, \quad (59)$$

где

$$F_1 = f_1'(\xi) + \frac{1}{6} \frac{f_1(\xi)}{\xi - \eta_0}, \quad F_2 = f_2'(\eta) + \frac{f_2(\eta)}{6\eta}. \quad (60)$$

В силу (56), (57), ясно, что $F_1 \in C^3(0 \leq \xi < \xi_0)$, $F_2 \in C^3(\xi_0 \leq \eta < \eta_0)$ и

$$F_1^{(i)}(\xi) = O[(\xi_0 - \xi)^{-\alpha-5/6-i}], \quad (61)$$

$$F_2^{(i)}(\eta) = O[(\eta_0 - \eta)^{-\alpha-5/6-i}], \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Следовательно, с учетом (31) можно записать

$$z_1(x, y) = O(1) \int_0^x (\xi_0 - \xi)^{-\alpha-5/6} (y - \xi)^{-1/6} d\xi, \quad (62)$$

$$z_2(x, y) = O(1) \int_{\eta_0}^y (\eta_0 - \eta)^{-\alpha-5/6} (\eta - x)^{-1/6} d\eta, \quad (63)$$

где $O(1)$ означает ограниченную в $\overline{D}_0$ величину, отличную от нуля в точке A_0 .

Из (62), (63) заключаем: функция

$$z_1(x, y) + z_2(x, y) = z_0(x, y) \in C(\overline{D}_0 - A_0)$$

и в точке A_0 обращается в ∞ порядка α (относительно $y - x$). Очевидно, этим свойством обладает и функция $z(x, y)$, так как $Z \in C(\overline{D}_0)$.

В силу (37), из (59) имеем

$$\frac{\partial z_1}{\partial y} = \int_0^x F_1(\xi) \frac{\partial R(\xi, \eta_0; x, y)}{\partial y} d\xi, \quad (64)$$

$$\frac{\partial z_2}{\partial y} = R(0, y; x, y) F_2(y) + \int_{\eta_0}^y F_2(\eta) \frac{\partial R(0, \eta; x, y)}{\partial y} d\eta. \quad (65)$$

Нетрудно показать, что в области $\overline{D}_0$

$$\frac{\partial R(\xi, \eta_0; x, y)}{\partial y} = O(1)(y - \xi)^{-7/6}, \quad \xi \leq x, \quad (66)$$

$$\frac{\partial R(0, \eta; x, y)}{\partial y} = O(1)(y - x)^{-1/3}(\eta - x)^{-5/6}, \quad (67)$$

$$R(0, y; x, y) = O(1)(y - x)^{-1/6}. \quad (68)$$

Учтем (61), (66)–(68) в (64), (65):

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_1}{\partial y} &= O(1) \int_0^x (\xi_0 - \xi)^{-\alpha-5/6} (y - \xi)^{-7/6} d\xi, \\ \frac{\partial z_2}{\partial y} &= O(1)(y - x)^{-1/6}(\eta_0 - y)^{-\alpha-5/6} + \\ &+ O(1)(y - x)^{-1/3} \int_{\eta_0}^y (\eta_0 - \eta)^{-\alpha-5/6} (\eta - x)^{-5/6} d\eta. \end{aligned}$$

Отсюда легко получить, что

$$\frac{\partial z_0(\xi_0, y)}{\partial y} = O(1)(y - \xi_0)^{-\alpha-1}(\eta_0 - y)^{-\alpha-5/6}. \quad (69)$$

Аналогично устанавливается справедливость следующих равенств:

$$\frac{\partial^i z_0(\xi_0, y)}{\partial y^i} = O(1)(y - \xi_0)^{-\alpha-i}(\eta_0 - y)^{1/6-\alpha-i}, \quad (70)$$

$$\frac{\partial^i z_0(x, \xi_0)}{\partial x^i} = O(1)(\xi_0 - x)^{-\alpha-i}, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (71)$$

Отметим, что функция $z(x, y)$ также представима в форме (70), (71).

Возвращаясь в (70), (71) к функции u и к переменным ξ_1, η_1 по формулам (50) и (51), получим

$$\left. \frac{\partial^i(\tilde{\omega}u)}{\partial \xi_1^i} \right|_{A_0 B_0} = O(1)\xi_1^{-\alpha-i}(x_0 - \xi_1)^{1/6-\alpha-i}; \quad (72)$$

$$\left. \frac{\partial^i(\tilde{\omega}u)}{\partial \eta_1^i} \right|_{A_0 C} = O(1)(\pi/4a - \eta_1)^{-\alpha-i}, \quad i = 1, 2, 3, 4; \quad (73)$$

$$\tilde{\omega}u = O(1)(\pi/4a + \xi_1 - \eta_1)^{-\alpha} \quad \text{в } D_0. \quad (74)$$

Пусть

$$(\omega_0 u)|_{A_0 B_1} = \bar{\psi}_1(\eta_1), \quad \pi/8a \leq \eta_1 < \pi/4a, \quad (75)$$

$$(\omega_0 u)|_{A_0 B_0} = \bar{\psi}_2(\xi_1), \quad 0 < \xi_1 \leq x_0. \quad (76)$$

Из установленных в первом пункте свойств функции $\tilde{\omega}u$ на $B_1 C$ и из (72)–(74) следует

$$\bar{\psi}_1^{(i)}(\eta_1) = O(1)(\pi/4a - \eta_1)^{-\alpha-1}, \quad i = 0, 1, \dots, 4, \quad (77)$$

$$\bar{\psi}_2^{(i)}(\xi_1) = O(1)\xi_1^{-\alpha-i}(x_0 - \xi_1)^{1/6-\alpha-i}, \quad i = 0, 1, \dots, 4. \quad (78)$$

Замечания: 1) функция $u(x, y)$ в точке A_0 обращается в ∞ порядка α только потому, что первая производная от $\psi_1(\eta_1)$ по η_1 в точке B_0 становится бесконечной порядка $\alpha + 5/6$ (см. (74), (9), (13)); 2) особенность порядка $\alpha + 5/6$ у первой производной от $\bar{\psi}_2(\xi_1)$ в точке B_0 вызвана исключительно тем, что функция $\psi_2(\xi_1)$ в точке A имеет ∞ порядка α (см. (78), (10), (14)).

4. Сингулярная задача Трикоми для уравнения (24). 1°. В уравнении (24) перейдем к переменным $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ по формулам (3), (4), где перед $\pi/16$ берется знак минус, и к функции $z = \tilde{\omega}u$. Тогда z будет удовлетворять уравнению (24) всюду в $\tilde{D}$, где $\tilde{D}$ – образ области D на плоскости переменных $\tilde{x}$, $\tilde{y}$.

Как и выше (см. п. 3), можно доказать, что коэффициент $c(\tilde{y})$ уравнения (24) допускает производные любого порядка в замкнутой области $\tilde{D}$, причем $c(0) > 0$.

Области (точки), соответствующие областям Δ , Δ^* , D^+ (точкам A_4 , A , A_3 , D , B) на плоскости переменных $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, в дальнейшем будем обозначать через $\tilde{\Delta}$, $\tilde{\Delta}^*$, D^+ ($\tilde{A}_4$, $\tilde{A}$, $\tilde{A}_3$, $\tilde{D}$, $\tilde{B}$).

Очевидно, область $\tilde{D}^+$ ограничена нормальным контуром

$$\tilde{\sigma}_1: (\tilde{x} - 1/2)^2 + 4/9\tilde{y}^3 = 1/4, \quad \tilde{y} > 0, \quad (79)$$

уравнения (24) и отрезками $\tilde{A}_4\tilde{A}_3$ прямой $\tilde{y} = 0$.

Задача A_2 . Найти функцию $z(x, y)$ со следующими свойствами:

1) $z \in C(\tilde{\Delta} - \tilde{A}_4 - \tilde{A})$, а в точках $\tilde{A}_4$, $\tilde{A}$ она может обращаться в ∞ порядка $< 1/6$; 2) $z_{\tilde{x}}(z_{\tilde{y}})$ непрерывна всюду в замкнутой области $\tilde{\Delta}$, за исключением, быть может, точек $\tilde{A}$, $\tilde{A}_4$ и характеристик, выходящих из них, где она обращается в ∞ порядка $< 7/6 (< 5/6)$ и $< 1 (< 1)$ соответственно; 3) z – регулярное ($z \in C^2(\tilde{\Delta})$) в $\tilde{\Delta}$ решение уравнения (24), удовлетворяющее граничному условию

$$z_{\tilde{y}}(\tilde{x}, 0) = \nu(\tilde{x}), \quad 0 < \tilde{x} < x_0, \quad (80)$$

и условию (10). Предполагается, что $\nu(\tilde{x}) \in C^1(0 < \tilde{x} < x_0)$ и

$$\nu(\tilde{x}) = O(1)\tilde{x}^{-\beta_0}(x_0 - \tilde{x})^{-\beta}, \quad \beta_0, \beta < 5/6; \quad (81)$$

а функция ψ_2 представима в виде (14).

Доказательство единственности. Пусть существует решение $z_0 \not\equiv 0$ однородной задачи A_2 . Тогда существует правильное в области Δ решение u_0 уравнения (1) такое, что

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{y}}(\tilde{\omega}u_0) = 0 \quad \text{на} \quad A_4A; \quad (82)$$

$$\tilde{\omega}u_0 = 0 \quad \text{на} \quad AD.$$

Принимая во внимание (6), (25), из (82) получаем

$$\frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{dy}{d\tilde{y}} + \frac{1}{2}b(\tilde{y})u_0 = 0 \quad \text{на} \quad A_4A. \quad (83)$$

Непосредственное вычисление показывает, что

$$\left. \frac{dy}{d\tilde{y}} \right|_{\tilde{y}=0} = a^{2/3}, \quad b(0) = \frac{2}{5}a^{2/3}.$$

Следовательно,

$$u_{0y}(x, 0) + \frac{1}{5}u_0(x, 0) = 0, \quad 0 < x < x_1. \quad (84)$$

Из леммы 1 и из (84) легко убедиться в том, что $u_0 \equiv 0$ в $\widetilde{\Delta}$. Поэтому $z_0 \equiv 0$ в $\widetilde{\Delta}$, так как $\tilde{\omega} \neq 0$.

2°. В уравнении (24) перейдем к характеристическим координатам ξ, η :

$$\xi = x_0 - \eta_1, \quad \eta = x_0 + \xi_1. \quad (85)$$

В результате уравнение (24) перейдет в (27), а условия (80), (10) в условия

$$[(\eta - \xi)^{1/3}(z_\eta - z_\xi)]_{\eta=\xi} = -\gamma\nu(\xi), \quad 0 < \xi < x_0, \quad (86)$$

$$z(0, \eta) = f(\eta), \quad 0 < \eta < x_0, \quad (87)$$

где

$$\gamma = (4/3)^{1/3}, \quad \tilde{\nu}(\xi) = \nu(x_0 - \xi), \quad f(\eta) = \psi_2(x_0 - \eta).$$

Очевидно, $\tilde{\nu}(\xi) \in C^1(0 < \xi < x_0)$, $f(\eta) \in C^4(0 < \eta \leq x_0)$ и, в силу (81), (14),

$$\tilde{\nu}(\xi) = O(1)\xi^{-\beta}(x_0 - \xi)^{-\beta_0}, \quad (88)$$

$$f(\eta) = O(1)\eta^{-\alpha}. \quad (89)$$

На плоскости переменных ξ, η области $\widetilde{\Delta}$ соответствует область $0 < \xi < \eta < x_0$. Обозначим ее снова через Δ . Пусть

$$u(\xi, \eta; x, y) = (\eta - \xi)^{1/6}(y - x)^{-1/6}F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1; S\right), \quad (90)$$

$$\bar{u}(\xi, \eta; x, y) = \gamma_0(\eta - \xi)^{1/3}(x - \xi)^{-1/6}(y - \eta)^{-1/6}F\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}; \frac{1}{S}\right), \quad (91)$$

где

$$\gamma_0 = \frac{\Gamma(1/6)}{\Gamma(5/6)\Gamma(1/3)}, \quad S = \frac{(x - \xi)(y - \eta)}{(\eta - \xi)(y - x)}.$$

Функция Грина–Адамара (см. [6]) для уравнения (30) задается формулой

$$U(\xi, \eta; x, y) = \begin{cases} u(\xi, \eta; x, y) & \text{при } \eta \geq x, \\ \bar{u}(\xi, \eta; x, y) & \text{при } \eta \leq x \end{cases} \quad (92)$$

и обладает следующими свойствами: 1) U как функция от x, y есть решение уравнения (30), а как функция от ξ, η – решение сопряженного уравнения; 2) при $\eta \geq x$ U совпадает с функцией R в (31) и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [U(\xi, x - \varepsilon; x, y) - U(\xi, x + \varepsilon; x, y)] = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{x - \xi}{y - x} \right)^{1/6};$$

3) при $\eta \leq x$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \eta} - \frac{1}{3} \frac{U}{\eta - \xi} \right)_{\eta=\xi} = 0, \quad \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{1}{3} \frac{U}{\eta - \xi} \right)_{\eta=\xi} = 0.$$

Опираясь на известные результаты С. Геллерстедта (см. [6, гл. 2, § 2]), можно показать: если существует правильное в области Δ решение уравнения (27), удовлетворяющее краевым условиям (86), (87), то оно удовлетворяет интегральному уравнению

$$z(x, y) = z_0(x, y) + \int_0^x d\xi \int_0^y z(\xi, \eta) c_0(\xi, \eta) U(\xi, \eta; x, y) d\eta, \quad (93)$$

где

$$\begin{aligned} z_0(x, y) = & \frac{\gamma\gamma_0}{2} \int_0^x \tilde{\nu}(\xi) (x - \xi)^{-1/6} (y - \xi)^{-1/6} d\xi + \\ & + \int_0^y \left[f'(\eta) + \frac{f(\eta)}{6\eta} \right] U(0, \eta; x, y) d\eta = N_0(x, y) + F(x, y). \end{aligned} \quad (94)$$

Следуя Геллерстедту, решение уравнения (93) будем искать в виде

$$z(x, y) = N(x, y) = Z(x, y) + F(x, y), \quad (95)$$

где $N(x, y)$ – решение уравнения

$$(y - x)E \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6} \right) N + c_1(x, y)(y - x)^{1/3} N = 0, \quad (96)$$

удовлетворяющее граничному условию

$$N(0, y) = 0, \quad [(y - x)^{1/3} (N_y - N_x)]_{y=x} = -\gamma \tilde{\nu}(x); \quad (97)$$

$Z(x, y)$ – решение уравнения

$$(y - x)E \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6} \right) Z + c_1(x, y)(y - x)^{1/3} Z = \Phi_0(x, y), \quad (98)$$

$$\Phi_0(x, y) = -c_1(x, y)(y - x)^{1/3} F(x, y), \quad (99)$$

причем

$$Z(0, y) = 0, \quad [(y - x)^{1/3} (Z_y - Z_x)]_{y=x} = 0. \quad (100)$$

Очевидно, в силу (93), N и Z должны удовлетворять соответственно уравнениям

$$N(x, y) - \int_0^x d\xi \int_{\xi}^y N(\xi, \eta) c_0(\xi, \eta) U(\xi, \eta; x, y) d\eta = N_0(x, y), \quad (101)$$

$$Z(x, y) - \int_0^x d\xi \int_{\xi}^y Z(\xi, \eta) c_0(\xi, \eta) U(\xi, \eta; x, y) d\eta = Z_0(x, y), \quad (102)$$

где

$$Z_0(x, y) = \int_0^x d\xi \int_{\xi}^y \frac{\Phi_0(\xi, \eta)}{\eta - \xi} U(\xi, \eta; x, y) d\eta. \quad (103)$$

Ниже будет доказано существование решения уравнений (101), (102) и изучены их основные свойства.

3°. Из (94) и (88), на основании обобщенной теоремы о среднем значении интеграла, имеем

$$N_0(x, y) = O(1) \int_0^x \xi^{-\beta} (x_0 - \xi)^{-\beta_0} (x - \xi)^{-1/6} (y - \xi)^{-1/6} d\xi. \quad (104)$$

Пусть $\beta_0 > 2/3$. Заменяя в (104) переменную интегрирования $\xi = x_0 xt / (x_0 - x - xt)$, получим

$$N_0(x, y) = O(1) x^{2/3-\beta} (x_0 - x)^{2/3-\beta_0} (x/y)^{1/6} \times \\ \times \int_0^1 t^{-\beta} (1-t)^{-1/6} (x_0 - x + xt)^{\beta_0+\beta-5/3} \left(1 - \frac{x}{y} \frac{x_0 - y}{x_0 - x} t\right)^{-1/6} dt. \quad (105)$$

Легко показать [7], что

$$N_0(x, y) = O(1) x^{2/3-\beta} \left(\frac{x}{y}\right)^{1/6} F_1 \left(1 - \beta, \beta_0, \frac{1}{6}, \frac{11}{6} - \beta; \frac{x}{x_0}, \frac{x}{y}\right), \quad (106)$$

где F_1 – гипергеометрическая функция переменных $x/x_0, x/y$. Так как $11/6 - \beta - (1 - \beta + \beta_0 + 1/6) = 2/3 - \beta_0$, то $F_1 \in C^0(\overline{\Delta})$ при $\beta_0 < 2/3$, а при $\beta_0 = 2/3$ имеем $F_1 \in C^0(\overline{\Delta} - A_4)$ и в точке $A_4(x_0, x_0)$ обращается в ∞ логарифмического порядка.

Из (105), (106) заключаем: 1) если $\beta_0 > 2/3$, то $N_0 \in C(\overline{\Delta} - A - A_4)$ и в точках A_4 и $A(0, 0)$ обращается в ∞ порядка $\beta_0 - 2/3$ и $\beta - 2/3$

соответственно; на характеристике $AD: x = 0$, N_0 имеет нуль порядка $5/6 - \beta$; 2) если $\beta > 2/3$ и $\beta_0 < 2/3$, то $N_0 \in C(\bar{\Delta} - A)$ и в точке A становится бесконечной порядка $\beta - 2/3$; 3) если $\beta = \beta_0 = 2/3$, то N_0 непрерывная всюду в $\bar{\Delta}$, за исключением точки A_4 , где она обращается в ∞ логарифмического порядка; 4) если $\beta_0, \beta < 2/3$, то $N_0 \in C(\bar{\Delta})$, и при приближении к точке A изнутри Δ или по прямой $y = x$ обращается в 0 порядка $2/3 - \beta$.

Справедливо тождество

$$5F\left(\frac{1}{6}, 1, \frac{1}{3}; z\right) - 3(1-z)F\left(\frac{7}{6}, 2, \frac{4}{3}; z\right) = 2F\left(\frac{1}{6}, 1, \frac{4}{3}; z\right),$$

где $z = 1 - x/y$. С учетом этого нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} N_{0y}(x, y) = & -\frac{\gamma}{2}\tilde{\nu}(y)(y-x)^{-1/3} - \frac{\gamma\gamma_0}{4}\tilde{\nu}(y)x^{5/6}y^{-7/6} \times \\ & \times \left[F\left(\frac{1}{6}, 1, \frac{4}{3}; z\right) - 2\left(\frac{y}{x}\right)^{5/6} F\left(\frac{1}{6}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}; z\right) \right] + \\ & + \frac{\gamma\gamma_0}{12} \int_0^x [\tilde{\nu}(y) - \tilde{\nu}(\xi)](x-\xi)^{-1/6}(y-\xi)^{-7/6} d\xi, \end{aligned} \quad (107)$$

$$\begin{aligned} N_{0x}(x, y) = & \frac{\gamma}{2}\tilde{\nu}(x)(y-x)^{-1/3} + \frac{\gamma\gamma_0}{4}\tilde{\nu}(x)(xy)^{-1/6} F\left(\frac{1}{6}, 1, \frac{4}{3}; z\right) + \\ & + \frac{\gamma\gamma_0}{12} \int_0^x [\tilde{\nu}(x) - \tilde{\nu}(\xi)](x-\xi)^{-7/6}(y-\xi)^{-1/6} d\xi. \end{aligned} \quad (108)$$

Из (88) и (107), (108) имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}\right) N_0(\xi, \eta) = & \frac{\gamma}{2}(\eta - \xi)^{-1/3}[\tilde{\nu}(\xi) - \tilde{\nu}(\eta)] + \\ & + O(1)\xi^{-1/3-\beta}(x_0 - \eta)^{-\beta_0} \left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{1/6}, \end{aligned} \quad (109)$$

$$\begin{aligned} (\eta - \xi)^{1/3} \left(\frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi}\right) N_0(\xi, \eta) = & -\frac{\gamma}{2}[\tilde{\nu}(\xi) + \tilde{\nu}(\eta)] + \\ & + O(1)(\eta - \xi)^{1/3}\xi^{-1/3-\beta}(x_0 - \eta)^{-\beta_0} \left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{1/6}. \end{aligned} \quad (110)$$

Здесь же отметим, что $N_0(\xi, \eta)$ есть регулярное в Δ решение уравнения (30), удовлетворяющее краевому условию (97).

4°. Функцию $N(x, y)$ из (101) будем искать в виде

$$N_0(x, y) = \int_0^x \tilde{\nu}(t) H(x, y, t) dt. \quad (111)$$

Ясно, что искомая функция H должна быть решением уравнения

$$H(x, y, t) - \lambda \int_t^x d\xi \int_\xi^y H(\xi, \eta, t) c_0(\xi, \eta) U(\xi, \eta; x, y) d\eta = H_0(x, y, t), \quad (112)$$

где

$$H_0(x, y, t) = \frac{\gamma\gamma_0}{2} (x-t)^{-1/6} (y-t)^{-1/6}, \quad \lambda = -1. \quad (113)$$

Решение H уравнения (112) ищется в виде ряда

$$H(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n H_n(x, y, t). \quad (114)$$

Очевидно (см. [9]),

$$H_n(x, y, t) = \int_t^x d\xi \int_\xi^y c_1(\xi, \eta) (\eta - \xi)^{-2/3} U(\xi, \eta; x, y) H_{n-1}(\xi, \eta, t) d\eta. \quad (115)$$

Введем следующие обозначения:

$$H_{00}(x, y, t) = H_0(x, y, t),$$

$$H_{0n}(x, y, t) = \int_t^x d\xi \int_\xi^y H_{0n-1}(\xi, \eta, t) (\eta - \xi)^{-2/3} U(\xi, \eta; x, y) d\eta, \quad n = 1, 2, \dots$$

С. Геллерстедтом показано, что

$$H_{0n}(x, y, t) = H_0(x, y, t) (x-t)^n (y-t)^{n/3} h_{0n}(x-t)/(y-t),$$

где $h_{00} = 1$ и для всех $n \geq n_0 > 3/2$

$$\frac{h^n \Gamma(5/6)}{\Gamma(4n/3 + 5/6)} \leq h_{0n}(\zeta) \leq \frac{h_{n_0}^n \Gamma(5/6)}{\Gamma(n + 5/6)(n/3 - 1/6)^{n/3 - 1/6}}, \quad (116)$$

$$0 < h, \quad h_{n_0} \equiv \text{const}, \quad 0 \leq \zeta \leq 1.$$

Из (116) с учетом известных свойств функции $c_1(\xi, \eta)$ нетрудно показать абсолютную и равномерную сходимость ряда $H(x, y, t) - H_0(x, y, t)$ при $t \leq x \leq y \leq x_0$, $\lambda = -1$.

Пусть

$$\xi = t + (x - t)\xi_0, \quad \eta = t + (y - t)\eta_0, \quad \bar{y} = (y - t)^{2/3}, \quad \bar{x} = \frac{x - t}{y - t}.$$

Согласно (90)–(92), $U(\xi, \eta; x, y) = U(\xi_0, \eta_0, \bar{x})$, т. е. U можно рассматривать как функцию только от трех переменных $\xi_0, \eta_0, \bar{x}$. Так, при $y = x$

$$U(\xi_0, \eta_0, 1) = \gamma_0(\eta_0 - \xi_0)^{1/3}(1 - \xi_0)^{-1/6}(1 - \eta_0)^{-1/6}. \quad (117)$$

Справедливо следующее равенство:

$$H_n(x, y, t) = H_0(x, y, t)(x - t)^n(y - t)^{n/3}h_n(\bar{y}, \bar{x}) \quad (h_0 = 1), \quad (118)$$

где

$$h_n(\bar{y}, \bar{x}) = \int_0^1 d\xi_0 \int_{\bar{x}\xi_0}^1 c[\gamma_2 \bar{y}(\eta_0 - \bar{x}\xi_0)]h_{n-1}\left(\bar{y}\eta_0^{2/3}, \frac{\bar{x}\xi_0}{\eta_0}\right) \times \\ \times (\eta_0 - \bar{x}\xi_0)^{-2/3}\xi_0^{n-7/6}\eta_0^{n/3-1/2}U(\xi_0, \eta_0, \bar{x})d\eta_0, \quad \gamma_2 = -\left(\frac{3}{4}\right)^{2/3}.$$

Отсюда при $y = x$ ($\bar{x} = 1$) получаем

$$H_n(x, x, t) = H_0(x, x, t)(x - t)^{4n/3}h_n(z, 1), \quad (119)$$

$$h_n(z, 1) = \int_0^1 d\xi_0 \int_{\xi_0}^1 c[\gamma_2 z(\eta_0 - \xi_0)^{2/3}]h_{n-1}\left(z\eta_0^{2/3}, \frac{\xi_0}{\eta_0}\right) \times \\ \times (\eta_0 - \xi_0)^{-2/3}\xi_0^{n-7/6}\eta_0^{n/8-1/2}U(\xi_0, \eta_0, 1)d\eta_0, \quad (120)$$

где $z = (x - t)^{2/3}$.

Поскольку c допускает производные любого порядка по z , то, в силу (117), (120), этим свойством обладает и $h_n(z, 1)$.

Из (114) и (119) имеем

$$H(x, x, t) = \frac{\gamma\gamma_0}{2}(x - t)^{-1/3}P(z^2), \quad (121)$$

где

$$P(z^2) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-z^2)^n h_n(z, 1), \quad P(0) = 1. \quad (122)$$

Следовательно (см. также (112)), P как функция от x и t имеет такую же гладкость в смысле дифференцируемости, что и z^2 .

На основании свойств функции N_0 , установленных выше, в силу (109)–(115) и (118), делаем следующий вывод:

Лемма 3. Пусть $2/3 < \beta_0$, $\beta < 5/6$. Тогда:

- 1) $N(\xi, \eta) \in C(\overline{\Delta} - A - A_4)$ и в точках A_4 и A становятся бесконечной порядка $\beta_0 - 2/3$ и $\beta - 2/3$ соответственно;
- 2) $N_\xi + N_\eta$ и $(\eta - \xi)^{1/3}(N_\eta - N_\xi)$ представимы в виде (109) и (110);
- 3) N есть регулярное в Δ решение уравнения (96), удовлетворяющее условию (97).

5°. В этом пункте будем предполагать, что $f(\eta)$ из (87) принадлежит $C^4(0 < \eta < x_0)$ и непрерывна при $\eta = x_0$, причем (см. (78))

$$f^{(i)}(\eta) = O(1)\eta^{-\alpha-i}(x_0 - \eta)^{1/6-\alpha-i}, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (123)$$

Введем функцию

$$V_0(\eta; x, y) = \begin{cases} v_0(\eta; x, y) & \text{при } \eta \geq x, \\ \bar{v}_0(\eta; x, y) & \text{при } \eta \leq x, \end{cases} \quad (124)$$

где

$$v_0 = (y - \eta)(y - x)^{-1/6}y^{-5/6}F_1(5/6, 1/6, 5/6, 2; (y - \eta)(y - x), (y - \eta)/y),$$

$$\bar{v}_0 = -3\gamma_0\eta^{1/3}(xy)^{-1/6}F_1(1/6, 1/6, 1/6, 4/3; \eta/x, \eta/y).$$

Непосредственным вычислением с использованием известных (см. [7]) свойств функции F_1 убеждаемся, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_0}{\partial x} &= \frac{1}{6}(y - x)^{-7/6}\eta^{-5/6}(y - \eta)F(5/6, 7/6, 2; S_0), \\ S_0 &= x(y - \eta)/[\eta(y - x)], \\ \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial x} &= \frac{\gamma_0}{2}x^{-7/6}\eta^{1/3}(y - \eta)^{-1/6}F(1/6, 7/6, 4/3; 1/S_0), \\ \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial y} &= \frac{\gamma_0}{2}x^{-1/6}y^{-1}(y - \eta)^{-1/6}\eta^{1/3}F(1/6, 1/6, 4/3; 1/S_0), \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} &= (y - x)^{-1/6}y^{-1}\eta^{1/6}F(-1/6, 1/6, 1; S_0), \\ v_0(x; x, y) - \bar{v}_0(x; x, y) &= 6, \\ v_0(y; x, y) - \bar{v}_0(0; x, y) &= 0, \quad y \neq 0, \\ V_{0\eta}(\eta; x, y) &= -U(0, \eta; x, y)/\eta. \end{aligned} \quad (125)$$

Из (94), согласно (125), имеем

$$F(x, y) = 6f_1(x) + \int_0^y f_1'(\eta)V_0(\eta; x, y)d\eta, \quad (126)$$

где

$$f_1(x) = xf'_1(x) + f(x)/6 \quad (127)$$

и, в силу (127),

$$f_1^{(i)}(\eta) = O(1)\eta^{-\alpha-i}(x_0 - \eta)^{-\alpha-5/6-i}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (128)$$

Далее, легко видеть, что

$$F_x(x, y) = \int_0^y f'_1(\eta)V_{0x}(\eta; x, y)d\eta, \quad (129)$$

$$F_y(x, y) = \int_0^y f'_1(\eta)V_{0y}(\eta; x, y)d\eta. \quad (130)$$

В (129), (130) учтем (128) и первые четыре соотношения из (125). После некоторого преобразования получим

$$F_x(x, y) = O(1)x^{-\alpha-1}(x_0 - x)^{-\alpha-1}(x/y)^{1/6}, \quad (131)$$

$$F_y(x, y) = O(1)y^{-\alpha-1}(x_0 - y)^{-\alpha-5/6}(x_0 - x)^{-1/6}. \quad (132)$$

Так как при $\eta \leq x$

$$U(0, \eta; x, x) = \gamma_0 x^{-1/6} \eta^{1/3} (x - \eta)^{-1/6}, \quad (133)$$

то из (94) и (123) следует $F(x, x) \in C^3(0 < x < x_0)$ и

$$F(x, x) = O(1)x^{-\alpha}(x_0 - x)^{-\alpha}. \quad (134)$$

Из свойств функции U (или V_0 , см. (125)) и равенств (131), (132), (134) заключаем, что $F(\xi, \eta)$ есть правильное в области Δ решение уравнения (30), удовлетворяющее условию

$$F(0, \eta) = f(\eta), \quad [(\eta - \xi)^{1/3} (F_\eta - F_\xi)]_{\eta=\xi} = 0. \quad (135)$$

Замечание. Особенность порядка α функции F в точке $A_4(x_0, x_0)$ (см. (134)) вызвана исключительно тем, что при $\eta = x_0$ первая производная от $f(\eta)$ обращается в ∞ порядка $\alpha + 5/6$.

Лемма 4. Пусть $f(\eta) \in C^4(0 < \eta \leq x_0)$ и удовлетворяет условию (89). Тогда F трижды непрерывно дифференцируемо по x и y при $0 \leq x < y \leq x_0$, причем

$$\left| \frac{\partial^i}{\partial y^i} F(x, y) \right| \leq N(y - x)^{-\alpha-i}, \quad i = 0, 1, 2, 3; \quad 0 < N \equiv \text{const}. \quad (136)$$

Имеют место следующие оценки:

$$\left| \frac{\partial^i \bar{u}(0, \eta; x, y)}{\partial y^i} \right| \leq N x^{-1/6} \eta^{1/3} (y - \eta)^{-1/6-i} \left(\left| \ln \frac{y(x - \eta)}{x(y - \eta)} \right| + 1 \right), \quad (137)$$

$$\left| \frac{\partial^i u(0, \eta; x, y)}{\partial y^i} \right| \leq N \eta^{1/6} (y - x)^{-1/6-i} \left(\left| \ln \frac{y(\eta - x)}{\eta(y - x)} \right| + 1 \right), \quad (138)$$

которые вытекают из (90), (91). Поэтому можно записать

$$\frac{\partial^i}{\partial y^i} F(x, y) = w_i(x, y) + \int_0 \left(f'(\eta) + \frac{f(\eta)}{6\eta} \right) \frac{\partial^i U(0, \eta; x, y)}{\partial y^i} d\eta, \quad (139)$$

где $w_i(x, y) = \sum_{j=1}^i \frac{\partial^{i-j}}{\partial y^{i-j}} \left\{ \left[f'(y) + \frac{f(y)}{6y} \right] \frac{\partial^{j-1} u(0, \eta; x, y)}{\partial y^{j-1}} \Big|_{\eta=y} \right\}$, при $i = 1, 2, 3$; и $w_i(x, y) = 0$ при $i = 0$.

Лемму 5 легко вывести из (129) и (137)–(139).

Лемма 5. Пусть 1) $\Phi_k(x, y) \in C(\bar{\Delta})$; $\Phi_k \in C^2(\Delta)$; 2) Φ_k трижды непрерывно дифференцируемо по y при $0 \leq x < y < x_0$ и

$$\left| \frac{\partial^i \Phi_k}{\partial y^i} \right| \leq M (y - x)^{\alpha_0 - i} x^{\alpha_0 n} y^n \quad (i = 0, 1, 2, 3), \quad (140)$$

где $0 < M \equiv \text{const}$, $0 < \alpha_0 \leq 1/3$, а n – некоторое натуральное число или нуль. Тогда функция

$$Z_k(x, y) = \int_0^x d\xi \int_{\xi}^y \frac{\Phi_k(\xi, \eta)}{\eta - \xi} U(\xi, \eta; x, y) d\eta \quad (141)$$

обладает следующими свойствами: 1) $Z_k \in C^1(\bar{\Delta})$; 2) Z_k – регулярное в Δ решение уравнения

$$E \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6} \right) Z_k = \frac{\Phi_k(x, y)}{y - x}, \quad (142)$$

удовлетворяющее условию (100); 3) удовлетворяет неравенствам

$$|Z_k| \leq M' x^{\alpha_0(n+1)} y^{n+1}, \quad \left| (y - x)^{i-1} \frac{\partial^i Z_k}{\partial y^i} \right| \leq M' x^{\alpha_0(n+1)} y^n,$$

$$|Z_{kx}|, \quad |(y - x) Z_{kxy}| \leq M h x^{\alpha_0 n} y^{\alpha_0 + n},$$

где $i = 1, 2, 3, 4$; h – абсолютная постоянная, зависящая только от α_0 , $aM' = M h \Gamma(1 + \alpha_0 n) / \Gamma(1 + \alpha_0 + \alpha_0 n)$.

Следствие. Пусть $\Phi_k(x, y)$ удовлетворяет всем требованиям леммы 5. Тогда функция

$$\Phi_{k+1}(x, y) = c_1(x, y)(y - x)^{1/3} Z_k(x, y), \quad (143)$$

четырежды непрерывно дифференцируема по y и

$$\left| \frac{\partial^i \Phi_{k+1}}{\partial y^i} \right| \leq M' A (y - x)^{\alpha_0 - i} x^{\alpha_0(n+1)} y^{n+1}, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4,$$

где A – постоянная, не зависящая от n .

Лемма 5 в основном доказана Геллерстедтом [6] при $\alpha_0 = 1/3$. Его метод без особого труда распространяется и на случай, когда $0 < \alpha_0 < 1/3$.

Решение уравнения (102) ищем в виде ряда

$$Z(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k Z_k(x, y). \quad (144)$$

Z_k задается формулами (141), (143) при $k > 0$ и формулами (99)–(103) при $k = 0$.

В силу леммы 4, существует такое постоянное $N_0 > 0$, что

$$\left| \frac{\partial^i \Phi_0}{\partial y^i} \right| \leq N_0 (y - x)^{\alpha_0 - i}, \quad \alpha_0 = 1/3 - \alpha, \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

Φ_0 удовлетворяет условиям леммы 5 при $n = 0$, $M = N_0$. Поэтому на основании следствия из этой леммы

$$\left| \frac{\partial^i \Phi_1}{\partial y^i} \right| \leq N_1 (y - x)^{\alpha_0 - i} x^{\alpha_0} y, \quad N_1 = N'_0 A,$$

т. е. Φ_1 удовлетворяет условиям леммы 5 при $n = 1$, $M = N_1$. Продолжая это рассуждение, получим

$$\left| \frac{\partial^i \Phi_n}{\partial y^i} \right| \leq N_n (y - x)^{\alpha_0 - i} x^{\alpha_0 n} y^n, \quad N_n = N'_{n-1} A.$$

Следовательно, Φ_n удовлетворяет всем требованиям леммы 5, а поэтому

$$|Z_n| \leq N'_n x^{\alpha_0(n+1)} y^{n+1}, \quad |Z_{nx}|, |(y - x)Z_{nxy}| \leq N_n h x^{\alpha_0 n} y^{\alpha_0 + n},$$

где

$$N'_n = N_0 h (Ah)^n / \Gamma(1 + \alpha_0 + \alpha_0 n).$$

Из асимптотического представления гамма-функции для больших x [8]

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi} x^{x-1/2} e^{-x} [1 + O(1/x)]$$

на основании признака сходимости Коши заключаем: ряд (144) сходится абсолютно и равномерно в $\bar{\Delta}$ и сумма $Z(x, y)$ этого ряда есть регулярное в Δ решение уравнения (98), удовлетворяющее условию (100).

В (103) положим $y = x$ и учтем (91), (92), (99). Тогда после замены переменных интеграцией $\xi = \xi_0 x$, $\eta = \eta_0 x$, получим

$$Z_0(x, x) = -\gamma_0 x^{4/3} \int_0^1 d\xi_0 \int_{\xi_0}^1 c_1(x\xi_0, x\eta_0) F(x\xi_0, x\eta_0) \times \\ \times [(1 - \xi_0)(1 - \eta_0)]^{-1/6} (\eta_0 - \xi_0)^{1/3} d\eta_0.$$

Значит, в силу леммы 4, и $Z_0(x, x) \in C^3(0 < x \leq x_0)$ и при $x = 0$ обращается в нуль порядка не ниже $4/3 - \alpha$. Исходя из интегрального уравнения (102), можно показать, что этим свойством обладает и функция $Z(x, x)$.

6°. В предыдущих пунктах этого параграфа мы доказали, что существует единственное решение задачи A_2 и оно, как функция характеристических координат ξ, η представимо в виде (95).

Теперь в равенстве (95) вернемся к исходным переменным $\tilde{x}, \tilde{y}$ по формуле (85) и в полученном результате положим $\tilde{y} = 0$. Тогда на основании (111) и (121) можно записать

$$\tau(x) = \frac{\gamma\gamma_0}{2} \int_x^{x_0} \nu(\xi)(\xi - x)^{-1/3} P[(\xi - x)^{4/3}] d\xi + \Psi_2(x), \quad (145)$$

где $\Psi_2(x) = F(x_0 - x, x_0 - x) + Z(x_0 - x, x_0 - x)$, $\tau(x) = z(x, 0)$, $0 < x < x_0$.

Функция $\Psi_2 \in C^3(0 \leq x < x_0)$, причем

$$\Psi_2^{(i)}(x) = O(1)(x_0 - x)^{-\alpha-i}, \quad i = 0, 1, 2, 3. \quad (146)$$

Изложенным выше методом можно показать: если существует решение задачи A , то $\tau(x)$ и $\nu(x)$ на участке $\tilde{A}\tilde{A}_3$ линии вырождения $\tilde{y} = 0$ ($y = 1$) связаны соотношением

$$\tau(x) = \frac{\gamma\gamma_0}{2} \int_{x_0}^x \nu(\xi)(x - \xi)^{-1/3} P[(x - \xi)^{4/3}] d\xi + \Psi_1(x), \quad (147)$$

где Ψ_1 — известная функция, зависящая от значения z на характеристике $\tilde{A}\tilde{B}$ (т. е. от ψ_1 ; см. (8)).

Функция $\Psi_1(x) \in C^3(x_0 < x < 1)$ и

$$\Psi_1^{(i)}(x) = O(1)(x - x_0)^{-\alpha-i}, \quad i = 0, 1, 2, 3. \quad (148)$$

Равенства (145) и (147) являются функциональными соотношениями между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенными из гиперболической части области $\tilde{D}$ на линию вырождения.

5. Задача Хольмгрена для уравнения (24).

Задача А₃. Найти функцию $z(\bar{x}, \bar{y})$ со следующими свойствами:

1) z – непрерывна всюду в замкнутой области $\bar{D}^+$ (см. п. 4, пп. 1), за исключением точки $\tilde{A}(x_0, 0)$ и, быть может, точек $\tilde{A}_4(0, 0)$, $\tilde{A}_3(1, 0)$, где она обращается в ∞ порядка $< 1/6$; 2) $z_{\tilde{x}}(z_{\tilde{y}})$ непрерывна всюду в $\bar{D}^+$, за исключением точки $\tilde{A}$ и, быть может, $\tilde{A}_4$, $\tilde{A}_3$ где она становится бесконечной порядка $< 7/6$ ($< 5/6$); 3) z – регулярное в $\bar{D}^+$ решение уравнения (24), удовлетворяющее граничному условию (7) и

$$z_{\tilde{y}} = \nu(\tilde{x}), \quad \text{при } \tilde{y} = 0, \quad 0 < \tilde{x} < 1, \quad \tilde{x} \neq x_0, \quad (149)$$

где φ_1 задается формулой (11), а $\nu(\tilde{x}) \in C^1(0 < \tilde{x} < 1, \tilde{x} \neq x_0)$ и при $\tilde{x} = 0, x_0, 1$ может обращаться в ∞ порядка $< 5/6$.

1°. Для удобства перейдем в уравнении (24) к новым переменным x, y по формулам

$$x = 2\tilde{x} - 1, \quad y = 4^{1/3}\tilde{y}. \quad (150)$$

Тогда уравнение (24), и условия (7), (149) примут следующий вид:

$$T(z) \equiv yz_{xx} + z_{yy} = c_0(y)z; \quad (151)$$

$$z = \tilde{\varphi}(x), \quad \text{на } \sigma \quad \text{при } -1 < x < 1; \quad (152)$$

$$z_y = \tilde{\nu}(x) \quad \text{при } y = 0, \quad -1 < x < 1, \quad x = \tilde{x}_0, \quad (153)$$

где

$$c_0(y) = -4^{-2/3}c(4^{-1/3}y), \quad \tilde{\varphi}(x) = \varphi_1((x+1)/2), \\ \tilde{\nu}(x) = 4^{-1/3}\nu((x+1)/2). \quad (154)$$

Преобразование (154) переводит $\bar{D}^+$ в область Ω , ограниченную контуром $\sigma: x^2 + 4/9 y^3 = 1$ и отрезком $A_4 A_3$ прямой $y = 0$.

Введем следующие обозначения:

$$\left. \begin{matrix} r^2 \\ r_1^2 \end{matrix} \right\} = (x - \xi)^2 + \frac{4}{9}(y^{3/2} \mp \eta^{3/2})^2, \quad R^2 = \xi^2 + \frac{4}{9}\eta^3, \quad \bar{\xi} = \frac{\xi}{R^2},$$

$$\bar{\eta}^{3/2} = \frac{\eta^{3/2}}{R^2}, \quad \gamma_1 = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{4}{3} \right)^{1/3} \frac{\Gamma^2(1/6)}{\Gamma(1/3)},$$

$$u(x, y; \xi, \eta) = \gamma_1 (r_1^2)^{-1/6} F(1/6, 1/6, 1/3; 1 - r^2/r_1^2), \quad (155)$$

$$v(x, y; \xi, \eta) = -(R^2)^{-1/6} u(x, y; \bar{\xi}, \bar{\eta}). \quad (156)$$

Функция Грина задачи A_3 в области Ω задается формулой (см. [6])

$$G(x, y; \xi, \eta) = u(x, y; \xi, \eta) + v(x, y; \xi, \eta). \quad (157)$$

С. Геллерстедту принадлежит следующее утверждение.

Лемма 6. Пусть $\mu(x, y) \in C^1(\Omega)$ и интегрируема по области Ω . Тогда функция

$$U(x, y) = \iint_{\Omega} \mu(\xi, \eta) G(\xi, \eta; x, y) d\xi d\eta$$

есть регулярное в Ω решение уравнения $T(U) = -\mu(x, y)$, удовлетворяющее граничному условию $(U)_{\sigma} = 0$, $U_y(x, 0) = 0$.

Решение задачи A_3 для уравнения $T(z) = 0$ обозначим через $z_0(x, y)$. Известно [9], что

$$\begin{aligned} z_0(x, y) &= - \int_{-1}^1 \tilde{\nu}(\xi) G(\xi, 0; x, y) d\xi + \int_{-1}^1 \tilde{\varphi}(\xi) A_{\xi}[G(\overline{\xi}, \eta; x, y)] d\xi = \\ &= N_0(x, y) + F(x, y), \end{aligned} \quad (158)$$

где черта над (ξ, η) означает, что $(\xi, \eta) \in \sigma$, а

$$A_{\xi} \equiv \eta \frac{d\eta}{d\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta}.$$

Решение $z(x, y)$ задачи A_3 ищем в виде

$$z(x, y) = z_0(x, y) + N(x, y) + Z(x, y), \quad (159)$$

а N и Z – решения однородной задачи A_3 для уравнений

$$T(N) = c_0(y)N + c_0(y)N_0, \quad (160)$$

$$T(Z) = c_0(y)Z + c_0(y)F. \quad (161)$$

В силу леммы 6, однородная задача A_3 для уравнения (161) эквивалентна интегральному уравнению

$$Z(x, y) + \iint_{\Omega} Z(\xi, \eta) c_0(\eta) G(\xi, \eta; x, y) d\xi d\eta = Z_0(x, y), \quad (162)$$

где

$$Z_0(x, y) = - \iint_{\Omega} c_0(\eta) G(\xi, \eta; x, y) F(\xi, \eta) d\eta d\xi. \quad (163)$$

Уравнение (162) является фредгольмовым. Пусть при $Z_0 \equiv 0$ (162) имеет нетривиальное решение Z . Тогда, опираясь на лемму 6, нетрудно было бы показать существование функции $u_0(x, y)$ со следующими свойствами: 1) $u_0 \in C(\overline{D}^+)$; 2) $u_0 \in C^1(D^+ + A_4 A_3, 0 < x < a)$;

3) u_0 – регулярное в D^+ решение уравнения (1), удовлетворяющее граничному условию (см. п. 4, пп. 1)

$$(u_0)_{\sigma_1} = 0, \quad u_{0y}(x, 1) + (1/5)u_0(x, 1) = 0, \quad 0 < x < a, \quad (164)$$

что невозможно. Действительно, преобразование $u_0 = (y - 6)v$ переводит (1) в уравнение

$$L(v) + \frac{2}{y-6} v_y = 0.$$

Область D^+ лежит ниже прямой $y = 6$. Поэтому $(v)_{\sigma_1} = 0$, $v_y(x, 1) = 0$ при $0 < x < a$. В силу известного принципа экстремума Заремба–Жиро [5], [10], $v \equiv 0$ в $\tilde{D}^+$.

Аналогично доказывается, что функция N существует и представляема в виде

$$N(x, y) = \int_{-1}^1 \tilde{v}(t) N(t, x, y) dt, \quad (165)$$

где N – решение интегрального уравнения Фредгольма

$$\begin{aligned} N(t, x, y) + \iint_{\Omega} N(t, \xi, \eta) c_0(\eta) G(\xi, \eta; x, y) d\xi d\eta &= N_0(t, x, y) = \\ &= \iint_{\Omega} c_0(\eta) G(\xi, \eta; x, y) G(t, 0; \xi, \eta) d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (166)$$

2°. На основании (158) можно записать

$$F(x, 0) = O(1)(1 - x^2) \int_{-1}^1 \tilde{\varphi}(\xi) (1 - \xi^2)^{-1/3} (1 + x^2 - 2x\xi)^{-7/6} d\xi. \quad (167)$$

Из (11), согласно (150), имеем

$$\tilde{\varphi}(\xi) = O(1)(1 - \xi^2)^{-\kappa_1}, \quad \kappa_1 < 1/12.$$

Учитывая это, из (167) нетрудно видеть, что

$$F(x, 0) = O(1)(1 - x^2)^{-2\kappa_1}. \quad (168)$$

Ясно, что $F(x, 0)$ аналитична при $-1 < x < 1$. Точно так же, как в работе [6, гл. 1, § 14], с помощью уравнения (162) можно доказать, что функция $F(x, 0) + Z(x, 0) \in C^3(-1 < x < 1)$.

3°. В (159) вернемся к переменным $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ по формуле (150) и в полученном выражении положим $\tilde{y} = 0$, $\tilde{x} = x$.

Тогда, согласно (155), (156), (158) и (165), (166), будем иметь

$$\tau(x) = \gamma_1 \int_0^1 \nu(t) \left[L(x, t) - \frac{1}{|t-x|^{1/3}} + \frac{1}{(t+x-2tx)^{1/3}} \right] dt + \varphi(x), \quad (169)$$

где

$$L(x, y) = (1/\gamma_1)N(2t-1, 2x-1, 0), \quad \varphi(x) = F(2x-1, 0) + Z(2x-1, 0).$$

Формула (169) дает основное функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из $\tilde{D}^+$.

Функция $L(x, t)$ обладает следующими свойствами:

1) $L(x, t) \in C(0 \leq x, t \leq 1)$, $L(0, t) = L(1, t) \equiv 0$;

2) $L(x, t) \in C^3(0 < x, t < 1, x \neq t)$, причем при $x = t$ ($x = t = 0, 1$) первые производные могут обращаться в ∞ как $\ln|x-t|$ ($[t+x-2tx]^{-1/3}$).

Эти свойства функции L , в основном, установлены С. Геллерстедтом (см. [6, гл. 1, § 18]), когда в (151) $0 > c_0(y) \equiv \text{const}$. Распространить их на наш случай не вызывает особого труда (см. [11], [12]).

Функция $\varphi(x) \in C^3(0 < x < 1)$ и, в силу (168),

$$\varphi(x) = O(1)[x(1-x)]^{-2\kappa_1}.$$

6. Доказательство существования решения системы уравнений (145), (147), (169). 1°. Исключим $\tau(x)$ из (145), (169). Тогда

$$\int_{x_0}^x \nu(t)(x-t)^{-1/3} P[(x-t)^{4/3}] dt = H_1(x) + \int_0^1 \nu(t)[L(x, t) + l(x, t)] dt, \quad (170)$$

где

$$H_1(x) = \frac{1}{\gamma_1}[\varphi(x) - \Psi_1(x)], \quad l(x, t) = -|t-x|^{-1/3} + (t+x-2tx)^{-1/3}. \quad (171)$$

Обращая обобщенное уравнение Абеля (170) (правая часть считается пока известной), с учетом (122) получим (см. [13])

$$\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\nu(x) + \int_{x_0}^x \nu(t)(x-t)^{1/3} P_1[(x-t)^{2/3}] dt = \overline{H}_1(x) + \overline{L}(x) + \overline{l}(x), \quad (172)$$

где

$$\overline{H}_1(x) = \frac{d}{dx} \int_{x_0}^x \frac{H_1(t) dt}{(x-t)^{2/3}}, \quad \overline{L}(x) = \frac{d}{dx} \int_{x_0}^x d\xi \int_0^1 \frac{\nu(t)L(\xi, t) dt}{(x-\xi)^{2/3}},$$

$$\bar{l}(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x d\xi \int_0^1 \frac{\nu(t)l(\xi, t)}{(x - \xi)^{2/3}} dt,$$

а $P_1 \in C(0 \leq t \leq x_0)$, и имеет такую же гладкость (в смысле дифференцируемости), что и аргумент $(x - t)^{2/3}$, причем $P_1(0) \neq 0$.

Пусть

$$\left. \begin{matrix} S^+(x, t) \\ S^-(x, t) \end{matrix} \right\} = \left(\frac{t - x_0}{x - x_0} \right)^{2/3} \frac{1}{t - x} \pm \left(\frac{t + x_0 - 2tx_0}{x - x_0} \right)^{2/3} \frac{1}{t + x - 2tx}.$$

Непосредственным вычислением можно показать (см. [5, с. 89-92]), что

$$\bar{l}(x) = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}\nu(x) + \int_0^{x_0} \nu(t)S^+(x, t)dt - \int_{x_0}^1 \nu(t)S^-(x, t)dt. \quad (173)$$

Очевидно,

$$\bar{L}(x) = \int_0^1 \nu(t)L_0(x, t)dt, \quad L_0(x, t) = \frac{d}{dx} \int_{x_0}^x L(\xi, t)(x - \xi)^{-2/3}d\xi. \quad (174)$$

Учтем (173), (174) в (172):

$$\begin{aligned} \pi\sqrt{3}\nu(x) + \int_{x_0}^x \nu(t)(x - t)^{1/3}P_1[(x - t)^{2/3}]dt &= \bar{H}_1(x) + \int_0^{x_0} \nu(t)S^+(x, t)dt - \\ &- \int_{x_0}^1 \nu(t)S^-(x, t)dt + \int_0^1 \nu(t)L_0(x, t)dt, \quad 0 < x < x_0. \end{aligned} \quad (175)$$

Исключим теперь $\tau(x)$ из (147), (169). Совершенно аналогичное рассуждение показывает, что

$$\begin{aligned} \pi\sqrt{3}\nu(x) + \lambda \int_{x_0}^x \nu(t)(x - t)^{1/3}P_2[(x - t)^{2/3}]dt &= \bar{H}_2(x) + \int_0^{x_0} \nu(t)S^+(x, t)dt - \\ &- \int_{x_0}^1 \nu(t)S^-(x, t)dt + \int_0^1 \nu(t)L_0(x, t)dt, \quad x_0 < x < 1, \end{aligned} \quad (176)$$

где $P_2 \in C(x_0 \leq x, t \leq 1)$ и имеет такую же гладкость, что и аргумент $(x - t)^{2/3}$; $P_2(0) \neq 0$; $\bar{H}_2$ — известная функция, зависящая от φ и Ψ_2 .

Введем обозначения:

$$P_0 = \begin{cases} P_1 & \text{при } 0 \leq x, t \leq x_0; \\ P_2 & \text{при } x_0 \leq x, t \leq 1; \end{cases} \quad H(x) = \begin{cases} \bar{H}_1(x) & \text{при } 0 < x < x_0; \\ \bar{H}_2(x) & \text{при } x_0 < x < 1. \end{cases} \quad (177)$$

Из соотношений (175) и (176) заключаем, что

$$\begin{aligned} \nu(x) + \lambda \int_{x_0}^x \nu(t) P_0 [(x-t)^{2/3}] (x-t)^{1/3} dt = \rho(x) = \lambda H(x) + \\ + \lambda \int_0^{x_0} \nu(t) S^+(x, t) dt - \lambda \int_{x_0}^1 \nu(t) S^-(x, t) dt + \lambda \int_0^1 \nu(t) L_0(x, t) dt, \end{aligned} \quad (178)$$

где $\lambda = 1/\pi\sqrt{3}$.

После обращения интегрального уравнения Вольтерра (178), получаем

$$\nu(x) = \rho(x) + \lambda \int_{x_0}^x (x-s)^{1/3} \Gamma(x, s; \lambda) \rho(s) ds, \quad (179)$$

где $(x-s)^{1/3} \Gamma(x, s; \lambda)$ – резольвента ядра $(t-x)^{1/3} P_0$.

Пусть

$$\bar{H}(x) = \lambda^2 \int_{x_0}^x H(s) (x-s)^{1/3} \Gamma(x, s; \lambda) ds, \quad h(x) = \lambda H(x) + \bar{H}(x), \quad (180)$$

$$p(x, t) = \begin{cases} \lambda \int_{x_0}^x S^+(s, t) (x-s)^{1/3} \Gamma(x, s; \lambda) ds & \text{при } 0 \leq t \leq x_0, \\ -\lambda \int_{x_0}^x S^-(s, t) (x-s)^{1/3} \Gamma(x, s; \lambda) ds & \text{при } x_0 \leq t \leq 1; \end{cases} \quad (181)$$

$$l_0(x, t) = \lambda \int_{x_0}^x L_0(s, t) (x-s)^{1/3} \Gamma(x, s; \lambda) ds, \quad K(x, t) = -L_0 + l_0 + p. \quad (182)$$

Тогда из (179) легко увидеть, что

$$\begin{aligned} \nu(x) = \lambda \int_0^{x_0} S^+(x, t) \nu(t) dt - \lambda \int_{x_0}^1 S^-(x, t) \nu(t) dt + \\ + \lambda \int_0^1 K(x, t) \nu(t) dt + h(x). \end{aligned} \quad (183)$$

В полученном сингулярном уравнении (183) заменим переменную интегрирования по формуле $2t = s + 1$:

$$\begin{aligned} \bar{\nu}(y) = & \lambda \int_{-1}^{y_0} \bar{\nu}(s) \left[\left(\frac{s - y_0}{y - y_0} \right)^{2/3} \frac{1}{s - y} + \left(\frac{1 - sy_0}{y - y_0} \right)^{2/3} \frac{1}{1 - sy} \right] ds + \\ & + \lambda \int_{-1}^1 \bar{\nu}(s) \bar{K}(y, s) ds - \\ & - \lambda \int_{y_0}^1 \bar{\nu}(s) \left[\left(\frac{s - y_0}{y - y_0} \right)^{2/3} \frac{1}{s - y} + \left(\frac{1 - sy_0}{y - y_0} \right)^{2/3} \frac{1}{1 - sy} \right] ds + \bar{h}(y), \quad (184) \end{aligned}$$

где

$$y = 2x - 1, \quad y_0 = 2x_0 - 1, \quad \bar{\nu}(y) = \nu \left(\frac{y + 1}{2} \right), \quad \bar{h}(y) = h \left(\frac{y + 1}{2} \right),$$

$$\bar{K}(y, s) = \frac{1}{2} K \left(\frac{y + 1}{2}, \frac{s + 1}{2} \right), \quad -1 < y < 1.$$

2°. В дальнейшем будем предполагать, что $2\kappa_1 = \alpha$ (см. (11), (12), (134) и замечание в п. 4, пп. 5). Из установленных выше свойств функций Ψ_1 , Ψ_2 , и φ (см. (145), (147), (169), (171)) заключаем, что $H_1(x) \in C^3(0 < x < x_0)$, $H_2(x) = (\varphi - \Psi_2)/\gamma_1 \in C^3(x_0 < x < 1)$, причем

$$H_1 = O(1)[x(x_0 - x)]^{-\alpha}, \quad H_2 = O(1)[(x - x_0)(1 - x)]^{-\alpha} \quad (185)$$

С учетом (185) можно показать, что функция $H(x)$ из (177) принадлежит $C^2(0 < x < 1, x \neq x_0)$ и

$$H(x) = \begin{cases} O(1)[x(x_0 - x)]^{-\alpha-2/3} & \text{при } 0 < x < x_0, \\ O(1)[(x - x_0)(1 - x)]^{-\alpha-2/3} & \text{при } x_0 < x < 1. \end{cases} \quad (186)$$

Из свойств функций P_0 , $\Gamma(x, s; \lambda)$ нетрудно видеть, что $h(x)$ имеет по крайней мере такую же гладкость, что и $H(x)$.

Следовательно, $\bar{h}(y) \in C^2(-1 < y < 1, y \neq y_0)$ и в силу (186)

$$\bar{h}(y) = \begin{cases} O(1)[(1 + y)(y_0 - y)]^{-\alpha-2/3} & \text{при } -1 < y < y_0, \\ O(1)[(1 - y)(y - y_0)]^{-\alpha-2/3} & \text{при } y_0 < y < 1. \end{cases} \quad (187)$$

3°. Функция $L_0(x, t)$ из (174) имеет такие свойства:

1) $L_0 \in C^2(0 < x, t < 1, x \neq t, x \neq x_0)$ и при $x = t$ первые производные могут обращаться в ∞ порядка $\leq \varepsilon + 2/3$;

2) при $0 < x, t < 1, x \neq x_0$

$$|L_0(x, t)| \leq (x - x_0)^{-2/3} [|L(x_0, t)| + M|x - x_0|^{1-\varepsilon} |\ln(t + x - 2tx)|], \quad (188)$$

где $0 < M \equiv \text{const}$, $0 < \varepsilon$ – сколь угодно малое число. Это утверждение легко доказать, опираясь на известные свойства $L(x, t)$ (см. п. 5, пп. 3).

Исходя из (181), (182), можно показать точно так же, как в работе ([6, гл. III, § 5]), что ядро $K(x, t)$ имеет по крайней мере такую же гладкость, что и $L_0(x, t)$. Следовательно, $\bar{K}(y, s)$ регулярно при $-1 < y, s < 1, y \neq s \neq y_0$; при $y = s$ первые производные могут иметь особенность порядка $\leq \varepsilon + 2/3$; при $-1 < y, s < 1, y \neq y_0$, согласно (188),

$$|\bar{K}(y, s)| \leq M_1(y - y_0)^{-2/3} [|\bar{L}(y_0, s)| + |y - y_0|^{1-\varepsilon} |\ln(1 - y, s)|] + M_2, \quad (189)$$

где $0 < M_i \equiv \text{const}$,

$$\bar{L}(y_0, s) = L((y_0 + 1)/2, (s + 1)/2).$$

4°. Поскольку

$$H_0(\bar{v}, y) = \bar{h}(y) + \lambda \int_{-1}^1 \bar{v}(s) \bar{K}(y, s) ds \quad (190)$$

как функция от y принадлежит $C^1(-1 < y < 1, y \neq y_0)$ и при $y = \pm 1, y_0$ обращается в ∞ порядка $\alpha + 2/3 < 5/6$, то, вследствие известного результата Геллерстедта [14], сингулярное интегральное уравнение (184) эквивалентно (в классе искомых решений) уравнению

$$\bar{v}(y) - \lambda \int_{-1}^1 \bar{v}(s) K_0(y, s) ds = \chi(y), \quad (191)$$

$$K_0 = \frac{3}{4} \left(\frac{1 - y_0 s}{y_0 - y} \right)^{2/3} \left[1 - \left(\frac{|y_0 - s|}{1 - y_0 s} \right)^{1/3} \right] \left[\frac{1}{1 - sy} + \lambda \int_{-1}^1 \frac{\Gamma_0(y, t; \lambda)}{1 - st} dt \right],$$

$$\Gamma_0(y, s; \lambda) = \begin{cases} \left(\frac{|y_0 - y|}{1 + y} \frac{1 + s}{y_0 - s} \right)^{1/3} \left(\frac{1}{s - y} + \frac{1}{1 - sy} \right) & \text{при } -1 \leq s \leq y_0, \\ \left(\frac{|y_0 - y|}{1 - y} \frac{1 - s}{s - y_0} \right)^{1/3} \left(\frac{1}{s - y} - \frac{1}{1 - sy} \right) & \text{при } y_0 \leq s \leq 1; \end{cases}$$

$$\chi(y) = \frac{3}{4} H_0(\bar{v}, y) + \frac{3\lambda}{4} \int_{-1}^1 H_0(\bar{v}, y) \left(\frac{y_0 - s}{y_0 - y} \right)^{2/3} \Gamma_0(y, s; \lambda) ds.$$

Интегральное уравнение (191) эквивалентно уравнению

$$\bar{\nu}(y) - \lambda \int_{-1}^1 \bar{\nu}(s) k_0(y, s) ds = h_0(y), \quad (192)$$

где

$$h_0(y) = \frac{3}{4} \bar{h}(y) + \frac{3\lambda}{4} \int_{-1}^1 \bar{h}(s) \left(\frac{y_0 - s}{y_0 - y} \right)^{2/3} \Gamma_0(y, s; \lambda) ds,$$

$$k_0(y, s) = K_0(y, s) + \frac{3}{4} \bar{K}(y, s) + \frac{3\lambda}{4} \int_{-1}^1 \bar{K}(t, s) \left(\frac{y_0 - t}{y_0 - y} \right)^{2/3} \Gamma_0(y, t; \lambda) dt.$$

Геллерстедт показал, что ядро K_0 регулярно и удовлетворяет неравенству

$$|K_0(y, s)| \leq M |y_0 - y|^{-1/3} (1 - y^2)^{-1/3}, \quad (193)$$

Из (189), (193) и из свойств функции $\bar{K}$ следует

$$k_0(y, s) \in C^2(-1 < y, s < 1, y \neq s, y \neq y_0),$$

причем при $y = s$ первые производные могут иметь особенность порядка $\leq \varepsilon + 2/3$ и $k_0(y, s)$ допускает оценку

$$|k_0(y, s)| \leq M (y_0 - y)^{-2/3} (1 - y^2)^{-1/3}.$$

Относительно правой части в уравнении (192) можно сказать то же, что и в случае уравнения (184).

Из единственности решения задачи A вытекает безусловная разрешимость интегрального уравнения Фредгольма (192), а следовательно, и (183).

Функция $\nu(x)$, являющаяся решением сингулярного интегрального уравнения (183), удовлетворяет всем требованиям, предъявленным к ней в пунктах 4 и 5, а именно, $\nu(x) \in C^1(0 < x < 1, x \neq x_0)$ и в точках 0, x_0 , 1 становится бесконечной порядка $\alpha + 2/3 < 5/6$.

Зная функцию $\nu(x)$, решением задачи A_2 в областях $\tilde{D}$, $\tilde{D}^*$ и решением задачи A_3 в $\tilde{D}^+$, построим решение задачи A в области D .

Решение задачи A в области $D^* \setminus (D \cup D^-)$ строится так же, как в D решение задачи Геллерстедта с граничными данными (8), (75), (76).

7. О задачах типа задачи А.

Задача В. Эта задача ставится так же как задача A , но в этом случае носителем данных являются кривые σ_0 , σ_1 и характеристики A_0B_0 , AB_0 . Предполагается, что данные в точках A_0 , $A(A_4)$ обращаются в ∞ порядка $\alpha < 1/6$ ($\alpha/2$).

На плоскости переменных x, y рассмотрим точки

$$A_1(\pi/8, 0), \quad A_2(\pi/4, 0), \quad A_3(\pi/4, 1), \quad A_4(\pi/8, 1), \\ B_1(\pi/16, 1/2), \quad B_2(5\pi/16, 1/2).$$

Пусть D – конечная односвязная область, ограниченная

- 1) дугой $\sigma_0: (x - 3\pi/16)^2 + \omega^2 = (\pi/16)^2, y \leq 0$;
- 2) дугой $\sigma_1: (x - 3\pi/16)^2 + \omega^2 = (\pi/16)^2, y \geq 1$;
- 3) характеристиками $A_1B_1, B_1A_4, A_2B_2, B_2A_3$ уравнения (1).

Задача С. Найти функцию $u(x, y)$ со следующими свойствами:

- 1) $u \in C(\bar{D} - A_i) (i = 1, 2, 3, 4)$ и в точках A_i может иметь особенность порядка $< 1/6$;
- 2) $u_y(u_x)$ непрерывна всюду в $\bar{D}$ за исключением точек A_i и характеристик, выходящих из них, где она может обращаться в ∞ порядка $< 5/6$ ($< 7/6$) и < 1 (< 1) соответственно;
- 3) u – регулярное решение уравнения (1) в D за исключением, быть может, характеристик A_1A_3, A_2A_4 ;
- 4) она принимает заданные значения на $\sigma_0, \sigma_1, A_1B_1, B_1A_4$.

Задачи B и C разрешимы единственным образом. Доказательство проводится таким же методом, как и в случае задачи A .

Литература

1. Бицадзе А. В. О некоторых задачах смешанного типа // Доклады АН СССР. 1950. Т. 70, № 4. С. 561–564.
2. Франкль Ф. И. О задачах С. А. Чаплыгина для смешанных до и сверхзвуковых течений // Изв. АН СССР. Серия матем. 1945. Т. 9, № 2. С. 121–143.
3. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М.: ИЛ, 1957.
4. Франкль Ф. И. К теории сопел Лаваля // Изв. АН СССР. Серия матем. 1945. Т. 9, № 5. С. 387–422.
5. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М.: Изд. АН СССР, 1959.
6. Gellerstedt S. Sur un problème aux limites pour une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre de type mixte Thèse. Uppsala. 1935.
7. Appel P. and Kampé de Fériet M. T. Fonctions hypergeometriques et hyperspheriques. Polysomes d'Hermite, Goutbier-Vilars. 1926.
8. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М.–Л.: Физматгиз, 1963.
9. Gellerstedt S. Sur un probleme aux mites pour equation $y^{2s}Z_{xx} + Z_{yy} = 0$ // Arkiv. Matem. Astr. Fis. 1936. Vol. 25 A, no. 10. Pp. 1–12.
10. Agmon S., Nirenberg L., Protter M. A maximum principle for a class of hyperbolic equations and applications to equations of mixed elliptic-hyperbolic type // Gomm. Pure Appl. Math. 1953. Vol. 6, no. 4. Pp. 455–470.
11. Protter M. An existence theorem for the generalised Tricomi problem // Duke Math. J. 1954. Vol. 21, no. 1. Pp. 1–7.
12. Бабенко К. И. К теории уравнений смешанного типа. Докторская диссертация. Матем. ин-т. АН СССР, 1952.
13. Гурса Э. Курс математического анализа. Т. 3, ч. 2. М.: ГТТИ, 1938.
14. Gellerstedt S. Quelques problemes mixtes pour equation $y^m Z_{xx} + Z_{yy} = 0$ // Arkiv Math. Astr. Fis. 1937. Vol. 26 A, no. 3. Pp. 1–32.

Поступила в редакцию
23 сентября 1965

Об одном трехмерном аналоге задачи Геллерстедта

1. Постановка задачи. Введем следующие обозначения:

1) D – односвязная цилиндрическая область трехмерного евклидова пространства переменных x , y и z , ограниченная поверхностью

$$\Gamma = \sum_{n=0}^4 \Gamma_n, \text{ где}$$

$$\Gamma_0: x^2 + \frac{4}{9}y^3 = a^2, \quad y \geq 0; \quad \Gamma_1: \frac{2}{3}(-y)^{3/2} - x = -x_0;$$

$$\Gamma_2: \frac{2}{3}(-y)^{3/2} + x = x_0; \quad \Gamma_3: \frac{2}{3}(-y)^{3/2} + x = a;$$

$$\Gamma_4: \frac{2}{3}(-y)^{3/2} - x = a, \quad y \leq 0, \quad |x_0| \leq a > 0;$$

$$2) \Omega = D \cap (z = 0), \quad \Omega_1 = \Omega \cap (y > 0), \quad \Omega_2 = \Omega \cap (y < 0),$$

$$\Delta_1 = \Omega_2 \cap (x > x_0), \quad \Delta_2 = \Omega_2 \cap (x < x_0), \quad \sigma_n = \Gamma_n \cap (z = 0), \quad n = 1, 2, \dots, 4,$$

$$A_1 = \sigma_0 \cap \sigma_4, \quad A_0 = \sigma_1 \cap \sigma_2, \quad A_2 = \sigma_0 \cap \sigma_3, \quad \bar{J} = \bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2, \quad \bar{J}_1 = \bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Delta}_1,$$

$$\bar{J}_2 = \bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Delta}_2, \quad \bar{J} = J \setminus A_0, \quad d = \pi / [(27a^2/2)^{1/3}(a + |x_0|)^{1/3} + 3(a + |x_0|/2)];$$

3) Ω^* – прямое произведение двух областей Ω и $\Lambda = (|\lambda| < d)$, т. е. $\Omega^* = \Omega \times \Lambda$; $J^* = J \times \Lambda$, $J_n^* = J_n \times \Lambda$, $n = 1, 2$;

4) $L(-\infty, \infty)$ – множество функций, определенных в D и абсолютно интегрируемых по переменной z в интервале $(-\infty, \infty)$;

5) $C_{xy}^k(\Omega^*)$ – множество функций $\mu(x, y, \lambda)$, определенных на Ω^* , у которых существуют и непрерывны все производные до порядка k включительно по переменным x, y при любом λ ;

6) $C_{0xy}^k(\Omega^*)$ – множество всех функций из $C_{xy}^k(\Omega^*)$, носители которых компактны и лежат в Ω^* .

Будем говорить, что функция $\hat{\mu}(x, y, z)$ из $L(-\infty, \infty)$ принадлежит классу $\hat{C}_{xy}^k(D)(\hat{C}_{0xy}^k(D))$, если ее преобразование Фурье

$$\mu(x, y, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mu}(x, y, z) e^{i\lambda z} dz \quad (1)$$

принадлежит $C_{xy}^k(\Omega^*)(C_{0xy}^k(\Omega^*))$.

Задача 1 (трехмерный аналог задачи Геллерстедта). Требуется найти регулярное в области D решение $\hat{u}(x, y, z)$ уравнения

$$y(\hat{u}_{xx} + \hat{u}_{zz}) + \hat{u}_{yy} = \hat{f}(x, y, z), \quad (2)$$

непрерывное в замкнутой области $\bar{D}$ и обращающееся в нуль на поверхностях Γ_0 , Γ_1 и Γ_2 .

Безусловная и однозначная разрешимость задачи 1 для уравнения $y\hat{u}_{xx} + \hat{u}_{yy} + \hat{u}_{zz} = \hat{f}$ случае, когда $x_0 = -a = -1$ доказана А. В. Бицадзе [1].

Для уравнения (2) М. Проттером исследован ряд краевых, в основном гиперболических, задач (см. [2]). В дальнейшем будем предполагать, что $\hat{f} \in \hat{C}_{0xy}^3(D)$, а $f(x, y, \lambda) \in C_\lambda^2(\Omega \times \bar{\Lambda}) \cap C^1(\bar{\Omega}^*)$, где f связана с $\hat{f}$ по формуле (1).

Ниже будет доказана однозначная и безусловная разрешимость задачи 1 в классе $\hat{C}_{0xy}^2(D)$ при некоторых предположениях относительно поведения производных от искомого решения $\hat{u}$ вблизи гиперболической части границы Γ области D .

Очевидно, множество $\hat{C}_{0xy}^2(D)$ в силу известной теоремы Пэли–Винера (см. [3]) не пусто.

Нетрудно увидеть, что если $\hat{u} \in \hat{C}_{0xy}^2(D)$ и является решением задачи 1, то его преобразование Фурье u по переменному z есть регулярное в области Ω решение уравнения

$$yu_{xx} + u_{yy} - \lambda^2 u = f(x, y, \lambda), \quad (3)$$

непрерывное в $\bar{\Omega}$ и обращающееся в нуль на $\sigma_0 \cup \sigma_1 \cup \sigma_2$. Имеет место и обратное утверждение.

Таким образом, задача 1 в классе $\hat{C}_{0xy}^2(D)$ эквивалентно редуцируется к плоской задаче Геллерстедта (задача 2) для уравнения (3).

2. Принцип экстремума (единственность). Имеет место следующая

Лемма 1. Пусть 1) $u(x, y) \in C(\bar{\Delta}_1)$ есть регулярное в области Δ_1 решение уравнения

$$yu_{xx} + u_{yy} - \lambda^2 u = 0, \quad |\lambda| < d, \quad (4)$$

обращающееся в нуль на σ_1 ; 2) производная от функции u по направлению характеристик семейства $x - \frac{2}{3}(-y)^{3/2} = \text{const}$ существует и непрерывна в $\bar{\Delta}_1 \setminus \bar{J}_1$. Тогда положительный максимум и отрицательный минимум функции

$$v(x, y) = u(x, y) \exp \left(- \int_0^y \omega(t) dt \right),$$

где $\omega(y)$ – неположительное, регулярное на сегменте

$$(9a^2/4)^{1/3} \geq y \geq -\alpha^2 = -[3(a + |x_0|)/4]^{2/3}$$

решение дифференциального неравенства $\omega' + \omega^2 \leq \lambda^2 y$, в $\bar{\Delta}_1$ достигается на $\bar{J}_1$.

В качестве $\omega(y)$ можно взять, например, функцию

$$\omega = -\alpha \lambda \operatorname{tg} [\alpha \lambda (y + \alpha^2)].$$

Очевидно, v есть решение уравнения

$$y v_{xx} + v_{yy} + 2\omega v_y + (\omega' + \omega^2 - \lambda^2 y) v = 0 \quad (5)$$

в Δ_1 , удовлетворяющее всем требованиям леммы 1. Справедливость леммы 1 будет установлена по схеме, предложенной в [4], где она доказана (как увидим ниже) для случая, когда $v \in C^1(\overline{\Delta}_1 \setminus A_0 \setminus A_1)$.

В (5) перейдем к характеристическим переменным

$$\xi = x - x_0 - \frac{2}{3}(-y)^{3/2}, \quad \eta = x - x_0 + \frac{2}{3}(-y)^{3/2}. \quad (6)$$

В результате будем иметь

$$v_{\xi\eta} + b(\xi, \eta)(v_\xi - v_\eta) + c(\xi, \eta)v = 0, \quad (7)$$

где

$$b = \frac{1}{8}(-y)^{-3/2}(1 + 4y\omega), \quad c = (\omega' + \omega^2 - \lambda^2 y)/(4y).$$

Уравнение (7) можно переписать в виде (см. [4])

$$(b_1 v_\eta)_\xi + (a_1 v)_\xi + c_1 v = 0, \quad (8)$$

где

$$b_1 = \exp\left(-\int b d\xi\right), \quad a_1 = b b_1, \quad c_1 = b_1 c - a_1 \xi.$$

Непосредственное вычисление показывает, что

$$a_1 > 0, \quad b_1 > 0, \quad c_1 \leq 0, \quad c \geq 0 \quad (9)$$

в замкнутой области $\overline{\Delta}$, которая является образом Δ_1 при отображении (6).

Пусть $\max_{\overline{\Delta}} v(\xi, \eta) = v(\xi_0, \eta_0) > 0$ и $\xi_0 \neq \eta_0$. Тогда точка

$$\zeta_0 = (\xi_0, \eta_0) \in \Delta \cup (\eta = a - x_0, \quad 0 < \xi < a - x_0).$$

Допустим, что $\zeta_0 = (\xi_0, a - x_0)$. Обозначим через $\zeta_\delta^\varepsilon \zeta_\delta$ характеристический сегмент $\eta = a - x_0 - \delta$ с концами в точках $\zeta_\delta^\varepsilon = (\varepsilon, a - x_0 - \delta)$, $\zeta_\delta = (\xi_0, a - x_0 - \delta)$, где $0 < \varepsilon < \xi_0$, а δ — сколь угодно малое положительное число.

Равенство (8) после почленного интегрирования вдоль $\zeta_\delta^\varepsilon \zeta_\delta$ принимает вид

$$(b_1 v_\eta) \Big|_{\zeta_\delta^\varepsilon}^{\zeta_\delta} = -a_1(\zeta_\delta^\varepsilon) [v(\zeta_\delta) - v(\zeta_\delta^\varepsilon)] - v(\xi_\delta) \int_{\zeta_\delta^\varepsilon \zeta_\delta} b_1 c d\xi + \int_{\zeta_\delta^\varepsilon \zeta_\delta} c_1 [v(\zeta_\delta) - v] d\xi.$$

Отсюда, устремляя ε , а затем δ к нулю и учитывая условия леммы 1, получаем

$$b_1(\zeta_0)v_\eta(\zeta_0) = -a_1(\zeta_0^0)v(\zeta_0) - v(\zeta_0) \int_{\zeta_0^0 \zeta_0} b_1 c d\xi + \int_{\zeta_0^0 \zeta_0} c_1[v(\zeta_0) - v]d\xi.$$

Поэтому в силу (9) имеем $v_\eta(\zeta_0) < 0$. Это противоречит нашему допущению, так как в точке ζ_0 положительного максимума необходимо $v_\eta(\zeta_0) \geq 0$.

Совершенно аналогично доказывается, что $\zeta_0 \in \Delta$ и отрицательный минимум v в $\bar{\Delta}_1$ достигается только на $\bar{J}_1$.

Лемма 2. Пусть 1) $u(x, y) \in C(\bar{\Delta}_2)$ есть регулярное в Δ_2 решение уравнения (4), обращающееся в нуль на σ_2 ; 2) производная от u по направлению семейства характеристик $x + 2/3(-y)^{3/2} = \text{const}$ существует и непрерывна в $\bar{\Delta}_2 \setminus \bar{J}_2$. Тогда положительный максимум и отрицательный минимум функции v в $\bar{\Delta}_2$ достигается на $\bar{J}_2$.

Лемма 3. Пусть 1) $u(x, y)$ – регулярное в Δ_n ($n = 1, 2$) решение уравнения (4), обращающееся в нуль на σ_n ($n = 1, 2$); 2) $u(x, y) \in C(\bar{\Delta}_n) \cap C^1(\Delta_n \cup J_n)$, а $u_y(x, 0) \in C^1(J_n)$ и на концах интервала J_n может иметь лишь степенную особенность порядка $< 2/3$. Тогда положительный максимум и отрицательный минимум v в $\bar{\Delta}_n$ достигается на $\bar{J}_n$.

Лемма 3 будет доказана в пункте 3.

Принцип экстремума. Пусть 1) $u(x, y)$ удовлетворяет условиям леммы 3 (лемм 1, 2); 2) u – регулярное в области Ω_1 решение уравнения (4), принадлежащее пересечению $C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Тогда положительный максимум и отрицательный минимум функции v в $\bar{\Omega}_1$ достигается на $\bar{\sigma}_0$.

Обычным способом [5], с помощью леммы 3 (лемм 1, 2) и принципа Заремба–Жиро [6], нетрудно убедиться в справедливости этого утверждения, из которого следует единственность решения задач 1 и 2.

3. Конструктивные и дифференциальные свойства решения задачи Дарбу. Для уравнения (3) Геллерстедтом [7] доказана однозначная разрешимость следующей задачи Дарбу.

Задача 3. Найти регулярное в Δ_1 решение уравнения (3) непрерывное в $\bar{\Delta}_1$ и удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x, y, \lambda) = 0 \text{ на } \sigma_1, \quad u_y(x, 0, \lambda) = \nu(x, \lambda), \quad (10)$$

где $\nu(x, \lambda)$ – непрерывно дифференцируемая по x в J_1 функция, которая при $x \rightarrow x_0$, а может обращаться в ∞ порядка $< 2/3$.

В характеристических координатах (6) уравнение (3) имеет вид

$$Eu - \lambda^2 u = u_{\xi\eta} + \frac{1}{6} \frac{1}{\eta - \xi} (u_\xi - u_\eta) - \lambda^2 u = \varphi(\xi, \eta, \lambda), \quad (11)$$

где

$$\varphi = -\frac{1}{4} \left(\frac{4}{3}\right)^{2/3} (\eta - \xi)^{-2/3} f \left(\frac{2x_0 + \xi + \eta}{2}, -\left(\frac{3}{4}\right)^{2/3} (\eta - \xi)^{2/3}, \lambda \right).$$

Область Δ_1 преобразуется в Δ : $0 < \xi < \eta < a - x_0$. Краевые условия (10) принимают вид

$$u(0, \eta, \lambda) = 0, \quad [(\eta - \xi)^{1/3} (u_\eta - u_\xi)]_{\eta=\xi} = -\gamma \nu_1(\xi, \lambda), \quad (12)$$

если

$$\nu_1(\xi, \lambda) = \nu(x_0 + \xi, \lambda), \quad 0 < \xi < a - x_0, \quad \gamma = (4/3)^{1/3}.$$

Для удобства вместо переменных ξ, η ниже будем употреблять переменные x, y .

Функция Грина–Адамара для уравнения $Eu = 0$ задается формулой (см. [7])

$$G(\xi, \eta; x, y) = \begin{cases} \left(\frac{\eta - \xi}{y - x}\right)^{1/6} F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1; S\right), & \eta \geq x, \\ \gamma_0 \left(\frac{\eta - \xi}{x - \xi}\right)^{1/6} \left(\frac{\eta - \xi}{y - \eta}\right)^{1/6} F\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}; \frac{1}{S}\right), & \eta \leq x, \end{cases} \quad (13)$$

где

$$\gamma_0 = \frac{\Gamma(1/6)}{\Gamma(5/6)\Gamma(1/3)}, \quad S = \frac{(x - \xi)(y - \eta)}{(\eta - \xi)(y - x)}.$$

Регулярное в Δ решение u уравнения (11), удовлетворяющее условиям (12), можно записать в виде (см. [8])

$$u(x, y, \lambda) = N(x, y, \lambda) + \Phi(x, y, \lambda), \quad (14)$$

где N и Φ соответственно являются решениями интегральных уравнений Вольтерра

$$\begin{aligned} N(x, y, \lambda) - \lambda^2 \int_0^x d\xi \int_\xi^y N(\xi, \eta, \lambda) G(\xi, \eta; x, y) d\eta = \\ = N_0(x, y, \lambda) = \frac{\gamma \gamma_0}{2} \int_0^x \nu_1(\xi, \lambda) [(x - \xi)(y - \xi)]^{-1/6} d\xi, \\ \Phi(x, y, \lambda) - \lambda^2 \int_0^x d\xi \int_\xi^y \Phi(\xi, \eta, \lambda) G(\xi, \eta; x, y) d\eta = \end{aligned} \quad (15)$$

$$= \Phi_0(x, y, \lambda) = \int_0^x d\xi \int_{\xi}^y \varphi(\xi, \eta, \lambda) G(\xi, \eta; x, y) d\eta. \quad (16)$$

В работе [8] показано, что решение N уравнения (15) допускает следующее интегральное представление:

$$N(x, y, \lambda) = \int_0^x \nu_1(t, \lambda) H(x, y; t, \lambda) dt, \quad (17)$$

где

$$H(x, y; t, \lambda) + \lambda^2 \int_t^x d\xi \int_{\xi}^y H(\xi, \eta; t, \lambda) G(\xi, \eta; x, y) d\eta = H(x, y; t, 0), \quad (18)$$

и более того

$$H(x, y; t, \lambda) = \frac{\gamma\gamma_0}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{2n} [(x-t)(y-t)^{n-1/6} h_n(\zeta)] \quad (19)$$

при

$$h_n(\zeta) = \int_0^1 d\xi_0 \int_{\zeta\xi_0}^1 G(t + (x-t)\xi_0, t + (y-t)\eta_0; x, y) (\xi_0\eta_0)^{n-7/6} \times \\ \times h_{n-1}(\xi_0\zeta/\eta_0) d\eta_0, \quad h_0 = 1, \quad \zeta = (x-t)/(y-t). \quad (20)$$

Из (19) при $y = x$ имеем

$$2H(x, x; t, \lambda) = \gamma\gamma_0(x-t)^{-1/3} H_0(x, t, \lambda), \quad (21)$$

если

$$H_0(x, t, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda x - \lambda t)^{2n} h_n(1). \quad (22)$$

Принимая во внимание (12), (18), (19) и (20) из (17), заключаем, что $N(x, y, \lambda) \in C_{0xy}^2(\Delta^*) \cap C_{\lambda}^2(\Delta \times \bar{\Lambda})$, если $\nu(x, \lambda) \in C_{\lambda}^2(J_1 \times \bar{\Lambda}) \cap C_{0x}^1(J_1^*)$, а $\Delta^* = \Delta \times \Lambda$, $J_1^* = J_1 \times \Lambda$. Из (17) вытекает также, что N имеет производную по y (по характеристическому направлению $x = \text{const}$) непрерывную для всех $(x, y) \in \bar{\Delta} \setminus (y = x, 0 < x < a - x_0)$ при любом λ . Очевидно $N \in C(\bar{\Delta}^*)$.

Теперь легко заметить, что любая функция u , удовлетворяющая условиям леммы 3, удовлетворяет условиям лемм 1 и 2 соответственно. Тем самым доказана лемма 3.

Из (16) в силу (13) при $y = x$ имеем

$$\Phi_0(x, x, \lambda) = \gamma_0 x^2 \int_0^1 d\xi_0 \int_{\xi_0}^1 \varphi(x\xi_0, x\eta_0, \lambda) \left(\frac{\eta_0 - \xi_0}{1 - \xi_0} \right)^{1/3} \left(\frac{1 - \xi_0}{1 - \eta_0} \right)^{1/6} d\eta_0.$$

Отсюда следует, что $\Phi_0(x, x, \lambda) \in C_{0x}^3(0 < x < a - x_0, |\lambda| < d) \cap C_{0x}^1(0 \leq x \leq a - x_0, |\lambda| \leq d) \cap C_\lambda^2(0 < x < a - x_0, |\lambda| \leq d)$, причем $\Phi_0(x, x, \lambda)$ ($\Phi_{0x}(x, x, \lambda)$) при $x \rightarrow 0$ обращается в нуль порядка не ниже $4/3$ ($1/3$).

Исходя из интегрального уравнения (16), можно показать, что $\Phi(x, y, \lambda) \in C_{0xy}^2(\Delta^*) \cap C_\lambda^2(\Delta \times \bar{\Lambda})$, а $\Phi(x, x, \lambda)$ обладает всеми приведенными выше свойствами функции $\Phi_0(x, x, \lambda)$.

В (14) от характеристических координат вернемся к исходным переменным x, y по формуле (6) и в полученном результате положим $y = 0$. Тогда, согласно (17) и (21), можно записать

$$\tau(x, \lambda) = \frac{\gamma\gamma_0}{2} \int_{x_0}^x \nu(t, \lambda)(x-t)^{-1/3} H_0(x, t, \lambda) dt + \Phi(x - x_0, x - x_0, \lambda), \quad (23)$$

где $\tau(x, \lambda) = u(x, 0, \lambda)$, $x_0 < x < a$.

Задача 3*. Найти регулярное в области Δ_2 решение уравнения (3), непрерывное в $\bar{\Delta}_2$ и удовлетворяющее краевым условиям $u(x, y, \lambda) = 0$ на σ_2 , $u_y(x, 0, \lambda) = \nu(x, \lambda)$, $-a < x < x_0$, где ν — непрерывно дифференцируемая по x функция, которая при $x \rightarrow -a$, x_0 может обращаться в ∞ порядка $< 2/3$.

Очевидно задача 3 разрешима безусловно и однозначно. Как и выше убеждаемся, что при $-a < x < x_0$

$$\tau(x, \lambda) = \frac{\gamma\gamma_0}{2} \int_x^{x_0} \nu(t, \lambda)(t-x)^{-1/3} H_0(x, t, \lambda) dt + \Phi(x_0 - x, x_0 - x, \lambda). \quad (24)$$

Функция

$$\psi(x, \lambda) = \begin{cases} \Phi(x_0 - x, x_0 - x, \lambda), & -a \leq x \leq x_0, \\ \Phi(x - x_0, x - x_0, \lambda), & x_0 \leq x \leq a \end{cases}$$

принадлежит пересечению $C_{0x}^1(\bar{J}^*) \cap C_{0x}^3(J^*) \cap C_\lambda^2(J \times \bar{\Lambda})$, причем ψ (ψ_x) при $x \rightarrow x_0$ обращается в нуль порядка не ниже $4/3$ ($1/3$).

4. Задача Хольмгрена.

Задача 4. Найти регулярное в области Ω_1 решение уравнения (3), непрерывное в $\bar{\Omega}_1$ и удовлетворяющее краевым условиям $u(x, y, \lambda) = 0$ на σ_0 , $u_y(x, 0, \lambda) = \nu(x, \lambda)$, $|x| < a$, где ν — непрерывно дифференцируемая по x функция, которая при $x \rightarrow \pm a$, x_0 может обращаться в ∞ порядка меньше $2/3$.

Единственность решения задачи 4 непосредственно получается из принципа экстремума Заремба–Жиро [6].

Пусть $G(\xi, \eta; x, y)$ – функция Грина задачи Хольмгрена для уравнения Трикоми в области Ω_1 (см. [9]). Решение задачи 4 существует и его можно записать в виде (см. [8])

$$u(x, y, \lambda) = N_0(x, y, \lambda) + N(x, y, \lambda) + \Phi(x, y, \lambda), \quad (25)$$

где

$$N_0(x, y, \lambda) = - \int_{-a}^a \nu(\xi, \lambda) G(\xi, 0; x, y) d\xi, \quad (26)$$

N допускает интегральное представление

$$N(x, y, \lambda) = - \int_{-a}^a \nu(t, \lambda) H(x, y; t, \lambda) dt \quad (27)$$

с ядром H , удовлетворяющим уравнению Фредгольма

$$\begin{aligned} H(x, y; t, \lambda) + \lambda^2 \int_{\Omega_1} \eta H(\xi, \eta; t, \lambda) G(\xi, \eta; x, y) d\xi d\eta = \\ = \lambda^2 \int_{\Omega_1} \eta G(t, 0; \xi, \eta) G(\xi, \eta; x, y) d\xi d\eta = H_0(x, y; t, \lambda), \end{aligned} \quad (28)$$

а Φ – решение уравнения

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, \lambda) + \lambda^2 \int_{\Omega_1} \eta \Phi(\xi, \eta, \lambda) G(\xi, \eta; x, y) d\xi d\eta = \\ = - \int_{\Omega_1} f(\xi, \eta, \lambda) G(\xi, \eta; x, y) d\xi d\eta = \Phi_0(x, y, \lambda). \end{aligned} \quad (29)$$

Опираясь на известные свойства функции Грина G , нетрудно проверить, что решение u задачи 4 в силу (25)–(29) принадлежит пересечению $C(\bar{\Omega}_1^*) \cap C^1(\Omega_1^* \cup J) \cap C_\lambda^2(\Omega^* \times \bar{\Lambda}) \cap C_{0xy}^2(\Omega^*)$, если $\nu(x, \lambda) \in C_{0x}^1(J^*) \cap C_\lambda^2(J \times \bar{\Lambda})$.

Из (29) при $y = 0$ получаем (см. [8])

$$\begin{aligned} \Phi_0(x, 0, \lambda) = - \frac{\gamma\gamma_0}{2} \int_{\Omega_1} f(\xi, \eta, \lambda) \left\{ \left[(x - \xi)^2 + \frac{4}{9}\eta^3 \right]^{-1/6} - \right. \\ \left. - \left[\left(a - \frac{x\xi}{a} \right)^2 + \left(\frac{2x}{3a} \right)^2 \eta^3 \right]^{-1/6} \right\} d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Отсюда, принимая во внимание свойства функции f , заключаем, что

$$\Phi_0(x, 0, \lambda) \in C_{0x}^3(J^*) \cap C_\lambda^2(J \times \bar{\Lambda}) \cap C_x^1(\bar{J}^*)$$

и при $x \rightarrow \pm a$ обращается в нуль порядка не ниже первого.

Нет сомнения в том, что решение Φ уравнения Фредгольма (29) принадлежит пересечению $C_{0xy}^2(\Omega_1^*) \cap C_\lambda^2(\Omega_1 \times \bar{\Lambda}) \cap C^1(\Omega^* \cup \bar{J}^*)$ и при $y = 0$ имеет такие же свойства, что и $\Phi_0(x, 0, \lambda)$.

Полагая в (25) $y = 0$ и учитывая (27), будем иметь

$$\begin{aligned} \tau(x, \lambda) = \frac{\gamma\gamma_0}{2} \int_{-a}^a \nu(t, \lambda) \left[L(x, t, \lambda) - |t - x|^{-1/3} + \left(a - \frac{xt}{a} \right)^{-1/3} \right] dt + \\ + \Phi(x, 0, \lambda), \quad |x| < a, \end{aligned} \quad (30)$$

где $L(x, t, \lambda) = 2H(x, 0; t, \lambda)/(\gamma\gamma_0)$.

5. Доказательство существования решения системы уравнений (23), (24), (30). Пусть существует решение $u(x, y, \lambda)$ задачи 2. Тогда, как это показано в предыдущих двух параграфах, $\tau(x, \lambda) = u(x, 0, \lambda)$ и $\nu(x, \lambda) = u_y(x, 0, \lambda)$ удовлетворяют системе уравнений (23), (24), (30).

В дальнейшем исключительно для удобства будем считать, что $a = 1$.

Очевидно $\nu(x, \lambda)$ является решением интегрального уравнения

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \nu(t, \lambda)(x - t)^{-1/3} H_0(x, t, \lambda) dt = \\ = \int_{-1}^1 \nu(t, \lambda) [L(x, t, \lambda) + l(x, t)] dt + h_0(x, \lambda), \end{aligned} \quad (31)$$

если

$$l(x, t) = (1 - xt)^{-1/3} - |t - x|^{-1/3}, \quad \gamma\gamma_0 h_0(x, \lambda) = 2\Phi(x, 0, \lambda) - 2\psi(x, \lambda).$$

Уравнение (31), после сведения интегрального оператора Вольтерра первого рода к такому же, но второго рода, можно переписать в виде (см. [8])

$$\begin{aligned} \pi\sqrt{3}\nu(x, \lambda) + \int_{x_0}^x \nu(t, \lambda)(x - t)^{1/3} H_1(x, t, \lambda) dt = \\ = \int_{-1}^1 \nu(t, \lambda) L_0(x, t, \lambda) dt + \int_{-1}^{x_0} \nu(t, \lambda) S^+(x, t) dt - \end{aligned}$$

$$- \int_{x_0}^1 \nu(t, \lambda) S^-(x, t) dt + h_1(x, \lambda), \quad (32)$$

где

$$L_0(x, t, \lambda) = \frac{d}{dx} \int_{x_0}^x L(\xi, t, \lambda) (x - \xi)^{-2/3} d\xi, \quad (33)$$

$$S^\pm(x, t) = \left(\frac{x_0 - t}{x_0 - x} \right)^{2/3} \frac{1}{t - x} \pm \left(\frac{1 - tx_0}{x_0 - x} \right)^{2/3} \frac{1}{1 - tx_0},$$

$$h_1(x, \lambda) = \frac{d}{dx} \int_{x_0}^x h_0(t, \lambda) (x - t)^{-2/3} dt, \quad (34)$$

а $H_1(x, t, \lambda)$ – известное ядро, имеющее такую же гладкость, что и $H_0(x, t, \lambda)$.

Обращая оператор Вольтерра второго рода в правой части уравнения (32) получим

$$\begin{aligned} \pi\sqrt{3}\nu(x, \lambda) &= \int_{-1}^{x_0} S^+(x, t)\nu(t, \lambda)dt - \int_{x_0}^1 S^-(x, t)\nu(t, \lambda)dt + \\ &+ \int_{-1}^1 k(x, t, \lambda)\nu(t, \lambda)dt + h(x, \lambda), \quad |x| < 1, \quad x \neq x_0, \end{aligned} \quad (35)$$

если

$$\begin{aligned} \pi\sqrt{3}k(x, t, \lambda) &= -L_0(x, t, \lambda)\pi\sqrt{3} + \int_{x_0}^x L_0(s, t, \lambda)(x - s)^{1/3}H_2(x, s, \lambda)ds \pm \\ &\pm \int_{x_0}^x S^\pm(s, t)(x - s)^{1/3}H_2(x, s, \lambda)ds, \end{aligned} \quad (36)$$

причем знак $+$ ($-$) берется при $t < x_0$ ($t > x_0$);

$$h(x, \lambda) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}}h_1(x, \lambda) + \frac{1}{3\pi^2} \int_{x_0}^x h_1(s, \lambda)(x - s)^{1/3}H_2(x, s, \lambda)ds, \quad (37)$$

где $(x - s)^{1/3}H_2$ – резольвента ядра $(x - t)^{1/3}H_1$ (см. [8]).

Равенства (33) и (34) можно переписать в виде

$$h_1(x, \lambda) = \frac{h_t(x_0, \lambda)}{(x - x_0)^{2/3}} + \int_{x_0}^x \frac{h_{0t}(t, \lambda) dt}{(x - t)^{2/3}}, \quad (38)$$

$$L_0(x, t, \lambda) = \frac{L(x_0, t, \lambda)}{(x - x_0)^{2/3}} + \int_{x_0}^x \frac{L_\xi(\xi, t, \lambda) d\xi}{(x - \xi)^{2/3}}. \quad (39)$$

Из (37) на основании (38) и свойств правой части h_0 уравнения (31), установленных в пунктах 3 и 4, заключаем, что

$$h(x, \lambda) \in C_x^1(J \times \bar{\Lambda}) \cap C_{0x}^2(J^*) \cap C_\lambda^2(J \times \bar{\Lambda}),$$

причем

$$h(x, \lambda) = h_0(x_0, \lambda)(x - x_0)^{-2/3} + O(1)(x - x_0)^{1/3}. \quad (40)$$

Здесь и ниже $O(1)$ означает величину, ограниченную в замкнутой области определения.

Решение сингулярного интегрального уравнения (35) с регулярным в силу (36) и (39) ядром k будем искать на множестве функций $\nu(x, \lambda)$, принадлежащих пересечению $C_{0x}^1(J^*) \cap C_{0\lambda}^2(J \times \bar{\Lambda})$ и не обращающихся при $x \rightarrow \pm 1$ ($x \rightarrow x_0$) в ∞ порядка $> 1/3$ ($\geq 2/3$). В этом классе уравнение (35) эквивалентно (см. [8]) интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$\nu(x, \lambda) - \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \int_{-1}^1 k^*(x, s, \lambda) \nu(s, \lambda) ds = h^*(x, \lambda), \quad (41)$$

где

$$\begin{aligned} k^*(x, s, \lambda) = & \frac{3}{4} \left(\frac{1 - sx_0}{x_0 - x} \right)^{2/3} \left[1 - \left(\frac{|x_0 - s|}{1 - x_0 s} \right)^{1/3} \right] \times \\ & \times \left[\frac{1}{1 - xs} + \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma(x, t)}{1 - st} dt \right] + \frac{3}{4} k(x, s, \lambda) + \\ & + \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \int_{-1}^1 k(t, s, \lambda) \left(\frac{x_0 - t}{x_0 - x} \right)^{2/3} \Gamma(x, t) dt, \end{aligned} \quad (42)$$

$$h^*(x, \lambda) = \frac{3}{4} h(x, \lambda) + \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \int_{-1}^1 h(s, \lambda) \left(\frac{x_0 - s}{x_0 - x} \right)^{2/3} \Gamma(x, s) ds, \quad (43)$$

если

$$\Gamma(x, s) = \begin{cases} \left(\frac{|x_0 - x|(1+s)}{(1+x)(x_0 - s)} \right)^{1/3} \left(\frac{1}{s-x} + \frac{1}{1-sx} \right), & -1 \leq s \leq x_0, \\ \left(\frac{|x_0 - x|(1-s)}{(1-x)(s - x_0)} \right)^{1/3} \left(\frac{1}{1-sx} - \frac{1}{s-x} \right), & x_0 \leq s \leq 1. \end{cases} \quad (44)$$

Изучим поведение ядра и правой части уравнения (41) в интервале $|x - x_0| < \varepsilon < 1$.

Принимая во внимание (40) и (44), из (43) получаем

$$\begin{aligned} h^*(x, \lambda) = & \frac{3}{4} h_0(x, \lambda) (x_0 - x)^{-2/3} + O(1) |x - x_0|^\theta + O(1) + \\ & + \frac{\sqrt{3}}{4\pi} h_0(x_0, \lambda) [|x_0 - x|(1+x)]^{-1/3} \int_{-1}^{x_0} \left(\frac{1+s}{x_0 - s} \right)^{1/3} \frac{ds}{s-x} + \\ & + \frac{\sqrt{3}}{4\pi} h_0(x_0, \lambda) [|x_0 - x|(1-x)]^{-1/3} \int_{x_0}^1 \left(\frac{1-s}{x_0 - s} \right)^{1/3} \frac{ds}{s-x}, \end{aligned}$$

где $\theta > -2/3$, а $x \in |x - x_0| \leq \varepsilon$. Отсюда легко увидеть, что

$$\begin{aligned} h^*(x, \lambda) = & \frac{3}{4} h_0(x_0, \lambda) (x - x_0)^{-2/3} + O(1) |x - x_0|^\theta + O(1) + \\ & + \frac{\sqrt{3}}{4\pi} h_0(x_0, \lambda) |x - x_0|^{-1/3} \int_{-1}^1 (x_0 - s)^{-1/3} \frac{ds}{s-x}. \end{aligned} \quad (45)$$

Пусть $x_0 - \varepsilon < x < x_0$. Известно (см. [10, § 23]), что

$$\int_{-1}^{x_0} \frac{ds}{(s - x_0)^{1/3} (s - x)} = -\frac{\pi}{\sqrt{3}} (x - x_0)^{-1/3} + O(1).$$

После замены переменной интегриации $s = 1 - (1 - x_0)t$, воспользовавшись известными свойствами гипергеометрических функций, найдем, что

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^1 \frac{ds}{(s - x_0)^{1/3} (s - x)} = \frac{3(1 - x_0)^{2/3}}{2(1 - x)} F\left(1, 1, \frac{5}{3}; \frac{1 - x_0}{1 - x}\right) = \\ & = \frac{3}{2} \left(\frac{1 - x_0}{1 - x} \right)^{2/3} (x_0 - x)^{-1/3} F\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}; \frac{1 - x_0}{1 - x}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} (x_0 - x)^{-1/3} + O(1). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_{-1}^1 \frac{ds}{(x_0 - s)^{1/3}(s - x)} = -\pi\sqrt{3}(x_0 - x)^{1/3} + O(1).$$

Поэтому равенство (45) принимает вид

$$h^*(x, \lambda) = O(1)|x - x_0|^\theta + O(1). \quad (46)$$

Очевидно (46) законно и при $x > x_0$.

Из (42) с учетом (36) и (39) совершенно аналогично получаем, что

$$k^*(x, s, \lambda) - k^*(x, s, 0) = O(1)|x - x_0|^\theta + O(1), \quad |x - x_0| < \varepsilon.$$

С. Геллерстедт показал [9], что ядро $k^*(x, s, 0)$ допускает мажоранту в форме $M[|x - x_0|(1 - x^2)]^{-1/3}$.

Функция $h^*(x, \lambda) \in C_{0x}^1(J^*) \cap C_{0\lambda}^2(J \times \bar{\Lambda})$.

Теперь, опираясь на результаты предыдущих пунктов, обычным способом (см. [5], [8] и [11]) нетрудно убедиться в эквивалентности интегрального уравнения Фредгольма (41) краевой задаче 2 и тем самым доказать в силу единственности решения задачи 2 его безусловную разрешимость (в классе искомых решений).

Свойства функции $\nu(x, \lambda)$ обеспечивают принадлежность построенного по ней решения $\hat{u}(x, y, z)$ задачи 1 множеству $\hat{C}_{0xy}^2(D)$.

Литература

1. Бицадзе А. В. Сибирский матем. журнал. 1962. Т. 3, № 5. С. 642–644.
2. Protter M. H. Proceedings of the conference on differential equations. University of Maryland Book Store. 1956. Pp. 91–106.
3. Хермандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М.: Мир, 1965.
4. Agmon S., Nirenberg L., Protter M. Comm. pure appl. math. 1953. Vol. 6, no. 4. Pp. 455–470.
5. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959.
6. Бицадзе А. В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966.
7. Gellerstedt S. Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik. 1937. Vol. 25 A, no. 29. Pp. 1–23.
8. Нахушев А. М. Сибирский матем. журнал. 1967. Т. 8. С. 19–48.
9. Gellerstedt S. Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik. 1937. Vol. 26 A, no. 3. Pp. 1–32.
10. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962.
11. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М.: ИЛ, 1957.

Об одной краевой задаче для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа

Рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} k(y) u_{xx} + u_{yy} + a(x, y) u_x + b(x, y) u_y + c(x, y) u, & y < 0, \\ u_{xx} + \alpha(x, y) u_x + \beta(x, y) u_y + \gamma(x, y) u, & y > 0, \end{cases} \quad (1)$$

в односвязной смешанной области D плоскости независимых переменных x, y , ограниченной отрезками AA_0, A_0B_0, BB_0 прямых $x = 0, x = 1, y = y_0 > 0$ соответственно и действительными характеристиками $AC: \sqrt{-k} dy + dx = 0, BC: \sqrt{-k} dy - dx = 0$ уравнения (1), выходящими из точек $A(0, 0), B(1, 0)$. Пусть $D_1 (D_2)$ – параболическая (гиперболическая) часть смешанной области D .

Относительно коэффициентов уравнения (1) делаются следующие предположения: $k(y)$ – непрерывно дифференцируемая и монотонно возрастающая функция в D_2 , причем $k(0) = 0$; a, b и c принадлежат пространству $C^1(\overline{D}_2)$ и связаны соотношениями (см. [1])

$$\begin{aligned} & \delta(\sqrt{-k}) + a + b\sqrt{-k} < 0, \\ & \delta \left(\frac{\delta\sqrt{-k}}{\sqrt{-k}} + \frac{a + b\sqrt{-k}}{\sqrt{-k}} \right) + \frac{1}{2k} \left[\delta\sqrt{-k} + a + b\sqrt{-k} \right] \times \\ & \times \left[\delta\sqrt{-k} + a - b\sqrt{-k} \right] - 2c \leq 0, \quad c \leq 0, \end{aligned}$$

где $\delta \equiv \partial \setminus \partial y + \sqrt{-k} \partial \setminus \partial x$; $\alpha, \beta, \gamma \in C(\overline{D}_1)$ и, кроме того, $\beta < 0, \gamma \leq 0$.

Под *регулярным в области D решением уравнения (1)* будем понимать функцию $u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_1 \cup D_2)$ и удовлетворяющую уравнению (1) в $D_1 \cup D_2$.

Для уравнения (1) непосредственным аналогом известной задачи Трикоми [2] является следующая

Задача Т. Найти регулярное в D решение $u(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям:

$$u(0, y) = \varphi_0(y), \quad u(1, y) = \varphi_1(y), \quad 0 \leq y \leq y_0, \quad (2)$$

$$u|_{AC} = \psi(x), \quad (3)$$

где $\varphi_0(y), \varphi_1(y) \in C(0 \leq y \leq y_0), \psi(x) \in C^4(0 \leq x \leq 1/2), \varphi_0(0) = \psi(0) = \varphi_1(1) = 0$.

Лемма. Пусть 1) $u(x, y)$ – регулярное решение задачи Т, когда $\psi(x) \equiv 0$; 2) производная от функции $u(x, y)$ по направлению характеристик семейства $\sqrt{-k} dy + dx = 0$ существует и непрерывна в $\overline{D_2} \setminus A \setminus B$. Тогда положительный максимум (отрицательный минимум) функции $u(x, y)$ в $\overline{D_2}$ достигается в некоторой точке $(\xi, 0) \in AB$ и в этой точке $u_y > 0$ ($u_y < 0$).

Эта лемма доказывается так же как в [1], [3], где рассмотрен случай $k(y) = y$, $a(x, y) \equiv 0$, а $b(x, y)$ и $C(x, y)$ связаны специальным образом.

Пусть $u(x, y) \in C^1(D_1 \cup A_0 B_0)$ и удовлетворяет условиям леммы. Тогда положительный максимум и отрицательный минимум $u(x, y)$ в $\overline{D_1}$ достигаются на $\overline{AA_0} \cup \overline{BB_0}$.

Справедливость этого принципа экстремума следует из приведенной леммы и известного принципа экстремума для параболических уравнений [4].

Из принципа экстремума вытекает единственность решения $u(x, y)$ задачи Т, если $u(x, y) \in C^1(D_1 \cup A_0 B_0)$.

Докажем существование решения задачи Т, ограничиваясь случаем $a = b = c = \alpha = \gamma = 0$, $\beta = -1$, $k(y) = y$.

Пусть существует решение $u(x, y)$ задачи Т и $u(x, 0) = \tau(x)$, $u_y(x, 0) = \nu(x)$. Тогда из уравнения (1) непосредственно вытекает, что $\tau(x)$ и $\nu(x)$ на AB будут связаны следующим соотношением, принесенным из области D_1 :

$$\tau''(x) = \nu(x), \quad 0 < x < 1,$$

или

$$\tau(x) = \int_0^x (x-t)\nu(t)dt + x \int_0^1 (t-1)\nu(t)dt. \quad (4)$$

Решая задачу Дарбу для уравнения (1) в области D_2 с данными (3) и $\nu(x)$ на AB , убеждаемся [5], что эти функции связаны также соотношением

$$\tau(x) = \gamma_0 \int_0^x \frac{\nu(t)dt}{(x-t)^{1/3}} + \Psi(x), \quad 0 < x < 1, \quad (5)$$

где $4\pi^2\gamma_0 = 3^{2/3}\Gamma^3(1/3)$,

$$\Psi(x) = \frac{\Gamma(1/6)}{\Gamma(5/6)\Gamma(1/3)} x^{-1/6} \int_0^x \left[\psi' \left(\frac{\eta}{2} \right) + \frac{1}{6\eta} \psi \left(\frac{\eta}{2} \right) \right] \frac{\eta^{1/3}}{(x-\eta)^{1/6}} d\eta. \quad (6)$$

Поскольку

$$\psi(x) = x \int_0^1 \psi'(tx) dt, \quad 0 \leq x \leq 1/2,$$

из (6) легко усмотреть, что

$$\Psi(x) \in C^3(0 \leq x \leq 1), \quad \Psi(x) = O(1)x. \quad (7)$$

Исключая $\tau(x)$ из системы (4), (5), получим

$$\int_0^x \frac{\gamma_0 - (x-t)^{4/3}}{(x-t)^{1/3}} \nu(t) dt = x \int_0^1 (t-1) \nu(t) dt - \Psi(x). \quad (8)$$

Очевидно, уравнение (8) эквивалентно задаче Т.

Применяя к обеим частям интегрального уравнения (8) оператор (см. [6])

$$A\mu(x) \equiv \frac{\partial}{\partial x} \int_0^x \frac{\mu(t) dt}{(x-t)^{2/3}}, \quad (9)$$

после некоторых преобразований найдем

$$\frac{2\pi}{\sqrt{3}} \gamma_0 \nu(x) - 3 \int_0^x (x-t)^{1/3} \nu(t) dt = \int_0^1 (t-1) \nu(t) dt Ax - A\Psi(x),$$

или

$$\nu(x) - \lambda \int_0^x (x-t)^{1/3} \nu(t) dt = \lambda x^{1/3} \int_0^1 (t-1) \nu(t) dt + \Phi(x), \quad (10)$$

где

$$\lambda = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi\gamma_0}, \quad \Phi(x) = -\frac{\lambda}{3} A\Psi(x). \quad (11)$$

Пусть $\Gamma(x, t, \lambda)$ – резольвента ядра $(x-t)^{1/3}$ оператора Вольтерра в левой части уравнения (10). Нетрудно убедиться в том, что

$$\Gamma(x, t, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1} \Gamma^n(4/3)}{\Gamma(4n/3)} (x-t)^{(4n-3)/3}. \quad (12)$$

После законного в силу (7) и (11) обращения интегрального оператора Вольтерра уравнение (10) принимает вид

$$\nu(x) - \lambda \int_0^1 k(x, t) \nu(t) dt = f(x), \quad (13)$$

где

$$k(x, t) = (t - 1) \left[x^{1/3} + \lambda \int_0^x s^{1/3} \Gamma(x, s, \lambda) ds \right], \quad (14)$$

$$f(x) = \Phi(x) + \lambda \int_0^x \Gamma(x, t, \lambda) \Phi(x) dt. \quad (15)$$

Из (11) с учетом (7) имеем

$$\Phi(x) = -\frac{\lambda}{3} \int_0^x \frac{\Psi'(t) dt}{(x-t)^{2/3}},$$

следовательно, $\Phi(x) \in C(0 \leq x \leq 1) \cap C^2(0 < x < 1)$, причем в точке $x = 0$ обращается в нуль порядка не ниже $1/3$. Очевидно, в силу (12) и (15) правая часть $f(x)$ уравнения (13) обладает теми же свойствами.

Из (14) и (12) заключаем:

$$k(x, t) \in C(0 \leq x, t \leq 1), \quad k(x, t) = x^{1/3} k^*(x, t),$$

где $k^*(x, t) \in C(0 \leq x, t \leq 1)$; $k(x, t)$ дважды непрерывно дифференцируемо по x в квадрате $0 < x, t < 1$.

Таким образом, если существуют решения $\nu(x)$ интегрального уравнения Фредгольма второго рода (13), то они принадлежат классу $C(0 \leq x \leq 1) \cap C^2(0 < x < 1)$ и при $x = 0$ обращаются в нуль порядка не ниже $1/3$. Из соотношения (5) следует, что для таких $\nu(x)$ функция $\tau(x) \in C(0 \leq x \leq 1) \cap C^2(0 < x < 1)$ и при $x = 0$ обращается в нуль порядка не ниже единицы.

Решения $u(x, y)$ задачи Т в области D_2 (если они существуют) представимы формулой Дарбу

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma^2(1/6)} \int_0^1 \tau [x + 2/3(-y)^{3/2}(2t - 1)] [t(1 - t)]^{-5/6} dt + \\ & + \frac{\Gamma(5/3)}{\Gamma^2(5/6)} y \int_0^1 \nu [x + 2/3(-y)^{3/2}(2t - 1)] [t(1 - t)]^{-1/6} dt, \end{aligned}$$

откуда следует, что $u(x, y) \in C^1(\overline{D}_2)$.

Теперь нетрудно видеть эквивалентность (в смысле разрешимости) задачи Т интегральному уравнению (13) и принадлежность решения $u(x, y)$ этой задачи классу функций, для которых доказан принцип экстремума.

Из единственности решения задачи Т вытекает безусловная разрешимость интегрального уравнения Фредгольма второго рода (13) и, следовательно, задачи Т.

Пусть теперь D_1 – односвязная область полуплоскости $y > 0$, граница которой содержит участок AB оси $y = 0$, а $D = D_1 \cup D_2 \cup AB$. В общем случае при доказательстве существования решения задачи Т в области D принципиальных затруднений не возникает, если дополнительно область D_1 и функций $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ таковы, что в области D_1 разрешима основная краевая задача для уравнения (1) [4], а в D_2 – задача Дарбу [5].

Литература

1. Agmon S., Nirenberg L., Protter M. Comm. Pure and Appl. Math. 1953. Vol. 6, no. 4. P. 455.
2. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М., 1959.
3. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, № 1. С. 52.
4. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М., 1957.
5. Gellerstedt S. Ark. Mat., Astr., Fys. 1937. Vol. 25 A, no. 29. Pp. 1–23.
6. Гурса Э. Курс математического анализа. Т. 3, ч. 2. М., 1934.

Поступила в редакцию
20 марта 1968 г.

Институт математики
СО АН СССР

О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа

В работе в качестве модельного уравнения с частными производными второго порядка от двух независимых переменных x, y гиперболического типа рассматривается волновое уравнение

$$u_{xx} - u_{yy} = 0, \quad (1)$$

а в качестве модельного уравнения смешанного типа – либо уравнение Лаврентьева–Бицадзе

$$\operatorname{sign} y \cdot u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (2)$$

либо уравнение Трикоми

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0. \quad (3)$$

1. Краевые задачи со смещением для уравнения (1). Пусть Δ – односвязная область комплексной плоскости $z = x + iy$, ограниченная характеристиками $AC: x + y = 0$, $BC: x - y = 1$ уравнения (1) и отрезком AB оси $y = 0$; $J \equiv AB$ – единичный интервал; $\Gamma = AC \cup BC$.

В этом пункте будет в основном исследован ряд краевых задач для уравнения (1) в области Δ , когда на J задаются значения функции $u(x, y) \equiv u(z)$ или ее нормальной производной, а на Γ – условия, поточечно связывающие значения $u(z)$ или ее производной по некоторому направлению.

Задача 1. Найти регулярное в области Δ решение $u(z) \in C(\overline{\Delta})$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x, 0) = \tau(x) \quad \forall x \in \overline{J}, \quad (4)$$

$$\alpha(x)u\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right) + \beta(x)u\left(\frac{x+1}{2}, \frac{x-1}{2}\right) = \delta(x) \quad \forall x \in \overline{J}, \quad (5)$$

где

$$\alpha(1)\beta(0) \neq 0, \quad \alpha(x) \neq \beta(x) \quad \forall x \in \overline{J}, \quad (6)$$

$$\tau(x), \alpha(x), \beta(x), \delta(x) \in C(\overline{J}) \cap C^2(J). \quad (7)$$

Опираясь на известные свойства характеристического четырехугольника с вершинами в точках $(x, 0)$, $(x/2, -x/2)$, $(1/2, -1/2)$, $((x+1)/2, (x-1)/2)$, легко убедиться в эквивалентности задачи 1 следующей алгебраической системе:

$$u\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right) + u\left(\frac{x+1}{2}, \frac{x-1}{2}\right) = u\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) + \tau(x),$$

$$\alpha(x)u\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right) + \beta(x)u\left(\frac{x+1}{2}, \frac{x-1}{2}\right) = \delta(x),$$

которая в силу (6) и (7) разрешима в классе $C(\overline{J}) \cap C^2(J)$ однозначно и безусловно. Следовательно, задача 1 редуцируется к задаче Гурса с данными на Γ , и поэтому она является корректной.

Задача 2. Найти регулярное в Δ решение $u(z) \in C(\overline{\Delta})$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям (4) и

$$\alpha(x)\frac{d}{dx}u\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right) + \beta(x)\frac{d}{dx}u\left(\frac{x+1}{2}, \frac{x-1}{2}\right) = \delta(x) \quad \forall x \in \overline{J}. \quad (8)$$

Здесь в отличие от задачи 1 числа $\alpha(1)$ и $\beta(0)$ могут одновременно обращаться в нуль.

Общее регулярное в Δ решение уравнения (1), удовлетворяющее краевому условию (4), очевидно можно представить в виде

$$u(z) = \frac{\tau(x+y) + \tau(x-y)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} \nu(t) dt, \quad (9)$$

где $\nu(x) \in C^1(J)$ – произвольная функция.

Удовлетворив (9) краевому условию (8), найдем

$$\nu(z) = \frac{[\alpha(x) + \beta(x)]\tau'(x) - 2\delta(x)}{\alpha(x) - \beta(x)}. \quad (10)$$

Следовательно, задача 2 разрешима однозначно и безусловно и ее решение $u(z)$ задается формулами (9), (10).

Задача 3. Найти регулярное в Δ решение $u(z) \in C(\overline{\Delta})$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u_y(x, 0) = \nu(x) \quad \forall x \in J, \quad (11)$$

$$u\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right) + \beta(x)u\left(\frac{x+1}{2}, \frac{x-1}{2}\right) = \delta(x) \quad \forall x \in \overline{J}, \quad (12)$$

$$\beta(1)u(1, 0) = \beta_1, \quad (13)$$

где $\nu(x) \in C^1(J)$ и в точках $x = 0, 1$ может обращаться в ∞ (бесконечность) интегрируемого порядка; $\beta(x), \delta(x) \in C(\overline{J}) \cap C^2(J)$, причем

$$\beta(x) \neq -1 \quad \forall x \in \overline{J} \quad (14)$$

и, наконец, β_1 – заданное число, которое очевидно равно нулю при $\beta(1) = 0$.

Общее регулярное в области Δ решение уравнения (1), удовлетворяющее равенству (11), можно представить в виде

$$u(z) = \psi(x+y) + \psi(x-y) - \psi(0) + \int_0^{x+y} \nu(t)dt, \quad (15)$$

где $\psi(x) \in C(\overline{J}) \cap C^2(J)$ – произвольная функция.

Удовлетворив (15) краевому условию (12), в силу (14) найдем

$$\psi(x) = \frac{\delta(x) - \beta(x)[\psi(1) - \psi(0)]}{1 + \beta(x)} - \frac{\beta(x)}{1 + \beta(x)} \int_0^x \nu(t)dt. \quad (16)$$

С учетом (16) из (15) при $y = 0$ получим

$$\tau(z) = \frac{1 - \beta(x)}{1 + \beta(x)} \int_0^x \nu(t)dt + 2 \frac{\delta(x) - \beta(x)[u(1/2, -1/2) - \tau(0)]}{1 + \beta(x)} - \tau(0), \quad (17)$$

где $u(x, 0) = \tau(x)$.

Из (12) и (13) тривиально следует, что

$$u(1/2, -1/2) = \delta(1) - \beta_1,$$

$$\tau(0) = \delta(0) - \beta(0)[\delta(1) - \beta_1],$$

поэтому задача 3 корректна и ее решение выписывается в явном виде по формулам (15), (16).

Пусть $\theta(z)$ – некоторый гомеоморфизм из множества точек на AC в множество точек на BC .

Непосредственными обобщениями рассмотренных выше задач, очевидно, являются краевые задачи, в которых условие на Γ заменено условием

$$\alpha(z)u(z) + \beta(z)u[\theta(z)] = \delta(z) \quad \forall z \in \Gamma,$$

где $\alpha(z)$, $\beta(z)$, $\delta(z)$ – заданные на Γ действительные функции комплексного переменного z .

Эти задачи довольно просто редуцируются к эквивалентным функциональным уравнениям вида

$$\Phi(x) + G(x)\Phi[\theta^*(x)] = g(x) \quad \forall x \in \bar{J}, \quad (18)$$

где $\Phi(x)$ искомая, $G(x)$, $\theta^*(x)$, и $g(x)$ – заданные непрерывные в $\bar{J}$ функции.

При исследовании (однозначной) разрешимости уравнения (18) возникают принципиальные трудности (см., например, [1] и [2], где изучались некоторые частные случаи этого уравнения).

Здесь мы ограничимся лишь простейшим случаем гомеоморфизма $\theta(z)$, отличным от рассмотренного выше и в какой-то мере выясняющим степень недоопределенности и переопределенности такого рода краевых задач.

Задача 4. Найти регулярное в области Δ непрерывное в $\bar{\Delta}$ решение $u(z)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям (4) и

$$u\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right) + u\left(1 - \frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right) = \delta(x) \quad \forall x \in \bar{J}. \quad (19)$$

Общее регулярное в Δ решение уравнения (1), удовлетворяющее соотношению (19), дается формулой

$$u(z) = f(x+y) - f(1-x+y) + \delta(x-y) - \frac{1}{2}\delta(1), \quad (20)$$

где $f(x) \in C(\bar{J}) \cap C^2(J)$ – произвольная функция.

Из (4) и (20) заключаем, что задача 4 эквивалентна функциональному уравнению

$$f(x) - f(1-x) = \tau(x) - \delta(x) + \frac{1}{2}\delta(1) \quad \forall x \in \bar{J}. \quad (21)$$

Очевидно, условие $\tau(x) + \tau(1-x) = \delta(x) + \delta(1-x) - \delta(1)$ является необходимым для разрешимости (21).

Так как однородное функциональное уравнение

$$f(x) - f(1-x) = 0 \quad \forall x \in \bar{J}$$

имеет бесчисленное множество линейно независимых решений (например, вида $f(x) = f^*(x)f^*(1-x)$ или $f(x) = f^*(x) + f^*(1-x)$), то этим свойством обладает и однородная краевая задача 4 ($\tau(x) \equiv 0$, $\delta(x) \equiv 0$). Следовательно, если задача 4 имеет хоть одно решение, то она имеет бесчисленное множество линейно независимых решений.

Задача 4 при $\delta(x) = \tau(1-x) + \frac{1}{2}\delta(1)$ эквивалентна функциональному уравнению

$$f(x) - f(1-x) = \tau(x) - \tau(1-x),$$

которое имеет бесчисленное множество линейно независимых решений вида

$$f(x) = f^*(x)f^*(1-x) + \tau(x).$$

Задача 5. Найти регулярное в Δ непрерывное в $\bar{\Delta}$ решение $u(z)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям (19) и

$$u_x(x, 0) + \varepsilon u_y(x, 0) = \mu(x) \quad \forall x \in J,$$

где $\varepsilon = 1$ либо -1 , а $\mu(x) \in C(\bar{J}) \cap C^1(J)$.

Из формулы (20) нетрудно увидеть, что задача 5 является корректной.

В заключение этого пункта сформулируем одну простейшую краевую задачу для уравнения (1), когда от граничных условий освобождается участок AB границы области Δ .

Задача 6. Найти регулярное в Δ решение $u(z) \in C^1(\bar{\Delta})$ уравнения (1), если известно, что

$$u\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right) + u\left(1 - \frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right) = \delta(x) \quad \forall x \in \bar{J}, \quad (22)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right) + \frac{\partial u}{\partial x}\left(1 - \frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right) = \mu(x) \quad \forall x \in \bar{J}, \quad (23)$$

где $\delta(x) \in C^1(\bar{J}) \cap C^2(J)$, $\mu(x) \in C(\bar{J}) \cap C^1(J)$.

В силу (20) ясно, что эта задача эквивалентна в смысле разрешимости следующему уравнению:

$$\begin{aligned} f'(0) - \frac{d}{dy}f(1-y) + \delta'(y) + \frac{d}{dx}f(x) \Big|_{x=1-y} - \\ - \frac{d}{dy}f(1-y) \Big|_{y=1} + \delta'(1) = \mu(y), \quad \forall y \in \bar{J}, \end{aligned}$$

или

$$2\frac{d}{dy}f(1-y) = 2f'(0) + \delta'(y) + \delta'(1) - \mu(y). \quad (24)$$

Из (24) с учетом того, что

$$2f'(0) = \frac{1}{2}\mu(1) - \delta'(1),$$

находим

$$f(x) = \frac{1}{4}\mu(1)(1-x) + \frac{1}{2}\delta(1-x) - \frac{1}{2}\int_0^{1-x}\mu(t)dt + f(1) - \frac{1}{2}\delta(0).$$

Следовательно, единственное решение $u(z)$ задачи 6 в соответствии с (20) дается формулой

$$u(z) = \frac{1}{4}\mu(1)(1-2x) + \frac{1}{2}\delta(1-x-y) - \frac{1}{2}\delta(1) + \frac{1}{2}\left(\int_0^{x-y} - \int_0^{1-x-y}\right)\mu(t)dt.$$

2. О двух краевых задачах со смещением для уравнения Трикоми. Пусть Δ — односвязная область, ограниченная характеристиками $AC: x - \frac{2}{3}(-y)^{3/2} = 0$, $BC: x + \frac{2}{3}(-y)^{3/2} = 1$ уравнения Трикоми (3) и отрезком $J \equiv AB$ оси $y = 0$.

Примем следующие обозначения:

$$\theta_0(x) = \frac{x}{2} - \left(\frac{3x}{4}\right)^{2/3} i, \quad \theta_1(x) = \frac{1+x}{2} - \left[\frac{3(1-x)}{4}\right]^{2/3} i,$$

$$D_{0x}^l f \equiv \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-l)} \int_0^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1+l}}, & l < 0, \\ \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} D_{0x}^{l-(n+1)} f, & l > 0; \end{cases} \quad (25)$$

$$D_{x1}^l f \equiv \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-l)} \int_x^1 \frac{f(t)dt}{(t-x)^{1+l}}, & l < 0, \\ -\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} D_{x1}^{l-(n+1)} f, & l > 0, \end{cases} \quad (26)$$

где l — любое действительное число, а n — целая часть $l \geq n$.

Очевидно $\theta_0(x)$ и $\theta_1(x)$ являются аффиксами точек пересечения характеристик уравнения (3), выходящих из точки $(x, 0)$ с характеристиками AC и BC соответственно, а операторы D_{0x}^l , D_{x1}^l представляют собой операторы дробного интегрирования порядка $-l$ при $l < 0$ и обобщенные производные (в смысле Лиувилля) порядка l при $l > 0$ (см., например, [3]).

Задача 7. Найти функцию $u(z) \equiv u(x, y)$ со следующими свойствами:

$$1) u(z) \in C(\overline{\Delta}) \cap C^1(\Delta \cup J), \quad \int_0^1 u_y(x, 0)[x(1-x)]^{-1/6} dx < \infty;$$

2) $u(z)$ – регулярное в области Δ решение уравнения (3), удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad \forall x \in \overline{J}, \quad (27)$$

$$\alpha(x)D_{0x}^{5/6}u[\theta_0(x)] + \beta(x)D_{x1}^{5/6}u[\theta_1(x)] = \gamma(x), \quad \forall x \in J, \quad (28)$$

где

$$\tau(x) \in C^1(\overline{J}) \cap C^3(J), \quad (29)$$

$$\alpha(x), \beta(x), \gamma(x) \in C(\overline{J}) \cap C^2(J), \quad (30)$$

$$\alpha(x)(1-x)^{1/6} + \beta(x)x^{1/6} \neq 0, \quad \forall x \in \overline{J}. \quad (31)$$

Нетрудно убедиться в том, что если решение задачи 7 существует, то его можно представить в виде

$$\begin{aligned} u(z) = & \frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma^2(1/6)} \int_0^1 \tau \left[x + \frac{2}{3}(-y)^{3/2}(2t-1) \right] [t(1-t)]^{-5/6} dt + \\ & + \frac{\Gamma(5/3)}{\Gamma^2(5/6)} y \int_0^1 \nu \left[x + \frac{2}{3}(-y)^{3/2}(2t-1) \right] [t(1-t)]^{-1/6} dt, \end{aligned} \quad (32)$$

где $\nu = u_y(x, 0)$.

Из (32) при $z = \theta_0(x)$ и $z = \theta_1(x)$ соответственно в силу (25) и (26) имеем

$$\begin{aligned} u[\theta_0(x)] = & \frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma(1/6)} x^{2/3} \frac{1}{\Gamma(1/6)} \int_0^x \frac{\tau(t)t^{-5/6}}{(x-t)^{5/6}} dt - \\ & - \left(\frac{3}{4} \right)^{2/3} \frac{\Gamma(5/3)}{\Gamma(5/6)} \frac{1}{\Gamma(5/6)} \int_0^x \frac{\nu(t)t^{-1/6}}{(x-t)^{1/6}} dt = \\ = & \frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma(1/6)} x^{2/3} D_{0x}^{-1/6} \frac{\tau(x)}{x^{5/6}} - \left(\frac{3}{4} \right)^{2/3} \frac{\Gamma(5/3)}{\Gamma(5/6)} D_{0x}^{-5/6} \frac{\nu(x)}{x^{1/6}}, \quad (33) \\ u[\theta_1(x)] = & \frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma(1/6)} (1-x)^{2/3} \frac{1}{\Gamma(1/6)} \int_x^1 \frac{\tau(t)(1-t)^{-5/6}}{(t-x)^{5/6}} dt - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \left(\frac{3}{4}\right)^{2/3} \frac{\Gamma(5/3)}{\Gamma(5/6)} \frac{1}{\Gamma(5/6)} \int_x^1 \frac{\nu(t)(1-t)^{-1/6}}{(t-x)^{1/6}} dt = \\
 & = \frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma(1/6)} (1-x)^{2/3} D_{x1}^{-1/6} \frac{\tau(x)}{(1-x)^{5/6}} - \left(\frac{3}{4}\right)^{2/3} \frac{\Gamma(5/3)}{\Gamma(5/6)} D_{x1}^{-5/6} \frac{\nu(x)}{(1-x)^{1/6}}. \quad (34)
 \end{aligned}$$

Подставляя (33) и (34) в краевое условие (28) и учитывая то, что $D_{0x}^{5/6} D_{0x}^{-5/6} = D_{x1}^{5/6} D_{x1}^{-5/6} = D^0$, где D^0 – единичный оператор, найдем

$$\begin{aligned}
 & (3/4)^{2/3} \Gamma(1/6) \Gamma(5/3) [\alpha(x)(1-x)^{1/6} + \beta(x)x^{1/6}] \nu(x) = \\
 & = \Gamma(1/3) \Gamma(5/6) [x(1-x)^{1/6}] \left[\alpha(x) D_{0x}^{5/6} x^{2/3} D_{0x}^{-1/6} \frac{\tau(x)}{x^{5/6}} + \right. \\
 & \left. + \beta(x) D_{x1}^{5/6} (1-x)^{2/3} D_{x1}^{-1/6} \frac{\tau(x)}{(1-x)^{5/6}} \right] - 2\pi [x(1-x)]^{1/6} \gamma(x). \quad (35)
 \end{aligned}$$

Принимая во внимание (25), можно записать

$$\begin{aligned}
 & \tau_1(x) = \Gamma^2(1/6) D_{0x}^{5/6} x^{2/3} D_{0x}^{-1/6} \frac{\tau(x)}{x^{5/6}} = \\
 & = \Gamma(1/6) \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{t^{2/3} D_{0t}^{-1/6} t^{-5/6} \tau(t)}{(x-t)^{5/6}} dt = \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{t^{2/3} dt}{(x-t)^{5/6}} \int_0^t \frac{\tau(\xi) d\xi}{[\xi(t-\xi)]^{5/6}}.
 \end{aligned}$$

Отсюда после перестановки порядка интегрирования и замены переменной интеграции $t = x - (x - \xi)t_1$ получаем

$$\tau_1(x) = \frac{\Gamma^2(1/6)}{\Gamma(1/3)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\tau(t)}{t^{5/6}} \left(\frac{x}{x-t}\right)^{2/3} F\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}; \frac{x-t}{x}\right) dt \quad (36)$$

или

$$\tau_1(x) = \frac{\Gamma^2(1/6)}{\Gamma(1/3)} \frac{d}{dx} \int_0^1 \frac{\tau(xt)x^{1/6}}{t^{5/6}(1-t)^{2/3}} F\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}; 1-t\right) dt, \quad (37)$$

где F – гипергеометрическая функция.

Из (36) и (37) в силу (29) заключаем, что $\tau_1(x) \in C(J \cup x=1) \cap C^2(J)$ и в точке $x=0$ может обращаться в ∞ порядка не выше $5/6$.

Теперь, если учесть (30), (31), нетрудно убедиться в том, что функция $\nu(x)$ однозначно определяется из соотношения (35) и она дважды непрерывно дифференцируема в J , обращаясь, быть может, в ∞ порядка не выше $2/3$ на концах этого интервала.

Следовательно, задача 7 разрешима однозначно и безусловно и ее решение $u(z)$ дается формулой (32), где $\nu(x)$ определяется из (35).

Задача 8. Найти функцию $u(z)$ со следующими свойствами:

1) $u(z) \in C(\bar{\Delta}) \cap C^1(\Delta \cup J)$, причем функция $u_y(x, 0) = \nu(x) \in C^2(J)$ и при $x = 0, 1$ может обращаться в ∞ порядка $< 2/3$;

2) $u(z)$ – регулярное в области Δ решение уравнения (3), удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad \forall x \in \bar{J}, \quad (38)$$

$$\alpha(x)u[\theta_0(x)] + \beta(x)u[\theta_1(x)] = \gamma(x), \quad \forall x \in \bar{J}, \quad (39)$$

где

$$\tau(x) \in C^3(\bar{J}), \quad (40)$$

$$\alpha(x) \in C(\bar{J}) \cap C^3(J), \quad \beta(x), \gamma(x) \in C^3(\bar{J}), \quad (41)$$

$$\alpha(x) = x^p(1-x)^q\alpha_0(x), \quad \forall x \in \bar{J}, \quad p > 1/6, \quad q > 5/3, \quad (42)$$

$$\alpha_0(x) \in C^3(\bar{J}),$$

$$\left[2\alpha(x) \left(\frac{1-x}{x} \right)^{1/6} - \sqrt{3}\beta(x) \right]^2 + \beta^2(x) \neq 0, \quad \forall x \in \bar{J}. \quad (43)$$

Ниже задача 8 будет редуцирована к сингулярному интегральному уравнению с ядром Коши нормального типа.

Из соотношения (33) и (34) в силу (39) легко увидеть, что задача 8 эквивалентна (в смысле разрешимости) следующему интегральному уравнению:

$$\alpha(x) \int_0^x \frac{\nu(t)dt}{[t(x-t)]^{1/6}} + \beta(x) \int_x^1 \frac{\nu(t)dt}{[(1-t)(t-x)]^{1/6}} = \gamma_1(x), \quad (44)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_1(x) = & \left(\frac{4}{3} \right)^{2/3} \frac{\Gamma(1/3)\Gamma^2(5/6)}{\Gamma(5/3)\Gamma(1/6)} \left[\alpha(x)x^{2/3}D_{0x}^{-1/6} \frac{\tau(x)}{x^{5/6}} + \right. \\ & \left. + \beta(x)(1-x)^{2/3}D_{x1}^{-1/6} \frac{\tau(x)}{(1-x)^{5/6}} \right] - \gamma(x) \left(\frac{4}{3} \right)^{2/3} \frac{\Gamma^2(5/6)}{\Gamma(5/3)}. \end{aligned} \quad (45)$$

Введем новую неизвестную функцию

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{2\pi(1-x)^{5/6}} \int_0^x \frac{\nu(t)dt}{[(1-t)(x-t)]^{1/6}} = \\ &= \frac{\Gamma(5/6)}{2\pi(1-x)^{5/6}} D_{0x}^{-5/6} \frac{\nu(x)}{(1-x)^{1/6}}. \end{aligned} \quad (46)$$

Очевидно функция $\varphi(x) \in C^2(J)$ в точке $x = 0$ обращается в нуль порядка не ниже $1/6$, а при $x = 1$ может обращаться в ∞ порядка не выше $5/6$.

Из равенства (46) имеем

$$\nu(x) = \frac{2\pi}{\Gamma(5/6)}(1-x)^{1/6}D_{0x}^{5/6}(1-x)^{5/6}\varphi. \quad (47)$$

Принимая во внимание известное тождество (см. [4])

$$\int_x^1 \frac{\nu(t)dt}{[(1-t)(x-t)]^{1/6}} = -\sqrt{3}\pi(1-x)^{5/6}\varphi(x) + (1-x)^{5/6} \int_0^1 \frac{\varphi(t)dt}{t-x},$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши, уравнение (44) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \alpha(x) \frac{2\pi}{\Gamma(5/6)} \int_0^x \left(\frac{1-t}{t} \right)^{1/6} \frac{D_{0t}^{5/6}(1-t)^{5/6}\varphi}{(x-t)^{1/6}} dt - \\ - \sqrt{3}\pi(1-x)^{5/6}\beta(x)\varphi(x) + (1-x)^{5/6}\beta(x) \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{t-x} dt = \gamma_1(x). \end{aligned}$$

Отсюда, ввиду того что

$$\frac{1}{\Gamma(5/6)} \int_0^x \frac{D_{0t}^{5/6}(1-t)^{5/6}\varphi}{(x-t)^{1/6}} dt = D_{0x}^{-5/6} D_{0x}^{5/6} (1-x)^{5/6} \varphi = (1-x)^{5/6} \varphi,$$

после элементарных преобразований имеем

$$S\varphi + R\varphi \equiv a(x)\varphi(x) + \frac{b(x)}{\pi i} \int_0^1 \frac{\varphi(t)dt}{t-x} + R\varphi = c(x), \quad (48)$$

где

$$a(x) = 2\alpha(x)x^{-1/6}(1-x)^{1/6} - \sqrt{3}\beta(x), \quad (49)$$

$$b(x) = i\beta(x), \quad \pi(1-x)^{5/6}c(x) = \gamma_1(x), \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(5/6)x^{1/6}(1-x)^{5/6}}{2\alpha(x)} R\varphi = \int_0^x \frac{[x(1-t)]^{1/6} - [t(1-x)]^{1/6}}{[t(x-t)]^{1/6}} D_{0t}^{5/6}(1-t)^{5/6}\varphi dt = \\ = \int_0^1 k(x,t) D_{0t}^{5/6}(1-t)^{5/6}\varphi dt, \quad k(x,t) = 0, \quad \forall t > x. \end{aligned} \quad (51)$$

Покажем, что $\forall x \in J$

$$\int_0^1 k(x, t) D_{0t}^{5/6} (1-t)^{5/6} \varphi dt = \int_0^1 (1-t)^{5/6} \varphi(t) D_{t1}^{5/6} k(x, t) dt. \quad (52)$$

С этой целью изучим свойства функции

$$k^*(x, t) = \Gamma(1/6) D_{t1}^{5/6} k(x, t), \quad (53)$$

которая в силу (26) и (51) представима в виде

$$k^*(x, t) = -\frac{d}{dt} \int_t^x \frac{[x(1-s)]^{1/6} - [s(1-x)]^{1/6}}{[s(x-s)]^{1/6} (s-t)^{5/6}} ds. \quad (54)$$

Заменив в равенстве (54) переменную интегрирования s по формуле $s = x - (x-t)\xi$ нетрудно увидеть, что

$$\begin{aligned} k^*(x, t) &= \frac{1}{6x} \int_0^1 \left(\frac{\xi}{1-\xi} \right)^{5/6} [1-x+(x-t)\xi]^{-5/6} \left(1 - \frac{x-t}{x} \xi \right)^{-7/6} d\xi \leq \\ &\leq \frac{\Gamma(1/6)\Gamma(11/6)}{6} \frac{F(5/6, 1/6, 2, (x-t)/x)}{t(1-x)^{5/6}}. \end{aligned} \quad (55)$$

Из (55) заключаем, что $k^*(x, t) \in C^\infty(0 < x, t < 1, x \neq t)$ и удовлетворяет неравенству

$$k^*(x, t) \leq Mt^{-1}(1-x)^{-5/6}, \quad (56)$$

где

$$M = \frac{\Gamma(1/6)\Gamma(11/6)}{6} \sup_{0 \leq x, t \leq 1} F\left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}, 2; \frac{x-t}{x}\right).$$

Возвращаясь к соотношению (52), заметим, что интеграл в левой части этого равенства можно рассматривать как предел при $0 < \varepsilon \rightarrow 0$ выражения

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Gamma(1/6)} \int_\varepsilon^1 k(x, t) \frac{d}{dt} \int_0^{t-\varepsilon} \frac{(1-s)^{5/6} \varphi(s) ds}{(t-s)^{5/6}} dt = \frac{1}{\Gamma(1/6)} \times \\ &\times \left[\int_\varepsilon^1 \frac{k(x, t)(1+\varepsilon-t)^{5/6} \varphi(t-\varepsilon)}{\varepsilon^{5/6}} dt - \frac{5}{6} \int_0^{1-\varepsilon} (1-s)^{5/6} \varphi(s) ds \int_{s+\varepsilon}^1 \frac{k(x, t) dt}{(t-s)^{11/6}} \right]. \end{aligned}$$

Так как (см. (26))

$$\frac{5}{6} \int_{\varepsilon+s}^1 \frac{k(x, t) dt}{(t-s)^{11/6}} = \varepsilon^{-5/6} k(x, s+\varepsilon) - \Gamma(1/6) D_{s+\varepsilon, 1}^{5/6} k,$$

то легко видеть, что это выражение имеет вид

$$\int_0^{1-\varepsilon} (1-s)^{5/6} \varphi(s) D_{s+\varepsilon, 1}^{5/6} k ds. \quad (57)$$

Из неравенства (56) и свойств функции $\varphi(x) = O(1)x^{1/6}$ заключаем, что существует предел интеграла (57) при $\varepsilon \rightarrow 0$, и этот предел совпадает с выражением в правой части (52) для всех $x \in J$.

С учетом (52) и (53) равенство (51) принимает вид

$$R\varphi = \int_0^x r(x, t) t^{-1} (1-t)^{5/6} \varphi(t) dt, \quad (58)$$

где

$$r(x, t) = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha(x) k^*(x, t) t}{x^{1/6} (1-x)^{5/6}}.$$

Принимая во внимание условия (42), из (55) и (56) нетрудно увидеть, что

$$r(x, t) \in C(0 \leq t \leq x \leq 1) \cap C^3(0 < t < x < 1). \quad (59)$$

Рассмотрим пространство $C_\varphi(J)$ непрерывных в интервале J функций с конечной нормой

$$\|\varphi\| = \max_{\bar{J}} |x^{-1/6} (1-x)^{5/6} \varphi(x)|.$$

Очевидно $C_\varphi(J)$ является банаховым пространством. Легко видеть, что оператор R как оператор, действующий по формуле (58) из $C_\varphi(J)$ в пространство $C(\bar{J})$, непрерывных в замкнутом интервале $\bar{J}$ функций $\psi(x)$ с $\|\psi\| = \max_{\bar{J}} |\psi(x)|$ является в силу (59) вполне непрерывным.

На основании условия (43) из равенств (49) и (50) имеем

$$a^2(x) - b^2(x) \neq 0, \quad \forall x \in \bar{J}.$$

Следовательно, сингулярный оператор S в уравнении (48) является нетеровым [5].

Итак, задача 8 редуцирована к сингулярному интегральному уравнению (48) нормального типа с вполне непрерывным оператором R . Теория таких уравнений хорошо известна [5].

Опираясь на метод регуляризации Карлемана–Векуа нетерового оператора S (см. [5]) и принимая во внимание условия (40)–(42), можно убедиться в том, что при условной или безусловной разрешимости уравнения (48) его решения из пространства $C_\varphi(J)$ принадлежат $C^2(J)$.

В общем случае, когда не соблюдено условие (42), задачу 8 можно эквивалентно редуцировать к интегральному уравнению вида

$$\omega(x)S\varphi + R\varphi = \mu(x),$$

где: 1) $\omega(x)$ и $\mu(x)$ – известные функции, причем $\omega(x)$ может обращаться в нуль в замыкании области определения искомой функции $\varphi(x)$; 2) S – нетеровый оператор (см. (48)), а R – вполне непрерывный.

В заключение этого пункта отметим, что исследованные выше краевые задачи для гиперболических уравнений являются в некотором смысле простыми аналогами известной задачи со смещением (задачи Карлемана) для аналитических функций одного комплексного переменного и соответствующих задач теории эллиптических уравнений (см. [5, 6]).

3. О некоторых краевых задачах для уравнения смешанного типа. Пусть Ω – конечная односвязная область плоскости z , ограниченная жордановой кривой σ , расположенной в полуплоскости $\text{Im } z > 0$ с концами в точках A, B и характеристиками AC и BC уравнения (2).

В дальнейшем эллиптическую часть смешанной области Ω будем обозначать через Ω_1 , а гиперболическую, как и прежде, – через Δ . Под регулярным в области Ω решением уравнения (2) будем понимать функцию $u(z) \equiv u(x, y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega_1 \cup \Delta)$, удовлетворяющую уравнению (2) в $\Omega_1 \cup \Delta$ и такую, что $u_y(x, 0)$ на концах интервала J может обращаться в ∞ порядка ниже единицы.

Задача 9. Найти регулярное в области Ω решение $u(z)$ уравнения (2), удовлетворяющее краевым условиям

$$u(z) = \varphi(z), \quad \forall z \in \sigma, \quad (60)$$

$$\alpha(x) \frac{d}{dx} u\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right) + \beta(x) \frac{d}{dx} u\left(\frac{x+1}{2}, \frac{x-1}{2}\right) = \delta(x), \quad \forall x \in J, \quad (61)$$

где $\varphi(z)$, $\alpha(x)$, $\beta(x)$ и $\delta(x)$ – заданные непрерывные функции, причем

$$\alpha(x), \beta(x), \delta(x) \in H(\bar{J}) \cap C^2(J). \quad (62)$$

Здесь и ниже $H(\bar{J})$ – множество функций, непрерывных по Гельдеру в замкнутом интервале $\bar{J}$.

Известный принцип экстремума А. В. Бицадзе [7] применительно к задаче 9 формулируется следующим образом.

Пусть

$$\alpha(x) \neq \beta(x), \quad \forall x \in \bar{J}, \quad (63)$$

или

$$\alpha(x) = \beta(x), \quad \forall x \in \bar{J}, \quad (64)$$

и

$$\alpha(x)\beta(x) \neq 0, \quad \forall x \in \bar{J}. \quad (65)$$

Тогда положительный максимум и отрицательный минимум решения $u(z)$ задачи 9 в замкнутой области $\bar{\Omega}_1$ достигается лишь на σ .

Действительно, пользуясь формулой (9), из граничного условия (61) легко видеть, что любое решение $u(z)$ задачи 9, если оно существует, удовлетворяет соотношению

$$[\alpha(x) + \beta(x)]\tau'(x) - [\alpha(x) - \beta(x)]\nu(x) = 2\delta(x), \quad \forall x \in J, \quad (66)$$

где $\tau(x) = u(x, -0)$, $u_y(x, -0) = \nu(x)$.

Предположим, что

$$\max_{\bar{\Omega}_1} u(z) = u(\zeta) > 0.$$

Очевидно $\zeta \notin \Omega_1$. Пусть $\zeta \in J$. Тогда из (66) при $\delta(x) \equiv 0$ и при выполнении условия (63) имеем, что $\nu(\zeta) = 0$, где $\zeta = \operatorname{Re} \zeta$. Последнее противоречит принципу Заремба–Жиро [8], следовательно, $\zeta \in \sigma$. Если же выполнены условия (64), (65), то принцип экстремума А. В. Бицадзе прямо следует из (66) и принципа экстремума для гармонических функций.

Таким образом, задача 9 имеет не более одного решения, если выполнено одно из двух условий: (63) или (64), (65).

Переходя к доказательству существования решения задачи 9, заметим, что при выполнении условий (64) и (65) она эквивалентна в силу (66) задаче Дирихле

$$u(z) = \begin{cases} \varphi(z), & \forall z \in \sigma, \\ \varphi(0) + 2 \int_0^x \delta(t)/[\alpha(t) + \beta(t)]dt, & \forall z \in \bar{J} \end{cases}$$

для гармонической в области Ω_1 функции $u(z)$.

Ниже будем предполагать, что:

- 1) кривая σ совпадает с нормальным контуром $\sigma_0 : |z - 1/2| = 1/2$;
- 2) функция $\varphi(z)$ представима в виде

$$\varphi(z) = x(1-x)\varphi_0(x), \quad \varphi_0(x) \in C(\bar{J}); \quad (67)$$

- 3) функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ удовлетворяют условию (65).

Как и в случае задачи Трикоми, интегро-дифференциальное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное на J из эллиптической части

области Ω , имеет вид

$$\tau'(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1-2t}{t+x-2tx} \right) \nu(t) dt = \Phi'(x), \quad (68)$$

где

$$\Phi(x) = \frac{x(1-x)}{\pi} \int_0^1 \varphi_0(t) [t(1-t)]^{1/2} [x^2 - (2x-1)t]^{-1} dt.$$

В силу (67) функция $\Phi(x) \in C^1(\bar{J}) \cap C^\infty(J)$ и при $x \rightarrow 0, 1$ обращается в нуль порядка не ниже единицы. Принимая во внимание (66) и (68), нетрудно увидеть теперь, что задача 9 эквивалентна (в классе искомого решений и в смысле разрешимости) следующему сингулярному интегральному уравнению:

$$a(x)\nu(x) + \frac{b(x)}{\pi i} \int_0^1 \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1-2t}{t+x-2tx} \right) \nu(t) dt = c(x), \quad (69)$$

где

$$\begin{aligned} a(x) &= \alpha(x) - \beta(x), \quad b(x) = [\alpha(x) + \beta(x)]i, \\ c(x) &= [\alpha(x) + \beta(x)]\Phi'(x) - 2\delta(x). \end{aligned} \quad (70)$$

На основании (62) заключаем, что $a(x)$, $b(x)$ и $c(x) \in H(\bar{J}) \cap C^2(J)$. Так как вследствие (65) и (70)

$$a^2(x) - b^2(x) = 2[\alpha^2(x) + \beta^2(x)] \neq 0, \quad \forall x \in \bar{J},$$

то уравнение (68) является уравнением нормального типа. Более того, оно решается в явном виде (см. [5, 9]), и его индекс, в классе функций $\nu(x) \in H(J)$ и могущих обращаться в бесконечность порядка ниже единицы на концах интервала J , равен нулю. Из вида решения $\nu(x)$ уравнения (69) легко усмотреть, что $\nu(x) \in C^1(J)$.

Задача 10. Найти регулярное в области Ω решение $u(z)$ уравнения (2), удовлетворяющее краевым условиям (60) и

$$u\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right) + \beta(x)u\left(\frac{x+1}{2}, \frac{x-1}{2}\right) = \delta(x), \quad \forall x \in \bar{J},$$

где заданные функции $\varphi(z)$, $\beta(x)$ и $\delta(x)$ связаны условием согласованности

$$\varphi(0) + \beta(0)[\delta(1) - \beta(1)\varphi(1)] = \delta(0), \quad (71)$$

причем

$$\beta(x), \delta(x) \in C^1(\bar{J}) \cap C^3(J) \quad (72)$$

и

$$\beta(x) \neq -1, \quad \forall x \in \bar{J}. \quad (73)$$

Имеет место следующий принцип экстремума: *если*

$$\delta(x) \equiv 0, \quad \varphi(1) = 0 \quad (74)$$

и

$$\beta'(x) \geq 0, \quad \forall x \in J_1 = \{x \mid x \in J, \beta(x) \neq 1\}, \quad (75)$$

то положительный максимум и отрицательный минимум решения $u(z)$ задачи 10 в $\bar{\Omega}_1$ достигается лишь на σ .

Действительно, из разрешимости задачи 3 (см. (73)) непосредственно вытекает, что любое решение $u(z)$ задачи 9, если оно существует, удовлетворяет соотношению (17), которое в силу (71) и (74) имеет вид

$$\tau(x) = \frac{1 - \beta(x)}{1 + \beta(x)} \int_0^x \nu(t) dt,$$

или

$$\nu(x) = \frac{2\beta'(x)}{[1 - \beta(x)]^2} \tau(x) + \frac{1 + \beta(x)}{1 - \beta(x)} \tau'(x), \quad \forall x \in J_1.$$

Рассуждая, как и выше, при доказательстве принципа экстремума для задачи 9, из этих двух равенств легко получить справедливость сформулированного принципа.

Пусть $\sigma \equiv \sigma_0$ и выполнены условия (67) и (75). Тогда с помощью (17) и (68) нетрудно заметить, что задача 10 эквивалентна следующему сингулярному интегральному уравнению нормального типа:

$$\begin{aligned} [1 - \beta(x)]\nu(x) + \frac{1 + \beta(x)}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{1}{t - x} + \frac{1 - 2t}{t + x - 2tx} \right) \nu(t) dt - \\ - \frac{2\beta'(x)}{[1 + \beta(x)]^2} \int_0^x \nu(t) dt = f(x), \end{aligned} \quad (76)$$

где $f(x) \in C^1(\bar{J}) \cap C^2(J)$ – известная функция.

Уравнение (76) известным методом регуляризации Карлемана–Векуа [5] можно свести к эквивалентному интегральному уравнению Фредгольма второго рода, безусловная разрешимость которого следует из единственности решения задачи 10.

Уравнение (76) при $\beta(x) \equiv 1$ переходит в уравнение

$$\frac{1}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{1}{t - x} + \frac{1 - 2t}{t + x - 2tx} \right) \nu(t) dt = \frac{1}{2} f(x), \quad (77)$$

которое обращается по формуле (см. [9, 10])

$$\nu(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1-2t}{t+x-2tx} \right) f(t) dt. \quad (78)$$

Задача 11. Найти функцию $u(z)$ со следующими свойствами:

1) $u(z) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega_1 \cup J) \cap C^1(\Delta \cup J \setminus \Gamma_1 \setminus \Gamma_2) \cap C^2(\Omega_1) \cap C^2(\Delta \setminus \Gamma_1 \setminus \Gamma_2)$, где Γ_1 и Γ_2 – характеристики уравнения (1), выходящие из точки $A_0(1/2, 0)$;

2) $u_y(x, +0) = \nu(x)$ при $x \rightarrow 0, 1$ может обращаться в бесконечность интегрируемого порядка;

3) $u(z)$ – решение уравнения (2) в $\Omega \setminus (J \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2)$, удовлетворяющее краевым условиям (60) и

$$u\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right) + u\left(1 - \frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right) = \delta(x) \quad \forall x \in \bar{J} \quad (79)$$

и условию сопряжения

$$\nu(x) = \alpha(x)\nu^-(x) \quad \forall x \in J \setminus A_0 = J_0, \quad (80)$$

где $\nu^-(x) = u_y(x, -0)$,

$$\delta(x) \in C^1(\bar{J}) \cap C^3(J) \quad \varphi(0) + \varphi(1) = \delta(0), \quad (81)$$

$$\alpha(x) \in H(\bar{J}) \cap C^2(J_0), \quad \alpha(x) + \alpha(1-x) = 0, \quad (82)$$

$$\alpha(x) \neq 0 \quad \forall x \in J_0, \quad \alpha(x) = O(|x - 1/2|^\varepsilon), \quad 0 < \varepsilon < 1. \quad (83)$$

Имеет место следующий принцип экстремума: если

$$\delta(x) = 0 \quad \forall x \in J, \quad (84)$$

то положительный максимум и отрицательный минимум решения $u(z)$ задачи 11 в $\bar{\Omega}_1$ достигается лишь на σ .

В самом деле, общее решение уравнения (1), удовлетворяющее краевому условию (79), в области Δ представимо в виде (20), где $f(x) \in C(\bar{J}) \cap C^2(J_0)$ – произвольная функция. Из этого представления непосредственно вытекает, что

$$\tau(x) = f(x) - f(1-x) + \delta(x) - \frac{1}{2}\delta(1) \quad \forall x \in \bar{J},$$

$$\nu^-(x) = \frac{d}{dx} [f(x) + f(1-x) - \delta(x)] \quad \forall x \in J_0,$$

стало быть,

$$\tau(x) + \tau(1-x) = \delta(x) + \delta(1-x) - \delta(1) \quad \forall x \in \bar{J}, \quad (85)$$

$$\nu^-(x) + \nu^-(1-x) = \frac{d}{dx} [\delta(1-x) - \delta(x)] \quad \forall x \in J_0. \quad (86)$$

Вследствие (80) и (82) из (85) и (86) получаем

$$\nu(x) - \nu(1-x) = \alpha(x) \frac{d}{dx} [\delta(1-x) - \delta(x)] \quad \forall x \in J. \quad (87)$$

Отсюда при наличии условия (84) имеем

$$\tau(x) + \tau(1-x) = 0 \quad \forall x \in \bar{J}, \quad (88)$$

$$\nu(x) - \nu(1-x) = 0 \quad \forall x \in J. \quad (89)$$

Пусть, например, $\max_{\Omega_1} u(z) = u(\zeta) = \tau(\xi) > 0$ и $\xi \in J$. В силу (88) очевидно $\xi \neq 1/2$ и функция $u(z)$ в точке $z = 1 - \xi$ достигает отрицательного минимума. По принципу Заремба-Жиро $\nu(\xi) < 0$, а $\nu(1 - \xi) > 0$, что противоречит (89). Следовательно, $\zeta \in \sigma$.

Переходя к доказательству существования решения задачи 11, будем сперва предполагать, как и прежде, что $\sigma \equiv \sigma_0$, а $\varphi(z)$ удовлетворяет условию (67).

В процессе доказательства принципа экстремума задача 11 свелась к следующей краевой задаче: *найти гармоническую в области Ω_1 функцию $u(z) \in C(\bar{\Omega}_1) \cap C^1(\Omega_1 \cup J)$ по крайевым условиям (60), (85) и (87).*

Нетрудно увидеть, что последняя задача эквивалентна системе трех интегро-функциональных уравнений (85), (87) и

$$\tau(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 [\log |t-x| - \log(t+x-2tx)] \nu(t) dt + \Phi(x) \quad (90)$$

для $\tau(x)$ и $\nu(x)$. Подставляя $\tau(x)$ из (90) в (85) и учитывая (87), после простой замены $t = 1 - s$ переменной t в одном из интегралов для функции $\nu(x)$ получим интегральное уравнение первого рода

$$\frac{2}{\pi} \int_0^1 [\log |t-x| - \log(t+x-2tx)] \nu(t) dt = \mu(x), \quad (91)$$

где

$$\begin{aligned} \mu(x) = & \delta(x) + \delta(1-x) - \delta(1) - \Phi(x) - \Phi(1-x) + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_0^1 [\log |t-x| - \log(t+x-2tx)] \alpha(t) \frac{d}{dt} [\delta(1-t) - \delta(t)] dt. \end{aligned} \quad (92)$$

На основании (81), (82) и свойств интеграла типа Коши (см. [4], § 21, 22) из (92) заключаем, что $\mu'(x) \in H(J)$, $\mu''(x) \in H(J_0)$. Причем $\mu'(x)$

при $x \rightarrow 0, 1$ может обращаться в бесконечность лишь логарифмического порядка.

Уравнение (91) можно переписать в виде (см. [10])

$$\frac{1}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1-2t}{t+x-2tx} \right) \nu(t) dt = -\frac{1}{2} \mu'(x).$$

Отсюда в соответствии с формулой (78) имеем

$$\nu(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1-2t}{t+x-2tx} \right) \mu'(t) dt. \quad (93)$$

Принимая во внимание свойства функции $\mu(x)$, из (93) легко видеть, что

$$\nu(x) \in H(J) \cap C^1(J_0), \quad \int_0^1 \nu(x) dx < \infty,$$

т. е. функция $\nu(x)$ принадлежит классу искомых решений.

Теперь, когда известны $\nu(x)$ и $\tau(x)$, из (90) решение $u(z)$ задачи 11 в области Δ в силу (80) и (83) дается формулой (9), где под интегралом вместо $\nu(t)$ стоит функция $\nu(t)/\alpha(t)$.

Как убедились выше, условие (82) является существенным и его нарушение может сильно повлиять на корректность задачи 11.

Задачи типа задачи Трикоми, когда решение непрерывно в замкнутой смешанной области, а первые производные претерпевают разрывы первого рода на «переходной» линии $y = 0$, встречаются в теории сопла Лаваля [11, 12]. Задачи такого рода изучались и в работе [13].

Рассмотренные в этом пункте задачи остаются корректными и в случае, когда кривая σ удовлетворяет условию Ляпунова и оканчивается сколь угодно малой длины дугами нормальной кривой σ_0 .

Исходя из конструктивных и дифференциальных свойств решений задач 7 и 8, аналогично ставятся и исследуются смешанные краевые задачи типа 9, 10 и 11 для уравнения (3).

Литература

1. Picard E. Lecons sur quelques equations fonctionnelles avec des applications a divers problems d'anlyse et de physique mathematique. Paris, 1928.
2. Aczel J. Vorlesungen über funktionalgleichungen und ihre anwendungen. Berlin, 1961.
3. Hardy B., Littlewood J. Mathematische Zeitschrift. 1928. Vol. 27, no. 1. Pp. 565–606.
4. Wolfersdozf L. Mathematische Zeitschrift. 1965. Vol. 90, no. 1. Pp. 24–28.
5. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962.
6. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963.

7. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М.: Изд. АН СССР, 1959.
8. Бицадзе А. В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966.
9. Бицадзе А. В. К проблеме уравнений смешанного типа // Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова. 1953. Т. 61. С. 1–58.
10. Бицадзе А. В. Успехи математических наук. 1957. Т. 12, № 5 (77). С. 185–190.
11. Франкль Ф. И. Уч. зап. КБГУ. Серия физ.-матем. наук. Вып. 3. Нальчик: КБКИЗ, 1959. С. 79–93.
12. Франкль Ф. И. Матем. сб. 1961. Т. 54 (95), № 2. С. 225–235.
13. Каратопраскиев Г. ДАН СССР. 1963. Т. 151, № 6. С. 1271–1273.

Поступила в редакцию
10 января 1968 г.

Институт математики
СО АН СССР

Новая краевая задача для одного вырождающегося гиперболического уравнения

В качестве модельного вырождающегося гиперболического уравнения первого рода второго порядка от двух независимых переменных рассмотрим уравнение

$$y^m u_{xx} - u_{yy} = 0, \quad m = \text{const} > 0. \quad (1)$$

Пусть Δ – конечная односвязная область плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная характеристиками AC и BC уравнения (1), выходящими из точек $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, и отрезком AB прямой $y = 0$; I – единичный интервал, $0 < x < 1$; $z = \theta_0(x)$ и $z = \theta_1(x)$ – точки пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $z = x \in I$, с характеристиками AC и BC соответственно;

$$D_{0x}^l f(x) \equiv \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-l)} \int_0^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1+l}}, & l < 0, \\ \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} D_{0x}^{l-(n+1)} f(x), & l > 0, \end{cases} \quad (2)$$

$$D_{x1}^l f(x) \equiv (-1)^k D_{0y}^l f(1-y), \quad y = 1-x, \quad (3)$$

где l – любое действительное число, n – целая часть $l \geq n$, $\Gamma(z)$ – гамма-функция, $k = 0$ ($k = n$) при $l < 0$ ($l > 0$).

Очевидно, D_{0x}^l и D_{x1}^l представляют собой операторы дробного интегрирования порядка $(-l)$ при $l < 0$ и обобщенные производные (в смысле Лиувилля) порядка l при $l > 0$ [1].

Задача 1. Найти функцию $u(x, y) \equiv u(z)$ со следующими свойствами:

$$1) u(z) \in C(\bar{\Delta}) \cap C^1(\Delta \cup I), \int_0^1 u_y(x, 0) [x(1-x)]^{-\varepsilon} dx < \infty.$$

2) $u(z)$ – регулярное в области Δ решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x) = \tau(x) \quad \forall x \in \bar{I}, \quad (4)$$

$$\alpha(x) D_{0x}^{1-\varepsilon} u[\theta_0(x)] + \beta(x) D_{x1}^{1-\varepsilon} u[\theta_1(x)] = \gamma(x), \quad (5)$$

$\forall x \in I$, где $2(m+2)\varepsilon = m$, $u[\theta_k(x)] = u(\operatorname{Re} \theta_k, \operatorname{Im} \theta_k)$,

$$\tau(x) \in C^1(\bar{I}) \cap C^3(I), \quad (6)$$

$$\alpha(x), \beta(x), \gamma(x) \in C(\bar{I}) \cap C^2(I), \quad (7)$$

$$\alpha(x)(1-x)^\varepsilon + \beta(x)x^\varepsilon \neq 0 \quad \forall x \in \bar{I}. \quad (8)$$

Докажем, что эта задача является корректно поставленной.

Опираясь на однозначную разрешимость задачи Коши для уравнения (1) с данными на линии вырождения $y = 0$ (см. [2]), легко убедиться, что любое решение $u(z)$ задачи 1, если оно существует, представимо в виде

$$\begin{aligned} u(z) = & \frac{\Gamma(2\varepsilon)}{\Gamma^2(\varepsilon)} \int_0^1 \tau \left[x + \frac{2}{m+2} y^{(m+2)/2} (2t-1) \right] [t(1-t)]^{\varepsilon-1} dt + \\ & + \frac{\Gamma(2-2\varepsilon)}{\Gamma^2(1-\varepsilon)} y \int_0^1 \nu \left[x + \frac{2}{m+2} y^{(m+2)/2} (2t-1) \right] [t(1-t)]^{-\varepsilon} dt, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\nu(x) = u_y(x, 0)$.

Из (9) в силу (2) и (3) после простых преобразований имеем

$$\begin{aligned} u[\theta_0(x)] = & \frac{\Gamma(2\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon)} x^{1-2\varepsilon} D_{0x}^{-\varepsilon} x^{\varepsilon-1} \tau(x) - \\ & - \left(\frac{m+2}{4} \right)^{1-2\varepsilon} \frac{\Gamma(2-2\varepsilon)}{\Gamma(1-\varepsilon)} D_{0x}^{\varepsilon-1} x^{-\varepsilon} \nu(x), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} u[\theta_1(x)] = & \frac{\Gamma(2\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon)} (1-x)^{1-2\varepsilon} D_{x1}^{-\varepsilon} (1-x)^{\varepsilon-1} \tau(x) - \\ & - \left(\frac{m+2}{4} \right)^{1-2\varepsilon} \frac{\Gamma(2-2\varepsilon)}{\Gamma(1-\varepsilon)} D_{x1}^{\varepsilon-1} (1-x)^{-\varepsilon} \nu(x). \end{aligned} \quad (11)$$

Подставляя (10) и (11) в краевое условие (5) и учитывая тот факт, что

$$D_{0x}^{1-\varepsilon} D_{0x}^{\varepsilon-1} = D_{x1}^{1-\varepsilon} D_{x1}^{\varepsilon-1} = D^0,$$

где D^0 – единичный оператор, получаем

$$\begin{aligned} & \left(\frac{m+2}{4} \right)^{1-2\varepsilon} \frac{\Gamma(2-2\varepsilon)}{\Gamma(1-\varepsilon)} [\alpha(x)(1-x)^\varepsilon + \beta(x)x^\varepsilon] \nu(x) = \\ & = \frac{\Gamma(2\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon)} [x(1-x)]^\varepsilon \left[\alpha(x) D_{0x}^{1-\varepsilon} x^{1-2\varepsilon} D_{0x}^{-\varepsilon} x^{\varepsilon-1} \tau(x) + \right. \\ & \left. + \beta(x) D_{x1}^{1-\varepsilon} (1-x)^{1-2\varepsilon} D_{x1}^{-\varepsilon} (1-x)^{\varepsilon-1} \tau(x) - \frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(2\varepsilon)} \gamma(x) \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Далее, принимая во внимание (2), можно записать

$$\begin{aligned} D_{0x}^{1-\varepsilon} x^{1-2\varepsilon} D_{0x}^{-\varepsilon} x^{\varepsilon-1} \tau(x) &= \tau_1(x) = \frac{1}{\Gamma^2(\varepsilon)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{t^{1-2\varepsilon} dt}{(x-t)^{1-\varepsilon}} \int_0^1 \frac{\tau(\xi) d\xi}{[\xi(t-\xi)]^{1-\varepsilon}} = \\ &= \frac{1}{\Gamma(2\varepsilon-1)} \frac{d}{dx} \int_0^1 \frac{x^\varepsilon \tau(xt)}{t^{1-\varepsilon} (1-t)^{1-2\varepsilon}} F(2\varepsilon-1, \varepsilon, 2\varepsilon; 1-t) dt, \end{aligned} \quad (13)$$

где F – гипергеометрическая функция Гаусса.

Из равенств (13) на основании условия (6) заключаем, что функция $\tau_1(x) \in C(I \cup B) \cap C^2(I)$, и она в точке $x=0$ может обращаться в бесконечность порядка не выше $1-\varepsilon$.

Совершенно аналогично убеждаемся в том, что функция

$$D_{x1}^{1-\varepsilon} (1-x)^{1-2\varepsilon} D_{x1}^{-\varepsilon} (1-x)^{\varepsilon-1} \tau(x) \in C(I \cup A) \cap C^2(I),$$

причем в точке $x=1$ она может обращаться в бесконечность порядка не выше $1-\varepsilon$.

Теперь, если учесть условия (8), легко видеть, что функция $\nu(x)$ однозначно определяется из соотношения (12), и она в силу (7) дважды непрерывно дифференцируема в интервале I , обращаясь, быть может, в бесконечность порядка не выше $1-2\varepsilon$ на его концах.

Следовательно, задача 1 разрешима однозначно и безусловно, и ее решение $u(z)$ дается формулой Дарбу (9), где $\nu(x)$ определяется из (12).

Из задачи 1 при $\beta(x) \equiv 0$, $\alpha(x) \equiv 1$ получается известная смешанная задача Дарбу [3]:

$$u(x) = \tau(x), \quad u[\theta_0(x)] = D_{0x}^{\varepsilon-1} \gamma(x) \quad \forall x \in \bar{I}.$$

Пусть для всех $x \in I$ нарушено условие (8), т. е.

$$\beta(x)x^\varepsilon + \alpha(x)(1-x)^\varepsilon \equiv 0 \quad \text{и} \quad \alpha(x) \neq 0.$$

Тогда из (12), принимая во внимание (5), будем иметь

$$x^\varepsilon D_{0x}^{1-\varepsilon} u[\theta_0(x)] - (1-x)^\varepsilon D_{x1}^{1-\varepsilon} u[\theta_1(x)] = \frac{\Gamma(2\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon)} \left[x^\varepsilon D_{0x}^{1-\varepsilon} x^{1-2\varepsilon} D_{0x}^{-\varepsilon} x^{\varepsilon-1} u(x) - \right. \\ \left. - (1-x)^\varepsilon D_{x1}^{1-\varepsilon} (1-x)^{1-2\varepsilon} D_{x1}^{-\varepsilon} (1-x)^{\varepsilon-1} u(x) \right]. \quad (14)$$

Известно [3], что любое регулярное в области Δ решение $u(z)$ уравнения (1) при $m = 0$, т. е. волнового уравнения

$$u_{xx} - u_{yy} = 0, \quad (15)$$

удовлетворяющее условию 1 задачи 1 при $\varepsilon = 0$, обладает следующим весьма важным свойством (среднего значения):

$$\frac{d}{dx} u[\theta_0(x)] + \frac{d}{dx} u[\theta_1(x)] = \frac{d}{dx} \left[u(x) + u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right], \quad (16)$$

где $\theta_k(x)$ ($k = 0, 1$) совпадают с определенной выше функцией $\theta_k(x)$ при $m = 0$.

Можно считать, что формула (14) выражает аналогичное свойство всех регулярных решений уравнения (1) (удовлетворяющих условию 1 задачи 1).

Непосредственным обобщением задачи 1, очевидно, является краевая задача, в которой условие (5) заменено условием, поточечно связывающим значения обобщенных производных порядка $l \geq 0$ на $AC \cup BC$.

Здесь мы ограничимся исследованием одной краевой задачи такого рода для уравнения (15) в области Δ , ограниченной прямыми $y = x$, $y = 1 - x$, $y = 0$.

Ниже под решением уравнения (15) в области Δ понимается любая функция $u(z)$, представимая в виде

$$u(z) = \varphi(x + y) + \psi(x - y), \quad (17)$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x) \in C(\bar{I})$.

Задача 2. Найти решение $u(z)$ уравнения (15), непрерывное в $\bar{\Delta}$ и удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x) = \tau(x) \quad \forall x \in \bar{I}, \quad (18)$$

$$u\left(\frac{x}{2}, \frac{x}{2}\right) + \beta(x)u\left(\frac{1+\theta(x)}{2}, \frac{1-\theta(x)}{2}\right) = \gamma(x) \quad \forall x \in \bar{I}, \quad (19)$$

где $\tau(x)$, $\beta(x)$, $\theta(x)$ и $\gamma(x)$ – заданные функции из класса $C(\bar{I})$, причем $0 \leq \theta(x) \leq 1$.

Задача 2 разрешима и притом единственным образом, если выполнены следующие условия:

1. Функция $y = \theta(x)$ осуществляет топологическое отображение сегмента $\bar{I}$ в самого себя, оставляя неподвижными точки $x = 0, 1$;

$$2. \beta(x) \neq 1 \quad \forall x \in \bar{I}, \quad \gamma(0) = 0; \quad (20)$$

$$3. \tau(0) = 0, \quad \gamma(1) = \beta(1)\tau(1). \quad (21)$$

Принимая во внимание (18) и (19), замечаем, что при соблюдении требований 1 и 3 условие $\gamma(0) = 0$ является необходимым для разрешимости задачи 2. Опираясь на свойства (среднего значения) (16) решения (17) и соотношения (18)–(21), нетрудно убедиться в эквивалентности задачи 2 двухточечной краевой задаче

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 0 \quad (22)$$

для функционального уравнения

$$Af \equiv \beta(x)f[\theta(x)] + \mu(x) = f(x) \quad \forall x \in \bar{I}, \quad (23)$$

где $f(x) = u(x/2, x/2)$, $\mu(x) = \gamma(x) - \beta(x)\tau[\theta(x)]$.

Рассмотрим пространство $C_0(\bar{I})$ функций

$$f(x) \in C(\bar{I}), \quad \|f\| = \max_{\bar{I}} |f(x)|,$$

и удовлетворяющих условию (22), которое является банаховым.

Легко видеть, что оператор A из (23) отображает пространство $C_0(\bar{I})$ в самого себя и в случае, когда $\|\beta\| < 1$ (см. (20)), в силу очевидного неравенства

$$\|Af_1 + Af_2\| \leq \|\beta\| \|f_1[\theta(x)] - f_2[\theta(x)]\| = \|\beta\| \|f_1 - f_2\|,$$

справедливого для любых f_1 и f_2 из $C_0(\bar{I})$, является оператором сжатия. Следовательно, по теореме Банаха [4], уравнение (23) имеет решение, притом единственное, и его можно построить методом последовательных приближений. Случай $\|\beta\| > 1$ заменой x на $\theta^{-1}(x)$ в уравнении (23) сводится к исследованному.

Можно привести примеры, убеждающие в том, что нарушение одного из двух первых условий, наложенных на заданные функции, влияет на корректность (в смысле Адамара) задачи 2 (см. [5]).

Литература

1. Hardy B., Littlewood J. Mathematische zeitschrift. 1928. Vol. 27, no. 1. Pp. 565–606.
2. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М.: Изд. АН СССР, 1959.
3. Гурса Э. Курс математического анализа. Т. 3, ч. 2. М., 1934.

4. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., 1959.
5. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5, № 1.

Поступила в редакцию
20 декабря 1968 г.

Институт математики
СО АН СССР

Критерий единственности задачи Дирихле для уравнения смешанного типа в цилиндрической области

Пусть D – ограниченная область n -мерного евклидова пространства E_n точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ с кусочно гладкой границей Γ ; J_{ab} – интервал $a < y < b$; $\Omega_{ab} = D \times J_{ab}$ – цилиндрическая область в пространстве E_{n+1} с декартовыми ортогональными координатами $x_1, x_2, \dots, x_n, y$; S_{ab} – граница Ω_{ab} .

В области $\Omega_{\alpha\beta}$, $\alpha < 0$, рассмотрим уравнение смешанного типа

$$Tu \equiv k(y) [a^{ij}(x) u_{x_i}]_{x_j} - u_{yy} + c(x) k(y) u = 0, \quad (1)$$

где повторение индекса означает суммирование по этому индексу от 1 до n и, кроме этого,

$$k(y) \in C^1(\bar{J}_{\alpha 0}) \cap C^1(\bar{J}_{0\beta}), \quad a^{ij}(x), \quad c(x) \in C(\bar{D}); \quad (2)$$

$$yk(y) > 0, \quad \forall y \neq 0; \quad k'(y) \geq 0, \quad \forall y \geq 0, \quad c(x) \leq 0; \quad (3)$$

$$a^{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \gamma |\xi|^2, \quad \forall x \in D, \quad \xi \in E_n, \quad \gamma = \text{const} > 0. \quad (4)$$

Задача D. Найти в $\Omega_{\alpha\beta}$ при $y \neq 0$ решение $u(x, y)$ уравнения (1) из класса $C(\bar{\Omega}_{\alpha\beta}) \cap C^1(\Omega_{\alpha\beta}) \cap W_2^1(\Omega_{\alpha\beta})$, принимающее заданные значения на $S_{\alpha\beta}$.

Теорема. Если $S_{\alpha\beta}$, a^{ij} и c обладают тем свойством, что система собственных функций $\{v_m(x)\}$, соответствующих собственным значениям λ_m однородной задачи Дирихле $v|_{\Gamma} = 0$ для уравнения

$$[a^{ij}(x) v_{x_i}]_{x_j} + [c(x) + \lambda] v = 0, \quad x \in D \quad (5)$$

полна в пространстве $L_2(D)$ и $v_m \in C^1(\bar{D}) \cap C^2(D)$, $\forall m$, то задача D имеет единственное решение тогда и только тогда, когда

$$\omega_m(\beta) \neq 0, \quad \forall m \quad (6)$$

где $\omega_m(y)$ – решение уравнения

$$\omega_m'' + \lambda_m k(y) \omega_m = 0 \quad (7)$$

из класса $C^1(\bar{J}_{\alpha\beta})$, удовлетворяющее условию $\omega_m(\alpha) = 0$.

Заметим, что система $\{v_m(x)\}$ будет удовлетворять условиям теоремы, если, например, $a^{ij}(x) \in C^{2+\kappa}(\overline{D})$, $c(x) \in C^{1+\kappa}(\overline{D})$ и граница Γ является $3 + \kappa$ раз непрерывно дифференцируемой, где $\kappa \geq n/2$ [1, с. 47].

Пусть соблюдено условие (6) и $u(x, y)$ – любое решение однородной задачи $D: u|_{S_{\alpha\beta}} = 0$. Докажем, что $u(x, y) \equiv 0$.

Действительно, функция $\omega(x, y) = v_m(x)\omega_m(y)$ для любого m представляет собой решение уравнения (1) из класса $C^1(\overline{\Omega}_{\alpha\beta}) \cap C^2(\Omega_{\alpha 0} \cup \Omega_{0\beta})$, обращающееся в нуль на $D \cup (\Gamma \times J_{\alpha\beta})$. Принимая это во внимание, из очевидного в силу (2) равенства

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\Omega_{\alpha 0}} + \int_{\Omega_{0\beta}} \right) (\omega T u - u T \omega) dx dy = \\ & = \int_{S_{\alpha\beta}} [ka^{ij}(\omega u_{x_i} - u \omega_{x_i}) \nu_{x_j} - (\omega u_y - u \omega_y) \nu_y] dS, \end{aligned}$$

где ν_{x_j} , ν_y – направляющие косинусы внешней нормали к $S_{\alpha\beta}$, легко видеть, что

$$\int_D \omega(x, \beta) u_y(x, \beta) dx = \omega_m(\beta) \int_D v_m(x) u_y(x, \beta) dx = 0.$$

Следовательно, $u_y(x, \beta) \equiv 0$. Далее, для любого $h \geq 0$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} 2 \int_{\Omega_{h\beta}} u_y T u dx dy &= 2 \int_{S_{h\beta}} ka^{ij} u_{x_i} \nu_{x_j} u_y dS - \int_{S_{h\beta}} (ka^{ij} u_{x_i} u_{x_j} + u_y^2 - cku^2) \nu_y dS + \\ &+ \int_{\Omega_{h\beta}} k'(y) (a^{ij} u_{x_i} u_{x_j} - cu^2) dx dy, \end{aligned}$$

из которого с учетом того, что $u = u_y = 0$, на $S_h = S_{h\beta} \setminus [S_{h\beta} \cap (y = h)]$, заключаем

$$\int_{\Omega_{h\beta}} k'(y) (a^{ij} u_{x_i} u_{x_j} - cu^2) dx dy + \int_{S_{h\beta} \cap (y=h)} (ka^{ij} u_{x_i} u_{x_j} + u_y^2 - cku^2) dS = 0.$$

Отсюда на основании (3) и (4) имеем $u = 0$ в $\Omega_{0\beta}$. Поэтому $u = 0$ на $S_{\alpha 0}$ и, стало быть, по принципу Хопфа [2] $u = 0$ в $\Omega_{\alpha 0}$.

Пусть теперь условие (6) нарушено хотя бы для одного $m = l$. Тогда функция $u(x, y) = v_l(x)\omega_l(y)$ является нетривиальным решением однородной задачи D .

Для уравнения Лаврентьева–Бицадзе

$$\operatorname{sign} y \cdot u_{x_1 x_1} - u_{yy} = 0,$$

когда D есть интервал $0 < x_1 < 1$, как нетрудно убедиться из (5) и (7), $\lambda_m = \pi^2 m^2$, а

$$\omega_m(y) e^{-\pi m \alpha} = \begin{cases} \operatorname{ch} \pi m \alpha \sin \pi m y - \operatorname{sh} \pi m \alpha \cos \pi m y, & y > 0, \\ \operatorname{sh} \pi m (y - \alpha), & y < 0. \end{cases}$$

Поэтому условие (6) эквивалентно неравенству

$$\operatorname{ch} \pi m \alpha \sin \pi m \beta \neq \operatorname{sh} \pi m \alpha \cos \pi m \beta, \quad \forall m. \quad (8)$$

Если $\sin \pi m \beta \neq 0$, условие (8) совпадает с условием, найденным другим способом в работах [3] и [4].

При $\alpha = 0$, $k(y) \equiv 1$, $a^{ij}(x) \xi_i \xi_j > 0$, $\forall x \in \bar{\Omega}_{0\beta}$ и $\xi \neq 0$ неравенство (6) можно свести к эквивалентному условию $\sqrt{\lambda_m} \beta \neq l\pi \quad \forall m$ и $l = 1, 2, \dots$ единственности задачи Дирихле для гиперболического уравнения, полученному в работе [5].

Пусть теперь Ω_1 – ограниченная конечно-связная область нижней полуплоскости $y < 0$ плоскости переменных x_1, y с кусочно-гладкой границей, содержащей интервал $D: 0 < x_1 < 1$ прямой $y = 0$; $\Omega_2 = D \times J_{01}$ – квадрат $0 < x_1, y < 1$; $\Omega = \Omega_1 \cup D \cup \Omega_2$. Легко заметить, что задача Дирихле:

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi \in C^1(\partial\Omega) \cap C^2(\partial\Omega_2 \setminus D)$$

для уравнения Лаврентьева–Бицадзе в области Ω всегда разрешима и притом единственным образом.

Литература

1. Ладыженская О. А. Смешанная задача для гиперболического уравнения. М.: ГИТТЛ, 1953.
2. Бицадзе А. В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966.
3. Бахания Н. Н. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка // Тр. Выч. центра АН ГрузССР. 1963. Т. 3. С. 79–80.
4. Cannon J. R. Ann. de Mat. pura ed Appl., LXII. 1963. Pp. 371–377.
5. Dunninger D. R., Zachmanoglou E. C. J. Math. Mech. 1969. Vol. 18, no. 8.

Методика постановки корректных задач для линейных гиперболических уравнений второго порядка на плоскости

В односвязанной области Δ плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченной двумя линиями $|x| = 1 - y$ и $y = 0$, рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{xx} - u_{yy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = 0 \quad (1)$$

с коэффициентами a , b и c из класса $C^1(\overline{\Delta}) \cap C^2(\Delta)$.

Примем следующие обозначения: J – интервал $|x| < 1$ вещественной оси $y = 0$; $\Gamma = \partial\Delta \setminus J$ – характеристическая часть границы $\partial\Delta$ области Δ ; Γ_1 – часть Γ , где

$$x + y = 1, \quad \Gamma_{-1} = \Gamma \setminus \Gamma_1,$$

$$\theta_{-1}(x) = \frac{x-1}{2} + i\frac{x+1}{2}, \quad \theta_1(x) = \frac{1+x}{2} + i\frac{1-x}{2}$$

– аффиксы точек пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $x = (x, 0) \in J$ с Γ_{-1} и Γ_1 соответственно; $D(A_{jx}^{-1})$ – множество функций $f(x) \in C(J)$ и таких, что $f(x)$ при $x \rightarrow -1$ или 1 может обращаться в бесконечность интегрируемого порядка; $D(A_{jx})$ – множество функций $f(x) \in C(\overline{J}) \cap C^1(J)$, производная $f'(x)$ которых при $x \rightarrow -1$ или 1 могут обращаться в бесконечность интегрируемого порядка и удовлетворяющих условию $f(j) = 0$, где j равен -1 либо 1 в зависимости от того, какое множество берется $D(A_{-1x})$ или $D(A_{1x})$.

В дальнейшем под решением уравнения (1) в области Δ будем понимать любую функцию $u(x, y) = u(z)$ из класса

$$C(\overline{\Delta}) \cap C^1(\Delta \cup J) \cap C^2(\Delta),$$

удовлетворяющую уравнению (1) в Δ и такую, что

$$u_y(x, 0) \equiv u_y(x) \in D(A_{jx}^{-1}).$$

Через $R(z; \xi, \eta) \equiv R(x, y; \xi, \eta)$ будем обозначать функцию Римана уравнения (1), которая, как хорошо известно, однозначно определяется двумя требованиями: 1) $R(z; \xi, \eta)$ по переменным x, y является решением уравнения $L^*R = 0$, сопряженного, по Лагранжу, уравнению (1); 2) на характеристических кривых $|x - \xi| = |y - \eta|$ удовлетворяет условиям

$$R(\xi, \eta; \xi, \eta) = 1, \quad (2)$$

$$2 \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right) R - (a + b)R = 0, \quad x + y = \xi + \eta, \quad (3)$$

$$2 \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) R - (a - b)R = 0, \quad x - y = \xi - \eta. \quad (4)$$

Известно также, что функция R в области Δ по переменным x, y или ξ, η имеет по крайней мере такую же гладкость, что и коэффициенты уравнения (1) (см., например, [1] или [2]).

Интегрируя выражение

$$RLu - uL^*R = \frac{\partial}{\partial x}(Ru_x - uR_x + auR) + \frac{\partial}{\partial y}(-Ru_y + uR_y + buR)$$

по подобласти области Δ , ограниченной прямой $y = 0$ и характеристической кривой $|x - \xi| = \eta - y$ с учетом свойств функции Римана, обычным способом нетрудно убедиться в том, что для любого решения $u(z)$ уравнения (1) в области Δ справедливо тождество

$$\begin{aligned} u(z) - \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} R(z; \xi, 0) u_y(\xi) d\xi = U[u(x); z] = \frac{1}{2} R(z; x + y, 0) u(x + y) + \\ + \frac{1}{2} R(z, x - y, 0) u(x - y) - \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} [R_\eta(z; \xi, 0) + b(\xi) R(z; \xi, 0)] u(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (5)$$

Из формулы (5) при $z \rightarrow \theta_j(x)$ имеем

$$u[\theta_j(x)] = U[u(x); \theta_j(x)] - (j/2) A_{jx}^{-1} [u_y(x)], \quad (6)$$

где A_{jx}^{-1} – оператор, действующий из $D(A_{jx}^{-1})$ в $D(A_{jx})$ по формуле

$$A_{jx}^{-1} [f(x)] \equiv \int_j^x R(\theta_j(x); \xi, 0) f(\xi) d\xi. \quad (7)$$

Оператор A_{jx}^{-1} есть оператор Вольтерра первого рода. Поскольку точки $z = \theta_j(x)$ и $z = x \in J$ лежат на одной характеристике, то из свойств (2), (3) и (4) функции Римана следует, что

$$R(\theta_j(x); x, 0) > 0, \quad \forall x \in \bar{J}. \quad (8)$$

В силу (8) оператор A_{jx}^{-1} однократным дифференцированием по x сводится к оператору Вольтерра второго рода и, стало быть, имеет обратный оператор A_{jx} с областью определения $D(A_{jx})$.

Замечая, что оператор A_{jx} имеет смысл и на множестве функций $f(x)$, удовлетворяющих всем условиям, гарантирующим их принадлежность множеству $D(A_{jx})$, за исключением, быть может, одного $f(j) = 0$, из (6) заключаем

$$\begin{aligned} A_{\Gamma}u &\equiv A_{-1x}u[\theta_{-1}(x)] + A_{1x}u[\theta_1(x)] = \\ &= A_ju \equiv A_{-1x}U[u(x); \theta_{-1}(x)] + A_{1x}U[u(x); \theta_1(x)]. \end{aligned} \quad (9)$$

Равенство (6) выражает интегро-функциональную связь между следом $u(t)$ на $\partial\Delta$ любого решения $u(z)$ уравнения (1) и следом $u_y(t)$ на J его нормальной производной $u_y(z)$, из которой нетрудно усмотреть, что задача Коши:

$$u(x) = \tau(x), \quad u_y(x) = \nu(x), \quad x \in J$$

редуцируется к задаче Гурса:

$$u[\theta_j(x)] = \psi_j(x), \quad j = \pm 1, \quad \forall x \in \bar{J},$$

а задача Дарбу:

$$u[\theta_1(x)] = \psi_1(x), \quad u(x) = \tau(x) \quad (\text{или } u_y(x) = \nu(x))$$

– к задаче Коши.

Равенство же (9) представляет собой *операторно-функциональное* уравнение, которому удовлетворяет след $u(t)$, $t \in \partial\Delta$, любого решения $u(z)$ уравнения (1) в области Δ .

Очевидно, никакая краевая задача для уравнения (1) в области Δ типа

$$B_{\omega}u = \psi(t) \quad \forall t \in \omega \subseteq \partial\Delta, \quad (10)$$

где $\psi(t)$ – заданная на ω действительная функция комплексного переменного t , а B_{ω} – заданный граничный оператор, действующий на функцию $u(t)$, определенный на подмножестве ω множества точек $\partial\Delta$, не будет корректно поставленной, если условие (10) будет противоречить условию (9).

Таким образом, получаем следующую методику постановки корректных задач типа (10) для уравнения (1): *граничный оператор B_{ω} надо задавать так, чтобы непротиворечивая система двух операторно-функциональных уравнений*

$$\begin{cases} A_{\Gamma}u = A_ju, \\ B_{\omega}u = \psi(t), \quad \forall t \in \omega \end{cases} \quad (11)$$

имела единственное решение $u_{\omega_0}(t)$ на некотором подмножестве $\omega_0 \subseteq \omega$, обладающем тем свойством, что задача $u(t) = u_{\omega_0}(t) \quad \forall t \in \omega_0$ для уравнения (1) в области Δ однозначно разрешима.

Например, в качестве B_ω можно взять единичный оператор E_ω : $E_\omega u \equiv u(t)$, $\forall t \in \omega$, где $\omega = \Gamma_j \cup J$, т. е. оператор, соответствующий задаче Дарбу.

Вопрос однозначной разрешимости краевой задачи (10) в случае, когда $B_\omega = E_\omega$ (и система (11) непротиворечивая) устанавливается довольно легко, исходя из соотношения (9).

Частным случаем задачи (10) является следующая

Задача А. В области Δ найти решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям:

$$u(x) = \tau(x) \quad \forall x \in \bar{J},$$

$$\alpha(x)A_{-1x}u[\theta_{-1}(x)] + \beta(x)A_{1x}u[\theta_1(x)] = \gamma(x) \quad \forall x \in J,$$

где

$$\tau(x) \in D(A_{jx}) \cap C^2(J), \quad \alpha(x), \beta(x), \gamma(x) \in D(A_{jx}), \quad \alpha(x) \neq \beta(x), \quad \forall x \in \bar{J}.$$

Корректность этой задачи просто следует из уравнения (9).

Поскольку при $a(x, y) \equiv b(x, y) \equiv 0$ и $c(x, y) \equiv \lambda^2 = \text{const}$ функция Римана $R(z; \xi, \eta) = J_0(\lambda\sqrt{|x - \xi|^2 - |y - \eta|^2})$, где $J_0(z)$ – функция Бесселя нулевого порядка, то оператор A_{jx} обратен оператору

$$A_{jx}^{-1}[f(x)] \equiv \int_j^x J_0(\lambda\sqrt{(\xi - j)(\xi - x)})f(\xi)d\xi. \quad (12)$$

Для любой функции $f(x) \in D(A_{jx}^{-1})$ функция

$$v(z) = \int_0^y \frac{F(x, r)rdr}{\sqrt{y^2 - r^2}}, \quad (13)$$

где

$$F(x, r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\lambda r \sin t} f(x + r \cos t) dt,$$

представляет собой решение задачи Коши:

$$v(x) = 0, \quad v_y(x) = f(x), \quad \forall x \in J$$

для телеграфного уравнения

$$u_{xx} - u_{yy} + \lambda^2 u = 0$$

в области Δ . Из единственности решения этой задачи и, стало быть, его следа $v[\theta_j(x)]$ на кривой Γ в силу (6) заключаем, что тождество (12)

можно переписать в виде

$$A_{jx}^{-1}[f(x)] \equiv -\frac{j}{2} \int_0^{\operatorname{Im} \theta_j} \frac{F(\operatorname{Re} \theta_j, r) r dr}{\sqrt{\operatorname{Im}^2 \theta_j - r^2}}.$$

Оператор в правой части (13) есть оператор дробного (в смысле Римана–Лиувилля) интегрирования по переменной r функции $F(x, r)$, а A_{jx}^{-1} – его «след» на кривой Γ .

При $\lambda = 0$, как легко видеть из (5) и (12)

$$A_{jx} = d/dx, \quad 2U[u(x); \theta_j(x)] = u(x) + u(j).$$

Следовательно, тождество (9) принимает вид

$$\frac{d}{dx} u[\theta_{-1}(x)] + \frac{d}{dx} u[\theta_1(x)] = \frac{d}{dx} u(x) \quad \forall x \in J, \quad (14)$$

из которого после интегрирования получаем известную теорему о среднем значении (или принцип Асгейрссона)

$$u[\theta_{-1}(x)] + u[\theta_1(x)] = u(x) + u(i)$$

для одномерного волнового уравнения

$$u_{xx} - u_{yy} = 0. \quad (15)$$

Известно, что классические задачи (Коши, Гурса, Дарбу) для невырождающихся гиперболических уравнений, в отличие от краевых задач для равномерно эллиптических уравнений, обладают тем свойством, что на их корректность не оказывают никакого влияния коэффициенты (a, b, c) при младших производных.

В данной заметке для каждого уравнения вида (1) формулируется заведомо корректная для него краевая задача. Поэтому вполне естественно ожидать, что на корректность такого рода задач существенное влияние могут оказывать коэффициенты при младших производных.

Действительно, однородная краевая задача

$$u(x) = 0 \quad \forall x \in \bar{J},$$

$$\cos \frac{1-x}{2} \frac{d}{dx} u[\theta_{-1}(x)] + \cos \frac{1+x}{2} \frac{d}{dx} u[\theta_1(x)] = 0 \quad \forall x \in J$$

для уравнения (15) в силу (14) не имеет решений, отличных от тривиального $u(z) \equiv 0$, в то время как эта же задача для уравнения

$$u_{xx} - u_{yy} - u = 0$$

имеет в качестве нетривиального решения функцию $u(z) = \sin y$.

В заключение отметим, что совершенно аналогично (см. [3]) можно сформулировать заведомо корректные краевые задачи для линейных вырождающихся гиперболических уравнений вида

$$|y|^m u_{xx} - u_{yy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = 0.$$

Литература

1. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М.: Изд. АН СССР, 1959.
2. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.
3. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5, № 1.

Поступила в редакцию
19 мая 1969 г.

Институт математики
СО АН СССР

Об одной задаче А. В. Бицадзе

Пусть Ω – конечная односвязная область трехмерного евклидова пространства точек (x, y, z) , ограниченная кусочно-гладкой поверхностью σ , расположенной в полупространстве $z > 0$, и двумя поверхностями S_1 : $x + x_0 = \sqrt{y^2 + z^2}$ и S_2 : $x_0 - x = \sqrt{y^2 + z^2}$, $x_0 > 0$, лежащими в полупространстве $z < 0$; $\Omega_1 = \Omega \cap (z < 0)$, $\Omega_2 = \Omega \cap (z > 0)$; S_0 – часть плоскости $z = 0$, отделяющая Ω_1 от Ω_2 ; $\partial\Omega$ – граница Ω .

В области Ω рассмотрим трехмерное уравнение Лаврентьева–Бицадзе

$$Lu \equiv \operatorname{sign} z \cdot u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f(x, y, z), \quad (1)$$

которое эллиптически при $z > 0$, гиперболично при $z < 0$ и параболически вырождается при $z = 0$. Поверхности S_1 и S_2 являются характеристиками этого уравнения.

Задача А. В. Бицадзе. Найти непрерывную в замкнутой области $\bar{\Omega}$ функцию $u(x, y, z)$ с непрерывными внутри Ω производными первого порядка, удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω при $z \neq 0$ и краевому условию

$$u|_{\sigma} = 0, \quad u|_{S_1} = 0, \quad (2)$$

или

$$u|_{\sigma} = 0, \quad u|_{S_2} = 0. \quad (3)$$

Примем следующие обозначения: $W_2^k(\Omega)$ – пространство Соболева с нормой $\|\cdot\|_k$ и со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$, $k = 0, 1$; $W(W^*)$ – множество всех функций u из класса $C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega \setminus S_0) \cap W_2^1(\Omega) \cap W_2^1(\partial\Omega)$, для которых $Lu \in W_2^0(\Omega) = L_2(\Omega)$ и соблюдено условие (2) ((3));

$n = (x_n, y_n, z_n)$ – единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega$, а $n^* = (-x_n, y_n, z_n)$ – конормаль, соответствующая оператору Лоренца

$$\square \equiv -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

$lu \equiv au + bu_x + cu_y + du_z$ – дифференциальное выражение первого порядка с коэффициентами $a(x, y, z) \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\bar{\Omega}_1) \cap C^2(\bar{\Omega}_2)$, $b(x, y, z)$, $c(x, y, z)$, $d(x, y, z) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\bar{\Omega}_1) \cap C^1(\bar{\Omega}_2)$; A – множество всех четырехкомпонентных вектор-функций (a, b, c, d) , которые в области Ω при $z \neq 0$ удовлетворяют системе дифференциальных неравенств

$$La > 0, \quad \text{sign } z b_y + c_x = 0, \quad \text{sign } z b_z + d_x = 0, \quad c_z + d_y = 0; \quad (4)$$

$$b_x - c_y + d_z > 2a, \quad b_x + c_y + d_z > 2a, \quad d(x, y, z) = 0; \quad (5)$$

$$\text{sign } z (c_y + d_z - b_x + 2a) > 0 \quad \forall (x, y, z) \in \bar{\Omega}, \quad (6)$$

и краевым условиям

$$a = 0, \quad d = 0, \quad bx_n \pm cy_n \leq 0, \quad b^2 \geq c^2 \quad \forall (x, y, z) \in S_2. \quad (7)$$

Множество A не пусто. Ему принадлежат, например, векторы, компоненты которых имеют вид

$$a = \varepsilon[y^2 + z^2 - (x - x_0)^2], \quad b = b_1(x - x_0) + b_0, \quad c = c_1y, \quad d = d(z), \quad (8)$$

где $\varepsilon, b_1, b_0, c_1$ – произвольные постоянные, такие что

$$\varepsilon > 0, \quad b_0 \leq 0, \quad c_1 > |2a|, \quad b_1 > c_1 + |2a| \quad \forall (x, y, z) \in \bar{\Omega}, \quad (9)$$

а функция $d(z) = 0$ при $z \leq 0$ и удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$2a + b_1 - c_1 < d'(z) < -2a + b_1 + c_1 \quad (10)$$

при $z \geq 0$. При $c_1 = 1, b_1 = \lambda, 1 < \lambda < 2$ и достаточно малых положительных значениях ε функция $d = z$ является решением соотношения (10).

Неравенства (7) прямо следуют из (8) и (9), если учесть, что на характеристической поверхности S_2 имеем $\sqrt{2}x_n = 1, \sqrt{2}(x_0 - x)y_n = y, \sqrt{2}(x_0 - x)z_n = z$. Справедливость соотношений (4), (5) и (6) очевидна при соблюдении условий (9) и (10).

Ниже будем предполагать, что кусочно-гладкая поверхность σ обладает тем свойством, что хотя бы для одного вектора $(a, b, c, d) \in A$ почти везде на σ имеет место неравенство

$$n \cdot (b, c, d) = bx_n + cy_n + dz_n \geq 0. \quad (11)$$

Априорная оценка. Для любой функции $u \in W$ имеет место энергетическое неравенство

$$\|u\|_1 \leq C \|Lu\|_0, \quad (12)$$

где C – не зависящая от u постоянная.

Действительно, для любой функции $u \in W$ и любого вектора $(a, b, c, d) \in A$ справедливо тождество

$$\begin{aligned} 2\langle lu, Lu \rangle_0 &= 2\langle lu, \Delta u \rangle_0 + 2\langle lu, \square u \rangle_0 = \\ &= 2 \int_{S_2} u^2 \frac{\partial a}{\partial n^*} dS = \int_{\Omega} u^2 L a d\Omega = \int_{\sigma} [(bx_n - cy_n - dz_n)u_x^2 + \\ &+ (-bx_n + cy_n - dz_n)u_y^2 + (-bx_n - cy_n + dz_n)u_z^2 + 2(cx_n + by_n)u_x u_y + \\ &+ 2(dx_n + bz_n)u_x u_z + 2(dy_n + cz_n)u_y u_z] dS + \int_{S_1 \cup S_2} [(-bx_n + cy_n + dz_n)u_x^2 + \\ &+ (-bx_n + cy_n - dz_n)u_y^2 + (-bx_n - cy_n + dz_n)u_z^2 + 2(-cx_n + by_n)u_x u_y + \\ &+ 2(-dx_n + bz_n)u_x u_z + 2(dy_n + cz_n)u_y u_z] dS + \\ &+ \int_{\Omega} [\text{sign } z(c_y + d_z - b_x - 2a)u_x^2 + (b_x - c_y + d_z - 2a)u_y^2 + \\ &+ (b_x + c_y - d_z - 2a)u_z^2] d\Omega = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5, \quad I_3 = I_3(S_1) + I_3(S_2). \end{aligned}$$

Поскольку $a = 0$ на S_2 и, как хорошо известно, конормаль n^* лежит на характеристике S_2 , то, очевидно, $I_1 = 0$. Поверхность σ является поверхностью уровня, стало быть, на ней $u_x = u_n x_n$, $u_y = u_n y_n$, $u_z = u_n z_n$. Принимая это во внимание, легко видеть, что

$$I_3 = \int_{\sigma} (bx_n + cy_n + dz_n) |n|^2 u_n^2 dS = \int_{\sigma} (b, c, d) n u_n^2 dS,$$

из которого на основании (11) заключаем, что $I_3 \geq 0$.

Совершенно аналогично получаем

$$I_3(S_1) = \int_{\sigma} (b, c, d) n (y_n^2 + z_n^2 - x_n^2) u_n^2 dS = 0.$$

Матрица M квадратичной формы, стоящей под знаком интеграла $I_3(S_2)$, в силу (6) имеет вид

$$M = \begin{vmatrix} cy_n - bx_n & by_n - cx_n & bz_n \\ by_n - cx_n & cy_n - bx_n & cz_n \\ bz_n & cz_n & -cy_n - bx_n \end{vmatrix}.$$

Опираясь исключительно на тот факт, что на характеристике S_2 $y_n^2 + z_n^2 = x_n^2$, нетрудно показать, что при выполнении неравенства (7) все главные миноры матрицы M неотрицательны:

$$\det M = 0, \quad (cy_n - bx_n)^2 - (by_n - cx_n)^2 = (b^2 - c^2)z_n^2, \\ -(c^2y_n^2 - b^2x_n^2) - c^2z_n^2 = (b^2 - c^2)x_n^2, \quad -(c^2y_n^2 - b^2x_n^2) - b^2z_n^2 = (b^2 - c^2)y_n^2.$$

Следовательно, согласно критерию Сильвестра, $I_3(S_2) \geq 0$.

Таким образом,

$$\int_{\sigma} [u^2 La + \operatorname{sign} z (c_y + d_z - b_x - 2a)u_x^2 + (b_x - c_y + d_z - 2a)u_y^2 + \\ + (b_x + c_y - d_z - 2a)u_z^2] d\Omega \leq \varepsilon \|u\|_1^2 + C_1 \|Lu\|_0^2, \quad (13)$$

где ε – сколь угодно малое положительное число, C_1 – положительная постоянная, не зависящая от u .

Из энергетического неравенства (13) и условий (4)–(6) следует (12).

Совершенно идентично доказывается справедливость априорной оценки (12) для любой функции $u \in W^*$.

Неравенство (12) обобщает априорную оценку, полученную А. В. Бицадзе в работе [1].

Простым интегрированием по частям можно показать, что

$$\langle u, Lv \rangle_0 = \langle v, Lu \rangle_0, \quad \forall u \in W, \quad v \in W^*,$$

поэтому задачи (1), (2) и (1)–(3) являются (формально) взаимно сопряженными.

Из априорной оценки (12) вытекает единственность регулярного (классического) решения $u \in W$ или $v \in W^*$ задачи А. В. Бицадзе.

При $\sigma = S^*$, где S^* состоит из двух конических поверхностей S_3 : $x_0 - x = \sqrt{y^2 + z^2}$ и S_4 : $x + x_0 = \sqrt{y^2 + z^2}$, этот факт был впервые установлен в [1].

Пусть теперь правая часть $f(x, y, z)$ уравнения (1) принадлежит гильбертову пространству $W_2^{-1}(\Omega)$ с негативной нормой $\|\cdot\|_{-1}$ и со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle_{-1}$.

Слабым решением задачи А. В. Бицадзе назовем любую функцию $u \in L_2(\Omega)$, удовлетворяющую равенству

$$\langle u, Lv \rangle_0 = \langle f, v \rangle_{-1} \quad \forall v \in W^*.$$

Доказательство существования слабого решения проводится по обычной схеме (см., например, [2, с. 152]; [3, с. 107]), которую мы воспроизводим для удобства чтения.

Согласно априорной оценке (12), справедливой для любой функции $v \in W^*$, выражение $\langle f, v \rangle_{-1}$ зависит не от v , а от Lv , и поэтому

можно положить $\langle f, v \rangle_{-1} = F(Lv)$, где F – однородный и адитивный функционал над линейным множеством $L(W^*)$. Далее, на основании (12) и обобщенного неравенства Шварца, имеем

$$|F(Lv)| = |\langle f, v \rangle_{-1}| \leq \|f\|_{-1} \|v\|_1 \leq C \|f\|_{-1} \|Lv\|_0,$$

т. е. при фиксированном $f \in W_2^{-1}(\Omega)$ функционал $F(\varphi)$, $\varphi = Lv$, над $L(W^*)$ является непрерывным. Продолжая $F(\varphi)$ по известной теореме Хана–Банаха на все пространство $L_2(\Omega)$ и пользуясь теоремой Рисса, найдем искомую функцию u : $F(\varphi) = \langle \varphi, u \rangle_0$, $\forall \varphi \in L_2(\Omega)$ и, в частности, для $\varphi = Lv$ $\langle Lv, u \rangle_0 = F(Lv) = \langle f, v \rangle_{-1}$.

Энергетическое неравенство (12)

$$\|u\|_1 \leq C \|Lu\|_0 \quad \forall u \in W \cup W^*$$

обеспечивает также существование полусильного решения задачи А. В. Бицадзе (см. [3, с. 98–99]).

Среди работ, посвященных исследованию краевых задач для уравнения смешанного типа в многомерных ограниченных областях, следует отметить работу [4], где изучается задача типа задачи Дирихле.

Литература

1. Бицадзе А. В. ДАН СССР. 1962. Т. 143, № 5.
2. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М.: Изд. АН СССР, 1959.
3. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев, 1965.
4. Каратопраклиев Г. Д. ДАН. 1969. Т. 188, № 6.

Поступила в редакцию
20 октября 1969 г.

Институт математики
СО АН СССР

Многомерный аналог задачи Дарбу для гиперболических уравнений

Пусть D – односвязная область трехмерного евклидова пространства E_3 точек (x_1, x_2, t) , ограниченная двумя поверхностями $t = |x|$, $t = r - |x|$, где $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2$, $r = \text{const} > 0$, расположенными в полупространстве $x_2 \leq 0$, и плоскостью $x_2 = 0$; S_1 , S_2 и S_3 – части поверхностей $t = |x|$, $t = r - |x|$ и $x_2 = 0$ соответственно, образующих границу ∂D области D .

В области D рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} - u_{tt} + a^i u_{x_i} + b u_t + c u = f \quad (1)$$

с коэффициентами $a^i = a^i(x, t)$, $i = 1, 2$, $b = b(x, t)$, $c = c(x, t)$ из класса $C^2(\bar{D})$ и правой частью $f = f(x, t)$ из пространства $L_2(D)$. Здесь и ниже повторение индекса i означает суммирование по нему от 1 до 2.

Уравнение (1) заменой зависимой переменной по формуле $u = u_1 \exp(\mu t)$, где $\mu = \text{const} > 0$, можно преобразовать в уравнение (относительно u_1) с коэффициентом при u_1 , меньшем всюду в замыкании $\bar{D}$ любого наперед заданного отрицательного числа. Поэтому, не нарушая общности, будем считать, что

$$c < -\max_{\bar{D}} |a_{x_i}^i + b_t|. \quad (2)$$

Аналогами (смешанной) задачи Дарбу [1] являются следующие две задачи.

Задача В. Найти решение $u(x, t)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{S_2} = 0, \quad u|_{S_3} = 0. \quad (3)$$

Задача В⁺. Найти решение $v(x, t)$ уравнения

$$L^+ v \equiv v_{x_1 x_1} + v_{x_2 x_2} - v_{tt} - (a^i v)_{x_i} - (bv)_t + cv = f, \quad (4)$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$v|_{S_1} = 0, \quad v|_{S_3} = 0.$$

Эти задачи для двумерного волнового уравнения впервые были сформулированы А. В. Бицадзе [2]. Они являются исключительными случаями задачи, исследованной С. Л. Соболевым [3] для многомерного волнового уравнения, когда данные задаются на времяобразно ориентированной конической поверхности.

Введем в рассмотрение эрмитову билинейную форму

$$(u, v)_+ = \int_D [\alpha \nabla u \nabla v + 2(b - \beta)u_t v_t + a^i u_{x_i} v_t + a^i v_{x_i} u_t + uv] dx dt, \quad (5)$$

где $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial t)$, а α и β — любые положительные числа, удовлетворяющие неравенству

$$\alpha > \max \left[\max_{\bar{D}} \left(1 + |b - \beta| + \sqrt{|b - \beta|^2 + |a|^2} \right), \max_{\bar{D}} \left| \frac{c_t}{c} \right|, \max_{\bar{D}} |a|^2, \right. \\ \left. \max_{\bar{D}} \left| \frac{c_t - a_{x_i}^i t - b_{tt}}{c - a_{x_i}^i - b_t} \right| \right], \quad |a|^2 = (a^1)^2 + (a^2)^2. \quad (6)$$

Поскольку все корни (характеристические числа) характеристического уравнения

$$(\alpha - \lambda) [(\alpha - \lambda)^2 + 2(b - \beta)(\alpha - \lambda) - |a|^2] = 0,$$

соответствующего квадратичной форме

$$\alpha|\xi|^2 + 2(b - \beta)\xi_3^2 + 2a^i\xi_i\xi_3, \quad (x, t) \in \overline{D}, \quad \xi \in E_3,$$

в силу (6) положительны, то

$$(u, u)_+ \geq 0, \quad (u, u)_+ = 0 \Leftrightarrow u = 0. \quad (7)$$

Следовательно, для формы (5) соблюдены все аксиомы скалярного произведения. Примем следующие обозначения:

$w_2^k(D)$ – положительное пространство Соболева с нормой $\|\cdot\|_k$ и со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_k$, $w_2^0(D) = L_2(D)$;

H_+ – гильбертово пространство суммируемых в области D функций, имеющих обобщенные производные до первого порядка с конечной нормой, определяемой по скалярному произведению (5): $\|u\|_+^2 = (u, u)_+$; полнота пространства H_+ следует из оценки $\|u\|_1 \leq \text{const} \|u\|_+$; очевидно, $\|u\|_0 \leq \|u\|_+$;

H_- – негативное (гильбертово) пространство, построенное по нулевому пространству $H_0 = L_2(D)$ и положительному пространству H_+ , т. е. пополнение пространства H_0 по норме

$$\|\varphi\|_- = \sup_{u \in H_+} \frac{|(\varphi, u)_0|}{\|u\|_+} \leq \|\varphi\|_0;$$

$w_2^{-1}(D)$ – негативное пространство Соболева, построенное по H_0 и $w_2^1(D)$;

$\langle \varphi, u \rangle_0$, где $u \in H_+$ – билинейная форма на пространстве H_- , которая при $\varphi \in H_0$ совпадает со скалярным произведением $(\varphi, u)_0$ в H_0 . Известно (см., например, [4]), что для этой формы справедливо обобщенное неравенство Шварца

$$|\langle \varphi, u \rangle_0| \leq \|\varphi\|_- \|u\|_+; \quad (8)$$

w и w^+ – множество всех функций из класса $C(\overline{D}) \cap C^2(D) \cap w_2^1(D) \cap w_2^1(\partial D)$, для которых $Lu \in H_0$ и соблюдены условия задач В и В⁺ соответственно.

Слабым решением задачи В назовем любую функцию $u \in L_2(D)$, удовлетворяющую равенству

$$(u, L^+v)_0 = \langle f, v \rangle_0, \quad \forall v \in w^+. \quad (9)$$

Ниже будем считать, что правая часть f принадлежит пространству $H_- \supseteq L_2(D)$.

Априорная оценка. Для любой функции $u \in w$ и $v \in w^+$ имеют место неравенства

$$\|u\|_+ \leq C \|Lu\|_0, \quad \|v\|_+ \leq C \|L^+v\|_0, \quad (10)$$

где C – не зависящая от u и v положительная постоянная.

Действительно, для любой функции $u \in w$ и $d = d(t)$ из класса $C^1(\overline{D})$ справедливо тождество

$$2(du_t, Lu)_0 = \int_D [d_t |\nabla u|^2 + 2dbu_t^2 + 2da^i u_{x_i} u_t - (dc)_t u^2] dxdt + \\ + \int_{\partial D} dcn^3 u^2 dS + \int_{\partial D} d(-|\nabla u|^2 n^3 + 2n^i u_{x_i} u_t) dS = I_1 + I_2 + I_3, \quad (11)$$

где $n^i = \cos(\widehat{n, x_1})$, $i = 1, 2$, $n^3 = \cos(\widehat{n, t})$ — направляющие косинусы внешней нормали $n = (n^1, n^2, n^3)$ к ∂D ; dS — элемент поверхности ∂D .

Пусть $d = \exp(\alpha t)$. Тогда в силу (2) и неравенства $n^3 \leq 0$ на S_1 ясно, что $I_2 \geq 0$. Поскольку на поверхности S_3 $n = (0, 1, 0)$, то на основании условия (3) можно написать

$$I_3 = \int_{S_1 \cup S_2} d(-|\nabla u|^2 n^3 + 2n^i u_{x_i} u_t) dS = I_3(S_1) + I_3(S_2).$$

На характеристике S_2 уравнения (1) имеем

$$(n^1)^2 + (n^2)^2 = (n^3)^2, \quad u = 0 \Rightarrow u_{x_i} = u_n n^i, \quad u_t = u_n n^3.$$

Следовательно, на S_2

$$-|\nabla u|^2 n^3 + 2n^i u_{x_i} u_t = n^3 u_n^2 [(n^1)^2 + (n^2)^2 - (n^3)^2] = 0,$$

стало быть, $I_3(S_2) = 0$ для любой функции d .

Далее, принимая во внимание, что на характеристике

$$S_1: \sqrt{(n^1)^2 + (n^2)^2} = -n^3$$

все корни характеристического уравнения

$$\lambda(\lambda + n^3)(\lambda + 2n^3) = 0,$$

соответствующего квадратичной форме

$$-n^3 |\xi|^2 + 2n^i \xi_i \xi_3, \quad (x, t) \in S_1, \quad \xi \in E_3,$$

неотрицательны, получаем $I_3(S_1) \geq 0$, $\forall d \geq 0$.

Из (11) с учетом того, что $d_t = \alpha d$ и

$$2(du_t, Lu)_0 \leq 2\beta \|\sqrt{d}u_t\|_0^2 + C_1 \|Lu\|_0^2,$$

где C_1 — не зависящая от u положительная постоянная, имеем

$$\int_D d[\alpha |\nabla u|^2 + 2(b - \beta)u_t^2 + 2a^i u_{x_i} u_t] dxdt - \int_D (dc)_t u^2 dxdt \leq C_1 \|Lu\|_0^2.$$

Отсюда и из неравенств (2) и (6) получаем первую априорную оценку в (10).

Совершенно аналогично доказывается вторая априорная оценка в (10), если в качестве вспомогательной функции d брать функцию $d = -\exp(-\alpha t)$.

Легко видеть, что при указанных выше значениях α нормы $\|\cdot\|_+$ и $\|\cdot\|_1$ эквивалентны, поэтому из неравенства (11) следуют априорные оценки

$$\|u\|_1 \leq C\|Lu\|_0, \quad \|v\|_1 \leq C\|L^+v\|_0, \quad \forall u \in w, v \in w^+. \quad (12)$$

Неравенства (12) обобщают априорную оценку

$$\|u_{x_2}\|_0 \leq C\|\square u\|_0, \quad \forall u \in w,$$

где

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

– оператор Лоренца, полученную А. В. Бицадзе [2].

Интегрированием по частям можно показать, что

$$(u, L^+v)_0 = (Lu, v)_0, \quad \forall u \in w, v \in w^+,$$

следовательно, задачи В и V^+ являются (формально) сопряженными.

Из априорной оценки (12) вытекает единственность регулярного (классического) решения $u \in w$ или $v \in w^+$ задач В и V^+ . При $L \equiv \square$ этот факт впервые установлен в [2].

Доказательство существования слабого решения задачи В проводится по стандартной схеме, которую мы воспроизводим для удобства чтения.

Согласно априорным оценкам (10), выражение $\langle f, v \rangle_0$ из (9) зависит не от v , а от L^+v , и поэтому можно положить $\langle f, v \rangle_0 = F(L^+v)$, где F – однородный и аддитивный функционал над линейным множеством $L^+(w^+)$, где $L^+(w^+)$ – образ w^+ при отображении $v \rightarrow L^+v$. Далее, на основании (8) и (10), имеем

$$|F(L^+v)| = |\langle f, v \rangle_0| \leq \|f\|_- \|v\|_+ \leq C\|f\|_- \|L^+v\|_0,$$

т. е. при фиксированном f функционал $F(\psi)$, $\psi = L^+v$, над $L^+(w^+)$ является непрерывным. Продолжая $F(\psi)$, по известной теореме Хана–Банаха, на все пространство $L_2(D)$ и пользуясь теоремой Рисса, найдем искомую функцию u : $F(\psi) = (u, \psi)_0$, $\forall \psi \in L_2(D)$ и, в частности, для $\psi = L^+v$, $(u, L^+v)_0 = F(L^+v) = \langle f, v \rangle_0$.

Энергетические неравенства (12) обеспечивают существование слабого решения для любой правой части f из $w_2^{-1}(D)$. Если же $f \in L_2(D)$,

то, как известно (см., например, [4]) они гарантируют также существование полусильного решения. Отметим также, что априорные оценки вида (12) имеют место, если условие $u|_{S_3} = 0$ заменить условием $u_{x_2}|_{S_3} = 0$.

Литература

1. Гурса Э. Курс математического анализа. Т. 3, ч. 1. М., 1934.
2. Бицадзе А. В. ДАН. 1962. Т. 143, № 5. С. 1017–1019.
3. Соболев С. Л. Матем. сборн., нов. сер. 1942. Т. 11 (53), № 3. С. 155–203.
4. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев, 1965.

Поступила в редакцию
2 февраля 1970 г.

Институт математики
СО АН СССР

О задаче Дарбу для гиперболических уравнений

Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{yy} - k(y)u_{xx} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = f(x, y), \quad (1)$$

где $k(y) > 0$ при $y \neq 0$ и может обращаться в нуль при $y = 0$.

Пусть D – односвязная область плоскости независимых переменных x, y , ограниченная характеристиками AC и BC уравнения (1), выходящими из точки $C(\frac{1}{2}, y_C)$, и отрезком $AB: 0 < x < 1$ прямой $y = 0$.

Относительно коэффициентов k и b уравнения (1) будем предполагать, что они непрерывны в замыкании $\bar{D} = D \cup \partial D$ области D , а относительно a и c – их непрерывность в $\bar{D}$ вместе с производной по x .

Обозначим через W множество функций $u = u(x, y)$ из класса $C(\bar{D}) \cap C^2(D) \cap W_2^1(D) \cap W_2^1(\partial D)$, где $W_2^1(D)$ – пространство Соболева, для которых $Lu \in L_2(D)$ и соблюдены краевые условия

$$u|_{AB \cup BC} = 0, \quad \text{или} \quad u_y|_{AB} = 0, \quad u|_{BC} = 0. \quad (2)$$

Задача Дарбу. Найти функцию $u \in W$, удовлетворяющую уравнению (1) в области D .

Единственность и существование неоднородной задачи Дарбу:

$$u_y|_{AB} = \nu(x), \quad u|_{BC} = \psi(y),$$

для уравнения (1) в случае, когда

$$k(y) = -y^m, \quad m \equiv 1 \pmod{2}, \quad a, b \in C^3(\bar{D}), \quad c, f \in C^1(\bar{D})$$

и, кроме того, при $m \geq 2$ функция a представима в виде $a = |y|^n a_1(x, y)$ с $a_1 \in C(\bar{D})$ и $n > \frac{m}{2} - 1$, были установлены Геллерстедтом [1] методом функции Грина–Адамара.

Теорема. Пусть коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют одному из следующих условий:

- 1) $k(y) \neq 0$ или $a(x, 0) > 0$ при $0 \leq x \leq 1$;
- 2) $a/k, b^2/k \in C(\overline{D})$, $c(x, 0) < 0$ при $0 \leq x \leq 1$;
- 3) $a/k, b^2/k, a_x/k, c/k, c_x/k \in C(\overline{D})$;
- 4) $k/a, b^2/a \in C(\overline{D})$, $a > 0$, $c(x, 0) < 0$ при $y \neq 0$, $0 \leq x \leq 1$;
- 5) $k/a, b^2/a, c/k, c_x/k \in C(\overline{D})$, $a > 0$, при $y \neq 0$, $a_x \geq 0$.

Тогда имеет место априорная оценка вида

$$\|u\|_{++} \leq C\|Lu\|_+, \quad \forall u \in W,$$

где $\|\cdot\|_{++}$, $\|\cdot\|_+$ – некоторые позитивные нормы, а C – не зависящая от u постоянная.

Доказательство. Введем оператор

$$L_\mu v \equiv v_{yy} - kv_{xx} + a_\mu v_x + bv_y + c_\mu v,$$

где

$$\mu \equiv \text{const} < 0, \quad a_\mu = a - 2\mu k, \quad c_\mu = c + a\mu - k\mu^2.$$

Легко проверить, что если $u = v \exp(\mu x)$ и $u \in W$, то $Lu = \exp(\mu x)L_\mu v$ и $v \in W$. Для любой функции $d = d(x) \in C^1(\overline{D})$ и $v \in W$ справедливо тождество

$$\begin{aligned} 2(dv_x, L_\mu v)_0 &= 2 \int_D dv_x L_\mu v dD = \int_D [d_x(kv_x^2 + v_y^2) + 2da_\mu v_x^2 + 2dbv_x v_y] dD - \\ &\quad - \int_D (dc_\mu)_x v^2 dD + \int_{\partial D} dc_\mu x_n v^2 dS + \\ &\quad + \int_{\partial D} d[-(kv_x^2 + v_y^2)x_n + 2y_n v_x v_y] dS = \sum_{i=1}^4 I_i, \end{aligned} \quad (3)$$

где x_n, y_n – направляющие косинусы внешней нормали $n = (x_n, y_n)$ к границе области D .

Так как корни характеристического уравнения $\lambda(\lambda + x_n + kx_n) = 0$, соответствующего квадратичной форме $-kx_n\xi^2 + 2y_n\xi\eta - x_n\eta^2$ на характеристике AC , неотрицательны, а на характеристике BC в силу (2)

$$v_x = v_n x_n, \quad v_y = v_n y_n,$$

нетрудно убедиться в том, что $I_4 \geq 0$ для всех $v \in W$, если $d(x) \geq 0$ в D .

Предположим, что $d = \exp(\alpha x)$, где $\alpha \equiv \text{const} > 0$. Из (3) и простого неравенства

$$2bv_x v_y \geq -\varepsilon b^2 v_x^2 - \frac{1}{\varepsilon} v_y^2,$$

справедливого для любого $\varepsilon > 0$, имеем

$$\begin{aligned} \int_D d \left[(\alpha k + 2a_\mu - \varepsilon b^2) v_x^2 + \left(\alpha - \frac{1}{\varepsilon} \right) v_y^2 \right] dD + I_2 + I_3 \leq \\ \leq \varepsilon \|v_x \sqrt{d\omega}\|_0^2 + C \|\omega^{-1/2} L_\mu v\|_0^2, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\omega = \omega(x, y)$ — любая неотрицательная функция из класса $C(\overline{D})$, а $\|\cdot\|_0$ — норма в пространстве $L_2(D)$. Здесь и ниже C означает некоторую положительную постоянную, которая не зависит от v .

Для удобства введем позитивные нормы по формулам

$$\begin{aligned} \|v\|_{1, \varphi, \psi} &= \left[\int_D (\varphi v_x^2 + v_y^2 + \psi v^2) dD \right]^{1/2}, \quad \|v\|_{1, \varphi, 1} \equiv \|v\|_{1, \varphi}, \\ \|v\|_{0, \varphi} &= \left(\int_D \frac{v^2}{\varphi} dD \right)^{1/2}, \quad \|v\|_{j, 1} \equiv \|v\|_j, \quad j = 0, 1. \end{aligned}$$

Перепишем неравенство (4) в виде

$$\int_D d \left[a_\mu^\alpha v_x^2 + \left(\alpha - \frac{1}{\varepsilon} \right) v_y^2 - c_\mu^\alpha v^2 \right] dD \leq C \|L_\mu v\|_{0, \omega} - I_3, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} a_\mu^\alpha &= 2a + (\alpha - 4\mu)k - \varepsilon(b^2 + \omega), \\ c_\mu^\alpha &= \alpha c + c_x + (\alpha a + a_x)\mu - \alpha k \mu^2 = \alpha c_\mu + c_{\mu x}. \end{aligned}$$

Пусть соблюдено условие 1 теоремы, например, $a(x, 0) > 0$. Положим

$$\mu < - \min_{0 \leq x \leq 1} \frac{c(x, 0)}{a(x, 0)}.$$

Тогда при достаточно малых значениях ε найдется такое число $\delta < 0$, что

$$c_\mu < 0, \quad a_\mu^\alpha > 0, \quad \forall (x, y) \in \overline{D} \cap (\delta \leq y \leq 0).$$

Поэтому существует такое, независящее от α число μ_0 , что

$$c_{\mu_0} < 0, \quad a_{\mu_0}^\alpha > 0, \quad \forall \alpha > 0, \quad (x, y) \in \overline{D}, \quad (6)$$

и число α_0 , зависящее от μ_0 , что

$$c_{\mu_0}^{\alpha_0} < 0, \quad \forall (x, y) \in \overline{D}. \quad (7)$$

Принимая во внимание (6) и (7), из (5) при $\omega \equiv 1$ получаем энергетическое неравенство

$$\|v\|_1 \leq \|L_{\mu_0} v\|_0, \quad \forall v \in W. \quad (8)$$

Аналогично, но еще проще, доказывается оценка (8), когда $k(0) \neq 0$, т. е. уравнение (1) строго гиперболично.

Если имеет место условие 2, то при $\omega \equiv k$, очевидно, существует такое, не зависящее от α , число μ_0 , что

$$c_{\mu_0} < 0, \quad a_{\mu_0}^\alpha/k = \alpha - 4\mu_0 + (2a - \varepsilon b^2 - \varepsilon k)/k > 0, \quad \forall (x, y) \in \overline{D},$$

и такое число α_0 , что верно (7). Следовательно, в силу (5),

$$\|v\|_{1,k} \leq C \|L_{\mu_0} v\|_{0,k}, \quad \forall v \in W.$$

Пусть теперь выполнено условие 3. Тогда при $\omega \equiv k$ найдется число μ_0 , которое не зависит от α , что $c_{\mu_0}/k < 0$, $a_{\mu_0}^\alpha/k > 0$ в $\overline{D}$, и такое число α_0 , что $c_{\mu_0}^{\alpha_0}/k < 0$ в $\overline{D}$. Поэтому в соответствии с (5) имеем

$$\|v\|_{1,k,k} \leq C \|L_{\mu_0} v\|_{0,k}, \quad \forall v \in W.$$

Точно также убеждаемся в том, что $\forall v \in W$, $\|v\|_{1,a} \leq C \|L_{\mu_0} v\|_{0,a}$ и $\|v\|_{1,a,k} \leq C \|L_{\mu_0} v\|_{0,a}$ при соблюдении условий 4 и 5 соответственно, а это и завершает доказательство теоремы.

Из доказанной теоремы следует единственность регулярного решения задачи Дарбу и существование слабого решения сопряженной задачи

$$v_{yy} - kv_{xx} - (av)_x - (bv)_y + cv = f, \quad v|_{AB \cup AC} = 0$$

в функциональных пространствах, соответствующих априорной оценке.

Нетрудно показать, что основное неравенство (5) гарантирует единственность решения задачи Дарбу и при более общих предположениях относительно коэффициентов уравнения (1). Однако следует отметить, что *некоторые из условий теоремы являются существенными и их нарушения могут привести даже к неединственности решения задачи Дарбу.*

Пример 1. Функция

$$u = \sin \left(x - 1 + \int_y^0 \exp \frac{1}{2t} dt \right)$$

в области D является решением однородной задачи Дарбу: $u|_{BC} = 0$, $u_y|_{AB} = 0$ для уравнения

$$u_{yy} - \exp \left(\frac{1}{y} \right) u_{xx} - \frac{1}{2y^2} \exp \left(\frac{1}{2y} \right) u_x = 0.$$

Пример 2. Общее решение уравнения

$$u_{yy} - y^2 u_{xx} - u_x = 0 \quad (9)$$

в классе функций $u \in C^1(D \cup AB) \cap C^2(D)$, обладающих тем свойством, что $u(x, 0)$ и $u_y(x, 0) \in C^1(0 \leq x \leq 1) \cap C^2(0 < x < 1)$ дается формулой

$$u(x, y) = \tau \left(x + \frac{1}{2} y^2 \right) + \frac{1}{2} y \int_0^1 \nu \left(x + \frac{1}{2} y^2 - y^2 t \right) \frac{dt}{\sqrt{t}}, \quad (10)$$

где $\tau(x)$, $\nu(x)$ – произвольные функции из $C^1(0 \leq x \leq 1) \cap C^2(0 < x < 1)$.

Воспользовавшись формулой (10), нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения: *однородная задача, соответствующая неоднородной задаче Дарбу: $u_y|_{AB} = \nu(x)$, $u|_{BC} = \psi(x)$ для уравнения (9), имеет бесчисленное множество линейно независимых решений, а неоднородная разрешима тогда и только тогда, когда*

$$\nu(x) = \psi_*(x) \equiv \sqrt{1-x} \psi' \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2} \right).$$

Для уравнения (9) корректно поставлена задача Дарбу, когда u задается не на BC , а на AC , что говорит о неравноправности этих характеристик, или когда на AB задается не u_y , а u и, наконец, следующая краевая задача

$$u|_{BC} = \psi(x), \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{u_y - \psi_*(x)}{y} = \nu(x), \quad 0 < x < 1,$$

если, например,

$$\psi(x) \in C^4 \left(\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \right), \quad \nu(x) \in C^1(0 \leq x \leq 1) \cap C^2(0 < x < 1).$$

Любопытно отметить, что уравнение (9) приведено А. В. Бицадзе [2] как пример уравнения, для которого задача Коши с начальными данными на линии параболического вырождения корректна. Следовательно, *в отличие от строго гиперболических уравнений, или от вырождающихся уравнений с нехарактеристическим степенным вырождением порядка меньшего двух, из корректности задачи Коши не следует, вообще говоря, корректность соответствующих задач Дарбу, если порядок вырождения больше либо равен двум.*

В заключение отметим, что в связи с приведенными здесь примерами возникает вопрос, может ли неединственность решения задачи Дарбу повлиять на единственность известной задачи Трикоми. Например, легко убедиться, что для уравнения

$$\text{sign } y \cdot y^2 u_{xx} + u_{yy} - u_x = 0$$

этого не происходит.

Литература

1. Gellerstedt S. Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik. 1937. Vol. 25 A, no. 29. Pp. 1–23.
2. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М., 1959.

Поступила в редакцию
30 апреля 1970 г.

Институт математики
СО АН СССР

О задаче Дарбу для вырождающихся гиперболических уравнений

Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{yy} - k(y)u_{xx} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = f(x, y), \quad (1)$$

где $k(y) > 0$ при $y \neq 0$ и может обращаться в нуль при $y = 0$.

Пусть D – односвязная область плоскости независимых переменных x, y , ограниченная характеристиками AC и BC уравнения (1), выходящими из точки $C(\frac{1}{2}, y_C)$, и отрезком $AB: 0 < x < 1$ прямой $y = 0$.

Относительно коэффициентов k и b уравнения (1) будем предполагать, что они непрерывны в замыкании $\bar{D} = D \cup \partial D$ области D , а относительно a и c – их непрерывность в $\bar{D}$ вместе с производной по x .

Уравнение (1) гиперболично в области D и может параболически вырождаться на нехарактеристической части AB ее границы.

Задача Дарбу. В области D найти решение $u(x, y)$ уравнения (1) удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{AB} = 0, \quad u|_{BC} = 0, \quad (2)$$

или

$$u_y|_{AB} = 0, \quad u|_{BC} = 0. \quad (3)$$

Пусть L^* – оператор, сопряженный по Лагранжу с оператором L :

$$L^*v \equiv v_{yy} - k(y)v_{xx} - \frac{\partial}{\partial x}(av) - \frac{\partial}{\partial y}(bv) + cv = f(x, y). \quad (4)$$

Условия

$$v|_{AB} = 0, \quad v|_{AC} = 0, \quad (5)$$

и

$$(v_y - bv)|_{AB} = 0, \quad v|_{AC} = 0. \quad (6)$$

назовем краевыми условиями, сопряженными с (2) и (3) соответственно.

Обозначим через $W(B_j)$ множество функций u из класса

$$W = C(\bar{D}) \cap C^2(D) \cap W_2^1(D) \cap W_2^1(\partial D), \quad (7)$$

где $W_2^1(D)$ – пространство Соболева [1], для которых $Lu \in L_2(D)$ и соблюдены краевые условия (2), (3), а через $W(B_j^*)$ – множества функций v из W , для которых $L^*v \in L_2(D)$ и соблюдены сопряженные краевые условия (5), (6).

Для любой функции $u \in W(B_j)$ и $v \in W(B_j^*)$ справедливо равенство

$$(v, Lu)_0 - (u, L^*v)_0 = \int_{\partial D} [(vu_y - uv_y)y_n + (uv_x - vu_x)kx_n + (ax_n + by_n)uv] dS,$$

где $(\cdot, \cdot)$ означает скалярное произведение в пространстве $L_2(D)$, x_n, y_n – направляющие косинусы внешней нормали $n = (x_n, y_n)$ к границе ∂D . Отсюда, принимая во внимание равенства

$$\begin{aligned} u_x &= u_n x_n, & u_y &= u_n y_n, & \forall (x, y) \in BC; \\ v_x &= v_n x_n, & v_y &= v_n y_n, & \forall (x, y) \in AC; \\ y_n^2 &- kx_n^2 & \forall (x, y) \in AC \cup BC, \end{aligned}$$

легко усмотреть, что

$$(v, Lu)_0 - (u, L^*v)_0 = \int_{BA} (vu_y - uv_y + buv) dS = 0. \quad (8)$$

В соответствии с (8) задачу (4)–(6): найти решение v уравнения (4), удовлетворяющее краевым условиям (5), (6), будем называть задачей, сопряженной задаче Дарбу (1)–(3). Например, задача (4)–(6) сопряжена задаче (1)–(3), удовлетворяющей уравнению (1).

Слабым решением задачи Дарбу (1)–(3) назовем любую функцию $u \in L_2(D)$, если

$$(u, L^*v)_0 = (v, f)_0, \quad \forall v \in W(B_j^*), \quad (9)$$

Регулярным решением задачи Дарбу будем называть любую функцию $u \in W(B_j)$.

Теорема. Пусть коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют одному из следующих условий:

1. $k(0) \neq 0$ или $a(x, 0) > 0$ при $0 \leq x \leq 1$;
2. $a/k, b^2/k \in C(\overline{D})$, $c(x, 0) < 0$ при $0 \leq x \leq 1$;
3. $a/k, b^2/k, c/k, a_x/k, c_x/k \in C(\overline{D})$;
4. $k/a, b^2/a \in C(\overline{D})$, $a > 0$, $c(x, 0) < 0$ при $y \neq 0, 0 \leq x \leq 1$;
5. $k/a, b^2/a, c/k, c_x/k \in C(\overline{D})$, $a > 0$, при $y \neq 0, a_x \geq 0$.

Тогда имеет место априорная оценка вида

$$\|u\|_{++} \leq C \|Lu\|_+, \quad \forall u \in W(B_j),$$

где $\|\cdot\|_{++}, \|\cdot\|_+$ – некоторые позитивные нормы, а C – независимая от u положительная постоянная.

Доказательство. Введем оператор

$$L_\mu v \equiv v_{yy} - kv_{xx} + a_\mu v_x + bv_y + c_\mu v,$$

где

$$\mu \equiv \text{const} < 0, \quad a_\mu = a - 2\mu k, \quad c_\mu = c + a\mu - k\mu^2.$$

Легко проверить, что если $u = v \exp(\mu x)$ и $u \in W(B_j)$, то $v \in W(B_j)$ и $Lu = \exp(\mu x)L_\mu v$. Для любой функции $d = d(x) \in C^1(\bar{D})$ и $v \in W(B_j)$ справедливо тождество

$$\begin{aligned} 2(dv_x, L_\mu v)_0 &= \int_D [d_x(kv_x^2 + v_y^2) + 2da_\mu v_x^2 + 2dbv_x v_y] dD - \\ &\quad - \int_D (dc_\mu)_x v^2 dD + \int_{\partial D} dc_\mu x_n v^2 dS = \\ &= \int_{\partial D} d[-(kv_x^2 + v_y^2)x_n + 2y_n v_x v_y] dS = \sum_{i=1}^4 I_i. \end{aligned} \quad (10)$$

Поскольку на характеристике AC корни характеристического уравнения $\lambda(\lambda + x_n + kx_n) = 0$, соответствующего квадратичной форме $-kx_n\xi^2 + 2y_n\xi\eta - x_n\eta^2$, неотрицательны, а на характеристике BC

$$v = 0, \quad v_x = v_n x_n, \quad v_y = v_n y_n, \quad y_n^2 - kx_n^2 = 0,$$

то нетрудно убедиться в том, что $I_4 \geq 0$ для всех $v \in W(B_j)$, если $d(x) \geq 0$ в области D .

Предположим, что $d = \exp(\alpha x)$, где $\alpha = \text{const} > 0$. Из (10) и простого неравенства

$$2bv_x v_y \geq -\varepsilon b^2 v_x^2 - \frac{1}{\varepsilon} v_y^2,$$

справедливого для любого $\varepsilon > 0$, имеем

$$\begin{aligned} \int_D d \left[(\alpha k + 2a_\mu - \varepsilon b^2) v_x^2 + \left(\alpha - \frac{1}{\varepsilon} \right) v_y^2 \right] dD + I_2 + I_3 &\leq \\ &\leq \varepsilon \|\sqrt{d\omega} v_x\|_0^2 + C \|\omega^{-1/2} L_\mu v\|_0^2, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\omega = \omega(x, y)$ – любая неотрицательная функция из класса $C(\bar{D})$, а $\|\cdot\|_0$ – норма в пространстве $L_2(D)$. Здесь и ниже C означает некоторую положительную постоянную, которая не зависит от v .

Для удобства введем позитивные нормы по формулам

$$\|v\|_{1, \varphi, \psi} = \left[\int_D (\varphi v_x^2 + v_y^2 + \psi v^2) dD \right]^{1/2}, \quad \|v\|_{1, \varphi, 1} = \|v\|_{1, \varphi},$$

$$\|v\|_{0,\varphi} = \left(\int_D \frac{v^2}{\varphi} dD \right)^{1/2}, \quad \|v\|_{i,1} \equiv \|v\|_i, \quad i = 0, 1.$$

Заметим, что $\|\cdot\|_1$ совпадает с нормой в пространстве Соболева $W_2^1(D)$. Перепишем неравенство (11) в виде

$$\int_D d \left[a_\mu^\alpha v_x^2 + \left(\alpha - \frac{1}{\varepsilon} \right) v_y^2 - c_\mu^\alpha v^2 \right] dD \leq C \|L_\mu v\|_{0,\omega} - I_3, \quad (12)$$

где

$$a_\mu^\alpha = 2a + (\alpha - 4\mu)k - \varepsilon(b^2 + \omega),$$

$$c_\mu^\alpha = \alpha c + c_x + (\alpha a + a_x)\mu - \alpha k \mu^2 = \alpha c_\mu + c_{\mu x}.$$

Пусть соблюдено условие 1 теоремы, например $a(x, 0) > 0$ при $0 \leq x \leq 1$. Положим

$$\mu < \min_{0 \leq x \leq 1} - \frac{c(x, 0)}{a(x, 0)}.$$

Тогда при достаточно малых значениях ε найдется такое число $\delta < 0$, что

$$c_\mu < 0, \quad a_\mu^\alpha > 0, \quad \forall (x, y) \in \overline{D} \cap (\delta \leq y \leq 0).$$

Поэтому существует такое, независящее от α , число μ_0 , что

$$c_{\mu_0} < 0, \quad a_{\mu_0}^\alpha > 0, \quad \forall \alpha > 0, \quad (x, y) \in \overline{D}, \quad (13)$$

и число α_0 , зависящее от μ_0 , что

$$c_{\mu_0}^{\alpha_0} < 0, \quad \forall (x, y) \in \overline{D}. \quad (14)$$

Принимая во внимание (13) и (14), из (12) при $\omega \equiv 1$ получаем энергетическое неравенство

$$\|v\|_1 \leq \|L_{\mu_0} v\|_0 \quad \forall v \in W(B_j). \quad (15)$$

Аналогично, но еще проще, доказывается оценка (15), когда $k(0) \neq 0$, т. е. уравнение (1) строго гиперболично.

Если имеет место условие 2, то при $\omega \equiv k$, очевидно, существует такое, не зависящее от α , число μ_0 , что

$$c_{\mu_0} < 0, \quad a_{\mu_0}^\alpha/k = \alpha - 4\mu_0 + (2a - \varepsilon b^2 - \varepsilon k)/k > 0 \quad \forall (x, y) \in \overline{D},$$

и такое число α_0 , что верно (14). Следовательно, в силу (12)

$$\|v\|_{1,k} \leq C \|L_{\mu_0} v\|_{0,k} \quad \forall v \in W(B_j). \quad (16)$$

Пусть теперь выполнено условие 3. Тогда при $\omega \equiv k$ найдется число μ_0 , независящее от α , что

$$c_{\mu_0}/k = -\mu^2 + (c + \alpha\mu)/k < 0, \quad a_{\mu_0}^\alpha/k > 0, \quad \forall (x, y) \in \overline{D},$$

и такое число α_0 , что

$$c_{\mu_0}^{\alpha_0}/k < 0, \quad \forall (x, y) \in \overline{D}.$$

Поэтому в соответствии с неравенством (12) имеем

$$\|v\|_{1,k} \leq C \|L_{\mu_0} v\|_{0,k}, \quad \forall v \in W(B_j). \quad (17)$$

Точно также убеждаемся в том, что $\forall v \in W(B_j)$,

$$\|v\|_{1,a} \leq C \|L_{\mu_0} v\|_{0,a} \quad (18)$$

и

$$\|v\|_{1,a,k} \leq C \|L_{\mu_0} v\|_{0,a} \quad (19)$$

при соблюдении условий 4 и 5 соответственно.

Из энергетических неравенств (14), (16)–(19) вытекает справедливость теоремы.

Из доказанной теоремы следует единственность регулярного решения задачи Дарбу и его устойчивость в том смысле, что малым изменениям правой части f по норме $\|\cdot\|_+$ отвечают малые изменения соответствующего решения u_f по норме $\|\cdot\|_{++}$, т. е. если $\|f_1 - f_2\| < \varepsilon$, то $\|u_{f_1} - u_{f_2}\| \leq \varepsilon C$.

Нетрудно показать, что основное неравенство (12) гарантирует единственность регулярного решения задачи Дарбу и при более общих предположениях относительно коэффициентов уравнения (1), например, если они таковы, что существуют числа $\varepsilon > 0$, $\alpha > 1/\varepsilon$ и $\mu < 0$, что $c_\mu \leq 0$, $c_\mu^\alpha \leq 0$, $0 < a_\mu^\alpha/k \in C(\overline{D})$. Однако следует отметить, что некоторые из условий теоремы являются существенными и их нарушения могут привести даже к неединственности решения задачи Дарбу.

Пример 1. Функция

$$u = \sin \left(x - 1 + \int_y^0 e^{\frac{1}{2t}} dt \right)$$

в области D является решением однородной задачи Дарбу (2) для уравнения

$$u_{yy} - e^{\frac{1}{y}} u_{xx} - \frac{1}{2y^2} e^{\frac{1}{2y}} u_x = 0.$$

Здесь нарушено лишь одно требование ($a > 0$ при $y \neq 0$) из условия 5.

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$u_{yy} - y^2 u_{xx} - u_x = 0 \quad (20)$$

в области D , которая ограничена характеристиками

$$AC: x - \frac{1}{2}y^2 = 0, \quad BC: x + \frac{1}{2}y^2 = 1$$

и отрезком $AB \equiv \bar{I}$; (I – единичный интервал $0 < x < 1$).

Общее решение уравнения (20) в классе функций $u \in C^1(D \cup \bar{I}) \cup C^2(D)$, обладающих тем свойством, что $u(x, 0)$ и $u_y(x, 0) \in C^1(\bar{I}) \cap C^2(I)$, дается формулой

$$u(x, y) = \tau \left(x + \frac{1}{2}y^2 \right) + \frac{y}{2} \int_0^1 \nu \left(x + \frac{1}{2}y^2 - y^2 t \right) t^{-1/2} dt, \quad (21)$$

где $\tau(x)$ и $\nu(x)$ – произвольные функции из $C^1(\bar{I}) \cap C^2(I)$.

Справедливо следующее утверждение: *однородная задача, соответствующая неоднородной задаче Дарбу*

$$u_y|_{AB} = \nu(x), \quad u|_{BC} = \psi(x) \in C^1 \left(\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \right) \cap C^2 \left(\frac{1}{2} < x < 1 \right) \quad (22)$$

для уравнения (20), имеет бесчисленное множество линейно независимых решений, а неоднородная разрешима тогда и только тогда, когда

$$\nu(x) = \psi_*(x) = \sqrt{1-x} \, \psi' \left(\frac{1+x}{2} \right). \quad (23)$$

Действительно, из (21), согласно (22), имеем

$$\psi(x) - \psi(1) = -\sqrt{\frac{1-x}{2}} \int_0^1 \nu(1 - 2(1-x)t) t^{-1/2} dt = \frac{1}{2} \int_1^{2x-1} \frac{\nu(z) dz}{\sqrt{1-z}}.$$

Стало быть,

$$\nu(2x-1) = \sqrt{2-2x} \psi'(x) \iff \nu(x) = \psi_*(x).$$

При соблюдении соотношения (23) решение неоднородной задачи определяется по формуле (21), где вместо ν стоит ψ_* .

Исследуемая однородная задача Дарбу для уравнения (20) в качестве нетривиальных решений имеет функции вида

$$u(x, y) = \tau \left(x + \frac{1}{2}y^2 \right) - \tau(1).$$

Положим $u|_{AC} = \varphi(2x)$. Тогда на основании (21) легко видеть, что

$$\int_0^x \frac{\nu(t)dt}{\sqrt{x-t}} = 2[\tau(x) - \varphi(x)]. \quad (24)$$

Отсюда по известной формуле обращения

$$F(x) = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\Phi(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \quad (25)$$

интегрального уравнения Абеля [2]

$$\int_0^x \frac{F(t)dt}{(x-t)^\alpha} = \Phi(x), \quad 0 < \alpha < 1, \quad (26)$$

получаем равенство

$$\nu(x) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\tau(t) - \varphi(t)}{\sqrt{x-t}} dt. \quad (27)$$

Из соотношений (23), (24) и (27) заключаем: для уравнения (20) в области D корректно поставлена задача Дарбу, когда u задается не на BC , а на AC , что говорит о неравноправности этих характеристик, или когда на AB задается не u_y , а u . Для уравнения (20) корректна в смысле единственности и существования решения следующая краевая задача:

$$u|_{BC} = \psi(x), \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{u_y - \psi_*(x)}{y} = \nu^*(x),$$

где $\psi(x) \in C^3(\frac{1}{2} \leq x \leq 1)$, $\nu^*(x) \in C(\bar{I}) \cap C^1(I)$, а $\psi_*(x)$ — функция, связанная с ψ равенством (23).

В самом деле, все решения уравнения (20), принимающие $\psi(x)$ на BC , согласно (21) и (23), имеют вид

$$u(x, y) = \tau\left(x + \frac{1}{2}y^2\right) + \frac{y}{2} \int_0^1 \psi_*\left(x + \frac{1}{2}y^2 - y^2t\right) t^{-1/2} dt, \\ \tau(1) = \psi(1).$$

Поэтому

$$u_y - \psi_*(x) = y\tau'\left(x + \frac{1}{2}y^2\right) + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\psi_*\left(x + \frac{1}{2}y^2 - y^2t\right) - \psi_*(x)}{\sqrt{t}} dt +$$

$$+ y^2 \int_0^1 \psi'_* \left(x + \frac{1}{2} y^2 - y^2 t \right) \left(\frac{1}{2} - t \right) t^{-\frac{1}{2}} dt,$$

значит,

$$\tau(x) = \int_1^x \nu^*(t) dt + \psi(1).$$

Любопытно отметить, что уравнение (20) приведено в [2] А. В. Бицадзе как пример уравнения, для которого задача Коши с начальными данными на линии параболического вырождения корректна по Адамару. Следовательно, *в отличие от строго гиперболических уравнений или от вырождающихся уравнений с нехарактеристическим, степенным вырождением порядка меньшего двух, из корректности задачи Коши не следует, вообще говоря, корректность соответствующих задач Дарбу, если порядок вырождения больше либо равен двум.*

Существование слабого решения сопряженной задачи Дарбу в функциональных пространствах, соответствующих доказанной в теореме априорной оценке, устанавливается по стандартной схеме [3–5]. Для удобства чтения приведем доказательство существования слабого решения из $L_2(D)$ сопряженной задачи Дарбу в случае, когда соблюдено условие 1 теоремы.

Из энергетического неравенства (15) вытекает априорная оценка

$$\|u\|_0 \leq C \|Lu\|_0 \quad \forall u \in W(B_j). \quad (28)$$

По определению функция $v \in L_2(D)$ является слабым решением задачи (4)–(6), если

$$(v, Lu)_0 = (u, f)_0 \quad \forall u \in W(B_j). \quad (29)$$

В силу оценки (28) выражение $(u, f)_0$ фактически зависит не от u , а от Lu и поэтому можно положить $(u, f)_0 = F(Lu)$, где F – однородный и аддитивный функционал над линейным множеством $LW(B_j)$, являющимся образом множества $W(B_j)$ при отображении $u \rightarrow Lu$. Далее, на основании неравенства Шварца и (28) имеем

$$|F(Lu)| = |(u, f)_0| \leq \|u\|_0 \|f\|_0 \leq C \|f\|_0 \|Lu\|_0,$$

т. е. при фиксированном f функционал $F(\varphi)$, $\varphi = Lu$, над $LW(B_j)$ является непрерывным. Продолжая $F(\varphi)$ по теореме Хана–Банаха [4] на все пространство $L_2(D)$ и пользуясь теоремой Рисса [4], найдем искомую функцию $v: F(\varphi) = (\varphi, v)_0$, $\forall \varphi \in L_2(D)$ и, в частности, для $\varphi = Lu$ $(Lu, v)_0 = F(Lu) = -(u, f)_0$.

Обобщенным решением задачи Дарбу (2) для уравнения

$$u_{yy} - u_{xx} = f \quad (30)$$

назовем функцию

$$u(x, y) = -\frac{1}{4} \int_{x+y}^{x-y} dt \int_{x-y}^1 f\left(\frac{t+\tau}{2}, \frac{t-\tau}{2}\right) d\tau, \quad (31)$$

а обобщенным решением этой же задачи для уравнения

$$u_{yy} - y^2 u_{xx} - u_x = f \quad (32)$$

функцию

$$u(x, y) = -\frac{1}{4} \int_{\xi}^{\eta} \frac{dt}{\sqrt{\eta-t}} \int_{\eta}^1 \frac{f\left(\frac{\tau+t}{2}, \sqrt{\tau-t}\right)}{\sqrt{\tau-t}} d\tau, \quad (33)$$

где

$$\xi = x - \frac{1}{2}y^2, \quad \eta = x + \frac{1}{2}y^2.$$

Из (31) на основании неравенств Шварца, Минковского и теоремы вложения W_p^l в L_q^* Соболева [1] легко убедиться в справедливости следующих оценок для обобщенного решения задачи (30), (2):

$$\|u\|_{C^{l+1}(\overline{D})} \leq C \|f\|_{C^l(\overline{D})}, \quad l = 0, 1, \dots, \quad (34)$$

$$\|u\|_{l+1} \leq C \|f\|_l, \quad l = 0, 1, \dots, \quad (35)$$

где $\|\cdot\|_l$ – норма в пространстве Соболева $W_2^l(D)$.

Очевидно, априорные оценки вида (34), (35) имеют место и для решения задачи (1), (2), если уравнение (1) есть строго гиперболическое с достаточно гладкими коэффициентами.

Возникает вопрос, можно ли получить неравенства вида (34), (35), если уравнение (1) не строго гиперболическое. Оказывается, что, вообще говоря, нельзя.

Пример 3. Из (33) при $f \equiv 1$ получаем

$$u(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2} \int_{\xi}^{\eta} \sqrt{\frac{1-t}{\eta-t}} dt,$$

стало быть,

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-\xi}{\eta-\xi}} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{\xi}^{\eta} \sqrt{\frac{1-t}{\eta-t}} dt = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-\xi}{\eta-\xi}} \left[1 - F\left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; \frac{\eta-\xi}{1-\xi}\right) \right] + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\eta-\xi}{1-\xi}} F\left(\frac{1}{2}, 2, \frac{5}{2}; \frac{\eta-\xi}{1-\xi}\right). \end{aligned}$$

Отсюда в силу известного свойства гиперболической функции $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$:

$$B(\alpha, \beta)F(\alpha, \beta, \alpha + \beta; z) = F(\alpha, \beta, 1; 1 - z) \log \frac{1}{1 - z} + o(1), \quad (36)$$

где $B(\alpha, \beta)$ – бета-функция, а $o(1)$ означает ограниченную величину, заключаем, что производная по x от решения $u(x, y)$ задачи Дарбу (32), (2) обращается на характеристике BC ($\eta = 1$) в бесконечность логарифмического порядка даже при $f \equiv 1$.

В заключение напомним, что единственность и существование решения задачи Дарбу (1)–(3) в случае, когда $k(y) = -y^m$, $m \equiv 1 \pmod{2}$, $a, b \in C^3(\overline{D})$, $c, f \in C^2(\overline{D})$ и, кроме того, при $m \geq 2$ функция a представима в виде

$$a = o(1)|y|^n, \quad n > \frac{m}{2} - 1$$

были установлены Геллерстедтом [6] методом функции Грина–Адамара.

Литература

1. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск: Изд. СО АН СССР, 1962.
2. Бицадзе А. В. Уравнения смешенного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1969.
3. Friedrichs K. O. Trans. Amer. Math. Soc. 1944. Vol. 55. Pp. 132–151,
4. Иосида К. Функциональный анализ. М.: Наука, 1965.
5. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наукова думка, 1965.
6. Gellerstedt S. Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik. 1937. Vol. 25 A, no. 29. Pp. 1–23.

Поступила в редакцию
4 мая 1970 г.

Институт математики
СО АН СССР

О задаче А. В. Бицадзе для уравнения смешанного типа в многомерных областях

Пусть Ω – конечная односвязная область евклидова пространства E_{m+1} независимых переменных $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и x_0 , ограниченная кусочно гладкой поверхностью S , расположенной в полупространстве $x_m \geq 0$, и двумя конусами

$$S_1: x_0 + x_0^0 = |x|, \quad S_2: x_0 - x_0^0 = -|x|, \quad x_0^0 > 0,$$

лежащими в полупространстве $x_m \leq 0$;

$$\Omega_1 = \Omega \cap \{(x, t) \mid x_m < 0\},$$

$$\Omega_2 = \Omega \cap \{(x, t) \mid x_m > 0\}, \quad S_0 = \overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2.$$

В области Ω рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv \text{sign } x_m u_{x_0 x_0} + \Delta_x u = f(x_0, x), \quad (1)$$

Δ_x – оператор Лапласа по пространственным переменным $x_1, x_2, \dots, x_m$.

Задача А. В. Бицадзе. В области Ω найти решение $u(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевому условию

$$u|_S = \varphi(x_0, x), \quad u|_{S_1} = \psi(x_0, x) \quad (2)$$

или

$$u|_S = \varphi(x_0, x), \quad u|_{S_2} = \psi^*(x_0, x). \quad (3)$$

Единственность регулярного и существование слабого решения из $L_2(\Omega)$ этой задачи при $\varphi \equiv \psi \equiv \psi^* \equiv 0$ и $m = 2$ доказаны в работах [1] и [2] для довольно широкого класса поверхностей S .

Примем следующие обозначения: $W_2^k(\Omega)$, как и принято, – пространство Соболева с $\|\cdot\|_k$ и со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_k$; $W_2^{-k}(\Omega)$ – негативное пространство Соболева, построенное по $L_2(\Omega)$ и $W_2^k(\Omega)$; $\langle \varphi, u \rangle$, где $u \in W_2^k(\Omega)$, – билинейная форма на пространстве W_2^{-k} , которая при $\varphi \in L_2(\Omega)$ совпадает со скалярным произведением (φ, u) в $L_2(\overline{\Omega})$; $W(B)$ и $W(B^*)$ – множества всех функций u из класса $W = C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega \setminus S_0) \cap W_2^1(\Omega) \cap W_2^1(\partial\Omega)$, для которых $Lu \in L_2(\Omega)$ и соблюдены условия

$$u|_S = 0, \quad u|_{S_1} = 0 \quad (4)$$

и

$$u|_S = 0, \quad u|_{S_2} = 0, \quad (5)$$

соответственно, $n = (n_0, n_1, n_2, \dots, n_m)$ – единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega$; $n^* = (-n_0, n_1, n_2, \dots, n_m)$ – кономаль, соответствующая оператору Лоренца

$$\square \equiv -\partial^2/\partial x_0^2 + \Delta_x,$$

и вообще, если $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m)$, то $\xi^* = (-\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m)$,

$$lu \equiv \alpha^0 u_{x_0} + \alpha^i u_{x_i} + \beta u$$

– дифференциальное выражение с коэффициентами

$$\beta \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\overline{\Omega}_1) \cap C^2(\overline{\Omega}_2),$$

$$\alpha^0, \alpha^i \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\overline{\Omega}_1) \cap C^1(\overline{\Omega}_2),$$

$$\alpha = (\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^m).$$

Здесь и всюду повторение индекса означает суммирование по нему от 1 до m ; δ_i^j – символ Кронекера, т. е. $\delta_i^j = 0$ при $i \neq j$, $\delta_i^i = 1$; A –

множества всех $m + 1$ компонентных вектор-функций (α, β) , которые в области Ω при $x_m \neq 0$ удовлетворяют системе дифференциальных соотношений

$$L\beta \geq 0, \alpha_{x_0}^0 + \alpha_{x_i}^i - 2\delta_j^k \alpha_{x_j}^j > 2\beta, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (6)$$

$$\operatorname{sign} x_m (\alpha_{x_i}^i - \alpha_{x_0}^0 - 2\beta) > 0, \quad (7)$$

$$\alpha_{x_0}^j + \operatorname{sign} x_m \alpha_{x_j}^0 = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (8)$$

$$\alpha_{x_j}^i + \alpha_{x_j}^j = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, m, \quad (9)$$

$$\alpha^m = 0 \quad \forall (x_0, x) \in S_0, \quad (10)$$

и краевым условиям

$$\beta = 0, \quad an\xi^*\xi + 2\alpha\xi n^*\xi \geq 0 \quad \forall (x_0, x) \in S_2, u\xi \in E_{m+1}. \quad (11)$$

Ниже будем предполагать, что поверхность S обладает тем свойством, что хотя бы для одного вектора $(\alpha, \beta) \in A$ почти всюду на S имеет место неравенство

$$an \geq 0. \quad (12)$$

Для удобства задачу (1)–(4) назовем просто задачей B , а задачу (1)–(5) – задачей B^* .

Поскольку

$$(u, Lv) = (v, Lu), \quad \forall u \in W(B), \quad v \in W(B^*),$$

то задачу B^* естественно назвать задачей сопряженной к задаче B .

Слабым решением задачи B назовем любую функцию $u \in L_2(\Omega)$, удовлетворяющую равенству

$$(u, Lv) = \langle f, v \rangle_0 \quad \forall v \in W(B^*). \quad (13)$$

Слабое решение сопряженной задачи B^* определяется аналогично.

В дальнейшем, если особо не оговорено, будем считать, что правая часть $f \in W_2^{-1}(\Omega)$.

Априорная оценка. Для любой функции $u \in W(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\|u\|_1 \leq C \|Lu\|_0. \quad (14)$$

Здесь и ниже C означает положительную постоянную, которая не зависит от u .

Доказательство. Справедливы следующие тождества:

$$2\alpha^0 u_{x_0} u_{x_0 x_0} = (\alpha^0 u_{x_0}^2)_{x_0} - \alpha_{x_0}^0 u_{x_0}^2,$$

$$2\alpha^0 u_{x_0} u_{x_j x_j} = 2(\alpha^0 u_{x_j} u_{x_0})_{x_j} - 2\alpha_{x_j}^0 u_{x_0} u_{x_j} - (\alpha^0 u_{x_j}^2)_{x_0} + \alpha_{x_0}^0 u_{x_j}^2,$$

$$2\alpha^i u_{x_i} u_{x_0 x_0} = 2(\alpha^i u_{x_i} u_{x_0})_{x_0} - 2\alpha_{x_0}^i u_{x_i} u_{x_0} - (\alpha^i u_{x_0}^2)_{x_i} + \alpha_{x_i}^i u_{x_0}^2,$$

$$2\alpha^i u_{x_i} u_{x_j x_j} = 2(\alpha^i u_{x_i} u_{x_j})_{x_j} - 2\alpha_{x_j}^i u_{x_i} u_{x_j} - (\alpha^i u_{x_j}^2)_{x_i} + \alpha_{x_i}^i u_{x_j}^2,$$

$$2\beta u u_{x_0 x_0} = 2(\beta u u_{x_0})_{x_0} - 2\beta u_{x_0}^2 - (\beta_{x_0} u^2)_{x_0} + \beta_{x_0 x_0} u^2,$$

$$2\beta u u_{x_j x_j} = 2(\beta u u_{x_j})_{x_j} - 2\beta u_{x_j}^2 - (\beta_{x_j} u^2)_{x_j} + \beta_{x_j x_j} u^2,$$

с учетом которых по формуле Грина получаем

$$\begin{aligned} 2(lu, \square u)_{L_2(\Omega_1)} &= \int_{\partial\Omega_1} 2\beta u u_{n^*} dS - \int_{\partial\Omega_1} u^2 \beta_{n^*} dS + \int_{\partial\Omega_1} u^2 \square \beta d\Omega + \\ &+ \int_{\partial\Omega_1} [(\alpha^i n_i - \alpha^0 n_0) u_{x_0}^2 + 2(\alpha^0 n_j - \alpha^i n_0) u_{x_0} u_{x_j} + \\ &+ 2(1 - \delta_i^j) \alpha^i n_j u_{x_i} u_{x_j} + (2\alpha^i n_j - \alpha^i n_i - \alpha^0 n_0) u_{x_j}^2] dS + \\ &+ \int_{\Omega_1} [(2\beta + \alpha_{x_0}^0 - \alpha_{x_i}^i) u_{x_0}^2 + 2(\alpha_{x_0}^j - \alpha_{x_i}^0) u_{x_0} u_{x_j} - \\ &- 2(1 - \delta_i^j) \alpha_{x_j}^i u_{x_j} u_{x_i} + (-2\beta + \alpha_{x_0}^0 + \alpha_{x_i}^i - 2\alpha_{x_j}^j) u_{x_j}^2] d\Omega = \sum_{k=1}^5 I_k^-, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} 2(lu, \Delta u)_{L_2(\Omega_2)} &= \int_{\partial\Omega_2} 2\beta u u_n dS - \int_{\partial\Omega_2} u^2 \beta_n dS + \int_{\partial\Omega_2} u^2 \Delta \beta d\Omega + \\ &+ \int_{\partial\Omega_2} [(\alpha^0 n_0 - \alpha^i n_i) u_{x_0}^2 + 2(\alpha^0 n_j + \alpha^j n_0) u_{x_0} u_{x_j} + \\ &+ 2(1 - \delta_i^j) \alpha^i n_j u_{x_i} u_{x_j} + (2\alpha^j n_j - \alpha^i n_i - \alpha^0 n_0) u_{x_j}^2] dS + \\ &+ \int_{\Omega_2} [(-2\beta - \alpha_{x_0}^0 - \alpha_{x_i}^i) u_{x_0}^2 - 2(\alpha_{x_0}^j + \alpha_{x_j}^0) u_{x_0} u_{x_j} - \\ &- 2(1 - \delta_i^j) \alpha_{x_j}^i u_{x_j} u_{x_i} + (-2\beta + \alpha_{x_0}^0 + \alpha_{x_i}^i - 2\alpha_{x_j}^j) u_{x_j}^2] d\Omega = \sum_{k=1}^5 I_k^+. \end{aligned} \quad (16)$$

Поскольку $\beta u = 0$ на $S_1 \cup S_2 \cup S$ и $\beta_{n^*} = 0$ на S_2 , то

$$I_1^-(\partial\Omega_1) = I_1^-(S_0), \quad I_2^-(\partial\Omega_1) = I_2^-(S_0), \quad (17)$$

$$I_1^+(\partial\Omega_2) = I_1^+(S_0), \quad I_2^+(\partial\Omega_2) = I_2^+(S_0), \quad (18)$$

стало быть,

$$I_k^- + I_k^+ = 0, \quad k = 1, 2. \quad (19)$$

Рассмотрим интегралы

$$I_4^+ = I_4^+(S_0) + I_4^+(S), \quad I_4^- = I_4^-(S_0) + I_4^-(S_1) + I_4^-(S_2). \quad (20)$$

Принимая во внимание, что на поверхности уровня $S \cup S_1$ функции u выполняется равенство $u_{x_k} = u_n n_k$ для всех $k = 0, 1, \dots, m$, нетрудно видеть, что

$$I_4^+(S) = \int_S (\alpha^0 n_0 + \alpha^i n_i) (n_0^2 + n_1^2 + \dots + n_m^2) u_n^2 dS = \int_S \alpha n u_n^2 dS,$$

$$I_4^-(S_1) = \int_{S_1} (\alpha^0 n_0 + \alpha^i n_i) (-n_0^2 + n_1^2 + \dots + n_m^2) u_n^2 dS = \int_{S_1} \alpha n^2 n^* u_n^2 dS.$$

Отсюда на основании условия (12) и хорошо известного факта, что ко-нормаль n^* лежит на характеристической поверхности S_1 , следует

$$I_4^+(S) \geq 0, \quad I_4^-(S_1) = 0. \quad (21)$$

Интеграл

$$I_4^-(S_2) \geq 0. \quad (22)$$

Действительно, в квадратичной форме, стоящей под знаком интеграла в $I_4^-(S_2)$ произведем замену $\xi_k = u_{x_k}$ и преобразуем ее к следующему виду:

$$\begin{aligned} & (2\alpha^j n_j - \alpha^i n_i - \alpha^0 n_0) \xi_j^2 + (\alpha^i n_i - \alpha^0 n_0) \xi_0^2 - 2n_0 \xi_0 \alpha^i \xi_i + 2\alpha^0 \xi_0 n_j \xi_j + \\ & + 2(1 - \sigma_i^j) \alpha^i \xi_i n_j \xi_j = 2\alpha^i \xi_i n_j \xi_j - 2\alpha^i \xi_i n_i \xi_i - 2\alpha^i \xi_i n_0 \xi_0 + 2n_0 \xi_0 \alpha^i \xi_1 + \\ & + 2\alpha^i n_j \xi_j^2 - \alpha n \xi_j^2 + \alpha n^* \xi_0^2 - 2n_0 \xi_0 \alpha^i \xi_i + 2\alpha^0 \xi_0 n_j \xi_j = 2\alpha^i \xi_i n^* \xi - \alpha n \xi_j^2 + \\ & + \alpha n^* \xi_0^2 + 2\alpha^0 \xi_0 n_j \xi_j = 2\alpha^i \xi_i n^* \xi + 2\alpha^0 \xi_0 n^* \xi - 2\alpha^0 \xi_0 n^* \xi - \alpha n \xi_j^2 + \alpha n^* \xi_0^2 + \\ & + 2\alpha^0 \xi_0 n_j \xi_j - 2\alpha^0 \xi_0 n_0 \xi_0 + 2\alpha^0 \xi_0 n_0 \xi_0 = 2\alpha \xi n^* \xi - \alpha n \xi_j^2 + \alpha n^* \xi_0^2 + \\ & + 2\alpha^0 n_0 \xi_0^2 2\alpha \xi n^* \xi + \alpha n (\xi_0^2 - \xi_j^2) = 2\alpha \xi n^* \xi + \alpha n \xi^* \xi. \end{aligned}$$

Отсюда в силу условия (11) вытекает (19).

Далее, пользуясь равенством (10) и тем, что на гиперплоскости $x_m = 0$ нормаль $n = (0, 0, \dots, 0, 1)$, убеждаемся, что

$$I_4^+(S_0) + I_4^-(S_0) = 0. \quad (23)$$

Сложив соответственно левые и правые части тождеств (15) и (16), принимая при этом во внимание, что вектор α удовлетворяет системе дифференциальных уравнений (8), (9), на основании (17)–(23) получим

$$\int_{\Omega} [\text{sign } x_m (\alpha_{x_i}^i - \alpha_{x_0}^0 - 2\beta) u_{x_0}^2 + (\alpha_{x_0}^0 + \alpha_{x_i}^i - 2\alpha_{x_j}^j) u_{x_j}^2 + u^2 L \beta] d\Omega \leq$$

$$\leq 2(lu, Lu)_0 \leq \varepsilon \|u\|_1^2 + C \|Lu\|_1^2,$$

где ε – сколь угодно малое положительное число.

Это вместе с неравенствами (6) доказывает справедливость априорной оценки (14).

Проводя аналогичные рассуждения для функции $v \in W(B^*)$, получим энергетическое неравенство

$$\|v\|_1 \leq C \|Lv\|_0. \quad (24)$$

Из априорных оценок (14), (24) вытекает единственность сильного решения задачи B и ей сопряженной B^* .

Доказательство существования слабого решения проводится по обычной схеме, которую мы воспроизводим для удобства чтения.

Согласно априорной оценке (24), справедливой для любой функции $v \in W(B^*)$, выражение $\langle f, v \rangle$ можно рассматривать как однородный и аддитивный функционал $F(Lv)$. На основании (24) и обобщенного неравенства Шварца

$$\langle f, v \rangle_0 \leq \|f\|_{-1} \|v\|_1$$

имеем

$$\|F(Lv)\| \leq C \|f\|_{-1} \|Lv\|_0,$$

т. е. при фиксированном $f \in W_2^{-1}(\Omega)$ функционал $F(\varphi)$, $\varphi = Lv$, является непрерывным над $LW(B^*)$. Продолжая $F(\varphi)$ по известной теореме Хана–Банаха на все пространство $L_2(\Omega)$ и пользуясь теоремой Рисса, найдем искомую функцию u : $F(\varphi) = (\varphi, u)_0 \quad \forall \varphi \in L_2(\Omega)$ и, в частности, для $\varphi \in Lv$, $(Lv, u)_0 = F(Lv) = \langle f, v \rangle_0$.

Очевидно, что условия (8) и (9) не являются необходимыми для справедливости априорной оценки (14), достаточно, например, потребовать положительную определенность квадратичных форм, стоящих под знаком интегралов, распространенных по областям Ω_1 и Ω_2 , т. е. интегралов I_5^+ и I_5^- .

Многомерный аналог задачи Дарбу. В области Ω_1 найти решение $u(x_0, x)$ волнового уравнения

$$\square u = f, \quad (25)$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$(B_1) \quad u|_{S_0} = 0, \quad u|_{S_1} = 0 \quad (26)$$

или

$$(B_2) \quad u_{x_m}|_{S_0} = 0, \quad u|_{S_1} = 0. \quad (27)$$

Условия

$$(B_1^*) \quad u|_{S_0} = 0, \quad u|_{S_2} = 0 \quad (28)$$

и

$$(B_2^*) \quad u_{x_m}|_{S_0} = 0, \quad u|_{S_2} = 0 \quad (29)$$

назовем краевыми условиями, сопряженными с (26) и (27) соответственно, а задачу (25), (26) и (25)–(27), $j = 1, 2$, – задачей B_j .

Обозначим через $W(B_j)$ множество функций u из класса

$$(B_j) \quad W_1 = C(\overline{\Omega}_1) \cap C^2(\Omega_1) \cap W_2^1(\partial\Omega_1) \cap W_2^1(\Omega_1),$$

для которых $\square u \in L_2(\Omega_1)$ и соблюдены краевые условия (26), (27), а через $W(B_j^*)$ – множество функций v из W , для которых соблюдены сопряженные краевые условия (28), (29).

Опираясь на тождество (15), нетрудно убедиться в справедливости следующих двух априорных оценок:

$$\|u\|_1 \leq C \|\square u\|_0 \quad \forall u \in W(B_j),$$

$$\|v\|_1 \leq C \|\square v\|_0 \quad \forall v \in W(B_j^*).$$

Как и выше, из этих оценок вытекают единственность сильного и существование слабого решений задач B_j и B_j^* . Отсюда вытекает также существование полусильного решения задачи B_j для любой правой части $f \in L_2(\Omega)$.

Очевидно, что из существования решения однородной задачи (26), (27) для уравнения (25) следует существование решения неоднородной задачи для однородного уравнения

$$\square u = 0. \quad (30)$$

Допустим, что существует регулярное решение $u \in W$ уравнения $Lu = 0$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_S = 0,$$

$$u|_{S_1} = \psi(s), \quad s \in S_1$$

для любой функции $\psi(s)$ из некоторого класса $C^l(S_0)$.

В силу единственности решения задач Дарбу функция u в области Ω_1 представима в виде

$$u(x_0, x) = T(x_0, x) + \Psi_1(x_0, x) \quad (31)$$

или

$$u(x_0, x) = N(x_0, x) + \Psi_2(x_0, x), \quad (32)$$

где T , N , Ψ_1 и Ψ_2 – регулярные в области Ω_1 решения уравнения (30), удовлетворяющие краевым условиям

$$T|_{S_0} = \tau(s) = u|_{S_0}, \quad s \in S_0, \quad T|_{S_1} = 0,$$

$$\begin{aligned} N_{x_m}|_{S_0} &= \nu(s) = u_{x_m}|_{S_0}, \quad s \in S_0, \quad N|_{S_1} = 0, \\ \Psi_1|_{S_0} &= 0, \quad \Psi_{2x_m}|_{S_0} = 0, \quad \Psi_j|_{S_1} = 0, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Сделаем дополнительное предположение относительно функции β , а именно потребуем, чтобы

$$\beta_{n^*}|_{S_0} \leq 0, \quad \beta|_{S_0} = 0.$$

Тогда из тождества (15) нетрудно видеть, что

$$\int_{S_0} T_{x_m} \alpha \nabla \tau dS \leq 0, \quad (33)$$

$$\int_{S_0} \nu(s) \alpha \nabla N(\nu) dS \leq 0, \quad (34)$$

где

$$N(\nu) \equiv N(x_0, x_1, \dots, x_{m-1}, 0).$$

Совершенно аналогично с учетом того, что на функциях u , обращающихся в нуль на S , нормы $\|u\|_{W_2^1(\Omega_2)}$ и $\|\nabla u\|_{L_2(\Omega_2)}$ эквивалентны, из (16) получаем, что

$$\int_{S_0} \nu(s) \alpha \nabla \tau ds \geq C \|u\|_{W_2^1(\Omega_2)}^2.$$

Отсюда, поскольку

$$\|\tau\|_{W_2^{1/2}(S_0)} \leq C \|u\|_{W_2^1(\Omega_2)},$$

имеем

$$\|\tau\|_{W_2^{1/2}(S_0)}^2 \leq C \int_{S_0} \nu(s) \alpha \nabla \tau dS,$$

следовательно, по обобщенному неравенству Шварца

$$\begin{aligned} \|\tau\|_{W_2^{1/2}(S_0)}^2 &\leq C \|\nu\|_{W_2^{1/2}(S_0)}^2 \|\alpha \nabla \tau\|_{W_2^{-1/2}(S_0)}^2 \leq \\ &\leq C \|\nu\|_{W_2^{1/2}(S_0)}^2 \|\alpha^i\|_{W_2^{-1/2}(S_0)}^2 \|\tau_{x_i}\|_{W_2^{-1/2}(S_0)}^2, \quad i = 1, 2, \dots, m-1, \end{aligned}$$

но

$$\|\tau_{x_i}\|_{W_2^{-1/2}(S_0)}^2 \leq C \|\tau\|_{W_2^{1/2}(S_0)}^2,$$

стало быть,

$$\|\tau\|_{W_2^{1/2}(S_0)} \leq C \|\nu\|_{W_2^{1/2}(S_0)} \quad (35)$$

Далее из (31) и (32) соответственно находим, что

$$\nu(s) = T'(\tau) + \Psi_{1x_m}(s), \quad s \in S_0, \quad (36)$$

где $T'(\tau) = T_{x_m}(s)$, $s \in S_0$ и

$$\tau(s) = N(\nu) + \Psi_2(s), \quad s \in S_0. \quad (37)$$

На эти два равенства можно смотреть как на основные «интегро-дифференциальные» соотношения, принесенные с гиперболической части Ω_1 смешанной области Ω . Таким образом, задача А. В. Бицадзе редуктируется, как и в плоском случае [3], [4], к задаче нахождения гармонической в области Ω_2 функции u , удовлетворяющей краевому условию (36) или (37) и обращающейся в нуль на поверхности S . Пользуясь оценками (33), (34), (35) и опираясь на разрешимость задачи для гармонических функций, по схеме, предложенной в работах [4], [5], можно исследовать существование решения этой задачи из пространства $W_2^1(\Omega_2)$.

Литература

1. Бицадзе А. В. ДАН СССР. 1962. Т. 143, № 5.
2. Нахушев А. М. ДАН СССР. 1970. Т. 192, № 3.
3. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959.
4. Пашковский В. И. Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, № 1.
5. Пашковский В. И. Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6, № 1.

Поступила в редакцию
4 мая 1970 г.

Институт математики
СО АН СССР

К априорным оценкам для задач Трикоми и Дарбу

1. Априорные оценки для задачи Трикоми. Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv k(y) u_{xx} + u_{yy} + a(x, y) u_x + b(x, y) u_y + c(x, y) u = f(x, y), \quad (1)$$

где $yk(y) > 0$ при $y \neq 0$.

Пусть Ω – конечная односвязная область плоскости независимых переменных x, y , ограниченная кусочно гладкой дугой Жордана σ с концами в точках $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, лежащей в верхней полуплоскости $y > 0$, и характеристиками AC и BC уравнения (1), выходящими из точки $C\left(\frac{1}{2}, y_C\right)$, $y_C < 0$; Ω_1 и Ω_2 – эллиптическая и гиперболическая части смешанной области Ω ; J – единичный интервал $0 < x < 1$ на прямой $y = 0$.

Относительно коэффициентов уравнения (1) предполагается, что

$$k(y) \in C^1(\overline{\Omega}_1) \cap C^1(\overline{\Omega}_2), \quad a, b \in C(\overline{\Omega}), \quad c \in C^1(\overline{\Omega}).$$

Задача Трикоми. Найти функцию $u(x, y)$ из класса $C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (1) в областях Ω_1, Ω_2 и краевому условию

$$u(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \sigma \cup AC. \quad (2)$$

Примем следующие обозначения:

L^* – оператор, сопряженный по Лагранжу с оператором L ,

$$L^*v \equiv k(y)v_{xx} + v_{yy} - (av)_x - (bv)_y + cv = f; \quad (3)$$

$W_2^l(\Omega)$ – пространство Соболева [1] со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_l$ и нормой $\|\cdot\|_l$, $l = 0, 1, \dots$; $W_2^0(\Omega) = L_2(\Omega)$;

$W_2^{-l}(\Omega)$ – негативное (по Лаксу) пространство, построенное по $L_2(\Omega)$ и $W_2^l(\Omega)$ (см. [2]);

$\langle \varphi, u \rangle_0$, где $u \in W_2^l(\Omega)$ – билинейная форма на пространстве $W_2^{-l}(\Omega)$, которая при $\varphi \in L_2(\Omega)$ совпадает со скалярным произведением $(\varphi, u)_0$;

$W(B)$ – множество функций u из класса

$$W = C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega \setminus J) \cap W_2^1(\Omega) \cap W_2^1(\partial\Omega),$$

для которых $Lu \in L_2(\Omega)$ и соблюдено условие (2);

$W(B^*)$ – множество функций v из W , для которых $L^*v \in L_2(\Omega)$ и выполнено сопряженное краевое условие

$$v(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \sigma \cup BC. \quad (4)$$

Для любых функций $u \in W(B)$ и $v \in W(B^*)$ справедливо равенство

$$(v, Lu)_0 = (u, L^*v)_0, \quad (5)$$

поэтому задачу T^* : найти функцию v из класса $C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (3) в областях Ω_1 и Ω_2 и краевому условию (4), будем называть задачей, сопряженной задаче T (Трикоми).

Слабым решением задачи T назовем любую функцию $u \in L_2(\Omega)$, удовлетворяющую равенству

$$(u, L^*v)_0 = \langle f, v \rangle_0 \quad \forall v \in W(B^*),$$

а слабым решением задачи T^* – функцию $v \in L_2(\Omega)$, для которой

$$(v, Lu)_0 = \langle f, u \rangle_0 \quad \forall u \in W(B).$$

Ниже, если особо не оговорено, будем считать, что $f \in W_2^{-1}(\Omega)$.

Теорема (априорная оценка). Пусть коэффициенты уравнения (1) и кривая σ таковы, что существует хотя бы один вектор (α, β, γ) с компонентами

$$\alpha \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\overline{\Omega}_1) \cap C^2(\overline{\Omega}_2) \quad \text{и} \quad \beta, \gamma \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega_1) \cap C^1(\overline{\Omega}_2),$$

удовлетворяющий системе дифференциальных неравенств

$$L^* \alpha + \alpha c \geq (\beta c)_x + (\gamma c)_y \quad \forall (x, y) \in \Omega, \quad (6)$$

$$k(\gamma_y - \beta_x - 2\alpha) + \gamma k' + 2\beta a > 0 \quad \forall (x, y) \in \bar{\Omega}, \quad (7)$$

$$\beta_x - \gamma_y + 2\gamma b > 2\alpha \quad \forall (x, y) \in \bar{\Omega}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & [k(\gamma_y - \beta_x - 2\alpha) + \gamma k' + 2\beta a] [\beta_x - \gamma_y - 2\alpha + 2\gamma b] > \\ & > (\beta_y + k\gamma_x - \beta b - \alpha\gamma)^2 \quad \forall (x, y) \in \bar{\Omega}, \end{aligned} \quad (9)$$

условиям «склеивания»

$$\lim_{y \rightarrow +0} [\alpha_y(x, y) - \alpha_y(x, -y)] \geq 0, \quad \lim_{y \rightarrow +0} [k(y) - k(-y)] \gamma(x, 0) \geq 0 \quad (10)$$

и краевым условиям

$$(\beta, \gamma) n = \beta x_n + \gamma y_n \geq 0 \quad \forall (x, y) \in \sigma, \quad (11)$$

$$\beta + \sqrt{-k} \gamma \leq 0, \quad \forall (x, y) \in BC, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} 4k \left(\alpha_y + \sqrt{-k} \alpha_x \right) & \leq \left(2\sqrt{-k} a + 2kb - k' \right) \alpha + \\ & + 2 \left(\beta \sqrt{-k} + \gamma k \right) c, \quad \forall (x, y) \in BC, \end{aligned} \quad (13)$$

где $n = (x_n, y_n)$ – единичная внешняя нормаль к границе. Тогда имеет место энергетическое неравенство

$$\|u\|_1 \leq C(\mu) \|Lu\|_0 \quad \forall u \in W(B). \quad (14)$$

Например, если $a \equiv b \equiv c \equiv 0$, $k'(y) > 0$ в $\bar{\Omega}_1$ и $\bar{\Omega}_2$, а кривая σ такова, что

$$(\beta_1 x + \beta_0) x_n + (\gamma_1 y + \gamma_0) y_n \geq 0, \quad \forall (x_1, y) \in \sigma,$$

где $\beta_0, \beta_1, \gamma_0, \gamma_1 \equiv \text{const} \geq 0$, $\beta_1 > \gamma_1$,

$$\gamma_0 > \max \left\{ \max \frac{k(\beta_1 - \gamma_1) - \gamma_1 y k'}{k'}, -\gamma_1 y c \right\},$$

то в качестве вектора (α, β, γ) можно взять $(0, \beta_1 x + \beta_0, \gamma_1 y + \gamma_0)$.

Доказательство теоремы 1. Из очевидных тождеств

$$2\alpha k u u_{xx} = 2(\alpha k u u_x)_x - 2\alpha k u_x^2 - (\alpha_x k u^2)_x + k \alpha_{xx} u^2,$$

$$2\alpha u u_{yy} = 2(\alpha u u_y)_y - 2\alpha u_y^2 - (\alpha_y u^2)_y + \alpha_{yy} u^2,$$

$$2\beta k u_x u_{xx} = (\beta k u_x^2)_x - k \beta_{xx} u_x^2,$$

$$2\beta u_x u_{yy} = 2(\beta u_x u_y)_y - 2\beta_y u_x u_y - (\beta u_y^2)_x + \beta_x u_y^2,$$

$$\begin{aligned}
2\gamma k u_y u_{xx} &= 2(\gamma k u_y u_x)_x - 2k\gamma_x u_x u_y - (\gamma k u_x^2)_y + (\gamma k)_y u_x^2, \\
2\gamma u_y u_{yy} &= (\gamma u_y^2)_y - \gamma_y u_y^2, \quad 2\beta b u_x u_y = 2\beta b u_x u_y, \\
2\alpha a u u_x &= (\alpha a u^2)_x - (\alpha a)_x u^2, \quad 2a\gamma u_x u_y = 2a\gamma u_x u_y, \\
2\alpha b u u_y &= (\alpha b u^2)_y - (\alpha b)_y u^2, \quad 2a\beta u_x^2 = 2a\beta u_x^2, \\
2\beta c u u_x &= (\beta c u^2)_x - (\beta c)_x u^2, \quad 2b\gamma u_y^2 = 2b\gamma u_y^2, \\
2\gamma c u u_y &= (\gamma c u^2)_y - (\gamma c)_y u^2, \quad 2c\alpha u^2 = 2c\alpha u^2,
\end{aligned}$$

после почленного сложения и применения формулы Грина легко убедиться, что

$$\begin{aligned}
2(lu, Lu)_0 &= \int_{\Omega} [L^* \alpha + \alpha c - (\beta c)_x - (\gamma c)_y] u^2 d\Omega + \\
&+ \int_{\Omega} [(-2\alpha k - \beta_x k + (\gamma k)_y + 2\beta a) u_x^2 + 2(-\beta_y - k\gamma_x + \beta b + a\gamma) u_x u_y + \\
&+ (-2\alpha + \beta_x - \gamma_y + 2\gamma b) u_y^2] d\Omega + 2 \int_{CB} \alpha u (k u_x x_n + u_y y_n) ds + \\
&+ \int_{CB} u^2 [-k\alpha_x x_n - \alpha_y y_n + \alpha (a x_n + b y_n) + C (\beta x_n + \gamma y_n)] ds + \\
&+ \int_J \lim_{y \rightarrow +0} u^2 [\alpha_y(x, y) - \alpha_y(x, -y)] dx + \int_J \lim_{y \rightarrow +0} \gamma u_x^2 [k(y) - k(-y)] dx + \\
&+ \int_{\sigma \cup AC \cup CB} [k(\beta x_n - \gamma y_n) u_x^2 + 2(\beta y_n + \gamma k x_n) u_x u_y + (\gamma y_n - \beta x_n) u_y^2] ds = \\
&= J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5 + J_6 + J_7,
\end{aligned}$$

где $lu = \alpha u + \beta u_x + \gamma u_y$, $d\Omega$ – элемент площади, а ds – элемент длины.

Поскольку на характеристике BC : $kx_n^2 + y_n^2 = 0$, $\sqrt{1 - kx_n} = 1$, $\sqrt{1 - ky_n} = -\sqrt{-k}$ и, стало быть, определитель

$$\begin{vmatrix} k(\beta x_n - \gamma y_n) & \beta y_n + \gamma k x_n \\ \beta y_n + \gamma k x_n & \gamma y_n - \beta x_n \end{vmatrix} = -(kx_n^2 + y_n^2)(k\gamma^2 + \beta^2) = 0,$$

то в соответствии с (12) квадратичная форма Q , стоящая под знаком интеграла в выражении J_7 , на этой характеристике неотрицательна.

На кривой $\sigma \cup AC$: $u_x = u_n x_n$, $u_y = u_n y_n$. Поэтому и в силу (11)

$$Q = u_n^2 (\beta x_n + \gamma y_n) (kx_n^2 + y_n^2) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in \sigma \cup AC.$$

Следовательно, $J_7 \geq 0$. Из неравенства (10) прямо следует, что $J_6 \geq 0$ и $J_5 \geq 0$. Далее, принимая во внимание, что на CB : $dx = \sqrt{-k}dy$, получаем

$$J_3 = 2 \int_{CB} \alpha u (ku_x dy - u_y dx) = - \int_{CB} \alpha \sqrt{-k} du^2 = \int_{CB} u^2 (\alpha \sqrt{-k}) ds,$$

где $d/ds = x_n \partial / \partial y - y_n \partial / \partial x$. Значит, сумма подынтегральных функций в интегралах J_3 и J_4 , умноженная на $\sqrt{1-k}$, на характеристике BC равна выражению

$$u^2 \left[-k\alpha_x + \alpha_y \sqrt{-k} + \alpha (a - b\sqrt{-k}) + c (\beta - \gamma \sqrt{-k}) + \sqrt{-k} (\alpha_y + \sqrt{-k}\alpha_x) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \alpha k' / \sqrt{-k} \right] = u^2 \left[-4k (\sqrt{-k}\alpha_x + \alpha_y) + (2\sqrt{-k}a + 2kb - k') \alpha + \right. \\ \left. + 2 (\beta \sqrt{-k} + k\gamma) c \right] / \sqrt{-4k},$$

которое, согласно (13), неотрицательно. А это говорит о том, что $J_3 + J_4 \geq 0$.

Так как в силу (6) $J_1 \geq 0$, то доказано следующее основное неравенство:

$$\int_{\Omega} \left[(-2\alpha k - \beta_x k + (\gamma k)_y + 2\beta a) u_x^2 + 2(-\beta_y - k\gamma_x + \beta b + a\gamma) u_x u_y + \right. \\ \left. + (-2\alpha + \beta_x - \gamma_y + 2\gamma b) u_y^2 \right] d\Omega \leq 2(lu, Lu)_0 \leq \varepsilon \|u\|_1 + C \|Lu\|_0, \quad (15)$$

где ε — сколь угодно малое положительное число.

На основании (7), (8) и (9) квадратичная форма, стоящая под знаком интеграла в (15), положительно определена и поэтому из (15) легко усмотреть, что

$$\delta \|\text{grad } u\|_0^2 \leq \varepsilon \|u\|_1^2 + C \|Lu\|_0^2, \quad \delta \equiv \text{const} > 0.$$

Отсюда, пользуясь хорошо известным неравенством

$$\|u\|_0 \leq \|\text{grad } u\|_0, \quad (16)$$

убеждаемся в справедливости оценки (14).

Из теоремы 1 вытекает единственность сильного решения задачи T и существование слабого решения сопряженной задачи T^* для любой правой части $f \in W_2^{-1}(\Omega)$.

В области Ω рассмотрим уравнение смешанно-составного типа

$$Su = L^* l u = f, \quad (17)$$

где l — введенный выше дифференциальный оператор первого порядка.

Пусть $W_s(B)$ – множество функций u из W , для которых

$$u|_{\sigma \cup AC} = 0, \quad lu|_{\sigma \cup BC} = 0. \quad (18)$$

Принимая во внимание очевидное в силу (5), (15) и (16) соотношение

$$(lu, Lu)_0 = (u, Su)_0 \geq C \|u\|_1^2 \quad \forall u \in W_s(B),$$

на основании обобщенного неравенства Шварца

$$(u, Su)_0 \leq \|u\|_1 \|Su\|_{-1}$$

получаем априорную оценку

$$\|u\|_1 \leq C \|Su\|_{-1} \quad \forall u \in W_s(B),$$

из которой следует единственность сильного решения краевой задачи (18) для уравнения (17) и существование слабого решения из $W_2^1(\Omega)$ сопряженной задачи для любой правой части $f \in W_2^{-1}(\Omega)$ [2, с. 107].

Среди работ, посвященных уравнениям смешанно-составного типа, отметим работу А. В. Бицадзе и М. С. Салахитдинова [3], которая является основополагающей в этом направлении.

В известных нам работах (см., например, [4–12]) устанавливались априорные оценки вида

$$\|u\|_{++} \leq C(\mu) \|Lu\|_+, \quad (19)$$

где $\|\cdot\|_{++}$ и $\|\cdot\|_+$ – некоторые позитивные нормы для уравнений смешанного типа, которые в области гиперболичности совпадают с уравнением

$$k(y) u_{xx} + u_{yy} + cu = f, \quad k'(0) > 0, \quad C \equiv \text{const} \leq 0.$$

Постоянная $C(\mu)$, входящая в эти оценки, зависела от меры μ эллиптической части Ω_1 смешанной области Ω таким образом, что

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} C(\mu) < \infty, \quad (20)$$

более того, при непрерывной деформации кривой σ до совпадения с отрезком $AB \equiv J$ прямой $y = 0$ она могла разве лишь уменьшаться.

Как нетрудно видеть из условий только что доказанной теоремы и особенно из найденных в работах [13] и [14] примеров, показывающих неединственность решения как первой $u|_{AC \cup AB} = 0$, так и второй $u|_{AC} = 0$, $u_y|_{AB} = 0$ задач Дарбу, абсолютная постоянная $C(\mu)$ в априорной оценке (14) существенно зависит от меры μ области эллиптичности Ω_1 и для нее неравенство (20) может не иметь места. В частности, как это замечено автором [13, 15], неединственность решения задач Дарбу вовсе может не влиять на коррективность задачи Трикоми.

Априорные оценки, для которых нарушено (20) и вообще оценки, учитывающие тип уравнения, естественно назвать смешанными априорными оценками.

Смешанные априорные оценки необходимы и при исследовании довольно широкого класса краевых задач со смещением [16] на гиперболической части границы для уравнений смешанного типа. Здесь продемонстрируем это на одной простой краевой задаче со смещением для уравнения Лаврентьева–Бицадзе

$$\operatorname{sign} y \cdot u_{xx} + u_{yy} = f(x, y), \quad (21)$$

т. е. для уравнения (1) в случае, когда $k(y) = \operatorname{sign} y$, $a \equiv b \equiv c \equiv 0$.

Ниже под регулярным в области Ω решением уравнения (21) будем понимать любую функцию $u(x, y)$ из класса $C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega \setminus J)$, удовлетворяющую этому уравнению в $\Omega \setminus J$ и такую, что $u_y(x, 0)$ на концах интервала J может обращаться в ∞ интегрируемого порядка.

Задача А. Найти регулярное в области Ω решение уравнения (21), удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{\sigma} = 0, \quad (22)$$

$$u\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right) + u\left(\frac{x+1}{2}, \frac{x-1}{2}\right) = 0, \quad \forall x \in \bar{J}. \quad (23)$$

Пусть $f \in C^{(m, 1/2)}(\Omega_2)$, где $m \geq 1$. Легко убедиться, что все регулярные в Ω решения уравнения (18), удовлетворяющие (23), в области Ω_2 представимы в виде

$$u(x, y) = \varphi(x+y) - \varphi(x-y) + \frac{1}{4} \int_0^{x+y} dt \int_1^{x-y} f\left(\frac{t+s}{2}, \frac{t-s}{2}\right) ds,$$

где $\varphi(x)$ – произвольная функция из класса $C(\bar{J}) \cap C^2(J)$. Отсюда при $y \rightarrow 0$ имеем

$$\tau(x) \equiv u(x, 0) = \frac{1}{4} \int_0^x dt \int_1^x f\left(\frac{t+s}{2}, \frac{t-s}{2}\right) ds. \quad (24)$$

Из (24) на основании неравенств Шварца, Минковского и теоремы вложения W_p^l в L_{q^*} Соболева [1] нетрудно усмотреть, что

$$\|\tau\|_{W_2^{l+1}(J)} \leq C \|f\|_{W_2^l(\Omega_2)}. \quad (25)$$

Хорошо известно (см., например, [2, с. 224]), что если граница области Ω_1 принадлежит классу C^{m+2} , то для функции u , удовлетворяющей уравнению

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y) \quad \forall (x, y) \in \Omega_1,$$

и краевым условиям (22), (24), справедливо энергетическое неравенство

$$\|u\|_{W_2^{m+2}(\Omega_1)} \leq C \|f\|_{W_2^m(\Omega_1)} + C \|\tau\|_{W_2^{m+3/2}(J)}. \quad (26)$$

Таким образом, если мера $\mu \Omega_1$ отлична от нуля, то из (26) в силу (25) получаем смешанную априорную оценку

$$\|u\|_{W_2^{m+2}(\Omega_1)} \leq C(\mu) \left[\|Lu\|_{W_2^m(\Omega_1)} + \|Lu\|_{W_2^{m+1/2}(\Omega_2)} \right].$$

Поскольку задача (22), (23) при $\sigma \equiv \bar{J}$ для уравнения $u_{xx} = u_{yy}$ имеет бесконечное множество решений, то, очевидно, $\lim_{\mu \rightarrow 0} c(\mu) = \infty$.

Следует отметить, что задача A , являясь простейшей смешанной краевой задачей, интересна еще тем, что в отличие от известных краевых задач (Трикоми, Франкля, Бицадзе) для уравнений смешанного типа, исключая задачу Дирихле, которая, вообще говоря, некорректна [17], представляет собой пример корректной самосопряженной смешанной краевой задачи.

2. К априорным оценкам для первой задачи Дарбу. Рассмотрим уравнение

$$u_{yy} - |u|^m u_{xx} = f(x, y), \quad m \equiv \text{const} > 0 \quad (27)$$

в области Ω_2 , ограниченной характеристиками AC : $\xi = 1$, BC : $\eta = 1$, где

$$\xi = x - \frac{2}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}}, \quad \eta = x + \frac{2}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}}, \quad (28)$$

и отрезком $AB \equiv \bar{J}$ оси $y = 0$.

Задача Дарбу. В области Ω_2 найти решение $u(x, y)$ уравнения (27), удовлетворяющее краевому условию

$$u = 0, \quad \forall (x, y) \in AB \cup AC \quad (29)$$

и такое, что $v(x) \equiv u_y(x, 0) \in C^2(J)$, причем

$$\int_0^1 (x - x^2)^{-\beta} v(x) dx < \infty, \quad \beta = \frac{m}{2m+4}.$$

Соответствующая этой задаче функция Грина–Адамара G в характеристических координатах ξ, η имеет вид [18]

$$G(\xi, \eta; x, y) = \begin{cases} R(\xi, \eta; x, y), & \eta \geq x, \\ \bar{R}(\xi, \eta; x, y), & \eta \leq x, \end{cases} \quad (0 < x, y < 1),$$

где R – функция Римана

$$R = (\eta - \xi)^\beta (y - x)^{-\beta} F(\beta, 1 - \beta, 1; \sigma), \quad \eta > \xi,$$

$$\bar{R} = \gamma (y-x)^{1-2\beta} [(x-\xi)(y-\eta)]^{\beta-1} (\eta-\xi) F\left(1-\beta, 1-\beta, -2\beta; \frac{1}{\sigma}\right),$$

$$\sigma = \frac{x-\xi}{\eta-\xi} \cdot \frac{y-\eta}{y-x}, \quad \gamma = \frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(2-2\beta)}, \quad x > \xi, \quad y > \eta.$$

Введем функцию

$$R_0(\xi, \eta; x, y) = \frac{\gamma}{2\beta-2} (y-x)^{1-2\beta} \left(\frac{\eta-\xi}{x-\xi}\right)^{1-\beta} \left(\frac{\eta-\xi}{y-\xi}\right)^{1-\beta} \times \\ \times F_1\left(1-\beta, 1-\beta, 1-\beta, 3-2\beta; \frac{\eta-\xi}{x-\xi}, \frac{\eta-\xi}{y-\xi}\right),$$

где $F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y)$ — гипергеометрическая функция переменных x, y [19].

Имеет место тождество

$$\frac{\partial R_0}{\partial \eta} = -(\eta-\xi)^{-2\beta} \bar{R}. \quad (30)$$

Действительно,

$$\frac{\partial R_0}{\partial \eta} = \frac{\gamma (y-x)^{1-2\beta}}{(2-2\beta)} X^{1-\beta} Y^{1-\beta} \times \\ \times \left[(2-2\beta) F_1(1-\beta, 1-\beta, 1-\beta, 3-2\beta; X, Y) + X \frac{\partial F_1}{\partial X} + Y \frac{\partial F_1}{\partial Y} \right],$$

где

$$X = \frac{\eta-\xi}{x-\xi}, \quad Y = \frac{\eta-\xi}{y-\xi} \Rightarrow \sigma = \frac{1-Y}{X-Y}.$$

На основании легко проверяемых соотношений

$$\frac{x}{\beta} \frac{\partial F_1}{\partial x} = F_1(\alpha, \beta+1, \beta', \gamma; x, y) - F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y),$$

$$\frac{y}{\beta'} \frac{\partial F_1}{\partial y} = F_1(\alpha, \beta, \beta'+1, \gamma; x, y) - F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y),$$

$$(\gamma - \beta - \beta' - 1) F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y) + \beta F_1(\alpha, \beta+1, \beta', \gamma; x, y) + \\ + \beta' F_1(\alpha, \beta, \beta'+1, \gamma; x, y) = (\gamma - 1) F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma - 1; x, y)$$

выражение, стоящее в квадратной скобке, равно

$$(2-2\beta) F_1 + (1-\beta) F_1(1-\beta, 2-\beta, 1-\beta, 3-2\beta; X, Y) + \\ + (1-\beta) F_1(1-\beta, 1-\beta, 2-\beta, 3-2\beta; X, Y) - (2-2\beta) F_1 =$$

$$= (2 - 2\beta) F_1(1 - \beta, 1 - \beta, 1 - \beta, 2 - 2\beta; X, Y),$$

а последнее в свою очередь, согласно известной формуле [19],

$$(1 - y)^\alpha F_1(\alpha, \beta, \beta', \beta + \beta'; x, y) = F\left(\alpha, \beta, \beta + \beta'; \frac{x - y}{1 - y}\right)$$

равно

$$(2 - 2\beta)(y - \eta)^{\beta-1}(y - \xi)^{1-\beta} F(1 - \beta, 1 - \beta, 2 - 2\beta; 1/\sigma).$$

Тем самым (30) доказано.

С помощью (30) нетрудно убедиться, что единственное решение $u(x, y)$ задачи Дарбу из класса $C^2(\Omega_2)$ в любой точке (x, y) области Ω_2 представимо в виде

$$u(x, y) = \int_0^\xi d\xi_1 \int_{\xi_1}^\eta \frac{f^*(\xi_1, \eta_1)}{(\eta_1 - \xi_1)^{4\beta}} G(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta) d\eta_1, \quad (31)$$

где

$$f^*(\xi, \eta) = -\frac{1}{4} \left(\frac{4}{m+2} \right)^{4\beta} f \left(\frac{\xi + \eta}{2}, -\left(\frac{m+2}{4} \right)^{1-2\beta} (\eta - \xi)^{1-2\beta} \right),$$

а ξ и η – характеристические координаты (28).

Теорема 1. Пусть $m < 2$, тогда существует решение $u(x, y)$ первой задачи Дарбу в приведенной выше постановке и, более того, $u(x, y) \in C^1(\bar{\Omega}_2)$.

Так как непосредственное доказательство теоремы 2 через представления (31) связано с довольно громоздкими вычислениями, то предлагается более простой способ ее доказательства.

Из корректности задачи Коши для уравнения (27) с данными на участке AB границы области Ω_2 следует, что все решения этого уравнения, обращающиеся в нуль на AB и принадлежащие тому классу, где ищется решение рассматриваемой задачи Дарбу, имеет (см. [20]) вид

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \frac{\Gamma(2 - 2\beta)}{\Gamma^2(1 - \beta)} y \int_0^1 v \left[x + \frac{2}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}} (2t - 1) \right] [t(1 - t)]^{-\beta} dt + \\ & + \int_\xi^\eta d\xi_1 \int_{\xi_1}^\eta \frac{f^*(\xi_1, \eta_1)}{(\eta_1 - \xi_1)^{4\beta}} R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta) d\eta_1 = J_v + J_f. \end{aligned} \quad (32)$$

Из (32) при $\xi = 0$, $x = \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}$ в силу (29) получаем уравнение Абеля для нахождения $v(x)$

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \frac{\Gamma^2(1-\beta)}{\Gamma(2-2\beta)} \left(\frac{4}{m+2} \right)^{\frac{2}{m+2}} \int_0^x d\xi \int_{\xi}^x \frac{f^*(\xi, \eta)}{(\eta-\xi)^{4\beta}} R(\xi, \eta; 0, x) d\eta = \\ &= x^{\frac{2}{m+2}} \int_0^1 \frac{v(xt) dt}{t^{\beta}(1-t)^{\beta}} = \int_0^x \frac{v(\xi) d\xi}{\xi^{\beta}(x-\xi)^{\beta}}, \quad 0 < x < 1. \end{aligned}$$

Следовательно, по формуле обращения

$$v(x) = x^{\beta} \frac{\sin \pi \beta}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f_0(t) dt}{(x-t)^{1-\beta}}.$$

На основании известного тождества (см., например, [21])

$$(1-z)^{\beta} F(\alpha, \beta, \gamma; z) = F\left(\gamma-\alpha, \beta, \gamma; \frac{z}{z-1}\right), \quad |\arg(1-z)| < \pi$$

можно написать

$$R(\xi, \eta; x, y) = \left(\frac{\eta-\xi}{y-\xi} \right)^{\beta} \left(\frac{\eta-\xi}{y-x} \right)^{\beta} F\left(\beta, \beta, 1; \frac{x-\xi}{x-\eta} \cdot \frac{\eta-y}{\xi-y}\right). \quad (33)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \text{const} \int_0^x (x-\xi)^{-\beta} d\xi \int_{\xi}^x \frac{f^*(\xi, \eta)}{(\eta-\xi)^{2\beta}} \eta^{-\beta} F\left(\beta, \beta, 1; \frac{\xi}{\eta} \cdot \frac{x-\eta}{x-\xi}\right) d\eta = \\ &= \text{const} x^{2-4\beta} \int_0^1 (1-t)^{-\beta} dt \int_t^1 \frac{f^*(xt, x\tau)}{(\tau-t)^{2\beta}} \tau^{-\beta} F\left(\beta, \beta, 1; \frac{t}{\tau} \cdot \frac{1-\tau}{1-t}\right) d\tau, \end{aligned}$$

откуда в соответствии с равенством

$$\frac{d^i}{dx^i} f^*(xt, x\tau) = o(1) x^{1-2\beta-i}, \quad i = 1, 2,$$

находим

$$\frac{d^i}{dx^i} f_0(x) = o(1) x^{2-4\beta-i}, \quad i = 0, 1, 2.$$

Теперь легко видеть, что

$$v(x) = x^{\beta} \frac{\sin \pi \beta}{\pi} \int_0^x \frac{f'_0(t) dt}{(x-t)^{1-\beta}} = x^{2\beta} \frac{\sin \pi \beta}{\pi} \int_0^1 \frac{f'_0(xt) dt}{(1-t)^{1-\beta}}.$$

Стало быть, $v(x) \in C(\bar{J})$, причем

$$\frac{d^i}{dx^i} v(x) = o(1) x^{1-2\beta-i}, \quad i = 0, 1. \quad (34)$$

Простой заменой переменной интегрирования можно доказать справедливость следующих формул:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_\nu}{\partial x} &= o(1) \int_{\xi}^{\eta} v'(t) (t - \xi)^{-\beta} (\eta - t)^{-\beta} dt, \\ \frac{\partial J_\nu}{\partial y} &= o(1) \int_0^1 v \left[x + \frac{2}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}} (2t-1) \right] [t(1-t)]^{-\beta} dt + \\ &+ o(1) (-y)^{\frac{m+2}{2}} \int_0^1 v' \left[x + \frac{2}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}} (2t-1) \right] [t(1-t)]^{-\beta} dt. \end{aligned}$$

Так как, согласно (34),

$$\int_{\xi}^{\eta} v'(t) (t - \xi)^{-\beta} (\eta - t)^{-\beta} dt = o(1) (\eta - \xi)^{1-2\beta} \eta^{-2\beta} = o(1) (-y)^{\frac{2-m}{2}},$$

то из предыдущих равенств вытекает, что $J_v \in C^1(\bar{\Omega}_2)$.

Принимая во внимание (33), для второго слагаемого в правой части (32) будем иметь

$$J_f = \int_{\xi}^{\eta} \frac{d\xi}{(\eta - \xi_1)^{\beta}} \int_{\xi_1}^{\eta} \frac{f^*(\xi_1, \eta_1)}{(\eta_1 - \xi_1)^{2\beta}} (\eta_1 - \xi)^{-\beta} F\left(\beta, \beta, 1; \frac{\xi_1 - \xi}{\eta_1 - \xi}, \frac{\eta - \eta_1}{\eta - \xi_1}\right) d\eta_1.$$

Отсюда после замены переменных интегрирования

$$\xi_1 = \xi + (\eta - \xi)t, \quad \eta_1 = \xi + (\eta - \xi)\tau$$

получаем формулу

$$\begin{aligned} J_f &= o(1) y^2 \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)^{\beta}} \int_t^1 \frac{f^*[\xi + (\eta - \xi)t, \xi + (\eta - \xi)\tau]}{(\tau - t)^{2\beta} \tau^{\beta}} \times \\ &\times F\left(\beta, \beta, 1; \frac{t}{\tau}, \frac{1-\tau}{1-t}\right) d\tau, \end{aligned}$$

из которой просто следует, что $J_f \in C^1(\bar{\Omega}_2)$.

Таким образом, теорема 2 полностью доказана.

Любопытно сравнить последнее утверждение теоремы 2 с примером 3 работы [15], из которого следует невозможность, вообще говоря, получения априорных оценок вида

$$\|u\|_{l+1} \leq C \|Lu\|_l, \quad u|_{AB \cup BC} = 0,$$

когда оператор L не строго гиперболический.

В заключение приведем принадлежащий Т. Ш. Кальменову пример, показывающий, что условие $m < 2$ теоремы 2 является существенным.

Функция

$$u(x, y) = -\frac{c\Gamma(3-4\beta)}{2\Gamma(1-\beta)\Gamma(2-3\beta)} \left(\frac{m+2}{4}\right)^{1-2\beta} \times \\ \times y \int_0^1 \left[x + \frac{2}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}} (2t-1) \right]^{1-2\beta} [t(1-t)]^{-\beta} dt - \frac{c}{2} y^2,$$

будучи непрерывным в $\overline{\Omega}_2$ решением задачи Дарбу (29) для уравнения

$$u_{yy} - |y|^m u_{xx} = c \equiv \text{const},$$

не принадлежит $C^1(\overline{\Omega}_2)$, если $m > 2$.

Литература

1. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск: Изд СО АН СССР, 1962.
2. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наукова думка, 1965.
3. Бицадзе А. В., Салахитдинов М. С. СМЖ. 1961. Т. 2, № 1. С. 7–19.
4. Morawetz C. S. Comm. Pure Appl. Math. 1958. Vol. 11, no. 3. Pp. 315–331.
5. Fridrichs K. O. Comm. Pure Appl. Math. 1958. Vol. 11, no. 3. Pp. 333–418.
6. Франкль Ф. И. Изв. вузов. Математика. 1959. Вып. 6. С. 192–201.
7. Березанский Ю. М. ДАН СССР. 1960. Т. 132, № 1. С. 9–12.
8. Березанский Ю. М. УМЖ. 1963. Т. 15, № 4. С. 347–264.
9. Михайлов В. П. ДАН СССР. 1967. Т. 175, № 5. С. 1012–1014.
10. Morawetz C. S. Comm. Pure Appl. Math. 1970. Vol. 23, no. 4. Pp. 587–603.
11. Каратопраклиев Г. Д. Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5, № 1. С. 199–205.
12. Коврижкин В. В. Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, № 1. С. 182–184.
13. Нахушев А. М. ДАН СССР. 1970. Т. 195, № 4. С. 776–778.
14. Кальменов Т. Ш. Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, № 1. С. 178–181.
15. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5, № 1. С. 44–59.
16. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, № 1. С. 42–56.
17. Бицадзе А. В. ДАН СССР. 1958. Т. 122, № 2. С. 167–170.
18. Gellerstedt S. Arkiv Mat. Astr. och Fysik. 1937. Vol. 25 A, no. 29. Pp. 1–23.
19. Appel P., Kampe I. De feriet funktioner hypergeometriske og hyperspheriske. Polynomes d'Hermite. Gautier-Villars. Paris, 1926.

20. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М.: Изв. АН СССР, 1959.

21. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М.-Л.: ГИФМЛ, 1963. 358 с.

Поступила в редакцию
25 апреля 1971 г.

Институт математики
СО АН СССР

К теории вырождающихся гиперболических уравнений в многомерных областях

В евклидовом пространстве E_{n+1} точек $(x, x_0) = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_0)$ рассмотрим уравнение

$$x_0^{2m} \Delta_x u - x_0 u_{x_0 x_0} + (m - 1/2) u_{x_0} = 0, \quad (1)$$

где m — неотрицательное целое число, Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1, x_2, \dots, x_n$, а $u(x, x_0)$ — искомое решение.

Уравнение (1) при $n = 1$ относится к классу уравнений, подробно исследованных в работе [1].

Обозначим через H конечную односвязную область пространства E_{n+1} , ограниченную плоскостью $x_0 = 0$ и характеристическим коноидом $K: |x| = r - \beta x_0^{1/\beta}$, $x_0 \geq 0$, где $|x|$ — длина вектора x , $r = \text{const} > 0$, $(2m + 1)\beta = 2$.

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ — фиксированный отличный от нуля вектор из шара $|x| < r$ евклидова пространства E_n , H_α^r — подобласть области H , ограниченная коноидами K и $\tilde{K}: |x - \alpha| = \beta x_0^{1/\beta}$, K^r и K_α части K и $\tilde{K}$, составляющих границу области H_α^r , $A = \|a_{jk}\|$ — квадратная $(n \times n)$ -матрица, транспонированная по отношению к ортогональной матрице $A' = \|a_{kj}\|$, $a_{ij} = \alpha_j / |\alpha|$, $j = 1, 2, \dots, n$, $\det A' = 1$, A_i — матрица, полученная из матрицы A заменой элементов i -го ее столбца нулями.

Введем операторы

$$S_t^\alpha u \equiv \gamma(n) \int_{|\xi|=t} u \left[\frac{r \xi_i \alpha}{|\alpha| \sqrt{r^2 - |\alpha|^2}} + \frac{\alpha}{2} + A_i \xi, \left(\frac{r}{2\beta} - \frac{|\alpha| \xi_i}{\beta \sqrt{r^2 - |\alpha|^2}} \right)^\beta \right] d\omega_\xi,$$

$$S_t^0 u \equiv \gamma(n) \int_{|\xi|=t} u \left[\xi, \left(\frac{r}{2\beta} \right)^\beta \right] d\omega_\xi,$$

$$B_n^\alpha u \equiv \begin{cases} R \left(\frac{\partial}{\partial R^2} \right)^{(n-1)/2} \frac{1}{R} S_R^\alpha u, & n \equiv 1 \pmod{2}, \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\partial}{\partial R^2} \right)^{n/2} R \int_0^R \frac{S_t^\alpha u}{\sqrt{R^2 - t^2}} dt, & n \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases}$$

Здесь и ниже $d\omega_\xi$ – элемент сферы $|\xi| = t$ пространства E_n ,

$$\gamma(n) = \sqrt{\pi^{1-n}}, \quad 2R = \sqrt{r^2 - |\alpha|^2}, \quad \frac{\partial}{\partial R^2} = \frac{1}{2R} \frac{\partial}{\partial R}.$$

Очевидно, что эти операторы не зависят от индекса $i = 1, 2, \dots, n$.

Справедливо

Утверждение. Для любого регулярного в области H решения $u(x, x_0)$ уравнения (1), непрерывного в $\overline{H}$, имеет место равенство

$$u(\alpha, 0) + u\left[0, (r/\beta)^\beta\right] = B_n^\alpha u \quad \forall \alpha, |\alpha| < r. \quad (2)$$

Действительно, предположим сначала, что u_{x_j} , $j = 1, 2, \dots, n$, и $x_0^{1/2-m} u_{x_0}$ непрерывны в $\overline{H}$. Непосредственным вычислением нетрудно убедиться, что преобразование

$$z_0 = \frac{ry_0 + |\alpha|y_i}{2R} - \frac{r^2 + |\alpha|^2}{4R} \Leftrightarrow y_0 = \frac{rz_0 - |\alpha|z_i}{2R} + \frac{r}{2},$$

$$z_i = \frac{|\alpha|y_0 + ry_i}{2R} - \frac{r|\alpha|}{2R} \Leftrightarrow y_i = \frac{rz_i - |\alpha|z_0}{2R} + \frac{|\alpha|}{2},$$

$$z_k = y_k, \quad k = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n,$$

где

$$y_0 = \beta x_0^{1/\beta}, \quad y = A'x \Leftrightarrow x = Ay = \frac{\alpha}{|\alpha|} y_i + A_i y,$$

отображает область H_α^r на область Q пространства E_{n+1} независимых переменных $z_0, z_1, \dots, z_n$, ограниченную конусами $|z| = R - z_0$ и $|z| = R + z_0$, причем точкам $\left(0, (r/\beta)^\beta\right)$ и $(\alpha, 0)$ сопоставляются точки $(0, R)$ и $(0, -R)$, а поверхности

$$2\beta r x_0^{1/\beta} + 2\alpha x = r^2 + |\alpha|^2 \quad (3)$$

– плоскость $z_0 = 0$.

В переменных z_0, z функция

$$v(z, z_0) = u \left[\frac{\alpha}{|\alpha|} \frac{rz_i - |\alpha|z_0}{\sqrt{r^2 - |\alpha|^2}} + \frac{\alpha}{2} + A_i z, \left(\frac{rz_0 - |\alpha|z_i}{\beta \sqrt{r^2 - |\alpha|^2}} + \frac{r}{2\beta} \right)^\beta \right] \quad (4)$$

является решением уравнения

$$v_{z_0 z_0} - \Delta_z v = 0. \quad (5)$$

Из однозначной разрешимости задачи Коши для уравнения (5) с начальными данными $v(z, 0)$, $v_{z_0}(z, 0) = v_{z_0}(z, z_0)|_{z_0=0}$, $|z| \leq R$, следует, что функция $v(z, z_0)$ в области Q представима в виде [2]

$$v(z, \pm z_0) = \frac{\gamma(n)}{2} z_0 \left(\frac{\partial}{\partial z_0^2} \right)^{(n-1)/2} \frac{1}{z_0} \int_{|\xi|=z_0} v(z + \xi, 0) d\omega_\xi \pm \frac{\gamma(n)}{4} \left(\frac{\partial}{\partial z_0^2} \right)^{(n-3)/2} \frac{1}{z_0} \int_{|\xi|=z_0} v_{z_0}(z + \xi, 0) d\omega_\xi, \quad n \equiv 1 \pmod{2}, \quad (6)$$

$$v(z, \pm z_0) = \frac{\gamma(n)}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{\partial}{\partial z_0^2} \right)^{n/2} \int_0^{z_0} \frac{dt}{\sqrt{z_0^2 - t^2}} \int_{|\xi|=t} v(z + \xi, 0) d\omega_\xi \pm \frac{\gamma(n) z_0}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{\partial}{\partial z_0^2} \right)^{(n-2)/2} z_0^{n-3} \int_0^{z_0} \frac{t^{2-n} dt}{\sqrt{z_0^2 - t^2}} \int_{|\xi|=t} v_{z_0}(z + \xi, 0) d\omega_\xi, \quad (7)$$

$$n \equiv 0 \pmod{2},$$

Поскольку

$$u(\alpha, 0) + u\left[0, (r/\beta)^\beta\right] = v(0, -R) + v(0, R),$$

то из (6) и (7), в силу (4), при $z = 0$, $z_0 = R$ и $\alpha \neq 0$ получаем (2).

При $\alpha = 0$ формула (2) также вытекает из (6) и (7), где на этот раз

$$v(z, z_0) = u\left[z, \left(\frac{2z_0 + r}{2\beta}\right)^\beta\right], \quad z = x, \quad z_0 = y_0 - \frac{r}{2}.$$

Принимая теперь во внимание, что соотношения (6) и (7) имеют место для всех положительных $z_0 < R$, простым предельным переходом можно показать справедливость равенства (2) и для регулярных решений $u(x, x_0)$ из класса $C(\bar{H})$.

Обозначим через $H(\alpha, r)$ часть поверхности (3), принадлежащую H , а через $K(\alpha, r) = K_\alpha \cap K^r$.

В операторе B_n^α при $n \equiv 1 \pmod{2}$ участвуют значения функции $u(x, x_0)$ лишь на $K(\alpha, r)$. В случае же $n \equiv 0 \pmod{2}$ в выражении оператора B_n^α участвуют значения функции $u(x, x_0)$ на $H(\alpha, r)$. На этот раз пользуясь свойством функции Вольерра [3] $V(x, y_0; \xi, \xi_0)$ для волнового уравнения $\square u \equiv u_{y_0 y_0} - \Delta_x u$, легко вычислить, что

$$G_n^\alpha u \equiv B_n^\alpha u - u\left[0, (r/\beta)^\beta\right] =$$

$$= \lim_{y_0 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial y_0} \int_{K_\alpha^r} \left\{ u \left[\xi, (\xi_0/\beta)^\beta \right] \frac{\partial}{\partial N} V(\alpha, y_0; \xi, \xi_0) - \right. \\ \left. - V(\alpha, y_0; \xi, \xi_0) \frac{\partial}{\partial N} u \left[\xi, (\xi_0/\beta)^\beta \right] \right\} dK_\alpha^r, \quad (8)$$

где K_α^r – образ K^r при отображении $y_0 = \beta x_0^{1/\beta}$, $x = x$, N – конормаль, соответствующая оператору $\square$, dK_α^r – элемент поверхности K_α^r .

Из (8) видно, что в выражении оператора G_n^α участвуют значения $u(x, x_0)$ только на коноиде K^r . Заметим, что при $n = 2$

$$2\pi V(x, y_0; \xi, \xi_0) = \log \left[\left(\xi_0 - y_0 + \sqrt{|\xi_0 - y_0|^2 - |x - \xi|^2} \right) / |x - \xi| \right].$$

Свойство (2) всех решений уравнения (1) позволяет отыскивать ряд корректных задач для уравнения (1) в области H .

Здесь мы ограничимся постановкой одной простой краевой задачи в случае, когда $1 < n \equiv 1 \pmod{2}$.

Задача. Найти регулярное в области H решение $u(x, x_0)$ уравнения (1), непрерывное в $\bar{H}$ и удовлетворяющее условиям

$$\lim_{x_0 \rightarrow 0} x_0^{1/2-m} u_{x_0} = \nu(x) \quad \forall x, |x| < r, \quad (9)$$

$$B_n^x u = \psi(x) \quad \forall x, |x| < r, \quad (10)$$

где $\nu(x) \in C^{(n+1)/2}(|x| \leq r)$, $\psi(x) \in C^{(n+3)/2}(|x| \leq r)$.

Единственность и существование решения этой задачи легко получить из равенства (2) и однозначной разрешимости видоизмененной (по терминологии работы [4]) задачи Коши:

$$\lim_{x_0 \rightarrow 0} u(x, x_0) = \tau(x), \quad \lim_{x_0 \rightarrow 0} x_0^{1/2-m} u_{x_0} = \nu(x), \quad |x| < r,$$

для уравнения (1), если учесть, что на основании (9), (10) и принципа Гюйгенса

$$u(0, (r/\beta)^\beta) = \frac{\gamma(n)}{4} r \left(\frac{\partial}{\partial r^2} \right)^{(n-1)/2} \frac{1}{r} \int_{|\xi|=r} \psi(z + \xi, 0) d\omega_\xi + \\ + \frac{\gamma(n)}{8} \left(\frac{\partial}{\partial r^2} \right)^{(n-3)/2} \frac{1}{r} \int_{|\xi|=r} \nu(z + \xi, 0) d\omega_\xi.$$

Литература

1. Бицадзе А. В. Сб. тр., посвященных восьмидесятилетию Н. И. Мухелишвили. М., 1972.
2. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., 1964.
3. Гурса Э. Курс математического анализа. Т. 3. М.-Л., 1939.
4. Бицадзе А. В. Тр. III Всесоюз. математич. съезда. Т. 3. М.: Изд-во АН СССР, 1958.

Поступила в редакцию
2 марта 1972 г.

Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР

Институт математики СО АН СССР

О корректной постановке задач для уравнений смешанного типа в многомерных областях

В евклидовом пространстве E_{n+1} точек (x, x_0) , $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ рассмотрим конечную область D , ограниченную поверхностью Ляпунова σ , расположенной в полупространстве $x_0 < 0$, и коноидом K : $|x| = r - \beta x_0^{1/\beta}$, $x_0 \geq 0$, $r = \text{const} > 0$, $(2m+1)\beta = 2$, где m — неотрицательное целое число. Обозначим через D^+ и D^- части области D , лежащие соответственно в полупространствах $x_0 < 0$ и $x_0 > 0$, через S — общий участок границ областей D^+ и D^- , представляющий n -мерный шар $\{x_0 = 0, |x| \leq r\}$, а через S_0 — сферу $\{x_0 = 0, |x| = r\}$.

Уравнение

$$x_0^{2m} \Delta_x u - x_0 u_{x_0 x_0} + (m - 1/2) u_{x_0} = 0, \quad (1)$$

где Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1, x_2, \dots, x_n$, эллиптически в области D^+ , гиперболично в D^- с одновременным вырождением типа и порядка на S .

Уравнение (1) при $n = 1$ относится к классу уравнений, структурные свойства решений которых подробно исследованы в работе [1]. Ниже, если особо не оговорено, будем считать, что $1 < n \equiv 1 \pmod{2}$.

Задача 1. Найти функцию $u(x, x_0)$ со следующими свойствами:

- 1) $u(x, x_0)$ — регулярное в $D \setminus S$ решение уравнения (1) из класса $C(\overline{D}) \cap C^3(D^-)$;
- 2) $|x_0|^{1/2-m} u_{x_0}$ непрерывна в D и интегрируема по S_0 ;
- 3) $u(x, x_0)$ удовлетворяет условиям

$$u(x, x_0) = \varphi(x, x_0) \quad \forall (x, x_0) \in \sigma, \quad (2)$$

$$\left(B_n^x x_0^{1/2-m} \frac{\partial}{\partial x_0} + \mu B_n^x \right) u = \psi(x) \quad \forall (x, x_0) \in K, \quad (3)$$

$$\lim_{x_0 \rightarrow (r/\beta)^\beta} x_0^{1/2-m} u_{x_0}(0, x_0) = c_1, \quad (4)$$

где φ и ψ — заданные функции соответственно из классов $C^{(n+7)/2}(\sigma)$ и $C^{(n+7)/2}(|x| \leq r)$, $\mu \geq 0$ и c_1 — заданные постоянные, B_n^x — введенный в [2] оператор

$$B_n^x u \equiv \gamma(n) R \left(\frac{\partial}{\partial R^2} \right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{R} \times \\ \times \int_{|\xi|=R} u \left[\frac{r \xi_i x}{|x| \sqrt{r^2 - |x|^2}} + \frac{x}{2} + A_i \xi, \left(\frac{r}{2\beta} - \frac{\xi_i |x|}{\beta \sqrt{r^2 - |x|^2}} \right)^\beta \right] d\omega_\xi.$$

Здесь $d\omega_\xi$ — элемент сферы $|\xi| = R$ пространства E_n , $\gamma(n) = \sqrt{\pi^{1-n}}$, $2R = \sqrt{r^2 - |x|^2}$, $2R \partial / \partial R^2 = \partial / \partial R$, A_i — матрица, полученная из квадратной $n \times n$ -матрицы $A = \|a_{jk}\|$, транспонированной по отношению к ортогональной матрице $A' = \|a_{kj}\|$ с $\det A' = 0$ и $a_{ij} = x_j / |x|$, $j = 1, 2, \dots, n$, заменой элементов i -го ее столбца нулями.

В [2] нами была доказана справедливость равенства

$$u(x, 0) + u[0, (r/\beta)^\beta] = B_n^x u \quad \forall x, |x| < r. \quad (5)$$

Пользуясь свойством (5) решений уравнения (1) нетрудно показать, что функциональное соотношение между $\tau(x) \equiv u(x, 0)$ и $\nu(x) \equiv \lim_{x_0 \rightarrow +0} x_0^{1/2-m} u_{x_0}$, принесенное из D^- , в соответствии с (3) и (4) имеет вид

$$\nu(x) + \mu \tau(x) = \psi(x) - c_0 \mu - c_1, \quad (6)$$

где $c_0 = u[0, (r/\beta)^\beta]$.

Так как на S_0 , в силу (2) и (6),

$$\tau(x) = \varphi(x, 0), \quad \nu(x) = \psi(x) - \mu \varphi(x, 0) - c_0 \mu - c_1,$$

то на основании принципа Гюйгенса получаем

$$(1 + \mu r) c_0 = \frac{\gamma(n)}{2} r \left(\frac{\partial}{\partial r^2} \right)^{(n-1)/2} \frac{1}{r} \int_{|\xi|=r} \varphi(\xi, 0) d\omega_\xi + \\ + \frac{\gamma(n)}{4} \left(\frac{\partial}{\partial r^2} \right)^{(n-3)/2} \frac{1}{r} \int_{|\xi|=r} [\psi(\xi) - \mu \varphi(\xi, 0) - c_1] d\omega_\xi. \quad (7)$$

Из (6) и (7) вытекает справедливость следующего принципа экстремума: решение $u(x, x_0)$ задачи 1 при $\varphi(x, 0) \equiv 0$, $\psi(x) \equiv 0$, $c_1 = 0$ положительный максимум и отрицательный минимум в замкнутой области $\bar{D}^+$ принимает на поверхности $\bar{\sigma}$.

Действительно, в области D^+ функция $u(x, x_0)$ не может достигать экстремума. Если положительный максимум в $\overline{D}^+$ функции $u(x, x_0)$ достигается в точке $(\xi, 0) \in S$, то в этой точке $\nu(\xi) > 0$. Поскольку функция $u[x, (y_0/\beta)^\beta]$, как функция переменных x и y_0 , является гармонической в области D_1 , где D_1 – образ D^+ при отображении $x = x, y_0 = -\beta(-x_0)^{1/\beta}$, то последнее неравенство вытекает из принципа Заремба–Жиро. С другой стороны, из (6) и (7) заключаем, что $\nu(\xi) \leq 0$. Полученное противоречие исключает возможность достижения функцией $u(x, x_0)$ положительного максимума в точке $(\xi, 0)$. Аналогично доказывается, что функция $u(x, x_0)$ не может достигать отрицательного минимума в $\overline{D}^+$ в точках $(\xi, 0) \in S$.

Из доказанного принципа и однозначной разрешимости видоизменной задачи Коши [2]

$$\lim_{x_0 \rightarrow 0} u(x, x_0) = \tau(x), \quad \lim_{x_0 \rightarrow 0} x_0^{1/2-m} u_{x_0} = \nu(x), \quad |x| < r, \quad (8)$$

для уравнения (1) в области D^- следует, что в рассматриваемом случае задача 1 не может иметь более одного решения.

Переходя к доказательству существования решения задачи 1, для простоты будем предполагать, что σ совпадает с «нормальной» поверхностью $\sigma_0: |x|^2 + \beta^2(-x_0)^{2/\beta} = r^2, x_0 \leq 0$ и $\varphi(x, x_0) \equiv 0$.

Определенная формулой

$$G(x, x_0; \xi, \xi_0) = \gamma_1 [|x - \xi|^2 + |\zeta_0 - y_0|^2]^{(-n)/2} - \\ - \gamma_1 r^{n-1} [(|\xi|^2 + \zeta_0^2) (|x - \xi^*|^2 + |y_0 - \zeta_0^*|^2)]^{(1-n)/2},$$

где

$$\xi^* = r^2 \xi / (|\xi|^2 + \zeta_0^2), \quad \zeta_0^* = r^2 \zeta_0 / (|\xi|^2 + \zeta_0^2), \quad y_0 = -\beta(-x_0)^{1/\beta},$$

$$\zeta_0 = -\beta(-\xi_0)^{1/\beta}, \quad 2(n-1)\gamma(-n)\gamma_1 = \Gamma(n/2 + 1/2),$$

действительная функция $G(x, x_0; \xi, \xi_0)$ при $x \neq \xi, x_0 \neq \xi_0$ является решением уравнения (1) в D^+ , удовлетворяющим условиям: $G = 0$ при $(x, x_0) \in \sigma_0$, $G_{\zeta_0}(x, 0; \xi, \xi_0) = 0$ при $\xi_0 = 0$. Учитывая это обстоятельство и применяя в D^+ формулу Грина (так же как в [3, с. 87]), получим второе основное функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$:

$$\tau(x) + 2\gamma_1 \int_{|\xi| \leq r} \left(|x - \xi|^{1-n} - r^{n-1} |x| |\xi|^2 - \xi r^2 |^{1-n} \right) \nu(\xi) d\omega_\xi = 0. \quad (9)$$

Исключая $\tau(x)$ из (6) и (9), для $\nu(x)$ получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода, безусловная разрешимость которого вытекает из единственности решения задачи 1.

Задача 2. Найти функцию $u(x, x_0)$ со следующими свойствами:

- 1) $u(x, x_0)$ – регулярное в $D \setminus S$ решение уравнения (1), непрерывное в $\bar{D}$;
- 2) $|x_0|^{1/2-m} u_{x_0}$ непрерывна в D и интегрируема по S_0 ;
- 3) $u(x, x_0)$ на σ удовлетворяет условию (2), а на K краевому условию

$$\Delta_x B_n^x u + a^j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} B_n^x u + c(x) \left[B_n^x u - u \left(0, (r/\beta)^\beta \right) \right] = \psi(x), \quad (10)$$

где $a^j(x)$, $c(x)$ – заданные непрерывные функции, причем $c(x) \leq 0$ при $|x| \leq r$, и по повторяющемуся индексу j подразумевается суммирование от 1 до n .

Из равенства (5) и краевых условий (3) и (10) легко усмотреть, что задача 2 эквивалентна (в смысле ее однозначной разрешимости) задаче Дирихле

$$\tau(x) = \varphi(x, 0) \quad \forall x, \quad |x| = r,$$

для уравнения

$$\Delta_x \tau + a^j(x) \tau_{x_j} + c(x) \tau = \psi(x)$$

в шаре $|x| < r$ евклидова пространства E_n .

Условие $c(x) \leq 0$ гарантирует единственность решения задачи 2. При доказательстве существования решения приходится накладывать на σ и на функции, участвующие в краевых условиях, дополнительные ограничения. Так, например, в случае когда $\sigma = \sigma_0$, в силу хорошо известных свойств решения задачи Дирихле для равномерно эллиптических уравнений [4] и решения задачи (8) для уравнения (1) в области D^- для существования решения задачи 2 достаточно, чтобы

$$\varphi(x, x_0) \in C^{(0, \lambda)}(\sigma), \quad \varphi(x, 0) \in C^{((n+3)/2, \lambda)}(S_0),$$

$$a^j(x), c(x), \psi(x) \in C^{((n-1)/2, \lambda)}(S),$$

где $C^{(k, \lambda)}(E)$ – множество функций, имеющих производные до k -го порядка, удовлетворяющие условию Гельдера с показателем λ .

Непосредственным обобщением задач 1 и 2 являются краевые задачи для уравнения (1), когда на коноиде K задаются условия вида

$$\left(A^j B_n^x \frac{\partial}{\partial x_j} + A^0 B_n^x x_0^{1/2-m} \frac{\partial}{\partial x_0} + C B_n^x \right) u = \psi,$$

где A^j , A^0 и C – заданные (например, псевдодифференциальные) операторы.

В случае, когда n четно, роль оператора B_n^x при постановке краевых задач для уравнения (1) играет оператор C_n^x , определяемый формулой [2]:

$$G_n^x u \equiv \lim_{y_0 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial y_0} \int_{K_x^r} \left\{ u \left[\xi, (\xi_0/\beta)^\beta \right] \frac{\partial}{\partial N} V(x, y_0; \xi, \xi_0) - \right. \\ \left. - V(x, y_0; \xi, \xi_0) \frac{\partial}{\partial N} u \left[\xi, (\xi_0/\beta)^\beta \right] \right\} dK_x^r.$$

Здесь K_x^r — часть конуса $|\xi| = r - y_0$, лежащая внутри конической области $|\xi - x| \leq y_0$, $\partial/\partial N$ — конормаль, соответствующая волновому оператору $\partial^2/\partial \xi_0^2 - \Delta_\xi$, $V(x, y_0; \xi, \xi_0)$ — функция Вольтерры характеристической задачи Коши для уравнения $u_{y_0 y_0} = \Delta_x u$ с данными на конусе $|x| = r - y_0$, $y_0 \geq 0$, dK_x^r — элемент поверхности K_x^r .

В заключение отметим, что рассмотренные выше задачи в определенном смысле являются многомерными аналогами задач, исследованных в [1] и [5].

Литература

1. Бицадзе А. В. Сборник трудов, посвященных восьмидесятилетию Н. И. Мусхелишвили. М., 1972.
2. Бицадзе А. В., Нахушев А. М. ДАН. 1972. Т. 204, № 6.
3. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М., 1959.
4. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. М., 1957.
5. Нахушев А. М. Дифференциальные уравнения. 1968. Т. 4, № 1.

Поступила в редакцию
2 марта 1972 г.

Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР
Институт математики СО АН СССР

О правильной постановке краевых задач для параболических уравнений со знакопеременной характеристической формой

В ограниченной области Ω евклидова пространства E_n с кусочно гладкой границей $\Sigma = \partial\Omega$ рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv a^{ij}(x)u_{x_i x_j} + b^i(x)u_{x_i} + c(x)u = f(x), \quad (1)$$

где $a^{ij}(x) \in C^2(\bar{\Omega})$, $b^i(x) \in C'(\bar{\Omega})$, $c(x) \in C(\bar{\Omega})$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, и по повторяющимся индексам предполагается суммирование от 1 до n .

Уравнение (1) называется уравнением эллиптико-параболического типа или уравнением с неотрицательной характеристической формой, если

$$Q(x, \xi) = a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq 0, \quad \forall x \in \Omega, \quad \xi \in E_n.$$

Хорошо известно [1–3], как ставятся краевые задачи для уравнения (1) с неотрицательной характеристической формой. После работы [3] Г. Фикера первой краевой задачей для таких уравнений принято называть задачу

$$Lu = f(x), \quad \forall x \in \Omega, \quad u = g(x), \quad \forall x \in \Sigma_2 \cup \Sigma_3, \quad (2)$$

где Σ_2 и Σ_3 – части Σ , определяемые следующим образом. Пусть $N = (N_1, N_2, \dots, N_n)$ – вектор внутренней нормали к Σ , а Σ^0 – множество точек Σ , где $Q(x, N) = 0$. Тогда $\Sigma_3 = \Sigma \setminus \Sigma^0$, а Σ_2 совпадает с множеством точек Σ^0 , где функция

$$b(x) = (b^i - a_{x_j}^{ij})N_i < 0.$$

Единственность сильного и существование слабого решений из $L_p(\Omega)$, $p \geq 1$, задачи (1), (2) были установлены Г. Фикера [3] в случае, когда

$$c < 0, \quad c^* = a_{x_i x_j}^{ij} - b_{x_i}^i + c < 0, \quad \forall x \in \bar{\Omega}. \quad (3)$$

Возникает вопрос о числе линейно независимых регулярных решений однородной задачи, соответствующей задаче (1), (2), и о степени ее недоопределенности, если нарушено условие (3). Известны лишь примеры задачи (2), показывающие неединственность обобщенного решения в классе $L_p(\Omega)$ при $p < 3$ [4] и даже в классе ограниченных измеримых функций в области Ω , если граница множества Σ_2 на Σ имеет положительную $(n - 1)$ -мерную меру [5].

В дальнейшем речь будет идти о параболических уравнениях вида (1) со знакопеременной характеристической формой $Q(x, \xi)$, т. е. о таких уравнениях, которые параболически всюду в замыкании $\bar{\Omega}$ области Ω , за исключением компакта $S_0 = \{x/Q(x, \xi) = 0, \forall \xi \in E_n\}$.

В первую очередь приведем простой пример, показывающий, что первая краевая задача (2) для параболических уравнений с неотрицательной характеристической формой $Q(x, \xi)$ может оказаться недоопределенной, неправильно поставленной, если нарушено условие $c < 0$.

Уравнение

$$x_2^{m+1}u_{x_1 x_1} - x_2 u_{x_2} = 0, \quad (4)$$

где m – нечетное число в прямоугольнике Ω с вершинами в точках $A(0, \alpha)$, $\alpha < 0$, $B(1, \alpha)$, $C(1, \beta)$, $\beta > 0$, $D(0, \beta)$, является параболическим уравнением с неотрицательной характеристической формой $Q(x, \xi) = x_2^{m+1}\xi_1^2$. Очевидно,

$$\Sigma^0 = \overline{AB} \cup \overline{CD} \cup [\partial\Omega_1 \cap (x_2 = 0)], \quad b(x) = |x_2|, \quad \forall x \in \Sigma^0,$$

$$\Sigma_2 = \emptyset, \quad \Sigma_3 = \overline{AD} \cup \overline{BC} \setminus [\partial\Omega_1 \cap (x_2 = 0)].$$

Нетрудно видеть, что *однородная первая краевая задача*

$$u(0, x_2) = 0, \quad u(1, x_2) = 0, \quad \alpha \leq x_2 \leq \beta$$

для уравнения (4) в области Ω_1 имеет бесчисленное множество линейно независимых решений. В частности, такими решениями будут функции вида

$$u(x) = \exp\left(-\frac{\pi^2 k^2}{m+1} x_2^{m+1}\right) \sin \pi k x_1, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Очевидно, этот факт вовсе не означает, что нарушение предположения $c < 0$ всегда влечет недоопределенность первой краевой задачи. Например, краевая задача: найти регулярное и ограниченное в области $\Omega_2 = \{x | 0 < x_1, x_2 < 1\}$ решение $u(x) \equiv u(x_1, x_2)$ уравнения

$$x_1^4 u_{x_1 x_1} + 2x_1^3 u_{x_1} - u_{x_2} = 0,$$

принимаяющее заданные значения на $\gamma = \gamma_0 \cup \gamma_1$, где

$$\gamma_0 = \partial\Omega_2 \cap \{x | x_2 = 0\}, \quad \gamma_1 = \partial\Omega_2 \cap \{x | x_1 = 1\}$$

не имеет более одного решения.

Действительно, установим, что для любого решения $u(x)$ этой задачи справедливо равенство

$$M_1 \equiv \sup_{\overline{\Omega}_2} u = \sup_{\gamma} u \equiv M_2.$$

Допустим, что $M_1 > M_2$. Функция

$$v(x, t) = u\left(\frac{1}{x}, t\right) - (2t + x^2)\varepsilon,$$

где $x = 1/x_1$, $x_2 = t$, $\varepsilon \equiv \text{const} > 0$, в полуполосе $1 < x < +\infty$, $0 < t < 1$ удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$v_t = v_{xx}, \tag{5}$$

причем

$$\begin{aligned} v(x, 0) &= u(1/x, 0) - \varepsilon x^2 < M_2, \quad 1 < x < +\infty, \\ v(x, t) &\leq M_1 - \varepsilon x^2 \leq M_2, \quad \forall x \geq \sqrt{(M_1 - M_2)/\varepsilon} = h. \end{aligned}$$

Отсюда и из принципа экстремума для уравнения (5) уже в ограниченной области $1 < x < h$, $0 < t < 1$ заключаем, что $M_1 < M_2$, а это неверно.

Приведенные примеры показывают также, что при правильной постановке краевых задач (в смысле хотя бы их нетеровости или фредгольмовости) для уравнения (1) с неотрицательной или знакопеременной характеристической формой наряду с другими коэффициентами существенную роль должен играть и коэффициент $c(x)$.

Перейдем теперь к исследованию вопроса о корректной постановке краевых задач для параболических уравнений со знакопеременной характеристической формой, ограничиваясь при этом модельными уравнениями такого типа.

Пусть D_n – конечная область из E_n , $\Omega_n = D_n(\alpha < x_0 < \beta)$, где $\alpha < 0$, $\beta > 0$, – цилиндрическая область в евклидовом пространстве E_{n+1} точек (x, x_0) .

В области Ω_n рассмотрим уравнение

$$u_{x_0} = x_0^m Lu, \quad (6)$$

где

$$L \equiv a^{ij}(x, x_0) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + a^i(x, x_0) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x, x_0), \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

– равномерно эллиптический оператор с непрерывными в $\bar{\Omega}_n$ коэффициентами, а m – нечетное число.

Задача 1. Найти регулярное в области Ω_n решение $u(x, x_0)$ уравнения (6), непрерывное в $\bar{\Omega}_n$ по краевому условию

$$u(x, x_0) = \varphi(x, x_0), \quad \forall (x, x_0) \in S_n \quad (7)$$

и условию сопряжения

$$\lim_{x_0 \rightarrow +0} x_0^{-m} u_{x_0} = \lim_{x_0 \rightarrow -0} (-x_0)^{-m} u_{x_0}, \quad (8)$$

где $s_n = \partial D_n \times (\alpha \leq x_0 \leq \beta)$ – боковая поверхность цилиндра Ω_n .

Под регулярным решением в Ω_n здесь понимается решение, имеющее в Ω_n непрерывные производные по переменным x до второго порядка и непрерывную производную первого порядка по x_0 .

Уравнение (6) простой заменой $x = x$, $y_0 = x_0^m |x_0| / (m+1)$ сводится к уравнению

$$\text{sign } y_0 \cdot u_{y_0} = a^{ij}(x, \bar{y}_0) u_{x_i x_j} + a^i(x, \bar{y}_0) u_{x_i} + c(x, \bar{y}_0) u, \quad (9)$$

где $\bar{y}_0 = [(m+1) \text{sign } y_0 y_0]^{1/(m+1)}$.

Принимая это во внимание и пользуясь принципом экстремума для параболических уравнений, легко заметить, что если

$$c(x, x_0) \leq 0, \quad \forall (x, x_0) \in \Omega_n, \quad (10)$$

то положительный максимум и отрицательный минимум в $\bar{\Omega}_n$ решения $u(x, x_0)$ задачи 1 при $\varphi(x, 0) = 0$ достигается на S .

Стало быть, задача 1 не может иметь более одного решения.

В силу (7) и (8) функция $\tau(x) = u(x, 0)$ является решением задачи Дирихле

$$\tau(x) = \varphi(x, 0), \quad \forall x \in \partial D_n,$$

для уравнения

$$a^{ij}(x, 0)\tau_{x_i x_j} + a^i(x, 0)\tau_{x_i} + c(x, 0)\tau = 0.$$

Известно (см. [6]), что если $a^{ij}(x, 0) \in C^{(0,\lambda)}(D_n)$, $a^i(x, 0) \in C^{(0,\lambda)}(D_n)$, $\varphi(x, 0) \in C^{(2,\lambda)}(\partial D_n)$ и граница ∂D_n области D_n из класса $C^{(2,\lambda)}$, то в силу (10) существует решение $\tau(x)$ задачи Дирихле и оно принадлежит $C^{(2,\lambda)}(D_n)$.

Поскольку уравнение (6) редуцируется к уравнению (9), нетрудно установить теперь существование решения задачи 1 при обычных требованиях гладкости [6] на заданные функции.

Условие сопряжения (8) является существенным. Например, как это было замечено выше, однородная задача, соответствующая краевой задаче: найти регулярное в области

$$\Omega = \{(x, x_0) | 0 < x = x_1 < 1, \alpha < x_0 < \beta\}$$

решение $u(x, x_0)$ уравнения

$$u_{x_0} = x_0^m u_{xx},$$

непрерывное в $\bar{\Omega}$ и удовлетворяющее краевому условию

$$u(0, x_0) = \varphi_0(x_0), \quad u(1, x_0) = \varphi_1(x_0), \quad \alpha \leq x_0 \leq \beta,$$

имеет бесконечное множество линейно независимых решений. Любопытно отметить, что эта же задача для уравнения

$$u_{x_0} = \text{sign } x_0 \cdot u_{xx}$$

всегда разрешима и притом единственным образом.

Условие сопряжения вида (8) с необходимостью возникает и при правильной постановке краевых задач для уравнения (1) в случае, когда поверхность S_0 , на которой происходит смена знака формы $Q(x, \xi)$ является особой характеристикой. Например, для уравнения

$$x^{2m} u_{x_0} = x u_{xx} - (m - 1/2) u_x, \quad (11)$$

где m – неотрицательное целое число в прямоугольнике

$$\Omega = \{(x, x_0) | -1 < x < 1, 0 < x_0 < 1\},$$

краевая задача

$$u(x, 1) = \varphi_0(x), \quad -1 \leq x \leq 0, \quad u(-1, x_0) = \varphi_1(x_0), \quad 0 \leq x_0 \leq 1,$$

$$u(x, 0) = \psi_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad u(1, x_0) = \psi_1(x_0), \quad 0 \leq x_0 \leq 1,$$

не имеет более одного регулярного всюду в Ω , за исключением, быть может, точек прямой $x = 0$, решения из класса функций $u(x, x_0)$, непрерывных в $\bar{\Omega}$ и таких, что $|x|^{1/2-m}u_x \in C(\Omega)$.

Единственность решения $u(x, x_0)$ этой задачи вытекает из следующего принципа экстремума: положительный максимум и отрицательный минимум функции $u(x, x_0)$ в $\bar{\Omega}$ достигается на тех частях границы $\partial\Omega$, где она задана.

Существование решения можно установить методом интегральных уравнений, воспользовавшись тем, что уравнение (11) преобразованием

$$t = x_0, \quad \xi = \frac{|x|^{m+1/2}}{m+1/2} \operatorname{sign} x$$

сводится к уравнению

$$u_t = \operatorname{sign} \xi \cdot u_{\xi\xi}.$$

Уравнение (11) в определенном смысле представляет собой простой аналог уравнения, предложенного в [8].

Пусть D – ограниченная область из E_n с кусочно гладкой границей, $\Omega = D \times (0 < x_0 < \beta)$ – цилиндрическая область в пространстве E_{n+1} , содержащая внутри себя часть S_0 плоскости $x_n = 0$.

Предполагается, что S_0 разбивает Ω на две области, на Ω^+ и Ω^- , где $x_n > 0$ и $x_n < 0$ соответственно.

В области Ω рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv \operatorname{sign} x_n \cdot \Delta_x u - u_{x_0} = f(x, x_0), \quad (12)$$

где Δ_x – оператор Лапласа по переменным $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Задача 2. Найти регулярное в $\Omega \setminus S_0$ решение $u(x, x_0)$ уравнения (12) из класса $C(\bar{\Omega}) \cap C'(\Omega)$, удовлетворяющее краевому условию

$$u(x, x_0) = 0, \quad \forall (x, x_0) \in \partial\Omega \setminus (\Gamma_0^- \cup \Gamma_\beta^+), \quad (13)$$

где

$$\Gamma_0^- = \partial\Omega^- \cap (x_0 = 0), \quad \Gamma_\beta^+ = \partial\Omega^+ \cap (x_0 = \beta).$$

Примем следующие обозначения: L^* – оператор, сопряженный по Лагранжу с оператором L

$$L^*v \equiv \operatorname{sign} x_n \cdot \Delta_x v + v_{x_0} = f. \quad (14)$$

$W(B)$ – множество функций $u(x, x_0)$ из класса

$$W = C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega \setminus S_0) \cap W_2'(\partial\Omega),$$

где $W_2^1(\partial\Omega)$ – пространство Соболева, для которых $Lu \in L_2(\Omega)$ и соблюдено краевое условие (13); $W(B^*)$ – множество функций $v(x, x_0)$ из W , для которых $L^*v \in L_2(\Omega)$ и выполнено сопряженное краевое условие

$$v(x, x_0) = 0, \quad \forall (x, x_0) \in \partial\Omega \setminus (\Gamma_\beta^- \cup \Gamma_0^+), \quad (15)$$

где $\Gamma_0^+ = \partial\Omega^+ \cap (x_0 = 0)$, $\Gamma_\beta^- = \partial\Omega^- \cap (x_0 = \beta)$, $(\cdot, \cdot)_0$ и $(\cdot, \cdot)_0^\pm$ – скалярные произведения в пространствах $L_2(\Omega)$ и $L_2(\Omega^\pm)$ соответственно.

Для любых функций $u(x, x_0) \in W(B)$ и $v(x, x_0) \in W(B^*)$ справедливо равенство

$$(v, Lu)_0 = (u, L^*v)_0,$$

поэтому **задача 2***: найти функцию $v(x, x_0)$ из класса $C(\overline{\Omega}) \cap C'(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (14) в $\Omega \setminus S_0$ и краевому условию (15), является сопряженной с задачей 2.

Слабым решением задачи 2* назовем любую функцию $v(x, x_0) \in L_2(\Omega)$, для которой

$$(v, Lu)_0 = (f, u)_0 \quad \forall u \in W(B).$$

Априорная оценка. Для любой функции $u(x, x_0) \in W(B)$ имеет место энергетическое неравенство

$$\|u\|_+ = \left[\int_{\Omega} (u^2 + |\nabla_x u|^2) d\Omega \right]^{1/2} \leq C \|Lu\|_0,$$

где $\nabla_x = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \dots, \partial/\partial x_n)$, а C – независимая от $u(x, x_0)$ положительная постоянная.

Действительно, пусть $\omega = \omega(x)$ – произвольная функция из $C^2(\overline{D})$, обладающая тем свойством, что

$$\omega(x) < 0, \quad \Delta_x \omega > 0, \quad \forall x \in \overline{D}. \quad (16)$$

Из очевидного тождества

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{sign} x_n \omega u Lu &= \frac{\partial}{\partial x_i} (2\omega u u_{x_i} - \omega_{x_i} u^2) - \\ &- \operatorname{sign} x_n \frac{\partial}{\partial x_0} (\omega u^2) + u^2 \Delta_x \omega - 2\omega |\nabla_x u|^2, \quad \forall u \in W(B) \end{aligned}$$

по формуле Грина легко убедиться, что

$$(2\omega u, \operatorname{sign} x_n Lu)_0 = (2\omega u, Lu)_0^+ + (2\omega u, -Lu)_0^- =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Omega} (u^2 \Delta_x \omega - 2\omega |\nabla_x u|^2) d\Omega + \int_{\partial\Omega^+} (2\omega u u_{x_i} N^i - u^2 \omega_{x_i} N^i - \omega u^2 N^0) dS + \\
&\quad + \int_{\partial\Omega^-} (2\omega u u_{x_i} N^i - u^2 \omega_{x_i} N^i + \omega u^2 N^0) dS = \\
&= \int_{\Omega} (u^2 \Delta_x \omega - 2\omega |\nabla_x u|^2) d\Omega - \int_{\Gamma_0^+ \cup \Gamma_0^-} \omega u^2 dS, \quad (17)
\end{aligned}$$

где $N = (N^1, N^2, \dots, N^n, N^0)$ – единичная внешняя нормаль к границе, а dS – элемент границы.

Принимая во внимание (13) и (16), из (17) имеем

$$(2\omega u, \operatorname{sign} x_n \cdot Lu)_0 \geq C_1 \|u\|_+^2, \quad C_1 = \operatorname{const} > 0.$$

Стало быть,

$$\|u\|_+ \leq C \|Lu\|_0.$$

Из априорной оценки вытекает единственность сильного решения задачи 2 и существование слабого решения задачи 2*.

Пользуясь схемой Лакса и Филлипса [9], можно доказать совпадение слабого решения задачи 2* с сильным.

В заключение отметим, что вопросу правильной постановки краевых задач для параболических уравнений со знакопостоянной характеристической формой посвящены работы [10, 11].

Литература

1. Келдыш М. В. ДАН СССР. 1951. Т. 77, № 2.
2. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М., 1959.
3. Фикера Г. Сб. пер. Математика. 1963. Т. 7, № 6.
4. Олейник О. А., Радкевич Е. В. Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой. М.: ВИНТИ, 1971.
5. Phillips R. S., Sarason D. J. J. Math. and Mech. 1968. Vol. 17, no. 9.
6. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. М., 1957.
7. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М.: ИЛ, 1968.
8. Бицадзе А. В. Сб. трудов, посвященных восьмидесятилетию Н. И. Мухомелишвили. М.: Наука, 1972.
9. Lax P. D., Phillips R. S. Comm. Pure Appl. Math. 1960. Vol. 13.
10. Джурарев Т. Д. Тезисы I республиканской конференции математиков по дифференциальным уравнениям. Ашхабад. 1972. С. 14–18.
11. Нахушев А. М. Тезисы I республиканской конференции математиков по дифференциальным уравнениям. Ашхабад. 1972. С. 19–22.

Обратные задачи для вырождающихся уравнений и интегральные уравнения Вольтерра третьего рода

1. Обратные задачи для уравнения Эйлера–Дарбу–Пуассона.

В теории вырождающихся дифференциальных уравнений при отыскании решений краевых, начальных или смешанных задач, принадлежащих наперед заданным функциональным пространствам, естественным образом возникают (особенно в случае, когда часть границы области задания уравнения освобождена от граничных условий) следующие две взаимно обратные задачи. Пусть $L = \{L^s\}$ – семейство (в частности, однопараметрическое) линейных дифференциальных операторов L^s с одной и той же областью определения $D(L)$; $f = \{f_s\}$ – пространство достаточно гладких в некоторой заданной n -мерной области Ω функций $f_s(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$; B – принадлежащее $D(L)$ пространство функций $u(x)$, $x \in \Omega$, удовлетворяющих наперед заданным краевым условиям на границе $\partial\Omega$ или на ее части.

Задача 1. По заданному оператору $L^\beta \in L$ найти функции $u \in B$ и $f_s \in f$, удовлетворяющие уравнению $L^\beta u = f_s$.

Задача 2. По заданной правой части $f_\beta \in f$ найти функцию $u \in B$ и оператор $L^\beta \in L$, если известно, что $L^\beta u = f_\beta$.

Основная цель этого параграфа – продемонстрировать сказанное на примере уравнения Эйлера–Дарбу–Пуассона

$$E(\beta', \beta)u \equiv u_{xy} + \frac{\beta'}{y-x}u_x - \frac{\beta}{y-x}u_y = \frac{f_s(x, y)}{(y-x)^\mu}, \quad (1)$$

где $\mu = \text{const} < 2$, к которому сводятся многие вырождающиеся гиперболические уравнения, например, уравнение

$$y^{2m}u_{xx} + yu_{yy} + \alpha u_y = f(x, y), \quad m, \alpha = \text{const}, \quad (2)$$

предложенное и исследованное А. В. Бицадзе [1], [2], как модель уравнений смешанного типа, порядок которого вырождается вдоль линии изменения типа.

Задачи 1 и 2 являются обратными в смысле терминологии монографии [3].

Обратным задачам для строго гиперболических уравнений в несколько иной постановке посвящены работы [3–10].

Предварительно докажем ряд вспомогательных утверждений, характеризующих свойства всех решений уравнения (1).

Обозначим через Ω область $0 < x < y < 1$ евклидовой плоскости переменных x и y , через $D(\beta', \beta)$ – множество действительных функ-

ций $u = u(x, y)$ с непрерывной в Ω смешанной производной, принадлежащих классу $C(0 \leq x < y \leq 1) \cap C^1(\Omega)$ и таких, что

$$u_0(y) = u(0, y) \in C^1(0 < y \leq 1), \quad u_1(x) = u(x, 1) \in C^1(0 \leq x < 1).$$

Из свойств функции Римана [11], [12]

$$R(\xi, \eta; x, y) = (\eta - \xi)^{\beta+\beta'}(\eta - x)^{-\beta}(y - \xi)^{-\beta'}F(\beta, \beta', 1; \sigma_{\xi\eta}),$$

где $\sigma_{\xi\eta} = [(x - \xi)(\eta - y)]/[(\eta - x)(y - \xi)]$, оператора $E(\beta', \beta)$ следует, что для функций $u \in D(\beta', \beta)$ и $f_s(x, y) \in C(0 \leq x < y \leq 1)$ уравнение (1) эквивалентно соотношению

$$\begin{aligned} u &= (1-x)^{-\beta}y^{-\beta'}F(\beta, \beta', 1; \sigma_{01})u_1(0) - \\ &- y^{-\beta'} \int_y^1 [\eta u'_0(\eta) + \beta' u_0(\eta)] \eta^{\beta+\beta'-1} (\eta - x)^{-\beta} F(\beta, \beta', 1; \sigma_{0\eta}) d\eta + \\ &+ (1-x)^{-\beta} \int_0^x [(1-\xi)u'_1(\xi) - \beta u_1(\xi)] (1-\xi)^{\beta+\beta'-1} (y-\xi)^{-\beta'} F(\beta, \beta', 1; \sigma_{\xi 1}) d\xi - \\ &- \int_0^x (y-\xi)^{-\beta'} d\xi \int_y^1 (\eta - \xi)^{\beta+\beta'-\mu} (\eta - x)^{-\beta} F(\beta, \beta', 1; \sigma_{\xi\eta}) f_s(\xi, \eta) d\eta. \quad (3) \end{aligned}$$

Теорема 1. Пусть $\beta + \beta' < 1$, $\beta \leq 1$, $\beta' \leq 1$. Тогда любое решение $u(x, y)$ уравнения (1) из $D(\beta', \beta)$ непрерывно всюду в $\bar{\Omega}$ за исключением быть может точек $(0, 0)$ и $(1, 1)$ причем если $\beta < 1$ и $\beta' < 1$, то

$$\begin{aligned} &\frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\beta')}{\Gamma(1-\beta-\beta')} \lim_{(x,y) \rightarrow (x,x)} u(x, y) = (1-x)^{-\beta} x^{-\beta'} u_1(0) - \\ &- x^{-\beta'} \int_x^1 \Phi_{\beta'}(\eta) \eta^{\beta+\beta'-1} (\eta - x)^{-\beta} d\eta + (1-x)^{-\beta} \int_0^x \Psi_{\beta}(\xi) (1-\xi)^{\beta+\beta'-1} (x-\xi)^{-\beta'} d\xi - \\ &- \int_0^x (x-\xi)^{-\beta'} d\xi \int_x^1 (\eta - \xi)^{\beta+\beta'-\mu} (\eta - x)^{-\beta} f_s(\xi, \eta) d\eta, \quad 0 < x < 1, \quad (4) \end{aligned}$$

где

$$\Phi_{\beta'}(\eta) = \eta u'_0(\eta) + \beta' u_0(\eta), \quad \Psi_{\beta}(\xi) = (1-\xi)u'_1(\xi) - \beta u_1(\xi),$$

если же один из параметров β или β' равен 1, например $\beta' = 1$, то

$$\beta \lim_{(x,y) \rightarrow (x,x)} u(x, y) = \int_x^1 (\eta - x)^{1-\mu} f_s(x, \eta) d\eta - \Psi_{\beta}(x). \quad (5)$$

Равенство (4) вытекает из представления (3), если принять во внимание, что

$$\lim_{z \rightarrow 1-0} F(\beta, \beta', 1; z) = \frac{\Gamma(1 - \beta - \beta')}{\Gamma(1 - \beta)\Gamma(1 - \beta')}.$$

При $\beta' = 1$ из (3), с учетом равенства $F(\beta, 1, 1; z) = (1 - z)^{-\beta}$, после элементарных преобразований будем иметь

$$\begin{aligned} u(x, y) &= (y - x)^{-\beta} y^{\beta} u_0(y) + \\ &+ (y - x)^{-\beta} \int_0^x (y - \xi)^{\beta-1} \left[\Psi_{\beta}(\xi) - \int_y^1 (\eta - \xi)^{1-\mu} f_s(\xi, \eta) d\eta \right] d\xi = \\ &= (y - x)^{-\beta} y^{\beta} u_0(y) + \int_0^{x/y} (1 - t)^{-\beta-1} \left[\Psi_{\beta} \left(\frac{x - yt}{1 - t} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \int_y^1 \left(\eta - \frac{x - yt}{1 - t} \right)^{1-\mu} f_s \left(\frac{x - yt}{1 - t}, \eta \right) d\eta \right] dt. \end{aligned}$$

Отсюда предельным переходом получим (5). Из (5) следует, что если

$$\int_x^1 (\eta - x)^{1-\mu} f_s(x, \eta) d\eta = \Psi_{\beta}(x), \quad 0 < x < 1,$$

то любое решение $u \in D(1, \beta)$ уравнения

$$E(1, \beta)u = (y - x)^{-\mu} f_s(x, y)$$

обращается в нуль при $y \rightarrow x$.

Теорема 2. Пусть $\beta' = n + 1$, $\beta < -n$, $n = 0, 1, \dots$, $f_s(x, y) \equiv 0$, $\Psi_{\beta}(x) \equiv 0$. Тогда все решения $E(\beta', \beta)u = 0$ из класса $D(\beta', \beta)$ обращаются в нуль при $y \rightarrow x$.

Действительно, общее решение в указанном классе на основании (3) имеет вид

$$\begin{aligned} u(x, y) &= (1 - x)^{-\beta} y^{-n-1} F(\beta, n + 1, 1; \sigma_{01}) u_1(0) - \\ &- y^{-n-1} \int_y^1 \Phi_{n+1}(\eta) \eta^{\beta+n} (\eta - x)^{-\beta} F(\beta, n + 1, 1; \sigma_{0\eta}) d\eta. \end{aligned}$$

Хорошо известно, что

$$F(\beta, n+1, 1; z) = (1-z)^{-\beta-n} P_n^{(0, -\beta-n)}(1-2z),$$

где $P_n^{(\alpha, \beta)}(z) = (-1)^n P_n^{(\beta, \alpha)}(z)$ – многочлен Якоби [12]. Стало быть

$$u(x, y) = y^{\beta-1} (y-x)^{-\beta-n} \left[(1-x)^n u_1(0) P_n^{(0, -\beta-n)}(1-2\sigma_{01}) - \int_y^1 \Phi_{n+1}(\eta-x)^n P_n^{(0, -\beta-n)}(1-2\sigma_{0\eta}) d\eta \right].$$

Следовательно, функция $u(x, y)$ при $y \rightarrow x$, $0 < x < 1$, обращается в нуль порядка не ниже $-\beta - n$.

Изложенный в теореме 2 факт неединственности решения первой краевой задачи Дарбу впервые был замечен Т.Ш. Кальменовым [13] в случае, когда $\beta + \beta' = 1/2$.

Теорема 3. Пусть $\beta + \beta' > 1$, $\beta\beta' > 0$ и $u(x, y)$ – любое решение уравнения (1) из класса $D(\beta', \beta)$. Равенство

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x,x)} (y-x)^{\beta+\beta'-1} u(x, y) = 0$$

имеет место тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} & \int_0^x (x-\xi)^{\beta-1} d\xi \int_x^1 (\eta-\xi)^{1-\mu} (\eta-x)^{\beta'-1} f_s(\xi, \eta) d\eta - (1-x)^{\beta'-1} x^{\beta-1} u_1(0) = \\ & = (1-x)^{\beta'-1} \int_0^x \Psi_\beta(\xi) (x-\xi)^{\beta-1} d\xi - x^{\beta-1} \int_x^1 \Phi_{\beta'}(\eta) (\eta-x)^{\beta'-1} d\eta. \end{aligned} \quad (6)$$

Пользуясь тождеством

$$E(\beta', \beta)u = (y-x)^{1-\beta-\beta'} E(1-\beta, 1-\beta')(y-x)^{\beta+\beta'-1}u,$$

соотношение (3) можно представить в форме

$$\begin{aligned} (y-x)^{\beta+\beta'-1}u &= (1-x)^{\beta'-1} y^{\beta-1} F(1-\beta', 1-\beta, 1; \sigma_{01}) u_1(0) - \\ & - y^{\beta-1} \int_y^1 \Phi_{\beta'}(\eta) (\eta-x)^{\beta'-1} F(1-\beta', 1-\beta, 1; \sigma_{0\eta}) d\eta + \\ & + (1-x)^{\beta'-1} \int_0^x \Psi_\beta(\xi) (y-\xi)^{\beta-1} F(1-\beta', 1-\beta, 1; \sigma_{\xi 1}) d\xi + \end{aligned}$$

$$+ \int_0^x (y-\xi)^{\beta-1} d\xi \int_1^y (\eta-\xi)^{1-\mu} (\eta-x)^{\beta'-1} F(1-\beta', 1-\beta, 1; \sigma_{\xi\eta}) f_s(\xi, \eta) d\eta. \quad (7)$$

Поскольку

$$\lim_{\sigma \rightarrow 1-0} F(1-\beta', 1-\beta, 1; \sigma) = \frac{\Gamma(\beta + \beta' - 1)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')},$$

то справедливость теоремы 3 вытекает из (7).

Теоремы 1, 2 и 3 прямо приводят нас к необходимости исследования обратных задач типа 1 и 2. Из этих теорем видно также *как правильно надо ставить прямые и обратные задачи*. Например, в случае, когда оператор $E(\beta', \beta)$ задан, уравнение (6) содержит три произвольные функции $f_s(x, y)$, $u_0(y)$, $u_1(x)$. Если задать две из них, то для третьей получается интегральное уравнение первого рода. Когда известны функции $u_0(y)$ и $u_1(x)$, т. е. данные Гурса, интегральное уравнение для $f_s(x, y)$ в соответствии с (6) имеет вид

$$\int_0^x (x-\xi)^{\beta-1} d\xi \int_x^1 (\eta-x)^{\beta'-1} (\eta-\xi)^{1-\mu} f_s(\xi, \eta) d\eta = \Psi(x).$$

Задачи типа 1 даже в их простейшей постановке приводят к интегральным уравнениям Вольтерра третьего рода.

Рассмотрим задачу 1 в предположении, что

- 1) $L^\beta \equiv E(0, \beta)$, $\beta > 1$, $D(L) = D(0, \beta)$;
- 2) B – пространство функций $u(x, y)$ из $D(L) \cap C(\bar{\Omega})$, удовлетворяющих краевым условиям Гурса

$$u(0, x) = \varphi_0(x), \quad u(x, 1) = \psi_\beta(x), \quad 0 < x < 1, \quad (8)$$

где $\varphi_0(x)$, $\psi_\beta(x)$ – заданные функции;

- 3) $f = \{f_s\}$ – пространство функций $f_s(x, y)$, представимых в виде

$$f_s(x, y) = -(\beta - \mu + 1)\varphi(y) + \lambda\varphi(x), \quad \lambda = \text{const}, \quad (9)$$

где $\varphi(x) \in C(0 \leq x \leq 1)$.

В силу (3) искомые функции $u \in B$ и $f_s \in f$ должны быть связаны уравнением

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \psi_\beta(x) - \int_y^1 \left[\eta^\beta \varphi'_0(\eta) + \int_0^x \frac{f_s(\xi, \eta) d\xi}{(\eta - \xi)^{\mu-\beta}} \right] \frac{d\eta}{(\eta - x)^\beta} = \\ &= \psi_\beta(x) - (y - x)^{1-\beta} \int_0^{(1-y)/(1-x)} \left[\eta^\beta \varphi'_0(\eta) + \int_0^x \frac{f_s(\xi, \eta) d\xi}{(\eta - \xi)^{\mu-\beta}} \right] \frac{dt}{(1-t)^{2-\beta}}, \quad (10) \end{aligned}$$

где $\eta = (y - xt)/(1 - t)$.

Из этого уравнения легко видеть, что $u \in B$ тогда и только тогда, когда

$$x^\beta \varphi'_0(x) + \int_0^x (x - \xi)^{\beta-\mu} f_s(\xi, x) d\xi = 0. \quad (11)$$

Если соблюдено (8), то

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \psi_\beta(x) + \int_y^1 (\eta - x)^{-\beta} d\eta \int_x^\eta (\eta - \xi)^{\beta-\mu} f_s(\xi, \eta) d\xi = \\ &= \psi_\beta(x) + \int_y^1 (\eta - x)^{1-\mu} d\eta \int_0^1 t^{\beta-\mu} f_s(\eta - \eta t + xt, \eta) dt. \end{aligned}$$

Из (9), согласно (8), заключаем, что задача 1 эквивалентна интегральному уравнению Вольтерра третьего рода

$$x^\alpha \varphi(x) - \lambda \int_0^x \frac{\varphi(t) dt}{(x - t)^{1-\alpha}} = x^\beta \varphi'_0(x), \quad (12)$$

где $\alpha = 1 + \beta - \mu$.

Рассмотрим теперь задачу 2 в предположении, что

- 1) $L = \{L^\beta\}$, $L^\beta \equiv E(0, \beta)$, $\beta > 1$, $D(L) = D(0, \beta)$;
- 2) f_β – заданная функция из $f \in C(\bar{\Omega})$;
- 3) B – пространство функций $u(x, y)$ из $D(L)$, удовлетворяющих

условиям

$$u(x, 1) = \psi_\beta(x), \quad \lim_{y \rightarrow x} (y - x)^\varepsilon u(x, y) = \tau(x), \quad 0 < x < 1,$$

где ε – заданное положительное число, а $\psi_\beta(x)$ и $\tau(x)$ – заданные функции из классов $C(0 \leq x < 1)$ и $C(0 \leq x \leq 1)$ соответственно, причем $\tau(x) \neq 0$ при $0 < x < 1$.

Очевидно, задача 2 в такой постановке всегда разрешима и притом единственным образом.

Действительно, из формулы (10) заключаем, что

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow x} (y - x)^\varepsilon u(x, y) &= - \lim_{y \rightarrow x} (y - x)^{\varepsilon+1-\beta} \times \\ &\times \int_0^{(1-y)/(1-x)} \left[\eta^\beta \varphi'_0(\eta) + \int_0^\eta (\eta - \xi)^{\beta-\mu} f_\beta(\xi, \eta) d\xi \right] (1 - t)^{\beta-2} dt. \end{aligned}$$

Стало быть $\beta = 1 + \varepsilon$, а

$$x^\beta \varphi'_0(x) = -\varepsilon \tau(x) - \int_0^x (x - \xi)^{\beta-\mu} f_\beta(\xi, x) d\xi.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \psi_\beta(x) + \varepsilon \int_y^1 \tau(\eta) (\eta - x)^{-1-\varepsilon} d\eta + \int_y^1 (\eta - x)^{-1-\varepsilon} d\eta \times \\ & \times \int_0^\eta (\eta - \xi)^{1+\varepsilon-\mu} f_\beta(\xi, \eta) d\xi - \int_y^1 (\eta - x)^{-1-\varepsilon} d\eta \int_0^x (\eta - \xi)^{1+\varepsilon-\mu} f_\beta(\xi, \eta) d\xi. \end{aligned}$$

Исследуем еще один из возможных вариантов задачи 1, а именно случай, когда

- 1) $L^\beta \equiv E(1, 1)$, $D(L) = D(1, 1)$;
- 2) B – пространство функций $u(x, y)$ из $D(L) \cap C(\bar{\Omega})$, удовлетворяющих краевым условиям

$$u(0, x) = \varphi_1(x), \quad u(x, x) = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

где $\varphi_1(x)$ и $\tau(x)$ – заданные функции из класса $C^1(0 \leq x \leq 1)$;

- 3) f – пространство функций f_s , представимых в виде (9).

Покажем, что в рассматриваемом случае задача 1 эквивалентна уравнению Вольтерра третьего рода

$$x^{2-\mu} \varphi(x) - \lambda \int_0^x (x - \xi)^{1-\mu} \varphi(\xi) d\xi = [x\varphi_1(x)]' - \tau(x). \quad (13)$$

Действительно, при $\beta = \beta' = 1$ из (7) имеем

$$(y - x)u = y\varphi_1(y) + (1 - x)u_1(x) - u_1(0) - \int_0^x d\xi \int_y^1 (\eta - \xi)^{1-\mu} f_s(\xi, \eta) d\eta.$$

Очевидно, $u \in C(\bar{\Omega})$ тогда и только тогда, когда

$$(1 - x)u_1(x) - u_1(0) = \int_0^x d\xi \int_x^1 (\eta - \xi)^{1-\mu} f_s(\xi, \eta) d\eta - x\varphi_1(x).$$

Поэтому

$$(y - x)u = y\varphi_1(y) - x\varphi_1(x) + \int_0^x d\xi \int_x^y (\eta - \xi)^{1-\mu} f_s(\xi, \eta) d\eta =$$

$$= (y - x) \int_0^1 \left\{ [\eta \varphi_1(\eta)]' + \int_0^x (\eta - \xi)^{1-\mu} f_s(\xi, \eta) d\xi \right\} dt,$$

где $\eta = x + (y - x)t$. Следовательно,

$$\int_0^x (x - \xi)^{1-\mu} f_s(\xi, x) d\xi = \tau(x) - [x \varphi_1(x)]'. \quad (14)$$

Из (14) с учетом (9), где $\beta = 1$, получаем (13).

В заключение этого параграфа отметим, что задачи типа 1 и 2 возникают и при исследовании принадлежности решения задачи E [14] (по терминологии М. В. Келдыша) наперед заданным функциональным пространствам, например, С. Л. Соболева [15] $W_2^k(\Omega)$, $k = 0, 1, \dots$, для уравнения

$$y^m u_{yy} + u_{xx} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega.$$

Обратные задачи типа 1 и 2 возникают также и при исследовании задачи Трикоми в ее классической постановке [16] для уравнения смешанного типа с непрерывными коэффициентами, когда многообразие изменения типа является характеристическим, или для уравнения вида (2) особенно тогда, когда нарушено условие $1/2 - m \leq \alpha < 1$ А. В. Бицадзе [1].

2. К теории интегральных уравнений Вольтерра третьего рода и связанных с ними вырождающихся дифференциальных уравнений с дробными производными. В этом параграфе в основном будет исследован вопрос о спектре и разрешимости уравнения (12), ограничиваясь наиболее интересным случаем, когда $0 < \alpha < 1$.

Примем следующие обозначения:

$$D_{ax}^l f \equiv \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-l)} \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1+l}}, & l < 0, \\ \frac{d}{dx} D_{ax}^{l-1} f, & l > 0, \end{cases} \quad (a < x);$$

$$D_{xb}^l f \equiv \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-l)} \int_x^b \frac{f(t)dt}{(t-x)^{1+l}}, & l < 0, \\ -\frac{d}{dx} D_{xb}^{l-1} f, & l > 0, \end{cases} \quad (x < b).$$

Операторы D_{ax}^l и D_{xb}^l являются операторами дробного интегрирования порядка $-l$ при $l < 0$ и дробного дифференцирования порядка l

при $l > 0$. Хорошо известно, что

$$D_{ax}^{-l} D_{ax}^l \varphi = \varphi, \quad (\varphi, D_{ax}^l \psi)_0 = (\psi, D_{xb}^l \varphi)_0,$$

где $(\cdot, \cdot)$ означает скалярное произведение в пространстве $L_2[a, b]$.

Ниже понадобится следующий весьма простой *принцип экстремума для оператора D_{ax}^l дробного дифференцирования*.

Пусть неубывающая, неотрицательная функция $\omega(t) \neq 0$ и функция $f(t)$ принадлежит классу $C(a \leq t \leq x)$ и в сколь угодно малой окрестности $a < \delta \leq t \leq x$ точки $t = x$ произведение $\omega(t)f(t)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $h > l$. Тогда если на сегменте $a \leq t \leq x$ функция $f(t)$ достигает положительного максимума (отрицательного минимума) в точке $t = x$, то $D_{ax}^l \omega f > 0$ (< 0) для любого $l > 0$. Это утверждение является тривиальным следствием легко проверяемого тождества

$$\begin{aligned} \Gamma(1-l) D_{ax}^l \omega f &= \frac{\omega(x)f(x)}{(x-a)^l} + l \int_a^\delta \frac{\omega(x)f(x) - \omega(t)f(t)}{(x-t)^{1+l}} dt + \\ &+ l \int_\delta^x \frac{\omega(x)f(x) - \omega(t)f(t)}{(x-t)^{1+l}} dt. \end{aligned}$$

Принцип экстремума для оператора D_{ax}^l (и D_{xb}^l с соответствующими изменениями) широко используется при доказательстве хорошо известного принципа экстремума А. В. Бицадзе [17, 18, 1] для уравнений смешанного типа.

Рассмотрим *интегро-дифференциальное уравнение с дробными производными порядка α , $0 < \alpha < 1$* ,

$$D_\alpha \varphi \equiv D_{0x}^\alpha x^\beta \varphi + a_j(x) D_{0x}^{\alpha_j} \varphi + b(x) \varphi = c(x), \quad 0 < x < 1, \quad (15)$$

где $\beta \geq 0$, $0 \neq \alpha_j < \alpha$ и по повторяющемуся индексу j подразумевается суммирование от 1 до m .

Относительно коэффициентов и правой части уравнения (15) будем предполагать, что $a_j(x) \in C^1(\bar{J})$ при $\alpha_j > 0$, $a_j(x) \in C(\bar{J})$ при $\alpha_j < 0$, а $b(x)$ и $c(x)$ принадлежат $C(\bar{J})$, где J – интервал $0 < x < 1$.

Обозначим банахово пространство функций $\varphi(x) \in C(0 < x \leq 1)$ с конечной нормой

$$\|\varphi\|_\gamma = \max_{\bar{J}} |x^\gamma \varphi(x)|, \quad \gamma \equiv \text{const},$$

через $C_\gamma(J)$, а через $a_i(x)$ – первый отличный от тождественного нуля коэффициент уравнения (15). Уравнение

$$D_\alpha^* \psi \equiv x^\beta D_{x1}^\alpha \psi + D_{x1}^{\alpha_j} a_j \psi + b(x) \psi = c^*(x) \quad (16)$$

сопряжено с уравнением (15) в том смысле, что

$$(\psi, D_\alpha \varphi)_{L_2(J)} = (\varphi, D_\alpha^* \psi)_{L_2(J)}, \quad \forall \varphi, \psi \in L_2(J).$$

Легко видеть, что уравнение (16) в классе $C(0 < x \leq 1)$ имеет не более одного решения.

В силу принципа экстремума для дробной производной имеет место следующее утверждение.

Пусть

$$a_j(x) \geq 0, \quad \forall j, \quad b(x) \geq 0, \quad 0 < x < 1, \quad \alpha_m > 0$$

и $\varphi(x)$ – решение уравнения $D_\alpha \varphi = 0$ из пространства $C_0(J)$, удовлетворяющее условию Гельдера порядка $h > \alpha$ в интервале J . Тогда положительный максимум и отрицательный минимум функции $\varphi(x)$ в $\bar{J}$ достигается лишь в точке $x = 0$.

Следовательно, если $\alpha > \beta$, то в классе функций $\varphi(x)$, для которых $D_{0x}^\alpha x^\beta \varphi \in C_0(J) \equiv C(\bar{J})$, уравнение (15) не может иметь более одного решения.

Нетрудно показать, что если

$$\beta < \alpha - \alpha_i H(\alpha_i), \quad (17)$$

где $H(x)$ – функция Хевисайда, то для любой правой части $c(x) \in C_0(J)$ существует и притом единственное решение уравнения (15) из пространства $C_\beta(J)$.

Действительно, непосредственным вычислением можно убедиться, что выражение $D_{0x}^{-\alpha} a_j D_{0t}^{\alpha_j} \varphi$ при $\alpha_j < 0$ равно

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(-\alpha_j)} \int_0^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha+\alpha_j}} \int_0^1 \frac{a_j[t+(x-t)\xi]d\xi}{\xi^{1+\alpha_j}(1-\xi)^{1-\alpha}},$$

а при $\alpha_j > 0$ равно

$$\frac{-1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha_j)} \int_0^x \varphi(t)dt \frac{d}{dt}(x-t)^{\alpha-\alpha_j} \int_0^1 \frac{a_j[t+(x-t)\xi]d\xi}{\xi^{\alpha_j}(1-\xi)^{1-\alpha}}.$$

Принимая это во внимание, убеждаемся в эквивалентности уравнения (15) интегральному уравнению Вольтерра третьего рода

$$x^\beta \varphi(x) - \int_0^x \frac{k_i(x,t)}{(x-t)^{\beta_i}} \varphi(t)dt = D_{0x}^{-\alpha} c,$$

где $\beta_i = 1 - \alpha + \alpha_i H(\alpha_i)$, а $k_i(x, t)$ зависит лишь от $a_j(x)$, $b(x)$ и принадлежит $C(\bar{J} \times \bar{J})$.

По стандартной схеме (см., например, [19, с. 81 и 26]) можно показать существование такого натурального числа n , что n -я степень оператора

$$A_i \psi \equiv \int_0^x \frac{k_i(x, t)}{t^\beta (x - t)^{\beta_i}} \psi(t) dt,$$

отображающего пространство $C_0(J)$ в себя, является сжатым. Это и доказывает справедливость сделанного выше утверждения.

При нарушении условия (17) на однозначную разрешимость уравнения (15) существенную роль оказывают коэффициенты этого уравнения.

Остановимся более подробно на уравнении

$$D_{0x}^\alpha x^\alpha \varphi - \lambda \Gamma(\alpha) \varphi = c(x), \quad (18)$$

которое является простой моделью уравнений с дробными производными, когда порядок вырождения β совпадает с порядком α самого уравнения.

Уравнение (18) редуцируется к уравнению такого же рода, что и (11), (13). А именно к уравнению вида

$$x^\alpha \varphi(x) - \lambda \int_0^x \frac{\varphi(t) dt}{(x - t)^{1-\alpha}} = f(x). \quad (19)$$

Уравнение (19) было объектом исследования многих авторов [20–25].

Если $\lambda \leq 0$, то из установленного выше принципа экстремума следует, что однородное уравнение

$$V_\alpha \varphi \equiv x^\alpha \varphi(x) - \lambda \int_0^x \frac{\varphi(t) dt}{(x - t)^{1-\alpha}} = 0 \quad (20)$$

в классе функций $\varphi(x)$, принадлежащих $C_0(J)$ и удовлетворяющих при $0 < x \leq 1$ условию Гельдера с показателем $h > \alpha$, имеет лишь тривиальное решение.

Для любой непрерывной функции $\varphi(x)$, интегрируемой в интервале J , справедливо неравенство

$$(\varphi, D_{0x}^{-\alpha} \varphi)_0 = \int_0^1 \varphi(x) D_{0x}^{-\alpha} \varphi dx \geq 0, \quad (21)$$

которое доказывается буквально также, как и в [12, с. 385], где рассмотрен случай $\alpha = 2/3$ и которое показывает положительную определенность оператора дробного интегрирования $D_{0x}^{-\alpha}$.

Из (21) следует, что при $\lambda < 0$

$$\|x^{\alpha/2}\varphi\|_{L_2(J)} \leq c \|x^{-\alpha/2}V_\alpha\varphi\|_{L_2(J)},$$

где c , не зависящая от φ , положительная постоянная.

Следовательно, в пространстве функций $\varphi(x)$ с конечной нормой, равной $\|x^{\alpha/2}\varphi\|_{L_2(J)}$, уравнение (20) не имеет решений, отличных от тривиального.

Очевидно, для любого λ уравнение

$$V_\alpha^*\psi \equiv x^\alpha\psi(x) - \lambda \int_x^1 \frac{\psi(t)dt}{(t-x)^{1-\alpha}} = f^*(x), \quad (22)$$

сопряженное с уравнением (19) в классе $C(0 < x \leq 1)$, имеет не более одного решения.

Обозначим через Λ множество положительных чисел λ , а через Σ множество чисел $\sigma > -1$. Легко видеть, что уравнение

$$\lambda B(\sigma + 1, \alpha) = 1, \quad (23)$$

где

$$B(\sigma + 1, \alpha) = \int_0^1 t^\sigma (1-t)^{\alpha-1} dt$$

— бета функция, устанавливает взаимно-однозначное соответствие между Λ и Σ . Это очевидно, поскольку

$$\frac{d}{d\sigma} B(\sigma + 1, \alpha) = \int_0^1 t^\sigma (1-t)^{\alpha-1} \log t \, dt \leq 0,$$

$$\lim_{\sigma \rightarrow -1} B(\sigma + 1, \alpha) = +\infty, \quad \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} B(\sigma + 1, \alpha) = 0, \quad B(1, \alpha) = 1/\alpha.$$

Имеет место следующая

Теорема 4. Для любого $\lambda \in \Lambda$ существует число $\sigma \in \Sigma$ такое, что функции $\varphi(x) = cx^\sigma$, где c — произвольная постоянная, в пространстве $C_{-\sigma}(J)$ образуют собственные функции уравнения (20) или, что одно и то же, оператора $1/\Gamma(\alpha)D_{0+}^\alpha x^\alpha$. В пространстве $C_{-\sigma}(J)$ все собственные значения уравнения (20) являются простыми.

Эта теорема была доказана в работах [23–25] в основном в случае, когда $-1 < \sigma < 0$, т. е. $0 < \lambda < \alpha$. Дадим очень простое доказательство теоремы 4 в общем случае. Первая часть является тривиальной; число σ находится как решение трансцендентного уравнения (23).

Допустим, что собственному значению $\lambda = 1/B(\sigma + 1, \alpha)$ в пространстве $C_{-\sigma}(J)$ помимо функций $\varphi_\sigma = x^\sigma$ соответствует еще одна собственная функция $\varphi_1(x) \in C_{-\sigma}(J)$, линейно независимая с φ_σ . Тогда очевидно $\varphi_1(x) = x^\sigma \omega_1(x)$, где $\omega_1(x) \in C_0(J)$ и функция

$$\varphi(x) = x^\sigma \omega(x), \quad \omega(x) = (\|\omega_1\|_0 - \omega_1(x) + 1) / (\|1 + \|\omega_1\|_0 - \omega_1(x)\|_0)$$

также будет собственной функцией, соответствующей собственному значению λ . Так как

$$x^{\alpha+\sigma}[1 - \omega(x)] = \lambda \int_0^x \frac{t^\sigma[1 - \omega(t)]dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = \lambda x^{\alpha+\sigma} \int_0^1 \frac{t^\sigma[1 - \omega(tx)]dt}{(1-t)^{1-\alpha}} \geq \lambda \mu x^{\alpha+\sigma},$$

$$\mu = \min_{\bar{J}} \int_0^1 \frac{t^\sigma[1 - \omega(tx)]}{(1-t)^{1-\alpha}} dt > 0,$$

то $\omega(x) \leq 1 - \lambda \mu$. А это противоречит равенству $\|\omega\|_0 = 1$.

Остается теперь показать, что уравнение $A^n \varphi = 0$, $A \equiv x^{-\alpha} V_\alpha$, при любом $n = 2, 3, \dots$ в пространстве $C_{-\sigma}(J)$ не имеет собственных функций, отличных от собственных функций уравнения $A\varphi = 0$, соответствующих собственному значению $\lambda = 1/B(\sigma + 1, \alpha)$.

Пусть существует такое n , что $A^n \varphi = 0$ и $A\varphi \neq 0$. Тогда найдется такое $m \geq 2$, что $A^m \varphi = 0$, $A^{m-1} \varphi \neq 0$. Так как $AA^{m-1} \varphi = 0$, то $AA^{m-2} \varphi = cx^\sigma$, где $c = \text{const} \neq 0$. Функция $\psi(x) = A^{m-2} \varphi$ — решение уравнения $A\psi = cx^\sigma$ из пространства $C_{-\sigma}(J)$. Отсюда, принимая во внимание, что $\psi(x)$ представима в виде $\psi(x) = x^\sigma \omega(x)$, где $\omega(x) \in C_0(J)$ для $\omega(x)$, получаем уравнение

$$cx^\sigma = x^\sigma \omega(x) - \frac{\lambda}{x^\alpha} \int_0^x \frac{t^\sigma \omega(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}}$$

или

$$c = \omega(x) - \lambda \int_0^1 \omega(xt) t^\sigma (1-t)^{\alpha-1} dt. \quad (24)$$

Следовательно, $c = \omega(0)[1 - \lambda B(\sigma + 1, \alpha)] = 0$, что противоречит нашему допущению.

Таким образом, в указанных выше пространствах спектр оператора $1/\Gamma(\alpha) D_{0x}^\alpha x^\alpha$ (уравнение (20)) совпадает с Λ .

Из спектральной теории в силу единственности решения сопряженного уравнения (22) следует безусловная разрешимость (в соответствующих пространствах) уравнения (19) для всех $\lambda \notin \Lambda$.

Предположив, что $\lambda = 1/B(\sigma + 1, \alpha)$ является собственным значением оператора $\frac{1}{\Gamma(\alpha)} D_{0x}^\alpha x^\alpha$, рассмотрим *одноточечную видоизмененную задачу*

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{-\sigma} \varphi(x) = 0 \quad (25)$$

для уравнения

$$\varphi(x) - V\varphi = f(x), \quad (26)$$

где

$$V\varphi \equiv \frac{\lambda}{x^\alpha} \int_0^x \frac{\varphi(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}}.$$

Поскольку $\|V\varphi\|_{-\gamma} \leq q\|\varphi\|_{-\gamma}$, где $q = B(\gamma+1, \alpha)/B(\sigma+1, \alpha) < 1, \forall \gamma > \sigma$, то для любой правой части $f(x) \in C_{-\gamma}(J)$ существует и притом единственное решение задачи (25), (26) из пространства $C_{-\gamma}(J)$, где $\gamma > \sigma$.

Литература

1. Бицадзе А. В. К теории одного класса уравнений смешанного типа. В кн.: Некоторые проблемы математики и механики. Л.: Наука, 1970. С. 112–119.
2. Бицадзе А. В. К теории уравнений смешанного типа, порядок которых вырождается вдоль изменения типа. М., 1972. С. 48–52.
3. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Васильев В. Г. Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1969.
4. Прилепко А. И. О некоторых интегральных уравнениях первого рода обратных задач. Применение функциональных методов к краевым задачам математической физики. Новосибирск, 1972. С. 199–205.
5. Прилепко А. И. ДАН СССР. 1961. Т. 139, № 6.
6. Исаков В. М. Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9, № 1.
7. Jones B. G. J. of Math. and Mech. 1962. No. 11. Pp. 907–918.
8. Jones B. G. Com. on Pure and Applied Math. 1963. Vol. 16, no. 1.
9. Connon J. R. Duke Math. J. 1963. Vol. 30, no. 2. Pp. 313–323.
10. Connon J. R. J. of Math. analysis and Applications. 1964. Vol. 8, no. 2. Pp. 188–201.
11. Darboux G. Lecons sur la theorie generale des surfaces et les applications geometriques du calcul infinitesimal. Paris. 1889.
12. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М.: ИЛ, 1957.
13. Кальменов Т. Ш. Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9, № 1.
14. Келдыш М. В. ДАН СССР. 1951. Т. 77, № 2.
15. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962.
16. Трикоми Ф. О линейных уравнениях смешанного типа. М.–Л.: Гостехиздат, 1947.
17. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959.
18. Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1970.
19. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968.
20. Holmgren E. Arkif for mat., astz. och. fysik. Vol. 16, no. 5. Pp. 1–20.
21. Brawne P. I. Comptes Rendues, Ac. Sc. Paris. 1914. Vol. 158. Pp. 1562–1565.
22. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М.–Л.: Гостехиздат, 1948.

23. Михайлов Л. Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его применения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. Душанбе: Изд-во АН ТаджССР, 1963.
24. Михайлов Л. Г. Интегральное уравнение с ядром, однородным степени -1 . Душанбе: Дониш, 1966.
25. Стеценко В. Я. О простоте максимального собственного значения одного интегрального оператора. В кн.: Исследования по краевым задачам теории функций и дифференциальных уравнений. Душанбе, 1964. С. 133.
26. Гурса Э. Курс математического анализа. Т. 3. М.-Л., 1939.

Поступила в редакцию
3 июля 1973 г.

Институт математики
СО АН СССР

К теории уравнений смешанного типа в многомерных областях

В евклидовом пространстве E_{n+1} точек $(x, x_0) = (x_1, \dots, x_n, x_0)$ рассмотрим уравнение

$$|x_0|^{2m} \Delta_x u - x_0 u_{x_0 x_0} + \left(m - \frac{1}{2}\right) u_{x_0} = 0, \quad (1)$$

где $m = \text{const} > 0$, Δ_x – оператор Лапласа по переменным $x_1, x_2, \dots, x_n$, а $u(x, x_0)$ – искомое решение.

Уравнение (1) является простой моделью уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа с одновременным вырождением типа и порядка на плоскости $x_0 = 0$. При $n = 1$ оно относится к классу уравнений, подробно исследованных в работе [1].

Часть результатов, изложенных ниже, были анонсированы в заметках [7], [8].

Обозначим через H конечную односвязную область пространства E_{n+1} , ограниченную плоскостью $x_0 = 0$ и характеристическим коноидом $K: |x| = r - \beta x_0^{1/\beta}$, $x_0 \geq 0$, где $|x|$ – длина вектора x , $r = \text{const} > 0$, $(2m + 1)\beta = 2$.

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ – фиксированный, отличный от нуля вектор из шара $|x| < r$ евклидова пространства E_n , H^r – подобласть области H , ограниченная коноидами K и $\tilde{K}: |x - \alpha| = \beta x_0^{1/\beta}$, K^r и K_α – части K и $\tilde{K}$, составляющих границу области H_α^r , $A = \|a_{jk}\|$ – квадратная $(n \times n)$ -матрица, транспонированная по отношению к ортогональной матрице, $A' = \|a_{kj}\|$, $a_{ij} = a_j/|\alpha|$, $j = 1, 2, \dots, n$, $\det A' = 1$, A_i – матрица, полученная из матрицы A заменой элементов i -го ее столбца нулями.

Введем операторы:

$$S_t^\alpha u \equiv \gamma(n) \int_{|\xi|=t} u \left[\frac{r \xi_i \alpha}{|\alpha| \sqrt{r^2 - |\alpha|^2}} + \frac{\alpha}{2} + A_i \xi, \left(\frac{r}{2\beta} - \frac{|\alpha| \xi_i}{\beta \sqrt{r^2 - |\alpha|^2}} \right)^\beta \right] d\omega_\xi,$$

$$S_t^0 u \equiv \gamma(n) \int_{|\xi|=t} u \left[\xi, \left(\frac{r}{2\beta} \right)^\beta \right] d\omega_\xi,$$

$$B_n^\alpha u \equiv \begin{cases} R \left(\frac{\partial}{\partial R^2} \right)^{(n-1)/2} \frac{1}{R} S_R^\alpha u, & n \equiv 1 \pmod{2}, \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\partial}{\partial R^2} \right)^{n/2} \int_0^R \frac{S_t^\alpha u}{\sqrt{R^2 - t^2}} dt, & n \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases}$$

Здесь и ниже $d\omega_\xi$ – элемент сферы $|\xi| = t$ пространства E_n ,

$$\gamma(n) = \sqrt{\pi^{1-n}}, \quad 2R = \sqrt{r^2 - |\alpha|^2}, \quad \frac{\partial}{\partial R^2} = \frac{1}{2R} \frac{\partial}{\partial R}.$$

Очевидно, что эти операторы не зависят от индекса $i = 1, 2, \dots, n$.

Справедливо следующее

Утверждение. Для любого регулярного в области H решения $u(x, x_0)$ уравнения (1), непрерывного в $\bar{H}$, имеет место равенство

$$u(\alpha, 0) + u \left[0, (r/\beta)^\beta \right] = B_n^\alpha u, \quad \forall \alpha, \quad |\alpha| < r. \quad (2)$$

Действительно, предположим сначала, что u_{x_j} , $j = 1, 2, \dots, n$, и $x_0^{1/2-m} u_{x_0}$ непрерывны в $\bar{H}$. Непосредственным вычислением нетрудно убедиться, что преобразование

$$z_0 = \frac{ry_0 + |\alpha|y_i}{2R} - \frac{r^2 + |\alpha|^2}{4R} \Leftrightarrow y_0 = \frac{rz_0 - |\alpha|z_i}{2R} + \frac{r}{2},$$

$$z_i = \frac{ry_i + |\alpha|y_0}{2R} - \frac{r|\alpha|}{2R} \Leftrightarrow y_i = \frac{rz_i - |\alpha|z_0}{2R} + \frac{|\alpha|}{2},$$

$$z_k = y_k, \quad k = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n,$$

где

$$y_0 = \beta x_0^{1/\beta}, \quad y = A'x \Leftrightarrow x = Ay = \alpha y_i / |\alpha| + A_i y,$$

отображает область H_α^r на область Q пространства E_{n+1} независимых переменных $z_0, z_1, \dots, z_n$, ограниченную конусами $|z| = R - z_0$ и $|z| = R + z_0$, причем точкам $(0, (r/\beta)^\beta)$ и $(\alpha, 0)$ сопоставляются точки $(0, R)$ и $(0, -R)$, а поверхности

$$2\beta r x_0^{1/\beta} + 2\alpha x = r^2 + |\alpha|^2 \quad (3)$$

– плоскость $z_0 = 0$.

В переменных z_0, z функция

$$v[z, z_0] = u \left[\frac{\alpha}{|\alpha|} \frac{rz_i - |\alpha|z_0}{\sqrt{r^2 - |\alpha|^2}} + \frac{\alpha}{2} + A_i z, \left(\frac{rz_0 - |\alpha|z_i}{\beta \sqrt{r^2 - |\alpha|^2}} + \frac{r}{2\beta} \right)^\beta \right] \quad (4)$$

является решением уравнения

$$v_{z_0 z_0} + \Delta_z v = 0. \quad (5)$$

Из однозначной разрешимости задачи Коши для уравнения (5) с начальными данными $v(z, 0)$, $v_{z_0}(z, 0) = v_{z_0}(z, z_0)|_{z_0=0}$, $|z| \leq R$, следует, что функция $v(z, z_0)$ в области Q представима в виде [2]

$$\begin{aligned} v(z, \pm z_0) = & \frac{\gamma(n)}{2} z_0 \left(\frac{\partial}{\partial z_0^2} \right)^{(n-1)/2} \frac{1}{z_0} \int_{|\xi|=z_0} v(z + \xi, 0) d\omega_\xi \pm \\ & \pm \frac{\gamma(n)}{4} \left(\frac{\partial}{\partial z_0^2} \right)^{(n-3)/2} \frac{1}{z_0} \int_{|\xi|=z_0} v_{z_0}(z + \xi, 0) d\omega_\xi, \end{aligned} \quad (6)$$

если $n \equiv 1 \pmod{2}$, и в виде

$$\begin{aligned} v(z, \pm z_0) = & \frac{\gamma(n)}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{\partial}{\partial z_0^2} \right)^{n/2} \int_0^{z_0} \frac{dt}{\sqrt{z_0^2 - t^2}} \int_{|\xi|=t} v(z + \xi, 0) d\omega_\xi \pm \\ & \pm \frac{\gamma(n)z_0}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{\partial}{\partial z_0^2} \right)^{(n-2)/2} z_0^{n-3} \int_0^{z_0} \frac{t^{2-n} dt}{\sqrt{z_0^2 - t^2}} \int_{|\xi|=t} v_{z_0}(z + \xi, 0) d\omega_\xi, \end{aligned} \quad (7)$$

если $n \equiv 0 \pmod{2}$, где знак плюс берется при $z_0 > 0$, а знак минус – при $z_0 < 0$.

Поскольку $u(\alpha, 0) + u[0, (r/\beta)^\beta] = v(0, -R) + v(0, R)$, то из (6) и (7) в силу (4) при $z = 0$, $z_0 = R$ и $\alpha \neq 0$ получаем (2). При $\alpha = 0$ формула (2) также вытекает из (6) и (7), где на этот раз

$$v(z, z_0) = u \left[z, \left(\frac{2z_0 + r}{2\beta} \right)^\beta \right], \quad z = x, \quad z_0 = y_0 - r/2.$$

Принимая теперь во внимание, что соотношения (6) и (7) имеют место для всех положительных $z_0 < R$, простым предельным переходом можно показать справедливость равенства (2) и для регулярных решений $u(x, x_0)$ из класса $C(\bar{H})$.

Обозначим через $H(\alpha, r)$ часть поверхности (3), принадлежащую H , а через $K(\alpha, r)$ – пересечение $K_\alpha \cap K^r$.

В операторе B_n^α при $n \equiv 1 \pmod{2}$ участвуют значения функций $u(x, x_0)$ лишь на $K(\alpha, r)$. В случае же $n \equiv 0 \pmod{2}$, в выражении оператора B_n^α участвуют значения функции $u(x, x_0)$ на $H(\alpha, r)$. На этот

раз, пользуясь свойством функции Вольтерра [3], $V(x, y_0; \xi, \xi_0)$ для волнового уравнения $\square u \equiv u_{y_0 y_0} - \Delta_x u = 0$ легко вычислить, что

$$G_n^\alpha u \equiv B_n^\alpha u - u[0, (r/\beta)^\beta] = \lim_{y_0 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial y_0} \int_{K_\alpha^r} \left\{ u[\xi, (\xi_0/\beta)^\beta] \frac{\partial}{\partial N} V(\alpha, y_0; \xi, \xi_0) - \right. \\ \left. - V(\alpha, y_0; \xi, \xi_0) \frac{\partial}{\partial N} u[\xi, (\xi_0/\beta)^\beta] \right\} dK_\alpha^r, \quad (8)$$

где K_α^r – образ K^r при отображении $y_0 = \beta x_0^{1/\beta}$, $x = x_0$, N – конормаль, соответствующая оператору $\square$, dK_α^r – элемент поверхности K_α^r .

Из (8) видно, что в выражении оператора G_n^α участвуют значения $u(x, x_0)$ только на коноиде K^r .

Заметим, что при $n = 2$ функция Вольтерра имеет вид

$$2\pi V(x, y_0; \xi, \xi_0) = \log \left[\left(\xi_0 - y_0 + \sqrt{|\xi_0 - y_0|^2 - |x - \xi|^2} \right) / |x - \xi| \right].$$

При $m = \frac{1}{2}$ и $n = 1$ равенство (2) совпадает с равенством

$$u(x_1, 0) + u(0, r) = B_1^{x_1} u, \quad |x_1| < r,$$

где

$$B_1^{x_1} u \equiv u \left(\frac{x_1 - r}{2}, \frac{x_1 + r}{2} \right) + u \left(\frac{x_1 + r}{2}, \frac{r - x_1}{2} \right),$$

которое является аналитической записью простой, но весьма важной теоремы о среднем значении для одномерного волнового уравнения

$$u_{x_0 x_0} - u_{x_1 x_1} = 0.$$

Свойство (2) решений (1) позволяет, как и в плоском случае (см. [1], [4]), отыскать ряд новых краевых задач для уравнения (1) как в области H , где оно гиперболично, так и в смешанных областях, гиперболическая часть которых совпадает с H .

Здесь мы в основном ограничимся постановкой некоторых простейших краевых задач в случае, когда $1 < n \equiv 1 \pmod{2}$.

Задача 1. Найти регулярное в области H решение $u(x, x_0)$ уравнения (1), непрерывное в $\bar{H}$ и удовлетворяющее краевым условиям

$$\lim_{x_0 \rightarrow +0} x_0^{\frac{1}{2}-m} u_{x_0} = \nu(x), \quad \forall x, |x| \leq r, \quad (9)$$

$$B_n^x u = \psi(x), \quad \forall x, |x| \leq r, \quad (10)$$

где

$$\nu(x) \in C^{(n+1)/2}(|x| \leq r), \quad \psi(x) \in C^{(n+3)/2}(|x| \leq r).$$

Из краевого условия (10) в силу (2) имеем

$$u(x, 0) = \psi(x) - u[0, (r/\beta)^\beta], \quad \forall x, |x| \leq r.$$

Очевидно, функция

$$v(x, y_0) = u[x, (y_0/\beta)^\beta],$$

где $y_0 = \beta x_0^{1/\beta}$, как функция переменных x и y_0 , является решением волнового уравнения

$$\Delta_x v - v_{y_0 y_0} = 0,$$

удовлетворяющим условиям

$$v_{y_0}(x, 0) = \nu(x), \quad v(x, 0) = \psi(x) - v(0, r), \quad |x| \leq r.$$

Из формулы (6) легко видеть, что

$$\begin{aligned} v(0, r) &= \frac{\gamma(n)}{4} r \left(\frac{\partial}{\partial r^2} \right)^{(n-1)/2} \frac{1}{r} \int_{|\xi|=r} \psi(\xi) d\omega_\xi + \frac{\gamma(n)}{8} \left(\frac{\partial}{\partial r^2} \right)^{(n-3)/2} \frac{1}{r} \times \\ &\times \int_{|\xi|=r} \nu(\xi) d\omega_\xi \equiv \lim_{y_0 \rightarrow r} \left[\frac{\gamma(n)}{4} y_0 \left(\frac{\partial}{\partial y_0^2} \right)^{(n-1)/2} \frac{1}{y_0} \int_{|\xi|=y_0} \psi(\xi) d\omega_\xi + \right. \\ &\left. + \frac{\gamma(n)}{8} \left(\frac{\partial}{\partial y_0^2} \right)^{(n-3)/2} \frac{1}{y_0} \int_{|\xi|=y_0} \nu(\xi) d\omega_\xi \right]. \end{aligned}$$

Следовательно, задача 1 однозначно разрешима.

При $n = 1$, $m = \frac{1}{2}$ единственное решение $u(x, x_0)$, $x = x_1$ задачи 1 дается формулой

$$u(x, x_0) = \frac{\psi(x + x_0) + \psi(x - x_0)}{2} - u(0, r) + \frac{1}{2} \int_{x-x_0}^{x+x_0} \nu(t) dt,$$

где

$$u(0, r) = \frac{\psi(r) + \psi(-r)}{4} + \frac{1}{4} \int_{-r}^r \nu(t) dt.$$

Перейдем к постановке смешанных краевых задач.

Пусть D – конечная область пространства E_{n+1} , ограниченная коноидом K и поверхностью Ляпунова σ , расположенной в полупространстве $x_0 < 0$ и ортогональной к плоскости $x_0 = 0$. Обозначим через D^+

и $D^- \equiv H$ части области D , лежащие соответственно в полупространствах $x_0 < 0$ и $x_0 > 0$, через S — общий участок границ областей D^+ и D^- , представляющий n -мерный шар $\{x_0 = 0, |x| \leq r\}$, а через S_0 — сферу $\{x_0 = 0, |x| = r\}$.

Задача 2. Найти функцию $u(x, x_0)$ со следующими свойствами: 1) $u(x, x_0)$ — регулярное в $D \setminus S$ решение уравнения (1) из класса $C(\overline{D})$; 2) $|x_0|^{\frac{1}{2}-m}u_{x_0}$ непрерывна в D и интегрируема по S_0 ; 3) $u(x, x_0)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x, x_0) = \varphi(x, x_0) \quad \forall (x, x_0) \in \sigma, \quad (11)$$

$$B_n^x u = \psi(x) \quad \forall (x, x_0) \in K, \quad (12)$$

где φ и ψ — заданные функции соответственно из классов $C^{(n+3)/2}(\sigma)$ и $C^{(n+3)/2}(|x| \leq r)$.

Пусть $\varphi(x, x_0) \equiv 0$, $\psi(x) \equiv 0$. Тогда на основании свойства (2) всех решений уравнения (1) в области D^- получаем

$$-u(x, 0) = c_0 = u(0, (r/\beta)^\beta), \quad |x| < r,$$

но $u(x, 0) = \varphi(x, 0) = 0$ при $|x| = r$. Стало быть,

$$u(x, 0) = 0, \quad \forall x, |x| \leq r.$$

Принимая это во внимание, легко показать, что задача 2 не может иметь более одного решения.

С учетом необходимого условия (согласование граничных функций с классом искомых решений)

$$\psi(x) - \varphi(x, 0) = \text{const}, \quad \forall x, |x| = r,$$

нетрудно видеть, что задача 2 эквивалентно (в смысле разрешимости) редуцируется к задаче Дирихле

$$u|_\sigma = \varphi, \quad u|_s = \psi(x) - \psi(r, 0, \dots, 0) + \varphi(r, 0, \dots, 0)$$

для уравнения (1) в области D^+ . Уравнение (1) в области D^+ простой заменой $y_0 = -\beta(-x_0)^{1/\beta}$ сводится к уравнению Лапласа.

Задача 3. Найти функцию $u(x, x_0)$ со следующими свойствами: 1) $u(x, x_0)$ — регулярное в $D \setminus S$ решение уравнения (1), непрерывное в $\overline{D}$; 2) $|x_0|^{\frac{1}{2}-m}u_{x_0}$ непрерывна в D и интегрируема по S_0 ; 3) $u(x, x_0)$ на σ удовлетворяет условию (11), а на K — краевому условию

$$\Delta_x B_n^x u + a^j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} B_n^x u + c(x) [B_n^x u - u(0, (r/\beta)^\beta)] = \psi(x), \quad (13)$$

где $a^j(x)$, $c(x)$ — заданные непрерывные функции, причем $c(x) \leq 0$ при $|x| \leq r$, и, по повторяющемуся индексу j , подразумевается суммирование от 1 до n .

Из равенства (2) и краевых условий (11) и (13) легко усмотреть, что задача (3) эквивалентна (в смысле однозначной разрешимости) задаче Дирихле

$$\tau(x) = \varphi(x, 0), \quad \forall x, |x| = r, \quad u(x, 0) \equiv \tau(x)$$

для эллиптического уравнения

$$\Delta_x \tau + a^j(x) \tau_{x_j} + c(x) \tau = \psi(x)$$

в шаре $|x| < r$ евклидова пространства E_n .

Условие $c(x) \leq 0$ гарантирует единственность решения задачи 3. При доказательстве существования решения приходится накладывать на σ и на функции, участвующие в краевых условиях, дополнительные ограничения. Так, например, в случае, когда σ совпадает с «нормальной» поверхностью

$$\sigma_0: |x|^2 + \beta^2(-x_0)^{2/\beta} = r^2, \quad x_0 \leq 0,$$

в силу хорошо известных свойств задачи Дирихле для равномерно эллиптических уравнений [5] и решения видоизмененной задачи Коши

$$\lim_{x_0 \rightarrow 0} u(x, x_0) = \tau(x), \quad \lim_{x_0 \rightarrow 0} x_0^{\frac{1}{2}-m} u_{x_0} = \nu(x),$$

для уравнения (1) в области D^- для существования решения задачи 3 достаточно, чтобы

$$\varphi(x, x_0) \in C^{(0, \lambda)}(\sigma), \quad \varphi(x, 0) \in C^{((n+3)/2, \lambda)}(S_0),$$

$$a^j(x), c(x), \psi(x) \in C^{((n-1)/2, \lambda)}(S),$$

где $C^{(k, \lambda)}(E)$ – множество функций, имеющих производные до k -го порядка, удовлетворяющие условию Гельдера с показателем λ .

Непосредственным обобщением рассмотренных выше задач являются краевые задачи для уравнения (1), когда на коноиде K задаются условия вида

$$\left(A^j B_n^x \frac{\partial}{\partial x_j} + A^0 B_n^x x_0^{\frac{1}{2}-m} \frac{\partial}{\partial x_0} + C B_n^x \right) u = \psi,$$

где A^j , A^0 и C – заданные (например, псевдодифференциальные операторы).

Задача 4. Найти функцию $u(x, x_0)$ со следующими свойствами: 1) $u(x, x_0)$ – регулярное в $D \setminus S$ решение уравнения (1) из класса $C(\overline{D}) \cap C^3(D^-)$; 2) $|x_0|^{\frac{1}{2}-m} u_{x_0}$ непрерывна в D и интегрируема по S_0 ; 3) $u(x, x_0)$ удовлетворяет условиям

$$u(x, x_0) = \varphi(x, x_0) \quad \forall (x, x_0) \in \sigma, \quad (14)$$

$$\left(B_n^x x_0^{\frac{1}{2}-m} \frac{\partial}{\partial x_0} + \mu B_n^x \right) u = \psi(x) \quad \forall (x, x_0) \in K, \quad (15)$$

$$\lim_{x_0 \rightarrow (r/\beta)^\beta} x_0^{\frac{1}{2}-m} u_{x_0}(0, x_0) = c_1, \quad (16)$$

где φ, ψ – заданные непрерывные функции соответственно из классов $C^{(n+7)/2}(\sigma)$ и $C^{(n+7)/2}(|x| \leq r)$, μ и c_1 – заданные постоянные.

В силу свойства (2) решений уравнения (1), следует, что функциональное соотношение между $\tau(x) = u(x, 0)$ и $\nu(x) = \lim_{x_0 \rightarrow +0} x_0^{\frac{1}{2}-m} u_{x_0}$, принесенное из D^- в силу (15) и (16) имеет вид

$$\nu(x) + \mu\tau(x) = \psi(x) - c_0\mu - c_1, \quad (17)$$

где, как и выше, $c_0 = u[0, (r/\beta)^\beta]$.

Имеет место следующий принцип экстремума: решение $u_0(x, x_0)$ однородной задачи 4 при $\mu \geq 0$ положительный максимум и отрицательный минимум в $\overline{D}^+$ достигает на σ . Действительно, равенство (17) можно переписать в виде

$$\nu_0(x) = -\mu\tau_0(x), \quad |x| < r, \quad \nu_0 = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial x_0}, \quad \tau_0 = u(x, 0), \quad (18)$$

ибо, как нетрудно видеть, $c_0 = 0$.

В области D^+ функция $u_0(x, x_0)$ не может достигать экстремума. Если положительный максимум в $\overline{D}^+$ функции $u_0(x, x_0)$ достигается в точке $(\xi, 0) \in S$, то в этой точке $\nu_0(\xi) > 0$. Поскольку функция $u_0[x, (y_0/\beta)^\beta]$ как функция переменных x и y_0 является гармонической в области D_1 , где D_1 – образ D^+ при отображении $x = x, y_0 = -\beta(-x_0)^{1/\beta}$, то последнее равенство вытекает из принципа Заремба–Жиро. С другой стороны, из (18) заключаем, что $\nu_0(\xi) \leq 0$. Полученное противоречие исключает возможность достижения функцией $u_0(x, x_0)$ положительного максимума в точке $(\xi, 0)$. Аналогично доказывается, что функция $u_0(x, x_0)$ не может достигать отрицательного минимума в $\overline{D}^+$ в точках $(\xi, 0) \in S$.

Из доказанного принципа и однозначной разрешимости видоизмененной задачи Коши для уравнения (1) в области D^- следует, что в рассматриваемом случае задача 4 не может иметь более одного решения.

Переходя к доказательству существования решения задачи 4, для простоты будем предполагать, что σ совпадает с «нормальной» поверхностью σ_0 и $\varphi(x, x_0) \equiv 0$.

Определенная формулой

$$G(x, x_0; \xi, \xi_0) = \gamma_1 [|x - \xi|^2 + |\zeta_0 - y_0|^2]^{(1-n)/2} - \\ - \gamma_1 r^{n-1} [(|\xi|^2 + \zeta_0^2)(|x - \xi^*|^2 + |y_0 - \zeta_0^*|^2)]^{(1-n)/2},$$

где

$$\xi^* = r^2 \xi / (|\xi|^2 + \zeta_0^2), \quad \zeta_0^* = r^2 \zeta_0 / (|\xi|^2 + \zeta_0^2), \quad y_0 = -\beta(-x_0)^{1/\beta},$$

$$\zeta_0 = -\beta(-\xi_0)^{1/\beta}, \quad 2(n-1)\gamma(-n)\gamma_1 = \Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right),$$

действительная функция $G(x, x_0; \xi, \xi_0)$ при $x \neq \xi$, $x_0 \neq \xi_0$ является решением уравнения (1) в D^+ , удовлетворяющим условиям: $G = 0$ при $(x, x_0) \in \sigma_0$, $G(x, 0; \xi, \xi_0) = 0$ при $\xi_0 = 0$. Учитывая это обстоятельство и применяя в D^+ формулу Грина (так же, как в [6, стр. 87]), получим второе основное функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$

$$\tau(x) + 2\gamma_1 \int_{|\xi| \leq r} (|x - \xi|^{1-n} - r^{n-1}|x|\xi|^2 - \xi r^2|^{1-n}) \nu(\xi) d\omega_\xi = 0. \quad (19)$$

Исключая $\tau(x)$ из (17) и (19), для $\nu(x)$ получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода, безусловная разрешимость которого вытекает из единственности решения задачи 4. Отсюда, в частности, следует несостоятельность утверждений референта Mathematical Reviews (vol. 47, no. 2, 1974, реферат 2196) о содержании нашей заметки [8].

В заключение отметим, что рассмотренные выше задачи относятся к классу задач с нелокальными краевыми условиями. Исследованию задач такого типа посвящены работы [9–11].

Литература

1. Бицадзе А. В. Сб. трудов, посвященных восьмидесятилетию Н. И. Мусхелишвили. М.: Наука, 1972.
2. Курант Р. Уравнение с частными производными. М.: Наука, 1964.
3. Гурса Э. Курс математического анализа. Т. 3. М.–Л.: ГИТТЛ, 1939.
4. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5, № 1.
5. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. М.: Физматгиз, 1957.
6. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959. 134 с.
7. Бицадзе А. В., Нахушев А. М. ДАН СССР. 1972. Т. 204, № 6.
8. Бицадзе А. В., Нахушев А. М. ДАН СССР. 1972. Т. 205, № 1.
9. Алдашев С. А. Дифференциальные и интегральные уравнения. Тем. сб. Вып. 1. Нальчик, 1973.
10. Кумыкова С. К. Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9, № 1.
11. Кумыкова С. К. Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10, № 1.

Поступила в редакцию
16 сентября 1974 г.

Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР

Кабардино-Балкарский
государственный университет

Об одной смешанной задаче для вырождающихся эллиптических уравнений

Рассмотрим уравнение

$$y^m u_{xx} + u_{yy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = 0 \quad (1)$$

в конечной односвязной области Ω евклидовой плоскости независимых переменных x и y , ограниченной простой кривой Жордана σ с концами в точках $A(0, 0)$ и $B(1, 0)$, расположенной в полуплоскости $y > 0$, и отрезком $AB: 0 \leq x \leq 1$ прямой $y = 0$.

Относительно коэффициентов уравнения (1) предполагается, что $m = \text{const} \geq 0$, a , b и c принадлежат классу $C(\bar{\Omega})$, причем $c \leq 0$ всюду в $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.

Задача А. Найти регулярное в области Ω решение $u = u(x, y)$ уравнения (1) из класса $C(\bar{\Omega})$, удовлетворяющее на границе $\partial\Omega$ смешанным краевым условиям

$$u(x, y) = \varphi(x, y) \quad \forall (x, y) \in \sigma, \quad (2)$$

$$\lim_{y \rightarrow +0} \left[a_0(x) \frac{\partial}{\partial y} + a_j(x) D_{0x}^{\alpha_j} + a_{n+1}(x) \right] u = \Psi(x), \quad 0 < x < 1, \quad (3)$$

где φ , a_0 , a_j , $j = 1, \dots, n$, a_{n+1} , Ψ – заданные функции, непрерывные в замыкании множества их определения

$$\sum_{i=0}^{n+1} a_i^2(x) \neq 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (4)$$

$D_{0x}^{\alpha_j}$ – оператор дробного (в смысле Римана–Лиувилля) дифференцирования порядка $\alpha_j < 1$, задаваемый формулой

$$D_{0x}^{\alpha_j} f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha_j)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(t) dt}{(x - t)^{\alpha_j}}.$$

Здесь $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера.

В краевом условии (3) по повторяющемуся индексу j подразумевается суммирование от 1 до n . Не нарушая общности, можно предположить, что $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_n$.

Задача А в случае, когда

$$a_0(x) = a_1(x) = \dots = a_{n+1}(x) \equiv 0, \quad a_{n+1}(x) \equiv 1$$

совпадает с задачей Дирихле [1], а когда

$$a_0(x) \equiv 1, \quad a_1(x) = a_2(x) = \dots = a_{n+1}(x) \equiv 0$$

– с задачей Хольмгрена [2], [3].

Задача А эквивалентно редуцируется к задаче Дирихле и в случае, когда

$$a_0(x) \equiv 0, \quad a_1(x) \neq 0 \quad \forall x \in \bar{I}, \quad (5)$$

$$a_j(x) \in C^1(\bar{I}), \quad j = 1, \dots, n; \quad a_{n+1}(x) \in C(\bar{I}), \quad \Psi(x) \in C(\bar{I}),$$

где $I = \{x: 0 < x < 1\}$.

В самом деле, на основании (5) краевое условие (3) можно переписать в виде

$$D_{0x}^\alpha \tau + b_j(x) D_{0x}^{\alpha_j} \tau + b_{n+1}(x) \tau = \psi(x), \quad j = 2, \dots, n,$$

или

$$\tau(x) + D_{0x}^{-\alpha} b_j D_{0x}^{\alpha_j} \tau + D_{0x}^{-\alpha} b_{n+1} \tau = D_{0x}^{-\alpha} \psi, \quad (6)$$

где

$$\tau(x) = u(x, 0), \quad b_j(x) = \frac{a_j(x)}{a_1(x)}, \quad b_{n+1}(x) = \frac{a_{n+1}(x)}{a_1(x)}, \quad \psi(x) = \frac{\Psi(x)}{a_1(x)}, \quad \alpha = \alpha_1,$$

$D_{0x}^{-\alpha}$ – оператор, обратный оператору D_{0x}^α .

Из соотношения

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha) \Gamma(1 - \alpha_j) D_{0x}^{-\alpha} b_j D_{0x}^\alpha \tau &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^x \frac{b_j(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \frac{d}{dt} \int_0^{t-\varepsilon} \frac{\tau(\xi) d\xi}{(t-\xi)^{\alpha_j}} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_0^x \frac{b_j(t) \tau(t-\varepsilon) dt}{(x-t)^{1-\alpha} \varepsilon^{\alpha_j}} - \alpha_j \int_0^{x-\varepsilon} \tau(\xi) d\xi \int_{\xi+\varepsilon}^x \frac{b_j(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha} (t-\xi)^{1+\alpha_j}} \right] \end{aligned}$$

с учетом равенства

$$\alpha_j \int_{\xi+\varepsilon}^x \frac{b_j(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha} (t-\xi)^{1+\alpha_j}} = \frac{b_j(\xi+\varepsilon)}{(x-\xi-\varepsilon)^{1-\alpha} \varepsilon^{\alpha_j}} + \frac{d}{d\xi} \int_{\xi+\varepsilon}^x \frac{b_j(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha} (t-\xi)^{\alpha_j}}$$

легко видеть, что

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha) \Gamma(1 - \alpha_j) D_{0x}^{-\alpha} b_j D_{0x}^{\alpha_j} \tau &= - \int_0^x \tau(t) dt \frac{d}{dt} \int_t^x \frac{b_j(\xi) d\xi}{(x-\xi)^{1-\alpha} (\xi-t)^{\alpha_j}} = \\ &= - \int_0^x \tau(t) dt \frac{d}{dt} (x-t)^{\alpha-\alpha_j} \int_0^1 \frac{b_j[t+(x-t)z] dz}{z^{\alpha_j} (1-z)^{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

Принимая это во внимание, убеждаемся в эквивалентности уравнения (6) интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$\tau(x) - \int_0^x \frac{K_j(x, t)\tau(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha+\alpha_j}} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{b_{n+1}(t)\tau(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt = D_{0x}^{-\alpha}\Psi,$$

где $K_j(x, t) \in C(\bar{I} \times \bar{I})$, которое безусловно и однозначно разрешимо в классе $C(\bar{I})$.

К различным частным случаям задачи А эквивалентно (в смысле однозначной разрешимости) редуцируются многие краевые задачи для линейных уравнений второго порядка смешанного типа. В частности, по стандартной схеме [1] легко убедиться, что фундаментальное соотношение между $\tau(x) = u(x, 0)$ и $\nu(x) = u_y(x, 0)$ в задаче Трикоми для уравнения

$$\operatorname{sign} y \cdot |y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

приносимое на линию вырождения из гиперболической части смешанной области, представимо в виде (3), где $a_0(x) \equiv \operatorname{const} < 0$, $a_1(x) \equiv \operatorname{const} > 0$, $a_2(x) = a_3(x) = \dots = a_{n+1}(x) \equiv 0$, а α_1 – положительная постоянная, зависящая только от m .

Имеет место следующий принцип экстремума. Пусть $\Psi(x) \equiv 0$ и

$$a_0(x) \leq 0, \quad a_i(x) \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, n+1, \quad x \in I. \quad (7)$$

Тогда положительный максимум и отрицательный минимум решения $u(x, y)$ задачи А в $\bar{\Omega}$ достигается лишь на кривой σ , если $u(x, 0) \in C^{(0, h)}(I)$, $h > \alpha_1$.

Здесь и ниже $C^{(k, h)}(E)$ означает класс функций, у которых в E существуют все производные порядка k , удовлетворяющие условию Гельдера с показателем h . Действительно, допустим, что $\max_{\bar{\Omega}} u = u(\xi, \eta) > 0$. Очевидно, $(\xi, \eta) \notin \Omega$. Пусть $(\xi, \eta) = (\xi, 0) \in I$. В силу (3) в этой точке имеем

$$a_0(\xi)\nu(\xi) + a_j(\xi)D_{0\xi}^{\alpha_j}\tau(\xi) + a_{n+1}(\xi)\tau(\xi) = 0. \quad (8)$$

На основании (4) и (7) среди функций $a_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, n+1$, найдется по крайней мере одна функция $a_l(x)$ такая, что $a_l(\xi) > 0$ при $l \neq 0$ и $a_l < 0$ при $l = 0$.

Если $l = 0$, то из (7), (8) и принципа Заремба–Жиро [4], утверждающего, что $\nu(\xi) < 0$, получим $(\xi, 0) \in I$. А это противоречит сделанному допущению. Если же $l = j$ ($j = 1, \dots, n$), то на основании установленного в [5] принципа экстремума для оператора дробного дифференцирования будем иметь неравенство $D_{0\xi}^{\alpha_j}\tau(\xi) > 0$, из которого с помощью (8) доказывается, что точка $(\xi, \eta) \in \sigma$.

Аналогично убеждаемся, что точка (ξ, η) , где функция $u(x, y)$ достигает отрицательного минимума, не может принадлежать I . Стало быть, $(\xi, \eta) \in \sigma$.

Из установленного принципа экстремума вытекает единственность и устойчивость решения задачи А.

Нетрудно заметить, что если соблюдены условия (4) и (5), то задача (2), (3) имеет не более одного решения для любого линейного эллиптического в области Ω уравнения второго порядка, коэффициенты которого удовлетворяют известным условиям, гарантирующим справедливость принципов Хопфа и Заремба–Жиро [4].

Вопрос существования решения задачи А можно исследовать методом интегральных уравнений при следующих предположениях относительно кривой σ и заданных функций: σ – гладкая кривая с параметрическим уравнением $x = x(s)$, $y = y(s)$, $x(s), y(s) \in C^{(2,h)}$ ($0 \leq s \leq l$), где s – длина дуги, отсчитываемая от точки $B(1, 0)$, а l – длина σ ; в достаточно малых окрестностях точек $A(0, 0)$ и $B(1, 0)$ части кривой σ совпадают с соответствующими частями нормальной кривой

$$\sigma_0: (x - 1/2)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} = 1/4;$$

кривая σ лежит вне области, ограниченной кривой σ_0 и отрезком AB ; $\varphi(x, y) = f(s) \in C^{(2,h)}$ ($0 \leq s \leq l$), $a_j(x) \in C^{(1,h)}(\bar{I})$, $j = 0, 1, \dots, n$, $a_{n+1}(x)$ и $\Psi(x) \in C^{(0,h)}(I)$; коэффициенты уравнения (1) принадлежат классу $C^{(1,h)}(\Omega)$, причем при $m \geq 2$, $a(x, y)$ удовлетворяет условию Геллерстедта* [6]

$$a(x, y) = a_0(x, y)y^\mu, \quad \mu = \text{const} > \frac{m}{2} - 1, \quad a_0 \in C^{(1,h)}(\bar{I}).$$

По стандартной схеме (см. [1], [7], [9]) можно доказать, что если существует решение $u(x, y)$ задачи А и $\tau(x) = u(x, 0)$, $\nu(x) = u_y(x, 0)$, то

$$\begin{aligned} \tau(x) = & \gamma_m \int_0^1 [(x - \xi)^{-\frac{m}{m+2}} - (x + \xi - 2x\xi)^{-\frac{m}{m+2}}] \nu(\xi) d\xi + \\ & + \int_0^1 K_m(x, \xi) \nu(\xi) d\xi + \Phi_m(x), \quad 0 < x < 1, \end{aligned} \quad (9)$$

при $m > 0$, и

$$\tau(x) = \gamma_0 \int_0^1 [\log |x - \xi| - \log(x + \xi - 2x\xi)] \nu(\xi) d\xi +$$

*Условие, гарантирующее однозначную разрешимость задачи Дарбу для вырождающегося гиперболического уравнения.

$$+ \int_0^1 K_0(x, \xi) \nu(\xi) d\xi + \Phi_0(x), \quad 0 < x < 1,$$

при $m = 0$, где $\gamma_m = \text{const} \neq 0$, $K_m(x, \xi)$ и $\Phi_m(x)$ – заданные функции, непрерывные на сегментах $0 \leq x, t \leq 1$, удовлетворяющие условию Гельдера с показателем $h > \alpha$, внутри этих сегментов.

Из краевого условия (3) имеем

$$a_0(x)\nu(x) + a_j(x)D_{0x}^{\alpha_j}\tau(x) + a_{n+1}(x)\tau(x) = \Psi(x). \quad (10)$$

Следовательно, задача А эквивалентна (в смысле разрешимости) системе интегро-дифференциальных уравнений (9), (10).

Пусть $a_j(x) \equiv 0$ для всех $j = 1, 2, \dots, n$. Тогда из (9) и (10) получаем интегральное уравнение

$$a_0(x)\nu(x) + a_{n+1}(x)\gamma_m \int_0^1 \left[|x-t|^{-\frac{m}{m+2}} - (x+t-2xt)^{-\frac{m}{m+2}} \right] \nu(t) dt + \\ + a_{n+1}(x) \int_0^1 K_m(x, t)\nu(t) dt = \Psi(x) - a_{n+1}(x)\Phi_m(x),$$

которое в силу принципа экстремума безусловно и однозначно разрешимо, если $a_0(x) < 0$, $a_{n+1}(x) \geq 0$ для всех $x \in \bar{I}$. Поскольку в этом случае достаточно искать функцию $\nu(x)$ в классе функций, непрерывных в интервале I и могущих обращаться в бесконечность интегрируемого порядка на концах этого интервала, наложенные выше на заданные функции условия можно значительно ослабить.

Вопрос существования решения задачи А в общем случае, когда $\alpha_1 \leq 2/(m+2)$, исследуется точно так же, как и задача Трикоми для уравнения

$$\text{sign } y \cdot |y|^m u_{xx} + u_{yy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y) = 0.$$

При $\alpha_1 > 2/(m+2)$ возникают затруднения принципиального характера. В этом случае интегральное уравнение для искомой функции $\nu(x)$ можно записать в виде

$$\nu(x) + \int_0^1 K(x, t)\nu(t) dt = \Psi(x), \quad 0 < x < 1,$$

где ядро $K(x, t)$, вообще говоря, имеет подвижную (при $x = t$) и неподвижную (при $x, t = 0, 1$) особенности высокого порядка, и поэтому интеграл понимается в смысле конечной части по Адамару [9, 10].

Литература

1. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959.
2. Holmgren E. Arkiv Mat., Astr. och Fysik, 25. Pp. 1–3.
3. Евсин В. И. Сибир. матем. журнал. 1972. Т. 8, № 2.
4. Бицадзе А. В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966.
5. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10, № 1.
6. Gellerstedt S. Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik. 1937. Vol. 25 A, no. 29. Pp. 1–23.
7. Gellerstedt S. Sur un probleme aux limites pour une equation lineaire aux derives partielles du second ordre de type mixte. These, Uppsala, 1935.
8. Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1970.
9. Hadamard J. Le probleme de Cauchy. Paris, 1932.
10. Wiener K. Math. Nachrichten. 1967. Vol. 35.

Поступила в редакцию
21 февраля 1974 г.

Кабардино-Балкарский
государственный университет

К теории краевых задач для вырождающихся гиперболических уравнений

К краевым задачам для уравнения вида

$$Lu \equiv u_{yy} - k(y)u_{xx} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = f(x, y), \quad (1)$$

где $k(y) > 0$ при $y \neq 0$ и может обращаться в нуль при $y = 0$, сводятся многие задачи трансзвуковой газовой динамики (см., например, [1, 2]) и динамики плазмы [3].

Здесь будут исследованы две краевые задачи для уравнения (1), в односвязной области Ω , ограниченной характеристиками AB , BC , C_0B_0 и B_0A_0 уравнения (1), выходящими соответственно из точек $B \in \{(x, y): y < 0\}$ и $B_0 \in \{(x, y): y > 0\}$, а также отрезками $A_0A: 0 \leq x \leq x_0$ и $CC_0: x_1 \leq x \leq 1$ прямой $y = 0$. Считается, что точки A , A_0 , C_0 и C имеют координаты $(0, 0)$, $(x_0, 0)$, $(x_1, 0)$ и $(1, 0)$ соответственно.

Относительно коэффициентов k и b уравнения (1) будем предполагать, что они непрерывны в $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, а относительно a и c их непрерывность в $\bar{\Omega}$ вместе с производной по x .

Задача 1. В области Ω найти решение $u(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{\sigma} = 0, \quad u|_{S_0} = 0 \quad (2)$$

или

$$u|_{\sigma} = 0, \quad u_y|_{S_0} = 0, \quad (3)$$

где

$$\sigma = BC \cup C_0B_0, \quad S_0 = A_0A \cup CC_0.$$

Задача 2. В области Ω найти решение и уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{BC \cup B_0 A_0} = \psi(x), \quad u|_{S_0} = \varphi(x).$$

Обозначим через $W(B_j)$ множество функций $u(x, y)$ из класса $C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega) \cap W_2^1(\Omega)$, где $W_2^1(\Omega)$ – пространство Соболева, для которых $Lu \in L_2(\Omega)$ и соблюдены краевые условия (j), $j = 2, 3$.

Теорема. Пусть коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют одному из следующих условий:

- 1) $k(0) \neq 0$ или $a(x, 0) > 0, \forall x \in \bar{J}, J = \{x: 0 < x < 1\}$;
- 2) $a/k, b^2/k \in C(\bar{\Omega}), c(x, 0) < 0, \forall x \in \bar{J}$;
- 3) $a/k, b^2/k, a_x/k, c/k, c_x/k \in C(\bar{\Omega})$;
- 4) $k/a, b^2/k \in C(\bar{\Omega}), a > 0$, при $y \neq 0, c(x, 0) < 0, \forall x \in \bar{J}$;
- 5) $k/a, b^2/a, c/k, c_x/k \in C(\bar{\Omega}), a > 0$, при $y \neq 0, a_x \geq 0$.

Тогда для всех $u \in W(b_j)$ имеет место оценка $\|u\|_{++} \leq C\|Lu\|_+$, где $\|\cdot\|_{++}, \|\cdot\|_+$ – некоторые позитивные нормы, а C – не зависящая от u положительная постоянная.

Справедливость теоремы доказывается по схеме, предложенной в [4].

Из доказанной теоремы, в частности, следуют единственность сильного решения задачи 1 и существование слабого решения сопряженной задачи.

Следует отметить, что некоторые из условий теоремы являются существенными, и их нарушения могут привести даже к неединственности решения задачи 1. Например, функция $u(x, y) = \tau(x + \frac{1}{2}y^2)$, где $\tau(t)$ – любая достаточно гладкая функция, обращающаяся в нуль при $t = x_1$ и $t = 1$, является решением задачи (3) для уравнения

$$u_{yy} - y^2 u_{xx} - u_x = 0. \quad (4)$$

Этот факт в случае, когда $x_0 = 0, x_1 = 1$, по существу, был замечен в работах [4, 5].

Условие непрерывности функции k , безусловно, можно ослабить не нарушив однозначную разрешимость задачи 1.

Рассмотрим, например, случай, когда $x_0 = 0, k(y)$ равна $y^m, 0 < m = \text{const}$ при $y > 0$ и равна 1 при $y < 0$, а $a = b = c \equiv 0$ и предполагается, что $f \in C^2(\bar{\Omega})$.

Обозначив через $\nu(x)$ значение производной u_y на $A_0 C_0$ и опираясь на общее представление решения исследуемого уравнения, нетрудно убедиться, что задача 1 эквивалентна (в смысле однозначной разрешимости) уравнению

$$D_{0x}^\alpha \nu + \gamma \nu = \psi(x), \quad 0 < x < 1, \quad (5)$$

где D_{0x}^α – оператор дробного (в смысле Римана–Лиувилля) дифференцирования порядка $\alpha, 0 < \alpha < 1, \gamma$ – постоянная, зависящая, как и α , только от m, ψ – известная функция из класса $C(\bar{J}) \cap C^2(J)$.

Уравнение (5), очевидно, однозначно разрешимо в пространстве $C(\bar{J})$. Оно является частным случаем интегро-дифференциального уравнения с дробными производными порядка α , $0 < \alpha < 1$:

$$D_{0x}^{\alpha} x^{\beta} \psi + a_j(x) D_{0x}^{\alpha_j} \psi + b(x) \psi = c(x), \quad 0 < x < 1, \quad (6)$$

где $\beta = \text{const} > 0$, $\alpha > \alpha_1 \cdots > \alpha_n$ и по повторяющемуся индексу j подразумевается суммирование от 1 до n , которое было объектом исследования автора [8]. К уравнению (6) редуцируются многие краевые задачи для вырождающихся гиперболических уравнений.

Единственность решения задачи 2 доказывается по стандартной схеме в случае, когда коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют известному условию работы [9].

При наличии теоремы единственности вопрос существования решения можно исследовать методом интегральных уравнений (для $\nu(x) = u_y(x, 0)$), если $k = |y|^m$, $m > 0$, функции $a, b, c, f \in C^1(\bar{\Omega})$ и выполнено условие Геллерстедта [7] на коэффициент a .

Рассмотрим один исключительный случай задачи 2. Пусть $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ и уравнение (1) совпадает с уравнением (4). В области Ω , которая на этот раз ограничена лишь двумя характеристиками

$$B_0AB: x - \frac{1}{2}y^2 = 0, \quad BCB_0: x + \frac{1}{2}y^2 = 1 \quad (A_0 \equiv A_1, C_0 \equiv C),$$

требуется найти решение $u(x, y)$ уравнения (4), удовлетворяющее краевым условиям

$$\begin{aligned} u|_{B_0B} &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1/2, \\ u|_{BC} &= \psi(x), \quad 1/2 \leq x \leq 1, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции.

Любое регулярное в области Ω решение уравнения (4) представимо в виде [6]

$$u(x, y) = \tau\left(x + \frac{1}{2}y^2\right) + \frac{y}{2} \int_0^1 t^{-1/2} \nu\left(x + \frac{1}{2}y^2 - y^2t\right) dt, \quad (8)$$

где

$$\tau(x) = u(x, 0), \quad \nu(x) = u_y(x, 0).$$

Из (8) с учетом (7) после простых вычислений находим

$$\nu(x) = \sqrt{1-x} \psi' \left(\frac{1+x}{2} \right).$$

Далее, так как первое условие из (7) позволяет однозначно определить функцию $\tau(x)$, то задача (4), (7) имеет и притом единственное решение. Следует отметить, что задача 2 для уравнения $u_{xx} - u_{yy} = 0$, очевидно, не является правильно поставленной.

Литература

1. Франкль Ф. И. Избранные труды по газовой динамике. М., 1973.
2. Берс Л. Математические вопросы дозвуковой и околзвуковой газовой динамики. М., 1961. 208 с.
3. Бай Ши-и. Магнитная газодинамика и динамика плазмы. М., 1964.
4. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, № 1.
5. Кальменов Т. Ш. Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9, № 1.
6. Бицадзе А. В. Уравнение смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959.
7. Gellerstedt S. Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik. 1937. Vol. 25 A, no. 29. Pp. 1–23.
8. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10, № 1.
9. Agmon S., Nirenberg L., Protter M. Comm. Pure and Appl. Math. 1953. Vol. 6, no. 4. Pp. 455–470.

Поступила в редакцию
27 сентября 1974 г.

Кабардино-Балкарский
государственный университет

О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка

Пусть Ω – конечная область евклидовой плоскости независимых переменных x и y , ограниченная характеристиками $AC: \xi = 0$, $BC: \eta = 1$, где

$$\xi = x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}, \quad \eta = x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}},$$

оператора

$$T_m = \frac{\partial^2}{\partial y^2} - (-y)^m \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad m = \text{const} > 0$$

и отрезком $AB: 0 \leq x \leq 1$ прямой $y = 0$.

В области Ω рассмотрим линейное нагруженное интегро-дифференциальное уравнение

$$T_m u + au_x + bu_y + \sum_{i=1}^n a_i D_{0\xi}^{\alpha_i} u(x, 0) + cu = d, \quad (1)$$

где $D_{0\xi}^{\alpha_i}$ – оператор дробного (в смысле Римана–Лиувилля) интегрирования порядка $-\alpha_i$ при $\alpha_i < 0$ и дробного дифференцирования порядка α_i , при $\alpha_i > 0$. Этот оператор в случае, когда $\alpha_i < 1$, задается формулой

$$D_{0\xi}^{\alpha_i} f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha_i)} \int_0^\xi \frac{f(t) dt}{(\xi - t)^{1+\alpha_i}}, \quad \alpha_i < 0,$$

$$D_{0\xi}^{\alpha_i} f(x) = \frac{d}{d\xi} D_{0\xi}^{\alpha_i-1} f(x), \quad \alpha_i > 0, \quad D_{0\xi}^{\alpha_i} f(x) = f(x), \quad \alpha_i = 0.$$

Задача Дарбу. Определить регулярное в области Ω решение уравнения (1) из класса $C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega \cup J)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u_y(x, 0) = \nu(x), \quad 0 < x < 1; \quad u|_{AC} = \varphi(\eta), \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad (2)$$

где $\bar{\Omega}$ – замыкание Ω , J – интервал $0 < x < 1$ прямой $y = 0$.

Предполагается, что $\alpha_n < \alpha_{n-1} < \dots < \alpha_1 = \alpha < 1$ – коэффициенты $b = b(x, y)$, $a_i = a_i(x, y)$, $c = c(x, y)$ и правая часть $d = d(x, y)$ уравнения (1) принадлежит классу $C^1(\bar{\Omega}) \cap C^3(\Omega)$, $\nu(x) \in C(\bar{J}) \cap C^3(J)$, $\varphi(\eta) \in C^1(\bar{J}) \cap C^3(J)$.

Имеет место следующая

Теорема 1. Пусть коэффициент $a = a(x, y)$ представим в виде

$$a = a_0(x, y)(-y)^{\varkappa(m)}, \quad a_0 \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^3(\Omega), \quad (3)$$

где $\varkappa(m) = 0$ при $m < 2$ и $\varkappa(m) = \text{const} > m/2 - 1$ при $m \geq 2$ и

$$\alpha < \frac{4}{m+2}. \quad (4)$$

Тогда задача Дарбу всегда разрешима, и притом единственным образом.

Приведем доказательство теоремы сначала в случае, когда $a(x, y) = b(x, y) = c(x, y) \equiv 0$, т. е. для уравнения

$$T_m u + a_i D_{0\xi}^{\alpha_i} u(x, 0) = d. \quad (5)$$

Здесь и ниже по повторяющемуся индексу i подразумевается суммирование от 1 до n .

Уравнение (5) и краевые условия (2) в характеристических координатах ξ и η принимают вид

$$Eu \equiv u_{\xi\eta} + \frac{\beta}{\eta - \xi}(u_\xi - u_\eta) = \frac{1}{(\eta - \xi)^{4\beta}} [A_i D_{0\xi}^{\alpha_i} \tau + f], \quad (6)$$

$$\left[(\eta - \xi)^{2\beta} (u_\eta - u_\xi) \right]_{\eta=\xi} = - \left(\frac{4}{m+2} \right)^{2\beta} \nu(\xi), \quad 0 < \xi < 1, \quad (7)$$

$$u|_{\xi=0} = \varphi(\eta), \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad (8)$$

где $\beta = m/(2m+4)$,

$$A_i = \frac{1}{4} \left(\frac{4}{m+2} \right)^{4\beta} a_i \left(\frac{\xi + \eta}{2}, - \left(\frac{m+2}{4} \right)^{1-2\beta} (\eta - \xi)^{1-2\beta} \right),$$

$$f = \frac{1}{4} \left(\frac{4}{m+2} \right)^{4\beta} d \left(\frac{\xi + \eta}{2}, - \left(\frac{m+2}{4} \right)^{1-2\beta} (\eta - \xi)^{1-2\beta} \right),$$

$\tau(\xi) \equiv u(\xi, \xi)$ – след искомого решения u на участке $\eta = \xi$, $0 \leq \xi \leq 1$, границы области $\Delta = \{(\xi, \eta): 0 < \xi < \eta < 1\}$, которая является образом области Ω .

Ниже, для удобства, вместо переменных ξ, η будем употреблять переменные x, y , а вместо функции $u\left(\frac{x+y}{2}, -\left(\frac{m+2}{4}\right)^{1-2\beta}(y-x)^{1-2\beta}\right)$ – функцию $u(x, y)$. Как известно [1], функция Грина–Адамара $H(\xi, \eta; x, y)$ задачи (7), (8) для оператора E задается формулой

$$H(\xi, \eta; x, y) = \begin{cases} R(\xi, \eta; x, y), & \eta \geq x, \\ \bar{R}(\xi, \eta; x, y), & \eta \leq x, \end{cases}$$

$$R(\xi, \eta; x, y) = (\eta - \xi)^\beta (y - x)^{-\beta} F(\beta, 1 - \beta, 1; \sigma),$$

$$\bar{R}(\xi, \eta; x, y) = \gamma (\eta - \xi)^{2\beta} (x - \xi)^{-\beta} (y - \eta)^{-\beta} F(\beta, \beta, 2\beta; 1/\sigma),$$

$$\sigma = \frac{x - \xi}{\eta - \xi} \frac{y - \eta}{y - x}, \quad \gamma = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)\Gamma(1 - \beta)}.$$

Пусть существует решение $u(x, y)$ задачи Дарбу (7), (8) для интегродифференциального уравнения (6) в области Δ . Тогда из свойств функции Грина–Адамара заключаем, что $u(x, y)$ является решением следующего уравнения

$$\begin{aligned} u(x, y) - \int_0^x d\xi \int_\xi^y \frac{A_i(\xi, \eta) D_{0\xi}^{\alpha_i} \tau}{(\eta - \xi)^{4\beta}} H(\xi, \eta; x, y) d\eta = \\ = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{m+2} \right)^{2\beta} \gamma \int_0^x \nu(\xi) (x - \xi)^{-\beta} (y - \xi)^{-\beta} d\xi + \\ + \int_0^y \left[\varphi'(\eta) + \beta \frac{\varphi(\eta)}{\eta} \right] H(0, \eta; x, y) d\eta + \\ + \int_0^x d\xi \int_\xi^y \frac{f(\xi, \eta)}{(\eta - \xi)^{4\beta}} H(\xi, \eta; x, y) d\eta. \end{aligned}$$

Отсюда, переходя к пределу при $(x, y) \rightarrow (x, x)$, $0 < x < 1$ и принимая во внимание, что $u(x, x) \equiv \tau(x)$, будем иметь

$$\tau(x) - \gamma \int_0^x \frac{D_{0\xi}^{\alpha_i} \tau}{(x - \xi)^\beta} d\xi \int_\xi^x \frac{A_i(\xi, \eta) d\eta}{(\eta - \xi)^{2\beta} (x - \eta)^\beta} = \Psi(x), \quad (9)$$

$$\begin{aligned}\Psi(x) = & \frac{1}{2} \left(\frac{4}{m+2} \right)^{2\beta} \gamma \int_0^x \frac{\nu(\xi) d\xi}{(x-\xi)^{2\beta}} + \gamma \int_0^x \frac{d\xi}{(x-\xi)^\beta} \int_\xi^x \frac{f(\xi, \eta) d\eta}{(\eta-\xi)^{2\beta} (x-\eta)^\beta} + \\ & + \gamma x^{-\beta} \int_0^x \left[\varphi'(\eta) + \beta \frac{\varphi(\eta)}{\eta} \right] \eta^{2\beta} (x-\eta)^{-\beta} d\eta.\end{aligned}$$

Очевидно, $\Psi(x) \in C(\bar{J}) \cap C^2(J)$.

Вводя обозначения

$$k_i(x, \xi) = \int_0^1 \frac{A_i(\xi, \xi + xt - \xi t) dt}{t^{2\beta} (1-t)^\beta},$$

уравнение (9) можно переписать в виде

$$\tau(x) - \gamma \int_0^x \frac{k_i(x, \xi) D_{0\xi}^{\alpha_i} \tau}{(x-\xi)^{4\beta-1}} d\xi \equiv \tau(x) - \gamma V\tau = \Psi(x). \quad (10)$$

Пусть $\alpha_i > 0$, тогда нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned}\Gamma(1-\alpha_i) V\tau &= \int_0^x \frac{k_i(x, \xi) d\xi}{(x-\xi)^{4\beta-1}} \frac{d}{d\xi} \int_0^\xi \frac{\tau(t) dt}{(\xi-t)^{\alpha_i}} = \\ &= - \int_0^x \tau(t) dt \frac{d}{dt} \int_t^x \frac{k_i(x, \xi) d\xi}{(x-\xi)^{4\beta-1} (\xi-t)^{\alpha_i}} = \\ &= - \int_0^x \tau(t) dt \frac{d}{dt} (x-t)^{2-\alpha_i-4\beta} \int_0^1 \frac{k_i(x, t+xs-ts) ds}{s^{\alpha_i} (1-s)^{4\beta-1}}.\end{aligned}$$

Отсюда в силу (4) заключаем, что оператор V является оператором Вольтерра в пространстве $C(\bar{J})$ функции $\tau(x)$ с обычной нормой $\|\tau\| = \max_{\bar{J}} \tau(x)$. Следовательно, уравнение (10) однозначно и безусловно разрешимо в пространстве $C(\bar{J})$, и его решение $\tau(x) \in C^2(J)$.

Таким образом, задача Дарбу эквивалентно редуцирована к задаче Коши

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad u_y(x, 0) = \nu(x), \quad 0 < x < 1, \quad (11)$$

для уравнения

$$T_m u = d(x, y) - a_i(x, y) D_{0\xi}^{\alpha_i} \tau.$$

Как хорошо известно [2], решение этой задачи выписывается в явном виде через функцию Римана $R(\xi, \eta; x, y)$.

Справедливость теоремы в общем случае устанавливается по предположенной здесь схеме, используя вместо функции $H(x, y; \xi, \eta)$ функцию Грина–Адамара $G(x, y; \xi, \eta)$ задачи Дарбу (7), (8) для уравнений

$$Eu - \frac{A(\xi, \eta)}{(\eta - \xi)^{4\beta}} (u_\xi + u^\eta) - \frac{B(\xi, \eta)}{(\eta - \xi)^{2/\beta}} (u_\xi - u^\eta) - \\ - \frac{C(\xi, \eta)}{(\eta - \xi)^{4\beta}} u = \frac{f(\xi, \eta)}{(\eta - \xi)^{4\beta}},$$

где A , B и C определяются через a , b и c точно так же, как A_i через a_i . При выполнении условия (3) функция $G(x, y; \xi, \eta)$ существует и она на особых линиях ведет себя не хуже, чем $H(x, y; \xi, \eta)$ (см. [1]).

Интегральное уравнение для $\tau(x)$ имеет вид

$$\tau(x) = - \int_0^x d\xi \int_\xi^x \frac{A_i(\xi, \eta) D_{0\xi}^{\alpha_i} \tau}{(\eta - \xi)^{4\beta}} G(\xi, \eta; x, x) d\eta = \Psi_1(x). \quad (12)$$

Условие (3) гарантирует существование, единственность и устойчивость решения задачи Коши (11) для уравнения

$$L_m u \equiv T_m u + au_x + bu_y + cu = d(x, y) - a_i(x, y) D_{0\xi}^{\alpha_i} \tau,$$

где $\tau(x)$ – решение (12).

Известно [3], что условие Геллерстедта (3) является существенным для корректности задачи Дарбу для уравнения $L_m u = d$.

Как было замечено в [3], функция $u(x, y) = \mu(x - 1/2y^2) - \mu(0)$, где $\mu(x)$ – любая функция из класса $C(\bar{J}) \cap C^2(J)$, является решением однородной задачи Дарбу

$$u|_{AC} = 0, \quad u_y(x, 0) = 0,$$

для уравнения

$$u_{yy} - y^2 u_{xx} + u_x = 0.$$

Имеет место следующая

Теорема 2. Если существует решение задачи Дарбу (2) для уравнения

$$u_{yy} - y^2 u_{xx} + u_x + 4\lambda D_{0\xi}^\alpha u(x, 0) = d(x, y), \quad (13)$$

то оно единственно. Решение существует, если $D_{0x}^{1/2-\alpha} \mu \in C(\bar{J})$, где

$$\mu(x) = \sqrt{x} \varphi'(x) + \frac{1}{2} \nu(x) + \frac{1}{4} \int_0^x (x - \xi)^{-1/2} d\left(\frac{\xi + x}{2}, -\sqrt{x - \xi}\right) d\xi.$$

Действительно, принимая во внимание, что функция

$$v(\xi, \eta) = - \int_{\xi}^{\eta} d\xi_1 \int_{\xi_1}^{\eta} \sqrt{\frac{\eta_1 - \xi_1}{\eta_1 - \xi}} F(\xi_1, \eta_1) d\eta_1$$

является единственным решением уравнения

$$u_{\xi\eta} - \frac{1/2}{\eta - \xi} u_{\eta} = F(\xi, \eta), \quad (14)$$

удовлетворяющим условию

$$\left[\sqrt{\eta - \xi} (v_{\eta} - v_{\xi}) \right]_{\eta=\xi} = 0, \quad v(0, \eta) = 0,$$

нетрудно заметить, что задача (2), (13) эквивалентна уравнению

$$u(x, y) = \tau(\xi) - \frac{1}{2} \int_{\xi}^{\eta} \frac{\nu(t) dt}{\sqrt{t - \xi}} + \lambda \int_{\xi}^{\eta} d\xi_1 \int_{\xi_1}^{\eta} \sqrt{\frac{\eta_1 - \xi_1}{\eta_1 - \xi}} \frac{D_{0\xi_1}^{\alpha} \tau(\xi_1) d\eta_1}{\eta_1 - \xi_1} - \\ - \frac{1}{4} \int_{\xi}^{\eta} d\xi_1 \int_{\xi_1}^{\eta} (\eta_1 - \xi_1)^{-1/2} (\eta_1 - \xi)^{-1/2} d\left(\frac{\xi_1 + \eta_1}{2}, -\sqrt{\eta_1 - \xi_1}\right) d\eta_1, \quad (15)$$

где $\xi = x - 1/2y^2$, $\eta = x + 1/2y^2$, $\tau(x) = u(x, 0)$.

При выводе (15) воспользовались тем, что уравнение (13) в переменных ξ и η записывается в виде (14), где

$$4(\xi - \eta) F(\xi, \eta) = d\left(\frac{\xi + \eta}{2}, -\sqrt{\eta - \xi}\right) - 4\lambda D_{0\xi}^{\alpha} \tau(x).$$

Из уравнения (15) при $\xi = 0$ получаем

$$\lambda \int_0^x D_{0\xi}^{\alpha} \tau d\xi \int_{\xi}^x \eta^{-1/2} (\eta - \xi)^{-1/2} d\eta = \Psi(x), \quad 0 < x < 1, \quad (16)$$

где

$$\Psi(x) = \varphi(x) - \varphi(0) + \frac{1}{2} \int_0^x \frac{\nu(t) dt}{\sqrt{t}} + \\ + \frac{1}{4} \int_0^x d\xi \int_{\xi}^x \eta^{-1/2} (\eta - \xi)^{-1/2} d\left(\frac{\xi + \eta}{2}, -\sqrt{\eta - \xi}\right) d\eta.$$

Из (16) после законного дифференцирования будем иметь

$$\lambda \int_0^x \frac{D_{0x}^\alpha \tau d\xi}{\sqrt{x-\xi}} \equiv \lambda \Gamma(1/2) D_{0x}^{-1/2} D_{0x}^\alpha \tau = \mu(x). \quad (17)$$

Поскольку $D_{0x}^{-\varepsilon} D_{0x}^\alpha \equiv D_{0x}^{\alpha-\varepsilon} \forall \alpha < \varepsilon > 0$, то из (17) в силу условия $\alpha < 1/2$ имеем

$$\lambda \Gamma(1/2) D_{0x}^{\alpha-1/2} \tau = \mu(x).$$

Следовательно,

$$\tau(x) = \frac{1}{\lambda \Gamma(1/2)} D_{0x}^{1/2-\alpha} \mu.$$

Очевидно, $\tau(x) \in C(\bar{J}) \cap C^2(J)$.

При $\alpha = 0$, т. е. в случае нагруженного дифференциального уравнения

$$u_{yy} - y^2 u_{xx} + 4\lambda u(x, 0) = d(x, y),$$

имеем

$$\tau(x) = \frac{1}{\lambda \Gamma^2(1/2)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\mu(t) dt}{\sqrt{x-t}}.$$

Поэтому если

$$\nu(x) = \sqrt{x} \nu_0(x), \quad \text{где } \nu_0(x) \in C(\bar{J}) \cap C^3(J),$$

то $\tau(x) \in C(\bar{J}) \cap C^2(J)$.

Пусть Ω_n — n -мерная область евклидова пространства R^n точек $x = (x_1, \dots, x_n)$, ω_k — принадлежащее $\bar{\Omega}_n = \Omega_n \cup \partial\Omega_n$ многообразие размерности $k < n$.

Уравнение (1), названное нагруженным по аналогии с нагруженными интегральными уравнениями, очевидно, относится к классу уравнений вида

$$\sum_{|\alpha| \leq r} a_\alpha(x) D^\alpha u + A(u | \omega_k) = f(x), \quad (18)$$

где

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}, \quad D_j = \partial/\partial x_j, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n,$$

A — заданный оператор (в частности, интегро-дифференциальный), действующий на сужение $u|_{\omega_k}$ искомой функции $u = u(x)$ на многообразии $\omega_k: u|_{\omega_k} = u(x) \forall x \in \omega_k$.

В заключение отметим, что частным случаем уравнения (18) является встречающееся в приложениях [4] нагруженное параболическое уравнение

$$u_{x_1 x_1} - u_{x_2} = c(x) u(0, x_2), \quad x = (x_1, x_2),$$

которое рассматривается в области $\Omega = \{x: 0 < x_1 < l, 0 < x_2 < T\}$.

Литература

1. Gellerstedt S. Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik. 1937. Vol. 25 A, no. 29. Pp. 1–23.
2. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959.
3. Нахушев А. М. ДАН СССР. 1970. Т. 195, № 4.
4. Дикинов Х. Ж., Кереев А. А., Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 1.

Поступила в редакцию
20 февраля 1975 г.

Кабардино-Балкарский
государственный университет

Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения теплопроводности

Рассмотрим одномерную ограниченную среду, на одном из концов которой имеется источник тепла, мощность которого пропорциональна значению температуры. Тогда процесс распространения тепла в этой среде описывается следующим нагруженным уравнением теплопроводности:

$$u_t - u_{xx} - \lambda u(0, t) = 0, \quad (1)$$

где t и x – соответственно временная и пространственная координаты, $u(x, t)$ – температура точки x рассматриваемой среды в момент времени t , $\lambda > 0$ – некоторый параметр, характеризующий термические свойства среды. Заметим, что λ может быть функцией от t .

Уравнение (1) относится к классу уравнений, предложенных в [1].

Для уравнения (1) в односвязной области D плоскости независимых переменных t, x , ограниченной отрезками AA_0, BB_0 прямых $x = 0, x = l = \text{const}$ и отрезками AB, A_0B_0 характеристик $t = 0, t = T = \text{const}$ уравнения (1), ставится следующая

Задача. Найти функцию $u(x, t) \in C(\bar{D})$ такую, что $u(x, t)$ – регулярное в области D решение уравнения (1), удовлетворяющее начальному

$$u(x, t)|_{t=0} = f(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

и граничным условиям

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = q(t), \quad u(x, t) \Big|_{x=l} = \varphi(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

где $f(x)$, $q(t)$ и $\varphi(t)$ – заданные непрерывные функции при $0 \leq x \leq l$ и $0 \leq t \leq T$ соответственно, причем $f(l) = \varphi(0)$, $f'(0) = q(0)$.

Известно [2], что функция источника задачи (2), (3) для уравнения теплопроводности $u_t = u_{xx}$ имеет вид

$$G(\xi, \eta; x, t) = \frac{\pi^{-1/2}}{2} (t - \eta)^{-1/2} \times$$

$$\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[e^{-\frac{(x-\xi+2nl)^2}{4(t-\eta)}} + e^{-\frac{(x+\xi+2nl)^2}{4(t-\eta)}} - e^{-\frac{(x-\xi-2l+2nl)^2}{4(t-\eta)}} - e^{-\frac{(x+\xi-2l+2nl)^2}{4(t-\eta)}} \right].$$

Через $\tau(t)$ обозначим след искомого распределения температуры $u(x, t)$ при $x = 0$.

Принимая во внимание свойства функции Грина $G(\xi, \eta; x, t)$ нетрудно заметить, что функция $u(x, t)$ связана с $\tau(t)$ начальной и граничными функциями следующим образом:

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \int_0^t q(\eta) G(0, \eta; x, t) d\eta + \int_0^l f(\xi) G(\xi, 0; x, t) d\xi - \\ & - \int_0^t \varphi(\eta) G_\xi(l, \eta; x, t) d\eta - \lambda \int_0^t \tau(\eta) d\eta \int_0^l G(\xi, \eta; x, t) d\xi. \end{aligned} \quad (4)$$

Из этой связи при $x \rightarrow 0$ для функции $\tau(t)$ получаем интегральное уравнение

$$\tau(t) - \lambda \int_0^t \tau(\eta) \frac{k(t, \eta)}{(t - \eta)^{1/2}} d\eta = F(t) \quad (5)$$

с ядром

$$\begin{aligned} k(t, \eta) = & -\frac{\pi^{-1/2}}{2l} \times \\ & \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^l \left[e^{-\frac{(-\xi+2nl)^2}{4(t-\eta)}} + e^{-\frac{(\xi+2nl)^2}{4(t-\eta)}} - e^{-\frac{(-\xi-2l+2nl)^2}{4(t-\eta)}} - e^{-\frac{(\xi-2l+2nl)^2}{4(t-\eta)}} \right] d\xi \end{aligned}$$

и правой частью

$$\begin{aligned} F(t) = & \int_0^t q(\eta) G(0, \eta; 0, t) d\eta + \\ & + \int_0^l f(\xi) G(\xi, 0; 0, t) d\xi - \int_0^t \varphi(\eta) G_\xi(l, \eta; 0, t) d\eta. \end{aligned} \quad (6)$$

Нетрудно заметить, что уравнение (5) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода и оно безусловно разрешимо в пространстве $C[0, T]$.

Пусть $R(t, \eta, \lambda)$ – резольвента ядра $k(t, \eta)(t - \eta)^{-1/2}$, тогда, как хорошо известно [3],

$$\tau(t) = F(t) + \lambda \int_0^t R(t, \eta, \lambda) F(\eta) d\eta. \quad (7)$$

Отсюда с учетом (6) имеем

$$\| \tau \| \leq (1 - c_1 \lambda) \| F \| \leq c_2(1 + c_1 \lambda)(\| q \| + \| \varphi \| + \| f \|), \quad (8)$$

c_1 и c_2 – положительные постоянные, не зависящие от q , φ и f , $\| \cdot \|$ – норма в пространстве C .

Принимая во внимание (7), из (4) получаем, что единственное решение задачи (1)–(3) дается формулой

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \int_0^t q(\eta) G(0, \eta; x, t) d\eta + \int_0^l \varphi(\xi) G(\xi, 0; x, t) d\xi - \\ & - \int_0^t \varphi(\eta) G_\xi(l, \eta; x, t) d\eta - \lambda \int_0^t F(\eta) d\eta \int_0^l G(\xi, \eta; x, t) d\xi - \\ & - \lambda^2 \int_0^t d\eta \int_0^\eta R(t, s, \lambda) F(s) ds \int_0^l G(\xi, \eta; x, t) d\xi. \end{aligned} \quad (9)$$

В силу (8) из (4) заключаем

$$\| u \|_* \leq (a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2)(\| q \| + \| \varphi \| + \| f \|),$$

где $\| u \|_*$ – норма в пространстве $C([0, T] \times [0, l])$, a_j , $j = 0, 1, 2$ – положительные постоянные, не зависящие от q , φ и f . Из этой оценки вытекает устойчивость решения задачи (1)–(3).

При численной реализации задачи (1)–(3) на ЭВМ для малых значений параметра λ можно в формуле (9) пренебречь членами, содержащими λ^j , где $j \geq 2$, а остальные интегралы вычислить одним из известных приближенных методов. Поскольку для рассматриваемых значений на основании (7) можно положить

$$\tau(t) = F(t) + \lambda \int_0^t \frac{k(t, \eta)}{(t - \eta)^{1/2}} F(\eta) d\eta,$$

то другим алгоритмом численной реализации задачи (1)–(3) является замена уравнения (1) уравнением

$$u_t - u_{xx} = \lambda F(t), \quad (10)$$

условий (2) и (3) – условиями

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$u(0, t) = F(t) + \lambda \int_0^t \frac{k(t, \eta)}{(t - \eta)^{1/2}} F(\eta) d\eta, \quad u(l, t) = \varphi(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (11)$$

Полученную дифференциальную задачу можно теперь реализовать на ЭВМ хорошо известными конечно-разностными схемами, например методом прогонки [4]. Уравнение (1) в стационарном случае сводится к уравнению $u'' = -\lambda u(0)$, и его решение $u(x)$ дается формулой

$$u(x) = \frac{\lambda(\varphi_l - q_0 l)}{2 - \lambda l^2} (l^2 - x^2) + q_0(x - l) + \varphi_l = f(x),$$

где

$$q_0 = u'(0), \quad \varphi_l = u(l).$$

Литература

1. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 1.
2. Зоммерфельд А. Дифференциальные уравнения в частных производных физики. М.: ИЛ, 1950.
3. Гурса Э. Курс математического анализа. Т. 2, ч. 2. М.–Л.: ГОНТИ, 1934.
4. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.

Поступила в редакцию
17 апреля 1975 г.

Кабардино-Балкарский
государственный университет

Краевые задачи для нагруженных параболических уравнений и их приложения к прогнозу уровня грунтовых вод

1. Первая, вторая и смешанная краевые задачи для линейных нагруженных уравнений параболического типа. В области $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < l, 0 < y < T\}$ евклидовой плоскости независимых переменных x и y рассмотрим нагруженное уравнение параболического типа

$$Lu + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i(x, y) D_{0y}^{\alpha_i} k_j(x, y) u(x^j, y) = f(x, y), \quad (1)$$

где $\alpha_n < \alpha_{n-1} < \dots < \alpha_1 = \alpha$, $0 \leq x^1 < x^2 < \dots < x^m < l$,

$$L = \frac{\partial}{\partial y} - \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c(x, y), \quad \kappa = \text{const} > 0,$$

а $D_{0y}^{\alpha_i}$ — оператор дробного интегрирования порядка $-\alpha_i$ при $\alpha_i < 0$ и дробного дифференцирования порядка α_i при $\alpha_i > 0$. Предполагается,

что функции $k_i(x, y)$, $f(x, y)$, $c(x, y)$ непрерывны, а $a_i(x, y)$ непрерывно дифференцируемы по Гельдеру в замыкании $\bar{\Omega}$ области Ω .

Оператор $D_{0y}^{\alpha_i}$ в случае, когда $\alpha_i < 1$ задается формулой

$$D_{0y}^{\alpha_i} f = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\alpha_i)} \int_0^y \frac{f(t) dt}{(y-t)^{1+\alpha_i}}, & \alpha_i < 0, \\ \frac{d}{dy} D_{0y}^{\alpha_i-1} f(y), & \alpha_i > 0, \end{cases}$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера.

Уравнение (1) относится к классу уравнений, предложенных в [1]. Нагруженным дифференциальным уравнениям, нагруженная часть которых содержит лишь значения искомого решения в фиксированных точках области их задания, посвящены работы [2], [3].

Задача А. Найти регулярное в области Ω решение $u(x, y)$ уравнения (1) из класса $C(\bar{\Omega})$, удовлетворяющее начальному условию

$$u|_{y=0} = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

и одному из следующих граничных условий:

$$u|_{x=0} = \varphi_0(y), \quad u|_{x=l} = \varphi_l(y), \quad 0 \leq y \leq T; \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \nu_0(y), \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = \nu_l(y), \quad 0 < y < T; \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \nu_0(y), \quad u|_{x=l} = \varphi_l(y), \quad (5)$$

φ_0 , φ_l , ν_0 и ν_l – заданные функции, для которых соблюдены обычные условия гладкости и согласованности [4].

Задача (5) для нагруженного уравнения теплопроводности

$$u_t - u_{xx} - \lambda u(0, t) = 0$$

исследована в работе [5].

Теорема. Пусть $\alpha < 1/2$ и $c(x, y) \leq 0$, тогда задача А безусловно и однозначно разрешима.

Приведем весьма простое доказательство справедливости утверждения этой теоремы.

Функция Грина $G(x, y; \xi, \eta)$ задачи (2), (j), $j = 3, 4, 5$, для уравнения $Lu = 0$ представима в виде

$$G(x, y; \xi, \eta) = (y - \eta)^{-1/2} G_0(x, y; \xi, \eta),$$

где $G_0(x, y; \xi, \eta)$ – достаточно гладкая функция (см. [4]).

Обозначим через $\psi^j(y)$ след искомого решения $u(x, y)$ задачи А при $x = x^j$, $0 \leq y \leq T$, а через $v(x, y)$ – решение задачи (2)–(j) для уравнения

$$Lv = f(x, y) \quad (6)$$

в области Ω .

Принимая во внимание свойства функции Грина, нетрудно убедиться, что любое решение $u(x, y)$ задачи А является решением интегрального уравнения

$$u(x, y) - v(x, y) = \int_0^y \frac{d\eta}{(y - \eta)^{1/2}} \int_0^l G_i(x, y; \xi, \eta) D_{0\eta}^{\alpha_i} k_j(\xi, \eta) \psi^j(\eta) d\xi, \quad (7)$$

где $G_i(x, y; \xi, \eta) = a_i(\xi, \eta) G_0(x, y; \xi, \eta)$ и по повторяющимся индексам $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ подразумевается суммирование.

Непосредственным вычислением можно показать, что выражение

$$\int_0^y (y - \eta)^{-1/2} G_i(x, y; \xi, \eta) D_{0\eta}^{\alpha_i} k_j(\xi, \eta) \psi^j(\eta) d\eta$$

при $\alpha_i < 0$ равно

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \int_0^y k_j(\xi, \eta_1) \psi^j(\eta_1) (y - \eta_1)^{-\alpha_i - 1/2} d\eta_1 \times \\ & \times \int_0^1 G_i[x, y; \xi, \eta_1 + (y - \eta_1)t] t^{-1 - \alpha_i} (1 - t)^{-1/2} dt, \end{aligned}$$

а при $0 < \alpha_i < 1/2$ равно

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\Gamma(1 - \alpha_i)} \int_0^y k_j(\xi, \eta_1) \psi^j(\eta_1) d\eta_1 \frac{d}{d\eta_1} (y - \eta_1)^{1/2 - \alpha_i} \times \\ & \times \int_0^1 G_i[x, y; \xi, \eta_1 + (y - \eta_1)t] t^{-\alpha_i} (1 - t)^{-1/2} dt. \end{aligned}$$

С учетом этого уравнение (7) эквивалентно редуцируется к уравнению

$$u(x, y) = \int_0^y \frac{k_{ij}(x, y, t) \psi^j(t)}{(y - t)^{\alpha_i + 1/2}} dt + v(x, y), \quad (8)$$

где $k_{ij}(x, y, t)$ очевидным образом выражается через известные функции $k_j(x, y)$ и $G_i(x, y; \xi, \eta)$.

Из (8) при $x = x^\mu$, $\mu = 1, \dots, m$, имеем

$$\psi^\mu(y) = \int_0^y \frac{k_{ij}(x^\mu, y, t)}{(y-t)^{\alpha_i+1/2}} \psi^i(t) dt + v(x^\mu, y). \quad (9)$$

При $\alpha < 1/2$ система (9) является системой интегральных уравнений Вольтерра второго рода, стало быть она безусловно и однозначно разрешима.

Таким образом, единственное решение задачи А задается формулой (8), где $\psi^1, \dots, \psi^m$ – решение системы (9).

Хорошо известный прием редукции интегральных уравнений Вольтерра с вырожденным ядром к обыкновенным дифференциальным уравнениям позволяет выписать общее представление всех решений нагруженного параболического уравнения

$$u_y - \kappa u_{xx} + c(y)u + a_i(y)D_{0y}^{\alpha_i}k_j(y)u(x^j, y) = f(x, y), \quad (10)$$

которое получается из (1), если предположить, что функции a_i и k_j не зависят от x .

Действительно, любое решение $u(x, y)$ уравнения (10) является решением уравнения составного типа

$$\frac{\partial}{\partial x} [u_y - \kappa u_{xx} + c(y)u - f(x, y)] = 0.$$

Принимая это во внимание, легко показать, что

$$u(x, y) = v(x, y) + \omega(y), \quad (11)$$

где $v(x, y)$ и $\omega(y)$ означают общие решения уравнений

$$v_y - \kappa v_{xx} + c(y)v = f(x, y) \quad (12)$$

и

$$\omega' + c(y)\omega + \sum_{j=1}^m a_i(y)D_{0y}^{\alpha_i}k_j(y)\omega = -a_i(y)D_{0y}^{\alpha_i}k_j(y)v(x^j, y), \quad (13)$$

соответственно. При этом предполагается, что

$$\omega(y) \in C(0 \leq y \leq T) \cap C^1(0 < y < T).$$

Очевидно, задача Коши $\omega|_{y=0} = \omega_0$ для интегро-дифференциального уравнения (13) эквивалентно редуцируется к интегральному уравнению Вольтерра второго рода и поэтому всегда разрешима и притом единственным образом.

Указанный прием получения представления вида (11) успешно использован в работе [6], где исследован ряд краевых задач для нагруженных уравнений эллиптического типа.

Представление (1) может оказаться весьма полезным при численной реализации задачи А на ЭВМ.

Например, поскольку задача (2), (4) для уравнения (10) в силу доказанной выше теоремы имеет не более одного решения $u(x, y)$, то нетрудно заметить, что $u(x, y)$ задается формулой (11), где $v(x, y)$ представляет собой решение уравнения (12), удовлетворяющее условиям

$$v|_{y=0} = \tau(x), \quad \frac{\partial v}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \nu_0(y), \quad \frac{\partial v}{\partial x}\bigg|_{x=l} = \nu_l(y),$$

а $\omega(y)$ — является решением однородной задачи Коши $\omega_0 = 0$ для уравнения (13).

В заключение этого параграфа отметим, что многие задачи, связанные с прогнозом режима уровня и минерализации грунтовых вод в условиях орошения сводятся к краевым задачам для нагруженных уравнений параболического типа.

2. О некоторых математических моделях плоскопараллельного неустановившегося движения грунтовых вод. Хорошо известно [7], что неустановившееся плоскопараллельное движение грунтовых вод со слабоизменяющейся свободной поверхностью и с непроницаемым горизонтальным водоупором описывается уравнением Буссинеска

$$\sigma \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{k}{2} \frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} + W(x, y, h), \quad (14)$$

где σ — водоотдача, k — коэффициент фильтрации, W — интенсивность фильтрации, $h = h(x, y)$ — ордината свободной поверхности, отсчитываемая от водоупора в момент времени y .

Интенсивность фильтрации W определяется по формуле

$$W = W_i(x, y, h) - W_l(x, y, h),$$

где W_i — часть от осадков, поливов или промывок, попадающая на поверхность грунтовых вод, а W_l — суммарная интенсивность расходования грунтовых вод на эвапотранспирацию.

Обозначим через H осредненное расстояние от поверхности почвы до водоупора.

Пусть $x^1, x^2, \dots, x^m$ — характерные точки (отметки) мелиорируемой территории $0 \leq x \leq l$. Характерными точками могут быть, например, точки, где измеряется уровень грунтовых вод или точки, где

$$H - h(x^j, y) = \min_{0 \leq x \leq l} [H - h(x, y)].$$

Предположим, что зависимость интенсивности испарения от глубины состояния грунтовых вод задается формулой

$$W_l(x, y, h) = \varepsilon_0 \left[1 - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \frac{H - h(x^j, y)}{h^*} \right]^\lambda, \quad (15)$$

где ε_0 – максимальная интенсивность испарения с поверхности почвы, h^* – критическая глубина, отсчитываемая от поверхности почвы, ниже которой $W_l = 0$, λ – показатель степени, определяемый каждый раз для конкретных условий.

Формула (15) является некоторым дискретным аналогом известной эмпирической формулы, предложенной С. Ф. Аверьяновым [8] (см. также [7]).

В дальнейшем будем считать, что σ , k , ε_0 и h^* – известные постоянные, $\lambda = 1$, а W_i – заданная функция, зависящая только от x и y .

Линеаризуя уравнение (14) одним из известных способов [6] и принимая во внимание (15), получим для $h(x, y) \equiv u(x, y)$ нагруженное параболическое уравнение

$$u_y - au_{xx} + a_j u(x^j, y) = f(x, y), \quad j = 1, \dots, m, \quad (16)$$

где $a = \text{const} > 0$ – коэффициент уровнепроводности,

$$a_j = \frac{\varepsilon_0}{m\sigma h^*}, \quad f(x, y) = \frac{W_i(x, y)}{\sigma} - \frac{\varepsilon_0}{\sigma} \left(1 - \frac{H}{h^*} \right).$$

Уравнение (16) относится к классу уравнений, исследованных в п. 1. К краевым задачам для этого уравнения сводятся многие задачи, связанные с прогнозом и регулированием уровня грунтовых вод.

Например, задача растекания бугра грунтовых вод с начальным уровнем $\tau(x)$, обладающим тем свойством, что

$$H - \tau(0) = \min_{0 \leq x \leq l} [H - \tau(x)], \quad \tau'(0) = \tau'(l) = 0, \quad \tau'(x) \leq 0,$$

сводится к задаче

$$u|_{y=0} = \tau(x), \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0, \quad (17)$$

для уравнения вида (16) с $m = 1$, $x^1 = 0$.

В этом случае на сегменте $0 \leq x \leq l$ имеется лишь одна характерная точка $x = 0$.

Решение задачи (17) для уравнения (16) задается формулой

$$u(x, y) = v(x, y) - \int_0^y a_j v(x^j, s) \exp \left[\frac{\varepsilon_0}{\sigma h^*} (s - y) \right] ds,$$

где $v(x, y)$ – решение уравнения

$$v_y - av_{xx} = f(x, y), \quad (18)$$

удовлетворяющее условиям

$$v|_{y=0} = \tau(x), \quad \frac{\partial v}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \frac{\partial v}{\partial x}\bigg|_{x=l} = 0. \quad (19)$$

Задачу (18), (19) можно реализовать на ЭВМ хорошо известными методами, например, методом прогонки.

В заключение отметим, что исследованная в работе [9] Н. Н. Кочинной (см. также [10], [11]) весьма важная задача периодического изменения уровня грунтовых вод при поливах с интенсивностью полива mc и интенсивностью испарения md сводится к краевым задачам для уравнения вида

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \varkappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F[u(x^0, y)], \quad 0 < x < l, \quad (20)$$

где

$$F[u(x^0, y)] = \begin{cases} c & \text{при } u(x^0, y) < u_*, \\ -d & \text{при } u(x^0, y) > u_{**}, \end{cases}$$

причем $0 < x^0 < l$ и постоянные величины u_* , u_{**} таковы, что $u_* > u_{**}$.

Уравнение (20) относится к классу нагруженных уравнений, предложенных в работе [1].

Литература

1. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 1.
2. Будак Б. М., Искендеров А. Д. ДАН СССР. 1967. Т. 176, № 1.
3. Искендеров А. Д. Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, № 10.
4. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968.
5. Дикинов Х. Ж., Керевов А. А., Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 1.
6. Бородин А. В. Матем. сб., вып. III, 15–23. Орджоникидзе: Изд-во СОГУ, 1976.
7. Полубаринова-Кочина П. Я., Пряженская В. Г., Эмих В. Н. Математические методы в вопросах орошения. М.: Наука, 1969.
8. Аверьянов С. Ф., Костяков А. Н., Хаврин Н. Н. Влияния оросительных систем на режим грунтовых вод. М.: Изд-во АН СССР, 1956.
9. Кочина Н. Н. ПМТФ. 1971. № 4.
10. Кочина Н. Н. ПМТФ. 1972. № 3.
11. Кочина Н. Н. ДАН СССР. 1973. Т. 213, № 1.

Поступила в редакцию
3 июня 1976 г.

Кабардино-Балкарский
государственный университет
Северо-Кавказский государственный институт
по проектированию водохозяйственного
и мелиоративного строительства

Задача Штурма–Лиувилля для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с дробными производными в младших членах

В интервале $I = \{x: 0 < x < 1\}$ рассмотрим уравнение

$$Ly \equiv y'' + a_0(x)y' + \sum_{j=1}^m a_j(x)D_{0x}^{\alpha_j}\omega_j(x)y + a_{m+1}(x)y = f(x), \quad (1)$$

где $0 < \alpha_m < \dots < \alpha_2 < \alpha_1 = \alpha < 1$, D_{0x}^σ – оператор дробного (в смысле Римана–Лиувилля) дифференцирования порядка σ :

$$D_{0x}^\sigma \varphi \equiv \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^\sigma}, \quad 0 < \sigma < 1.$$

К задаче Штурма–Лиувилля

$$p_0 y'(0) + q_0 y(0) = r_0, \quad p_1 y'(1) + q_1 y(1) = r_1 \quad (2)$$

для уравнения вида (1) эквивалентно редуцируются многие прямые и обратные краевые задачи, ассоциированные с вырождающимся гиперболическим уравнением и уравнением смешанного гиперболо-параболического типа [1–4]. В частности, к задаче (1), (2) сводится исследованный в работе [5] аналог задачи Трикоми для уравнения

$$f(x, y) = \begin{cases} u_y - p(x, y)u_{xx}, & y > 0, \\ yu_{xx} + u_{yy}, & y < 0, \end{cases}$$

в смешанной области, гиперболическая часть границы которой образована характеристиками уравнения Трикоми.

Краевым задачам для одного дифференциального оператора дробного порядка типа Штурма–Лиувилля посвящена весьма важная работа М. М. Джрбашяна [6] (см. также [7]).

Интегральное уравнение Вольтерра третьего рода

$$x^\alpha \varphi(x) - \lambda \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \varphi(t) dt = f(x),$$

которое можно переписать в виде

$$D_{0x}^\alpha x^\alpha \varphi - \lambda \Gamma(\alpha) \varphi = c(x),$$

было объектом исследования многих авторов (библиографию см. в [1]).

В теории краевых задач для уравнения (1) важную роль играет следующий принцип экстремума для оператора дробного дифференцирования [1].

Лемма. Пусть неубывающая положительная при $0 < t < x$ функция $\omega(t)$ принадлежит классу $C(0 \leq t \leq x)$ и в сколь угодно малой окрестности $0 < \delta \leq t \leq x$ точки $t = x$ произведение $\omega(t)y(t)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\kappa > \alpha$.

Тогда, если на сегменте $0 \leq t \leq x$ функция $y(t)$ достигает положительного максимума (отрицательного минимума) в точке $t = x$, то $D_{0x}^\alpha \omega y > 0$ (< 0) для любого $\alpha \in I$.

Пользуясь этой леммой, нетрудно доказать следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $\omega_j(x)$, $j = 1, \dots, m$, – неубывающие положительные в I функции, которые удовлетворяют в I условию Гельдера с показателем $\kappa_j > \alpha_j$ и

$$a_i(x) \in C(\bar{I}), \quad a_i(x) \leq 0 \quad \forall x \in I, \quad i = 1, \dots, m+1. \quad (3)$$

Тогда, если $y(x)$ – регулярное в I решение уравнения $Ly = 0$ из класса $C(\bar{I})$, отличное от постоянной, то положительный максимум (отрицательный минимум) функции $y(x)$ в $\bar{I}$ не может достигаться во внутренних точках I .

Справедливость теоремы 1 в случае, когда

$$\sum_{i=1}^{m+1} a_i^2(x) \neq 0 \quad \forall x \in I,$$

непосредственно вытекает из леммы.

Допустим, что $\max_I y(x) = y(x_0) > 0$ и $x_0 \in I$. Поскольку $y(x) \neq \text{const}$ и $Ly = 0$, то на основании леммы и условия теоремы существует такое $\delta > 0$, что

$$y(x) < y(x_0), \quad a_{m+1}(x)y(x) \leq 0, \quad a_j(x)D_{0x}^{\alpha_j} \omega_j y \leq 0$$

для всех x из полусегмента $[\delta, x_0[$. Стало быть,

$$y'' + a_0(x)y' \geq 0 \quad \forall x \in [\delta, x_0]. \quad (4)$$

Рассмотрим функцию

$$z(x) = y(x) + \varepsilon g(x), \quad \delta \leq x \leq x_0,$$

где $g(x) = \exp(-\mu x) - \exp(-\mu x_0)$, μ и ε – положительные числа, причем $\varepsilon < [y(x_0) - y(\delta)]/g(\delta)$.

Если μ достаточно велико, то в силу (4)

$$z'' + a_0(x)z' \geq \varepsilon[g'' + a_0(x)g'] = \varepsilon \exp(-\mu x)[\mu^2 - a_0(x)\mu] > 0.$$

Так как $z(\delta) < y(x_0)$, $z(x_0) = y(x_0)$, то максимум $z(x)$ в $[\delta, x_0]$ достигается только в точке x_0 . Поэтому $z'(x_0) = y'(x_0) + \varepsilon g'(x_0) \geq 0$. Отсюда следует, что

$$y'(x_0) \geq -\varepsilon \mu \exp(-\mu x_0) > 0, \quad (5)$$

а это противоречит необходимому условию экстремума $y'(x_0) = 0$. Таким образом, $x_0 \notin I$.

Теорема 2. Пусть $\omega_j(x)$, $j = 1, \dots, m$, – неубывающие положительные в I функции, которые при $0 < x \leq 1$ удовлетворяют условию Гельдера с показателем $\kappa_j > \alpha_j$, и выполнено условие (3).

Тогда, если $y(x)$ – регулярное в I решение уравнения $Ly = 0$ из класса $C(\bar{I}) \cap C^1(0 < x \leq 1)$ и

$$y^* = \max_{\bar{I}} y(x) = y(1) > 0 \quad (y_* = \min_{\bar{I}} y(x) = y(1) < 0),$$

то $y'(1) > 0$ ($y'(1) < 0$). Если же

$$y^* = y(0) > 0 \quad (y^* = y(0) < 0),$$

то $y'(0) < 0$ ($y'(0) > 0$) при условии, что

$$y(x) \in C^1(0 \leq x < 1), \quad \omega_j(x) \in C^1(0 \leq x \leq \varepsilon_0),$$

$$\omega_j(0) \neq 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, m,$$

где ε_0 может быть сколь угодно близко к нулю.

Теорема 2 по существу следует из (5) и легко проверяемого равенства

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{\alpha_j} D_{0x}^{\alpha_j} \omega_j y = \omega_j(0) y(0) / \Gamma(1 - \alpha_j).$$

Лемма и теоремы 1 и 2 являются аналогами принципов Хопфа и Заремба–Жиро [8] для дифференциальных операторов дробного порядка.

Теоремы 1, 2 позволяют доказать единственность и существование решения задачи (1), (2) при обычных условиях неравенственного типа на числа p_i и q_i , $i = 0, 1$.

Более подробно рассмотрим задачу Дирихле (двухточечную задачу)

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0 \quad (6)$$

для уравнения

$$y'' + a_j(x) D_{0x}^{\alpha_j} \omega_j y + a_{m+1}(x) y = f(x). \quad (7)$$

Здесь и ниже по повторяющемуся индексу j подразумевается суммирование от 1 до m .

Теорема 3. Пусть коэффициенты уравнения (7) удовлетворяют условиям теоремы 1 и $f(x) \in C(\bar{I})$, $a_j(x), \omega_j(x) \in C^1(\bar{I}) \forall j = 1, \dots, m$.

Тогда задача (6) для уравнения (7) безусловно и однозначно разрешима в классе $C(\bar{I}) \cap C^2(I)$.

Действительно, задача (6), (7) эквивалентна уравнению

$$y(x) + \int_0^1 a_{m+1}(t)G(x, t)y(t)dt + Ay = F(x), \quad (8)$$

где $G(x, t) = t(x - 1)$ при $t \leq x$ и $G(x, t) = x(t - 1)$ при $t \geq x$,

$$Ay = \int_0^1 G(x, t)a_j(t)D_{0t}^{\alpha_j}\omega_j y dt, \quad F(x) = \int_0^1 G(x, t)f(t)dt.$$

Непосредственным вычислением с использованием формулы перестановки Дирихле нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} \Gamma(1 - a_j)Ay = & x \int_x^1 \omega_j(\xi)y(\xi)d\xi \int_\xi^1 \frac{[(1 - t)a_j(t)]' dt}{(t - \xi)^{\alpha_j}} + \\ & + \int_0^x \omega_j(\xi)y(\xi) \left\{ (1 - x) \int_\xi^x \frac{[ta_j(t)]' dt}{(t - \xi)^{\alpha_j}} - x \int_x^1 \frac{[(t - 1)a_j(t)]' dt}{(t - \xi)^{\alpha_j}} \right\} d\xi. \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение (8) является интегральным уравнением Фредгольма второго рода, которое в силу теоремы 1 безусловно и однозначно разрешимо.

Для изучения спектра оператора

$$D^{(\beta)} \equiv D_{0x}^{-\alpha} \frac{d^2}{dx^2}, \quad \beta = 2 - \alpha,$$

рассмотрим теперь задачу (6) для уравнения

$$y'' + \lambda D_{0x}^\alpha y = 0, \quad 0 < \alpha < 1, \quad \lambda = \text{const}. \quad (9)$$

Из теоремы 1 вытекает, что числа $\lambda \leq 0$ не могут быть собственными значениями этого оператора и поэтому будем предполагать, что $\lambda > 0$. Вопрос о собственном спектре оператора $D^{(\beta)}$ впервые исследован М. М. Джрбашьяном [6].

Общее решение уравнения (9), удовлетворяющее условию $y(0) = 0$, совпадает с решением уравнения Вольтерра

$$y(x) + \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)} \int_0^x (x - t)^{1-\alpha} y(t) dt = cx, \quad (10)$$

где c – произвольная постоянная. Повторные ядра функции $(x - t)^{1-\alpha}$ имеют вид $k^{(n)}(x, t) = \Gamma^n(\beta)(x - t)^{n\beta-1}/\Gamma(n\beta)$, $n = 1, 2, \dots$. Принимая это во внимание, нетрудно убедиться в том, что

$$y(x) = cx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{\Gamma(2 + n\beta)} x^{n\beta} = cx E_{1/\beta}(-\lambda x^\beta, 2),$$

где

$$E_\rho(z, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n / \Gamma(\mu + n/\rho)$$

– функция типа Миттаг-Леффлера, которая является целой функцией порядка ρ и типа 1 [9].

Теперь очевидно, что имеет место следующая теорема (см. соответствующее утверждение работы [6]).

Теорема 4. Число λ является собственным значением задачи (6) для уравнения (9) тогда и только тогда, когда

$$E(\alpha, \lambda) \equiv E_{1/\beta}(-\lambda, 2) = 0. \quad (11)$$

Поскольку $1/2 \leq 1/\beta < 1$, то множество корней уравнения (11) не пусто и, более того, оно всегда счетно [6], [9]. При $\beta = 2$ ($\alpha = 0$) числа $\lambda_k = \pi^2 k^2$, $k = 0, 1, \dots$, являются корнями этого уравнения.

Для отыскания на ЭВМ границ вещественных нулей функции $E(\alpha, \lambda)$ можно воспользоваться следующим алгоритмом:

$$E(\alpha, \lambda) \cong y_n(\alpha, \lambda) = \sum_{k=0}^n A_k / \Gamma(x_k),$$

$$A_k = (-\lambda)^k / \prod_{j=0}^k (x_k + j), \quad x_k = (1 - a)k + 1,$$

$$A_k = -A_{k-1} \frac{\lambda}{x_k + k} B_k, \quad B_k = \prod_{j=1}^k \left(1 - \frac{1 - \alpha}{x_k + j - 1} \right), \quad A_0 = 1;$$

$1/\Gamma(x_k)$ вычисляется согласно алгоритму 806 из [10].

В силу теоремы Лейбница погрешность аппроксимации функции $E(\alpha, \lambda)$ полиномом $y_n(\alpha, \lambda)$ не превышает $|A_{n+1}|/\Gamma(x_{n+1})$, как только $\lambda B_n \Gamma(x_{n-1}) \leq (x_n + n)\Gamma(x_n)$, например, при $\beta n \geq \lambda + \alpha - 3$.

Описанный алгоритм реализован А. В. Бородиным в виде программ на ФОРТРАН для ЭВМ ЕС-1020 в Вычислительном центре Кабардино-Балкарского университета. Счет по этой программе подтверждает гипотезу о наличии вещественных нулей λ_k , $k = 0, 1, \dots$, у функции $E(\alpha, \lambda)$ при $0 \leq \alpha < 1$. В частности, если $\alpha = 1/10$, то первые два нуля λ_0 и λ_1

удовлетворяют неравенствам $9,5 < \lambda_0 < 9,6$; $33,5 < \lambda_1 < 33,6$, причем для всех $n \geq 22$

$$y_n(0,1; 9,5) = 0,629613953590690 \cdot 10^{-3} \pm 10^{-19},$$

$$y_n(0,1; 9,6) = 0,378454434018503 \cdot 10^{-2} \pm 10^{-18}.$$

В заключение отметим, что задача (2) для уравнения (1) при $m = \infty$ исследуется аналогично случаю $m \neq \infty$, если на коэффициенты и класс решений наложить дополнительные условия, которые придают бесконечной сумме содержательный смысл.

Задача (2) является фредгольмовой и для более общего уравнения

$$Ly + \frac{d}{dx} \sum_{j=0}^{\infty} b_j(x) D_{0x}^{\beta_j} y = f(x), \quad 0 < \beta_j < 1,$$

с достаточно гладкими коэффициентами.

Литература

1. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10, № 1.
2. Нахушев А. М. Сообщ. АН ГрузССР. 1975. Т. 77, № 3.
3. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 1.
4. Елдесбаев Т. Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 3.
5. Бжихатлов А. Г., Нахушев А. М. ДАН. 1968. Т. 183, № 2.
6. Джрбашян М. М. Изв. АН АрмССР. 1970. Т. 5, № 2.
7. Джрбашян М. М., Нерсисян А. В. Изв. АН АрмССР. 1968. Т. 3, № 1.
8. Бицадзе А. В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966.
9. Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966.
10. Агеев М. И., Аликов В. П., Марков Ю. И. Библиотека алгоритмов 516-1006, вып. 2. М.: Сов. радио, 1976.

Поступила в редакцию
8 февраля 1977 г.

Кабардино-Балкарский
государственный университет

К теории краевых задач для уравнения смешанного гипербола-параболического типа

В ограниченной области Ω евклидовой плоскости точек $z = (x, y)$ с кусочно-гладкой границей Σ рассмотрим уравнение смешанного гипербола-параболического типа

$$Lu = u_{yy} - k(z)u_{xx} + a(z)u_x + b(z)u_y + c(z)u = f(z), \quad (1)$$

где $0 \leq k$, a , b и c – заданные в замыкании $\bar{\Omega}$ функции из класса $C(\bar{\Omega})$.

Пусть x_n и y_n — направляющие косинусы внешней нормали n к Σ ;

$$\Sigma_+ = \{z | z \in \Sigma, x_n \geq 0\}, \quad \Sigma_- = \Sigma \setminus \Sigma_+;$$

$$\Sigma_+^+ = \{z | z \in \Sigma_+, y_n^2 - kx_n^2 < 0\}, \quad \Sigma_+^- = \Sigma_+ \setminus \Sigma_+^+;$$

$$\Sigma_-^+ = \{z | z \in \Sigma_-, y_n^2 - kx_n^2 > 0\}, \quad \Sigma_-^- = \Sigma_- \setminus \Sigma_-^+.$$

Ниже излагается простой прием, позволяющий правильно сформулировать краевую задачу для уравнения (1) в области Ω , в частности, доказываем, что от граничных условий освобождается лишь часть Σ_-^- границы Σ .

С оператором L свяжем однопараметрическое семейство операторов L_μ , $\mu \leq 0$, по формуле

$$L_\mu v \equiv v_{yy} - kv_{xx} + a_\mu v_x + bv_y + c_\mu v,$$

где $a_\mu = a - 2\mu k$, $c_\mu = c + a\mu - k\mu^2$.

Очевидно, если $u = v \exp(\mu x)$, то $Lu = \exp(\mu x)L_\mu v$.

В дальнейшем предполагается, что функции k , a и c непрерывно дифференцируемы по x в $\bar{\Omega}$.

Пусть $A_{\mu\omega}^{\alpha\varepsilon} = \alpha k + 2a_\mu + k_x - \varepsilon(b^2 + \omega)$, $C_\mu^\alpha = \alpha c_\mu + c_{\mu x}$, где $0 \leq \omega = \omega(z) \in C(\bar{\Omega})$, а $\alpha > 1/\varepsilon$ и ε — положительные числа.

Для любых μ , α , ε и для любой функции ω справедливо неравенство

$$\int_{\Omega} \exp(\alpha x) [A_{\mu\omega}^{\alpha\varepsilon} v_x^2 + (\alpha - 1/\varepsilon) v_y^2 - C_\mu^\alpha v^2] d\Omega + \int_z \exp(\alpha x) [c_\mu x_n v^2 - x_n (kv_x^2 + v_y^2) + 2y_n v_x v_y] d\Sigma \leq \|\omega^{-1/2} L_\mu v\|_0^2, \quad \forall v \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega). \quad (2)$$

Здесь и ниже C означает некоторую положительную постоянную, не зависящую от v , а $\|\cdot\|_0$ — норму в $L_2(\Omega)$. Неравенство (2) по существу было доказано в [1] для случая, когда $k_x \equiv 0$.

Обозначим через $W(B_j)$ множество функций $v(z)$ из $C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, для которых $L_\mu v \in L_2(\Omega)$ и соблюдены краевые условия

$$v|_{\Sigma_+} = 0, \quad v_n|_{\Sigma_+^+} = 0, \quad v_x|_{\Sigma_-^+} = 0, \quad (3)$$

или

$$v|_{\Sigma_+} = 0, \quad v_n|_{\Sigma_+^+} = 0, \quad v_y|_{\Sigma_-^+} = 0, \quad (4)$$

а через Ω_0 — компактное множество $\{z | z \in \bar{\Omega}, k(z) = 0\}$.

На тех частях Σ_+ , где $x_n = 0$, условие $v|_{\Sigma_+} = 0$ можно заменить условием $v_y|_{\Sigma_+} = 0$, если эти части являются интервалами прямых, параллельных оси $y = 0$.

Имеет место следующая

Теорема. Если $\Omega_0 = \emptyset$ или

$$a(z) > 0, \quad 2a(z) + k_x(z) > 0 \quad \forall z \in \Omega_0, \quad (5)$$

то

$$\|v\|_1 \leq C \|L_\mu v\|_0 \quad \forall v \in W(B_j),$$

где $\|\cdot\|_1$ – норма в пространстве $W_2^1(\Omega)$.

Действительно, пусть соблюдено условие (5) и

$$\mu < \mu_0 = \min_{\Omega_0} [-c(z)/a(z)].$$

Поскольку $c_\mu(z) < 0$ в Ω_0 и $c_\mu(z) \in C(\bar{\Omega})$, то существует такое число $\mu_1 \leq \mu_0$, что

$$c_\mu(z) < 0 \quad \forall z \in \bar{\Omega}, \quad \mu \leq \mu_1. \quad (6)$$

Рассмотрим на границе Σ форму

$$Q = c_\mu x_n v^2 - x_n (k v_x^2 + v_y^2) + 2y_n v_x v_y.$$

В силу (6) и равенств

$$v = 0, \quad v_x = v_n x_n, \quad v_y = v_n y_n \quad \forall z \in \Sigma_+,$$

имеем

$$Q|_{\Sigma_+} = x_n (y_n^2 - k x_n^2) v_n^2 \Rightarrow Q|_{\Sigma_+} \geq 0, \quad Q|_{\Sigma_+^+} = 0.$$

Стало быть,

$$Q|_{\Sigma_+} \geq 0. \quad (7)$$

На части Σ_- границы Σ по определению $x_n < 0$, поэтому

$$Q|_{\Sigma_-} \geq 2y_n v_x v_y - x_n (k v_x^2 + v_y^2) \equiv q.$$

Отсюда на основании очевидных неравенств $q|_{\Sigma_-^+} = 0$, $q|_{\Sigma_-} \geq 0$ заключаем, что

$$Q|_{\Sigma_-} \geq 0. \quad (8)$$

Принимая во внимание (7) и (8), основное неравенство (2) при $\omega(z) \equiv 1$ можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \exp(\alpha x) [A_{\mu_1}^{\alpha \varepsilon} v_x^2 + (\alpha - 1/\varepsilon) v_y^2 - C_\mu v^2] d\Omega \leq \\ & \leq C \|L_\mu v\|_0^2 \quad \forall \mu \leq \mu_1, \quad v \in W(B_j). \end{aligned} \quad (9)$$

В силу (6) существует такое α_0 что

$$C_\mu^\alpha(z) < 0 \quad \forall z \in \bar{\Omega}, \quad \alpha \geq \alpha_0. \quad (10)$$

Из второго неравенства условий (5) следует, что при достаточно малых значениях ε

$$A_{\mu_1}^{\alpha\varepsilon} = 2a(z) + k_x(z) - \varepsilon(b^2 + 1) > 0 \quad \forall z \in \Omega_0.$$

Следовательно, найдется такое α_1 , что

$$A_{\mu_1}^{\alpha\varepsilon} > 0 \quad \forall z \in \bar{\Omega}, \quad \alpha \geq \alpha_1. \quad (11)$$

Соотношения (9), (10) и (11) доказывают справедливость теоремы.

Из теоремы заключаем, что если $u(z)$ – регулярное в области Ω решение уравнения (1) с правой частью $f \in L_2(\Omega)$ из класса $C^1(\bar{\Omega})$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{\Sigma_+} = 0, \quad u_n|_{\Sigma_+} = 0, \quad (u_x - \mu u)|_{\Sigma_-} = 0 \quad (12)$$

или

$$u|_{\Sigma_+} = 0, \quad u_n|_{\Sigma_+} = 0, \quad u_y|_{\Sigma_-} = 0, \quad (13)$$

то

$$\int_{\Omega} [(u_x - \mu u)^2 + u_y^2 + u^2] d\Omega \leq C \|f\|_0^2. \quad (14)$$

Из априорной оценки (14) вытекают единственность регулярного решения задачи (12) или (13) для уравнения (1) и существование слабого решения сопряженной (по Лагранжу) задачи в соответствующих этой оценке функциональных пространствах [2].

Основное неравенство (2) позволяет выделить широкий класс уравнений смешанного гипербола-параболического типа, для которых справедлива априорная оценка

$$\|v\|_{++} \leq C \|L_{\mu} v\|_+ \quad \forall v \in W(B_j),$$

где $\|\cdot\|_{++}$ и $\|\cdot\|_+$ – некоторые позитивные, вообще говоря, весовые нормы. Например, если $c(z) < 0$ в Ω_0 и k_x/k , a/k , $b^2/k \in C(\Omega_0)$, то

$$\int_{\Omega} (kv_x^2 + v_y^2 + v^2) d\Omega \leq C \|k^{-1/2} L_{\mu} v\|_0^2 \quad \forall v \in W(B_j).$$

Изложенный выше простой способ дает возможность правильно сформулировать задачи типа (12) или (13) для уравнений вида (1) с коэффициентами, претерпевающими разрывы первого рода при переходе через многообразия Ω_0^j изменения типа уравнения, когда на этих многообразиях заданы соответствующие условия линейного сопряжения для искомой функции u и ее производной по некасательному к Ω_0^j направлению. Однако следует отметить, что существует ряд корректных задач

для уравнения смешанного гиперболо-параболического типа, которые не являются частными случаями задачи (12) или (13). Например, в области $\Omega = \{z \mid 0 < x < l, 0 < y < x_0\}$ рассмотрим следующую задачу для модельного уравнения смешанного гиперболо-параболического типа:

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - u_{yy}, & 0 < x < x_0, \\ u_{xx} - u_y, & x_0 < x < l. \end{cases} \quad (15)$$

Задача А. Найти регулярное в области Ω при $x \neq x_0$ решение $u(x, y)$ уравнения (15) из класса $C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq l; \quad u(x, x_0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq x_0;$$

$$u(0, y) = \varphi_0(y), \quad u(l, y) = \varphi_l(y), \quad 0 \leq y \leq x_0,$$

где $\tau(x)$, $\varphi_0(y)$, $\varphi_l(y)$ и $\psi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции.

Нетрудно доказать, что задача А является корректно поставленной.

Многие задачи тепло- и массообмена [3], [4] сводятся к краевым задачам типа (12) или (13) для простейших частных случаев уравнения (1), вообще говоря, с разрывными коэффициентами.

Рассмотрим теперь уравнение (см. [5])

$$u_{yy} - y^2 u_{xx} - u_x = 0, \quad (16)$$

для которого нарушено условие (5) теоремы.

Вторая задача Дарбу, которая является частным случаем задачи (B_j) , для уравнения (16) имеет бесчисленное множество линейно независимых решений [1], а первая задача всегда разрешима и притом единственным образом [6].

Пусть Ω – характеристический двуугольник, т. е. область, ограниченная характеристиками $x - \frac{1}{2}y^2 = 0$ и $x + \frac{1}{2}y^2 = 1$ уравнения (16).

Задача В. Найти регулярное в области Ω решение $u(x, y)$ уравнения (16) из класса $C(\bar{\Omega})$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x, \sqrt{2x}) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1/2; \quad u(x, -\sqrt{2-2x}) = \psi(x), \quad 1/2 \leq x \leq 1.$$

Задача В является корректно поставленной [7], хотя предложенным выше способом для нее не удастся получить априорную оценку вида (14).

Среди работ, посвященных краевым задачам для уравнений смешанного гиперболо-параболического типа, следует отметить работы [8–10], где получен ряд важных результатов.

В заключение хочется выразить глубокую благодарность чл.-корр. АН СССР А. В. Бицадзе, проф. В. А. Ильину и проф. Ш. А. Алимову за весьма полезное обсуждение результатов этой работы на руководимых ими семинарах.

Литература

1. Нахушев А. М. ДАН. 1970. Т. 195, № 4.
2. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наукова думка, 1965.
3. Лыков А. В. Инж.-физ. журн. 1965. Т. 9, № 3.
4. Ведерников В. В. Вестн. с.-х. науки. 1972. Т. 3, № 74.
5. Бицадзе А. В. Уравнение смешанного типа. Итоги науки. М., 1959.
6. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, № 1.
7. Нахушев А. М. Сообщ. АН ГрузССР. 1975. Т. 77, № 3.
8. Елеев В. А. Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 1.
9. Каратопрклиев Г. Д. Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 1.
10. Ланин И. Н. Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 1.

Поступила в редакцию
9 марта 1977 г.

Кабардино-Балкарский
государственный университет

К теории линейных краевых задач для уравнения второго порядка смешанного гиперболо-параболического типа

В ограниченной области Ω евклидовой плоскости точек $z = (x, y)$ с кусочно-гладкой границей Σ рассмотрим уравнение смешанного гиперболо-параболического типа

$$Lu = u_{yy} - k(z)u_{xx} + a(z)u_x + b(z)u_y + c(z)u = f(z), \quad (1)$$

где $0 \leq k$, a , b и c – заданные в замыкании $\bar{\Omega}$ функции из класса $C(\bar{\Omega})$.

Пусть x_n и y_n – направляющие косинусы внешней нормали n к Σ

$$\begin{aligned} \Sigma_+ &= \{z \mid z \in \Sigma, x_n \geq 0\}, \quad \Sigma_- = \Sigma \setminus \Sigma_+; \\ \Sigma_+^+ &= \{z \mid z \in \Sigma_+, y_n^2 - kx_n^2 < 0\}, \quad \Sigma_+^- = \Sigma_+ \setminus \Sigma_+^+; \\ \Sigma_-^+ &= \{z \mid z \in \Sigma_-, y_n^2 - kx_n^2 > 0\}, \quad \Sigma_-^- = \Sigma_- \setminus \Sigma_-^+. \end{aligned}$$

Ниже излагается простой прием, позволяющий правильно сформулировать краевую задачу для уравнения (1) в области Ω . В частности, доказывается, что от граничных условий освобождается лишь часть Σ_-^- границы Σ .

С оператором L свяжем однопараметрическое семейство операторов L_μ , $\mu \leq 0$, по формуле

$$L_\mu v \equiv v_{yy} - kv_{xx} + a_\mu v_x + bv_y + c_\mu v,$$

где $a_\mu = a - 2\mu k$, $c_\mu = c + a\mu - k\mu^2$. Очевидно, если $u = v \exp(\mu x)$, то $Lu = \exp(\mu x)L_\mu v$. В дальнейшем предполагается, что функции k , a и c непрерывно дифференцируемы по x в $\bar{\Omega}$.

Пусть

$$A_{\mu\omega}^{\alpha\varepsilon} = \alpha k + 2a_\mu + k_x - \varepsilon(b^2 + \omega), \quad C_\mu^\alpha = \alpha c_\mu + c_{\mu x},$$

где $0 \leq \omega = \omega(z) \in C(\overline{\Omega})$, $\alpha > 1/\varepsilon$ и ε – положительные числа. Для любых μ , α , ε и для любой функции ω справедливо неравенство

$$\int_{\Omega} \exp(\alpha x) [A_{\mu\omega}^{\alpha\varepsilon} v_x^2 + (\alpha - 1/\varepsilon) v_\mu^2 - C_\mu^\alpha v^2] d\Omega + \int_{\Sigma} \exp(\alpha x) [c_\mu x_n v^2 - x_n (k v_x^2 + v_y^2) + 2y_n v_x v_y] d\Sigma \leq \|\omega^{-1/2} L_\mu v\|_0^2, \quad \forall v \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega). \quad (2)$$

Здесь и ниже C означает некоторую положительную постоянную, не зависящую от v , а $\|\cdot\|_0$ – норму в $L_2(\Omega)$. Неравенство (2) по существу было доказано в [1] для случая, когда $k_x \equiv 0$. Оно непосредственно вытекает из соотношения

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [(\delta k)_x v_x^2 + 2\delta a_\mu v_x^2 + \delta_x v_y^2 + 2\delta b v_x v_y - (\delta c_\mu)_x v^2] d\Omega + \\ & + \int_{\Sigma} \delta [c_\mu x_n v^2 - x_n (k v_x^2 + v_y^2) + 2y_n v_x v_y] d\Sigma = \\ & = 2(\delta v_x, L_\mu v)_0, \quad \delta = \exp(\alpha x). \end{aligned}$$

Обозначим через $W(B_j)$ множество функций $v(z)$ из $C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, для которых $L_\mu v \in L_2(\Omega)$ и соблюдены краевые условия

$$v|_{\Sigma_+} = 0, \quad v_n|_{\Sigma_+^+} = 0, \quad v_x|_{\Sigma_-^+} = 0 \quad (3)$$

или

$$v|_{\Sigma_+} = 0, \quad v_n|_{\Sigma_+^+} = 0, \quad v_y|_{\Sigma_-^+} = 0, \quad (4)$$

а через Ω_0 – компактное множество $\{z \mid z \in \overline{\Omega}, k(z) = 0\}$.

На тех частях Σ_+ , где $x_n = 0$, условие $v|_{\Sigma_+} = 0$ можно заменить условием $v_y|_{\Sigma_+} = 0$, если эти части являются интервалами прямых, параллельных оси $y = 0$. Имеет место следующая

Теорема. Если $\Omega_0 = \emptyset$ или

$$a(z) > 0, \quad 2a(z) + k_x(z) > 0 \quad \forall z \in \Omega_0, \quad (5)$$

то

$$\|v\|_1 \leq C \|L_\mu v\|_0 \quad \forall v \in W(B_j),$$

где $\|\cdot\|_1$ – норма в пространстве $W_2^1(\Omega)$.

Действительно, пусть соблюдено условие (5) и

$$\mu < \mu_0 = \min_{\Omega_0} [-c(z)/a(z)].$$

Поскольку $c_\mu(z) < 0$ в Ω_0 и $c_\mu(z) \in C(\overline{\Omega})$, то существует такое число $\mu_1 \leq \mu_0$, что

$$c_\mu(z) < 0 \quad \forall z \in \overline{\Omega}, \quad \mu \leq \mu_1. \quad (6)$$

Рассмотрим на границе Σ форму

$$Q = c_\mu x_n v^2 - x_n (k v_x^2 + v_y^2) + 2 y_n v_x v_y.$$

В силу (6) и равенств

$$v = 0, \quad v_x = v_n x_n, \quad v_y = v_n y_n \quad \forall z \in \Sigma_+$$

имеем

$$Q|_{\Sigma_+} = x_n (y_n^2 - k x_n^2) v_n^2 \Rightarrow Q|_{\Sigma_+} \geq 0, \quad Q|_{\Sigma_+^+} = 0.$$

Стало быть,

$$Q|_{\Sigma_+} \geq 0. \quad (7)$$

На части Σ_- – границы Σ по определению $x_n < 0$, поэтому

$$Q|_{\Sigma_-} \geq 2 y_n v_x v_y - x_n (k v_x^2 + v_y^2) \equiv q.$$

Отсюда на основании очевидных неравенств $q|_{\Sigma_-^+} = 0$, $q|_{\Sigma_-} \geq 0$ заключаем, что

$$Q|_{\Sigma_-} \geq 0. \quad (8)$$

Принимая во внимание (7) и (8), основное неравенство (2) при $\omega(z) \equiv 1$ можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \exp(\alpha x) [A_{\mu_1}^{\alpha \varepsilon} v_x^2 + (\alpha - 1/\varepsilon) v_y^2 - C_\mu^\alpha v^2] d\Omega \leq \\ & \leq C \|L_\mu v\|_0^2 \quad \forall \mu \leq \mu_1, \quad v \in W(B_j). \end{aligned} \quad (9)$$

В силу (6) существует такое α_0 , что

$$C_\mu^\alpha(z) < 0 \quad \forall z \in \overline{\Omega}, \quad \alpha \geq \alpha_0. \quad (10)$$

Из второго неравенства условий (5) следует, что при достаточно малых значениях ε

$$A_{\mu_1}^{\alpha \varepsilon} = 2a(z) + k_x(z) - \varepsilon(b^2 + 1) > 0 \quad \forall z \in \Omega_0.$$

Следовательно, найдется такое α_1 , что

$$A_{\mu_1}^{\alpha \varepsilon} > 0 \quad \forall z \in \overline{\Omega}, \quad \alpha \geq \alpha_1. \quad (11)$$

Соотношения (9), (10) и (11) доказывают справедливость теоремы.

Из теоремы заключаем, что если $u(z)$ – регулярное в области Ω решение уравнения (1) с правой частью $f \in L_2(\Omega)$ из класса $C^1(\overline{\Omega})$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{\Sigma_+} = 0, \quad u_n|_{\Sigma_+^+} = 0, \quad (u_x - \mu u)|_{\Sigma_-^+} = 0 \quad (12)$$

или

$$u|_{\Sigma_+} = 0, \quad u_n|_{\Sigma_+^+} = 0, \quad u_y|_{\Sigma_-^+} = 0, \quad (13)$$

то

$$\int_{\Omega} [(u_x - \mu u)^2 + u_y^2 + u^2] d\Omega \leq C \|f\|_0^2. \quad (14)$$

Из априорной оценки (14) вытекают единственность регулярного решения задачи (12) или (13) для уравнения (1) и существование слабого решения сопряженной (по Лагранжу) задачи в соответствующих этой оценке функциональных пространствах [2].

Основное неравенство (2) позволяет выделить широкий класс уравнений смешанного гипербола-параболического типа, для которых справедлива априорная оценка

$$\|v\|_{++} \leq C \|L_{\mu} v\|_{+} \quad \forall v \in W(B_j),$$

где $\|\cdot\|_{++}$ и $\|\cdot\|_{+}$ – некоторые позитивные, вообще говоря, весовые нормы. Например, если $c(z) < 0$ в Ω_0 и k_x/k , a/k , $b^2/k \in C(\Omega_0)$, то

$$\int_{\Omega} (kv_x^2 + v_y^2 + v^2) d\Omega \leq C \|k^{-1/2} L_{\mu} v\|_0^2 \quad \forall v \in W(B_j).$$

Очевидно, первая и смешанная краевые задачи для параболического ($k(z) \equiv 0$) и гиперболического ($k(z) \equiv 1$) уравнений соответственно являются частными случаями задачи (12) или (13).

Если $k(z) \equiv 1$ и Ω есть круг $|z| < 1$, то

$$\Sigma_+ = \{z \mid |z| = 1, \operatorname{Re} z \geq 0\},$$

$$\Sigma_+^+ = \{z \mid z \in \Sigma_+, -\pi/4 < \arg z < \pi/4\},$$

$$\Sigma_-^+ = \{z \mid |z| = 1, 3\pi/4 \leq \arg z \leq 3\pi/2\}.$$

Поэтому задача (12) или (13) сводится к последовательному решению задач Коши, Дарбу и Гурса.

Изложенный выше простой способ дает возможность правильно сформулировать задачи типа (12) или (13) для уравнений вида (1) с коэффициентами, претерпевающими разрывы первого рода при переходе

через многообразия Ω_0^j изменения типа уравнения, когда на этих многообразиях заданы соответствующие условия линейного сопряжения для искомой функции u и ее производной по некасательному к Ω_0^j направлению. Однако следует отметить, что существует ряд корректных задач для уравнения смешанного гиперболо-параболического типа, которые не являются частными случаями задачи (12) или (13). Например, в области $\Omega = \{z \mid 0 < x < l, 0 < y < x_0\}$ рассмотрим следующую задачу для модельного уравнения смешанного гиперболо-параболического типа:

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - u_{yy}, & 0 < x < x_0, \\ u_{xx} - u_y, & x_0 < x < l. \end{cases} \quad (15)$$

Задача А. Найти регулярное в области Ω при $x \neq x_0$ решение $u(x, y)$ уравнения (15) из класса $C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq l; \quad u(x, x_0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq x_0,$$

$$u(0, y) = \varphi_0(y), \quad u(l, y) = \varphi_l(y), \quad 0 \leq y \leq x_0,$$

где $\tau(x)$, $\varphi_0(y)$, $\varphi_l(y)$ и $\psi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции.

Принимая во внимание теорему о среднем значении для одномерного волнового уравнения нетрудно доказать, что задача А является корректно поставленной. Многие задачи тепло- и массообмена [3], [4] сводятся к краевым задачам типа (12) или (13) для простейших частных случаев уравнения (1), вообще говоря, с разрывными коэффициентами.

Рассмотрим теперь уравнение (см. [5])

$$u_{yy} - y^2 u_{xx} - u_x = 0, \quad (16)$$

для которого нарушено условие (5) теоремы.

Вторая задача Дарбу, которая является частным случаем задачи (B_j) , для уравнения (16) имеет бесчисленное множество линейно независимых решений [1], а первая задача всегда разрешима и притом единственным образом [6].

Пусть Ω – характеристический двуугольник, т. е. область, ограниченная характеристиками $x - \frac{1}{2}y^2 = 0$ и $x + \frac{1}{2}y^2 = 1$ уравнения (16).

Задача В. Найти регулярное в области Ω решение $u(x, y)$ уравнения (16) из класса $C(\bar{\Omega})$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x, \sqrt{2x}) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1/2; \quad u(x, -\sqrt{2-2x}) = \psi(x), \quad 1/2 \leq x \leq 1.$$

Задача В является корректно поставленной [7], хотя предложенным выше способом для нее не удастся получить априорную оценку вида (14).

В конечной области Ω , ограниченной характеристиками

$$AC: x - \frac{1}{2}y^2 = 0, \quad BC: x + \frac{1}{2}y^2 = 1, \quad y \leq 0 \quad (17)$$

уравнения (16) и отрезками $AA_0: x = 0, 0 \leq y \leq y_0$; $BB_0: x = 1, 0 \leq y \leq y_0$; $A_0B_0: y = y_0, 0 \leq x \leq 1$, рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} y^2 u_{xx} - u_{yy} + u_x, & \forall y < 0, \\ u_{xx} - u_y, & \forall y > 0. \end{cases} \quad (18)$$

Уравнение (18) характерно тем, что оно представляет собой простую модель уравнения смешанного гипербола-параболического типа, для которого линия $y = 0$ изменения типа является характеристикой параболического уравнения, а характеристики AB и BC неравноправны как носители данных Дарбу [7].

Задача С. Найти регулярное в области Ω при $y \neq 0$ решение $u(x, y)$ уравнения (18) из класса $C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u(0, y) = \varphi_0(y), \quad u(1, y) = \varphi_1(y), \quad 0 \leq y \leq y_0, \quad (19)$$

$$u(x, -\sqrt{2-2x}) = \psi(x), \quad 1/2 \leq x \leq 1, \quad (20)$$

где $\varphi_0(y)$, $\varphi_1(y)$ и $\psi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции.

Задача С является непосредственным аналогом задачи Трикоми [8]. Общее решение уравнения (18), удовлетворяющее условию (20) в области $\Omega^- = \Omega \cap \{z \mid y < 0\}$, задается формулой [7]

$$u(x, y) = \tau\left(x + \frac{1}{2}y^2\right) + \frac{y}{2} \int_0^1 t^{-1/2} \psi_*\left(x + \frac{1}{2}y^2 - y^2 t\right) dt,$$

где

$$\psi_*(x) = \sqrt{1-x} \varphi'\left(\frac{1+x}{2}\right).$$

Отсюда легко видеть, что

$$\nu(x) = \lim_{y \rightarrow -0} u_y(x, y) = \psi_*(x).$$

Очевидно, след $u(x, 0) = \lim_{y \rightarrow \pm 0} u(x, y)$ искомого решения совпадает с $\tau(x)$. Стало быть,

$$\tau(x) = \int_0^x (x-t) \psi_*(t) dt - x \int_0^1 (1-t) \psi_*(t) dt + [\varphi_1(1) - \varphi_0(0)]x + \varphi_0(0).$$

Таким образом, задача C редуцирована к первой краевой задаче для уравнения теплопроводности $u_y = u_{xx}$ с начальным условием $u(x, 0) = \tau(x)$ и граничным условием (19).

В заключение рассмотрим одну простую краевую задачу для уравнения

$$0 = \begin{cases} u_{yy} - au_x - y^2 u_{xx} & \text{при } y < 0, \\ u_{yy} - bu_x & \text{при } y > 0, \end{cases} \quad (21)$$

в бесконечной области Ω , ограниченной характеристиками (17) и полупрямыми $AA_\infty: x = 0, y \geq 0$, $BB_\infty: x = 1, y \geq 0$, предполагается, что $|a| \leq 1, b > 0$. Уравнение (21) примечательно тем, что для него линия изменения типа не является характеристикой уравнения теплопроводности, а характеристики (17), вообще говоря, неравноправны как носители граничных данных. В уравнении (21) роль временной переменной играет переменная x .

Задача Д. Найти регулярное в областях $\Omega^+ = \Omega \cap (y > 0)$ и $\Omega^- = \Omega \cap (y < 0)$ решение уравнения (21), которое непрерывно в $\bar{\Omega}$ и удовлетворяет следующим условиям:

$$u(0, y) = \varphi(y), \quad 0 \leq y \leq +\infty,$$

$$u(x, -\sqrt{2x}) = \psi(2x), \quad 0 \leq 2x \leq 1, \quad (22)$$

$$\lim_{y \rightarrow +0} u_y(x, y) = \beta(x) \lim_{y \rightarrow -0} u_y(x, y) + \gamma(x), \quad 0 < x < 1,$$

где φ, ψ, β и γ – заданные достаточно гладкие функции.

Для простоты изложения ограничимся случаем, когда $\varphi(y) \equiv 0$, $\beta(x) = \text{const} \neq 0$, $\gamma(x) \equiv 0$. Пусть $\tau(x) = u(x, 0)$ – «распределение влаги (или тепла) на границе раздела областей Ω^+ и Ω^- », а $\nu(x) = \lim_{y \rightarrow +0} u_y(x, y)$ – «количество влаги (теплоты), протекающее в единицу времени через начальную точку $y = 0$ ». Тогда нетрудно заметить [9], что если $u(x, y) = u^+(x, y)$ – решение уравнения (21) в области Ω^+ , удовлетворяющее условию $u(0, y) \equiv 0$, то

$$\nu(x) = -\frac{\sqrt{b}}{\Gamma(1/2)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\tau(t)}{\sqrt{x-t}} dt = -\sqrt{b} D_{0x}^{1/2} \tau, \quad (23)$$

где D_{0t}^l – оператор дробного интегрирования (от 0 до x) порядка $-l$ при $l < 0$ и обобщенного в смысле Римана–Лиувилля дифференцирования порядка l при $l > 0$.

Из (23) имеем

$$\tau(x) = -\frac{1}{\sqrt{b}} D_{0x}^{-1/2} \nu(x). \quad (24)$$

Общее решение $u^-(x, y)$ уравнения (21) в области Ω^- при $|a| < 1$ имеет вид [5]

$$u^-(x, y) = A \int_0^1 \tau \left[x + \frac{y^2}{2}(1-2t) \right] t^{-\frac{a+3}{4}} (1-t)^{\frac{a-3}{4}} dt + \\ + By \int_0^1 \nu_- \left[x + \frac{y^2}{2}(1-2t) \right] t^{-\frac{a+1}{4}} (1-t)^{\frac{a-1}{4}} dt, \quad (25)$$

где

$$\nu_-(x) = \lim_{y \rightarrow 0} u_y(x, y), \quad A = \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma\left(\frac{1-a}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1+a}{4}\right)}, \quad B = \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma\left(\frac{3-a}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3+a}{4}\right)}.$$

Из (25) в силу (22) после несложных преобразований имеем

$$T(\tau) \equiv A\sqrt{x} \int_0^x \frac{t^{\frac{a-3}{4}} \tau(t) dt}{(x-t)^{\frac{a+3}{4}}} = \varphi(x) + B \int_0^x \frac{t^{\frac{a-1}{4}} \nu_-(t) dt}{(x-t)^{\frac{a+1}{4}}}, \quad 0 < x < 1. \quad (26)$$

Принимая во внимание соотношения (24), получим

$$T(\tau) = -\frac{A\sqrt{x}}{\sqrt{\pi b}} \int_0^x \nu(t) dt \int_t^x \xi^{\frac{a-3}{4}} (x-\xi)^{-\frac{a+3}{4}} (\xi-t)^{-\frac{1}{2}} d\xi = \\ = -\frac{A\Gamma\left(\frac{1-a}{4}\right)}{\sqrt{b}\Gamma\left(\frac{3-a}{4}\right)} x^{\frac{a-1}{4}} \int_0^x \frac{\nu(t)}{(x-t)^{\frac{a+1}{4}}} F\left(\frac{3-a}{4}, \frac{1-a}{4}, \frac{3-a}{4}; \frac{x-t}{x}\right) dt = \\ = -\frac{A\Gamma\left(\frac{1-a}{4}\right)}{\sqrt{b}\Gamma\left(\frac{3-a}{4}\right)} \int_0^x \frac{t^{\frac{a-1}{4}} \nu(t) dt}{(x-t)^{\frac{a+1}{4}}} = -\frac{A\Gamma\left(\frac{1-a}{4}\right)}{\sqrt{b}} D_{0x}^{\frac{a-3}{4}} x^{\frac{a-1}{4}} \nu(x). \quad (27)$$

С учетом (27) и условия сопряжения $\nu(x) = \beta \nu_-(x)$, $0 < x < 1$, равенство (24) можно переписать в виде

$$C_a D_{0x}^{\frac{a-3}{4}} x^{\frac{a-1}{4}} \nu_-(x) = -\psi(x), \quad 0 < x < 1, \quad (28)$$

где

$$C_a = \sqrt{\pi} \left[\frac{1}{2\Gamma\left(\frac{3+a}{4}\right)} + \frac{\beta}{\sqrt{b}\Gamma\left(\frac{1+a}{4}\right)} \right].$$

Если

$$2\Gamma\left(\frac{3+a}{4}\right) \beta \sqrt{b^{-1}} + \Gamma\left(\frac{1+a}{4}\right) \neq 0, \quad (29)$$

то из (28) имеем

$$C_a x^{\frac{a-1}{4}} \nu_-(x) = -D_{0x}^{\frac{3-a}{4}} \psi(x).$$

Очевидно, условие (29) является необходимым и достаточным для однозначной разрешимости исследуемой задачи при $|a| < 1$.

При $a = 1$, $C_1 = \sqrt{\pi}/2 + \beta/\sqrt{b}$, условие (29) принимает вид $\beta \neq -\frac{\sqrt{\pi b}}{2}$, и, как нетрудно показать,

$$\nu_-(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} D_{0x}^{1/2} [\tau(x) - \psi(x)].$$

Пусть теперь $a = -1$. Тогда (см. [5])

$$u^-(x, y) = \tau\left(x - \frac{1}{2}y^2\right) + \frac{y}{2} \int_0^1 \nu_- \left[x + (1-2t)\frac{y^2}{2} \right] \frac{dt}{\sqrt{1-t}}.$$

И поэтому легко видеть, что

$$\nu_-(x) = 2\sqrt{x}\psi'(x).$$

Следовательно, каково бы ни было $\beta \neq 0$, рассматриваемая задача всегда разрешима и притом единственным образом.

Литература

1. Нахушев А. М. ДАН СССР. 1970. Т. 195, № 4.
2. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наукова думка, 1965.
3. Лыков А. В. ИФЖ. 1965. Т. 9, № 3.
4. Ведерников В. В. Вестник сельскохозяйственной науки. М.: Колос, 1972.
5. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959.
6. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, № 1.
7. Нахушев А. М. Сообщ. АН ГССР. 1975. Т. 77, № 3.
8. Нахушев А. М., Бжихатлов Х. Г. ДАН СССР. 1968. Т. 183, № 2.
9. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.-Л.: ГИТТЛ, 1951.

Поступила в редакцию
2 августа 1977 г.

Кабардино-Балкарский
государственный университет

Нелокальная задача и задача Гурса для нагруженного уравнения гиперболического типа и их приложения к прогнозу почвенной влаги

В области $\Omega = \{z \mid 0 < x < l, 0 < y < T\}$ евклидовой плоскости точек $z = (x, y)$ рассмотрим нагруженное [1] уравнение гиперболического типа

$$Lu = a(z) \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y \alpha(z, \eta) u(x, \eta) d\eta + b(z) \frac{\partial}{\partial y} \int_0^x \beta(z, \xi) u(\xi, y) d\xi + f(z), \quad (1)$$

где

$$u(z) \equiv u(x, y), \quad Lu \equiv u_{xy} + A(z)u_x + B(z)u_y + C(z)u.$$

Предполагается, что $a_x, b_y, \alpha_x, \beta_y, A_x, B_y, C$ и f непрерывны в замыкании $\bar{\Omega}^2$ области $\Omega^2 = \Omega \times \Omega$.

Задача Гурса. Найти регулярное в области Ω решение $u(z)$ уравнения (1) из класса $C(\bar{\Omega})$, удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

$$u(0, y) = \psi(y), \quad 0 \leq y \leq T. \quad (3)$$

Пусть $R(\xi, \eta; z)$ – функция Римана, которая однозначно определяется как решение задачи Гурса:

$$R(\xi, \eta; z) = \exp \left(\int_{\eta}^y A(x, t) dt \right), \quad R(\xi, y; z) = \exp \left(\int_{\xi}^x B(t, y) dt \right), \quad (4)$$

для уравнения

$$R_{\xi\eta} - (AR)_{\xi} - (BR)_{\eta} + CR = 0.$$

Введем следующие обозначения:

$$K_{\alpha}^{\beta}(z; \zeta) = \int_{\eta}^y \alpha(\xi, \eta_1; \eta) [a(\xi, \eta_1) R(\xi, \eta_1; z)]_{\xi} d\eta_1 +$$

$$+ \int_{\xi}^x \beta(\xi_1, \eta; \xi) [b(\xi_1, \eta) R(\xi_1, \eta; z)]_{\eta} d\xi_1, \quad \zeta = (\xi, \eta);$$

$$K_{\alpha}(z; \eta) = \int_{\eta}^y \alpha(x, \eta_1; \eta) a(x, \eta_1) R(x, \eta_1; z) d\eta_1;$$

$$K^{\beta}(z; \xi) = \int_{\xi}^x \beta(\xi_1, y; \xi) b(\xi_1, y) R(\xi_1, y; z) d\xi_1;$$

$$\begin{aligned} \Phi(z; \varphi) = & R(x, 0; z) \varphi(x) - R(0, 0; z) \varphi(0) + \int_0^x \left[B(\xi, 0) R(\xi, 0; z) - \right. \\ & \left. - R_{\xi}(\xi, 0; z) - \int_{\xi}^x \beta(\xi_1, 0; \xi) b(\xi_1, 0) R(\xi_1, 0; z) d\xi_1 \right] \varphi(\xi) d\xi; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi(z; \psi) = & R(0, y; z)\psi(y) + \int_0^y \left[A(0; \eta)R(0, \eta; z) - R_\eta(0, \eta; z) - \right. \\ & \left. - \int_\eta^y \alpha(0, \eta_1; \eta)a(0; \eta_1)R(0, \eta_1; z)d\eta_1 \right] \psi(\eta)d\eta; \\ F(z; f) = & \int_0^x d\xi \int_0^y R(\xi; z)f(\xi)d\eta; \quad f_\alpha^\beta = \Phi(z; \varphi) + \Psi(z; \psi) + F(z; f). \end{aligned}$$

Справедлива

Теорема 1. *Задача Гурса (2), (3) для уравнения (1) эквивалентна нагруженному интегральному уравнению Вольтерра второго рода*

$$\begin{aligned} u(z) + \int_0^x d\xi \int_0^y K_\alpha^\beta(z; \xi)U(\xi, \eta)d\eta = & f_\alpha^\beta(z) + \\ + \int_0^x K^\beta(z; \xi)u(\xi, y)d\xi + \int_0^y K_\alpha(z; \eta)u(x, \eta)d\eta, \end{aligned} \quad (5)$$

которое безусловно и однозначно разрешимо.

Эквивалентность задачи Гурса уравнению (5) легко устанавливается, исходя из хорошо известных свойств функции Римана $R(\zeta, z)$. Уравнение (5) однозначно и безусловно разрешимо [2], [3], так как обратимая замена

$$u(z) = v(z) + \int_0^x P(z; \xi_1)v(\xi_1, y)d\xi_1 + \int_0^y Q(z; \eta_1)v(x, \eta_1)d\eta_1, \quad (6)$$

где P и Q – соответственно являются решениями интегральных уравнений Вольтерра второго рода

$$\begin{aligned} P(z; \xi_1) - \int_{\xi_1}^x K^\beta(z; \xi)P(\xi, y; \xi_1)d\xi = & K^\beta(z; \xi_1), \\ Q(z; \eta_1) - \int_{\eta_1}^y K_\alpha(z; \eta)Q(x, \eta; \eta_1)d\eta = & K_\alpha(z; \eta_1), \end{aligned}$$

редуцирует его к интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$v(z) = \int_0^x d\xi \int_0^y r(z; \zeta)v(\zeta)d\eta + f_\alpha^\beta(z) \quad (7)$$

с ядром

$$r(z; \zeta) = P(x, \eta; \xi) K_\alpha(z; \eta) - K_\alpha^\beta(z; \zeta) + Q(\xi, y; \eta) K^\beta(z; \xi) - \\ - \int_{\xi}^x K_\alpha^\beta(z; \xi_1, \eta) P(\xi_1, \eta; \xi) d\xi_1 - \int_{\eta}^y K_\alpha^\beta(z; \xi, \eta_1) Q(\xi, \eta_1; \eta) d\eta_1.$$

Нелокальная задача. Найти регулярное в области Ω решение $u(z)$ уравнения (1) из класса $C(\bar{\Omega})$ удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l; \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_0^{x_0} u(\xi, y) d\xi = \tau(y), \quad 0 \leq x \leq l; \quad (9)$$

где $0 < x_0 \leq l$, $\varphi(x)$ и $\tau(y)$ – заданные непрерывные функции.

Пользуясь общим представлением (6), (7) всех регулярных в Ω и непрерывных в $\bar{\Omega}$ решений уравнения (1), нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Теорема 2. Если для всех $y \in [0, T]$

$$\int_0^{x_0} \left[R(0, y; \xi, y) + \int_0^{\xi} P(\xi, y; \xi_1) R(0, y; \xi_1, y) d\xi_1 \right] d\xi \neq 0, \quad (10)$$

то нелокальная задача (8), (9) для уравнения (1) всегда разрешима и притом единственным образом.

В силу (4) можно доказать, что условие (10) имеет место в случае, когда

$$b(z)\beta(z; \xi) \geq 0 \quad \forall z \in \bar{\Omega}, \quad \xi \geq 0.$$

Многие задачи, связанные с динамикой почвенной влаги и грунтовой воды, редуцируются к локальным и нелокальным краевым задачам для различных частных случаев уравнения (1). Рассмотрим, например, линеаризованное уравнение Аллера [4], [5]

$$u_y = \frac{\partial}{\partial x} (Du_x + Au_{xy}) = \frac{\partial}{\partial x} \Pi(x, y), \quad (11)$$

где A и D – достаточно гладкие положительные функции, $\Pi(x, y)$ – поток почвенной влаги в точке x в момент времени $y \geq 0$. Очевидно, если известен поток $\Pi(0, y) = f(y)$ влаги на поверхности $x = 0$ почвы для любого момента времени $y \in [0, T]$, то уравнение (11) можно переписать в виде

$$Au_{xy} + Du_x = \frac{\partial}{\partial y} \int_0^x u(\xi, y) d\xi + f(y).$$

Из теорем 1 и 2 вытекает, что для уравнения влагопереноса (11) корректно поставлена

Задача А. Определить распределение влаги $u(x, y)$ в почвенном слое $0 \leq x \leq l$ для всех времен y , $0 \leq y \leq T$, если известны:

1) поток влаги на поверхности почвы

$$\Pi(0, y) = f(y), \quad 0 \leq y \leq T;$$

2) глубинный ход влажности в начальный момент

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l;$$

3) распределение влаги на поверхности почвы

$$u(0, y) = \psi(y), \quad 0 \leq y \leq T,$$

или же скорость расхода влаги в слое $0 \leq x \leq x_0$, $0 < x_0 \leq l$

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_0^{x_0} u(\xi, y) d\xi = \tau(y), \quad 0 \leq y \leq T.$$

При надлежащей схематизации процесса поглощения почвенной влаги корнями растений (см. [5, с. 196]) давление $u(x, y)$, $x = \xi^2 + \eta^2$, в области корневого впитывания удовлетворяет уравнению вида

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{x} \right) (u_{xy} + \lambda u_x) = \mu u_y, \quad \lambda, \mu = \text{const.} \quad (12)$$

Если сделать естественное предположение об ограниченности «потока» $u_{xy} + \lambda u_x$ на оси симметрии $x = 0$ в любой момент времени $y \in [0, T]$, то уравнение (12) редуцируется к нагруженному гиперболическому уравнению с характеристическим вырождением порядка при $x = 0$:

$$x(u_{xy} + \lambda u_x) = \mu \frac{\partial}{\partial y} \int_0^x \xi u(\xi, y) d\xi. \quad (13)$$

Задача Гурса (2), (3) для уравнения (13) эквивалентна нагруженному интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \mu \int_0^x \xi \log \frac{x}{\xi} u(\xi, y) d\xi - \lambda \mu \int_0^x d\xi \int_0^y \exp \lambda(\eta - y) \xi \log \frac{x}{\xi} u(\xi, \eta) d\eta + \\ & + \left[\varphi(x) - \varphi(0) - \mu \int_0^x \log \frac{x}{\xi} \varphi(\xi) d\xi \right] \exp(-\lambda y) + \psi(y), \end{aligned}$$

которое безусловно и однозначно разрешимо.

В заключение отметим, что нелокальным задачам посвящены весьма важные работы [6], [7].

Литература

1. Нахушев А. М. О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 1. С. 103–108.
2. Бицадзе А. В. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. 296 с.
3. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959. 164 с.
4. Чудновский А. Ф. Теплофизика почв. М.: Наука, 1976. 353 с.
5. Нерпин С. В., Чудновский А. Ф. Энерго- и массообмен в системе растение-почва-воздух. Л.: Гидрометеиздат, 1975. 358 с.
6. Ильин В. А. О свойствах приведенной подсистемы собственных и присоединенных функций пучка М. В. Келдыша обыкновенных дифференциальных операторов // Доклады АН СССР. 1976. Т. 230, № 1. С. 30–33.
7. Ильин В. А. Необходимые и достаточные условия базисности подсистемы собственных и присоединенных функций пучка М. В. Келдыша обыкновенных дифференциальных операторов // Доклады АН СССР. 1976. Т. 227, № 4. С. 796–799.

Поступила в редакцию
22 мая 1978 г.

Кабардино-Балкарский
государственный университет

Краевые задачи для нагруженных интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа и некоторые их приложения к прогнозу почвенной влаги

В области $\Omega = \{z: 0 < x < h, 0 < y < T\}$ евклидовой плоскости точек $z = (x, y)$ рассматривается нагруженное (см. [1]) (интегро-дифференциальное уравнение) уравнение гиперболического типа

$$Lu = \sum_{i=1}^3 B_i u + f(z), \quad u = u(z) \equiv u(x, y), \quad (1)$$

где

$$Lu \equiv u_{xy} + A(z)u_x + B(z)u_y + C(z)u;$$

$$B_1 u \equiv a(z) \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y \alpha(z; \eta) u(x, \eta) d\eta +$$

$$+ b(z) \frac{\partial}{\partial y} \int_0^x \beta(z; \xi) u(\xi, y) d\xi + \int_0^x d\xi \int_0^y c(z; \zeta) u(\zeta) d\eta;$$

$$B_2 u \equiv \int_0^y \alpha^i(z; \eta) u(x_i, \eta) d\eta + \int_0^x \beta^j(z; \xi) u(\xi, y_j) d\xi;$$

$$B_3 u \equiv c^{ij}(z)u(x_i, y_j), \quad \zeta = (\xi, \eta).$$

Здесь и ниже под индексами $i = 1, \dots, m$ и $j = 1, \dots, n$ подразумевается суммирование.

В дальнейшем, если особо не оговорено, предполагается, что $a_x, b_y, \alpha_x, \beta_y, A_x, B_y$ и все остальные заданные функции непрерывны в $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$, где $\overline{\Omega}$ – замыкание Ω .

В работе исследуются локальная и нелокальные задачи для различных важнейших частных случаев уравнения (1). Основной (локальной) краевой задачей является

Задача Гурса. Найти регулярное в области Ω решение $u(z)$ уравнения (1) из класса $C(\overline{\Omega})$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq h, \quad (2)$$

$$u(0, y) = \psi(y), \quad 0 \leq y \leq T. \quad (3)$$

В теории краевых задач для уравнения (1) фундаментальную роль играет функция Римана $R(\zeta; z) = R(\xi, \eta; x, y)$, которая однозначно определяется как решение задачи Гурса:

$$R(x, \eta; z) = \exp \left(\int_{\eta}^y A(x, t) dt \right), \quad R(\xi, y; z) = \exp \left(\int_{\xi}^x B(t, y) dt \right) \quad (4)$$

для уравнения $R_{\xi\eta} - (AR)_{\xi} - (BR)_{\eta} + CR = 0$.

1. Задача Гурса. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{\alpha}^{\beta}(z; \zeta) &= \int_{\eta}^y \alpha(\xi, \eta_1; \eta) [a(\xi, \eta_1)R(\xi, \eta_1; z)]_{\xi} d\eta_1 + \\ &+ \int_{\xi}^x \beta(\xi_1, \eta; \xi) [b(\xi_1, \eta)R(\xi_1, \eta; z)]_{\eta} d\xi_1 + \int_{\xi}^x d\xi_1 \int_{\eta}^y c(\zeta_1, \zeta)R(\zeta_1, z) d\eta_1; \end{aligned}$$

$$\mathcal{K}_{\alpha}(z; \eta) = \int_{\eta}^y \alpha(x, \eta_1; \eta) a(x, \eta_1) R(x, \eta_1; z) d\eta_1;$$

$$\mathcal{K}^{\beta}(z; \xi) = \int_{\xi}^x \beta(\xi_1, y; \xi) b(\xi_1, y) R(\xi_1, y; z) d\xi_1;$$

$$\Phi(z; \varphi) = R(x, 0; z) \varphi(x) - R(0, 0; z) \varphi(0) + \int_0^x \left[B(\xi, 0) R(\xi, 0; z) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - R_{\xi}(\xi, 0; z) - \int_{\xi}^x \beta(\xi_1, 0; \xi) b(\xi_1, 0) R(\xi_1, 0; z) d\xi_1 \Big] \varphi(\xi) d\xi; \\
& \Psi(z; \psi) = R(0, y; z) \psi(y) + \int_0^y \left[A(0, \eta) R(0, \eta; z) - \right. \\
& \left. - R_{\eta}(0, \eta; z) - \int_{\eta}^y \alpha(0, \eta_1; \eta) a(0, \eta_1) R(0, \eta_1; z) d\eta_1 \right] \psi(\eta) d\eta; \\
& F(z; f) = \int_0^x d\xi \int_0^y R(\xi; z) f(\xi) d\eta; \quad f_{\alpha}^{\beta}(z) = \Phi(z; \varphi) + \Psi(z; \psi) + F(z; f).
\end{aligned}$$

Имеет место

Теорема 1. Задача Гурса (2), (3) для уравнения

$$Lu = B_1 u + f(z) \quad (5)$$

эквивалентна нагруженному интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$\begin{aligned}
& u(z) + \int_0^x d\xi \int_0^{\eta} \mathcal{K}_{\alpha}^{\beta}(z; \zeta) u(\zeta) d\eta = f_{\alpha}^{\beta}(z) + \\
& + \int_0^x \mathcal{K}^{\beta}(z; \xi) u(\xi, y) d\xi + \int_0^y \mathcal{K}_{\alpha}(z; \eta) u(x, \eta) d\eta, \quad (6)
\end{aligned}$$

которое безусловно и однозначно разрешимо.

Уравнение (6) непосредственным вычислением получается из уравнения

$$\begin{aligned}
& u(z) = R(x, 0; z) \varphi(x) - R(0, 0; z) \varphi(0) + R(0, y; z) \psi(y) + \\
& + \int_0^x \left[B(\xi, 0) R(\xi, 0; z) - R_{\xi}(\xi, 0; z) \right] \varphi(\xi) d\xi + \int_0^y \left[A(0, \eta) R(0, \eta; z) - \right. \\
& \left. - R_{\eta}(0, \eta; z) \right] \psi(\eta) d\eta + F(z; f) + \int_0^x d\xi \int_0^y R(\xi; z) (B_1 u) d\eta,
\end{aligned}$$

которое в силу свойств функции Римана R эквивалентно задаче (2), (3) для (5).

Уравнение (6) однозначно и безусловно разрешимо (см. [2–5]), так как обратимая замена

$$u(z) = v(z) + \int_0^x P(z; \xi_1) v(\xi_1, y) d\xi_1 + \int_0^y Q(z; \eta_1) v(x, \eta_1) d\eta_1, \quad (7)$$

где P и Q соответственно являются решениями интегральных уравнений Вольтерра второго рода

$$P(z; \xi_1) - \int_{\xi_1}^x \mathcal{K}^\beta(z; \xi) P(\xi, y; \xi_1) d\xi = \mathcal{K}^\beta(z; \xi_1), \quad (8)$$

$$Q(z; \eta_1) - \int_{\eta_1}^y \mathcal{K}_\alpha(z; \eta) Q(x, \eta; \eta_1) d\eta = \mathcal{K}_\alpha(z; \eta_1), \quad (9)$$

редуцируют его к интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$v(z) = \int_0^x d\xi \int_0^y r(z; \zeta) v(\zeta) d\eta + f_\alpha^\beta(z)$$

с ядром

$$\begin{aligned} r(z; \zeta) = & P(x, \eta; \xi) \mathcal{K}_\alpha(z; \eta) - \mathcal{K}_\alpha^\beta(z; \zeta) + Q(\xi, y; \eta) \mathcal{K}^\beta(z; \xi) - \\ & - \int_\xi^x \mathcal{K}_\alpha^\beta(z; \xi_1, \eta) P(\xi_1, \eta; \xi) d\xi_1 - \int_\eta^y \mathcal{K}_\alpha^\beta(z; \xi, \eta_1) Q(\xi, \eta_1; \eta) d\eta_1. \end{aligned}$$

С учетом (8) и (9) формулу (7) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} u(z) = & \int_0^x P(z; \xi_1) f_\alpha^\beta(\xi_1, y) d\xi + \int_0^y Q(z; \eta_1) f_\alpha^\beta(x; \eta_1) d\eta_1 + \\ & + \int_0^x d\xi_1 \int_0^y \Gamma(z; \zeta_1) f_\alpha^\beta(\zeta_1) d\eta_1 + f_\alpha^\beta(z). \end{aligned} \quad (10)$$

Нетрудно убедиться, что ядро Γ однозначно определяется как решение уравнения

$$\Gamma(z; \zeta_1) = \int_{\xi_1}^x \mathcal{K}^\beta(z; \xi) \Gamma(\xi, y; \zeta_1) d\xi +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\eta_1}^y \mathcal{K}_\alpha(z; \eta) \Gamma(x, \eta; \zeta_1) d\eta - \int_{\xi_1}^x d\xi \int_{\eta_1}^y \mathcal{K}_\alpha^\beta(z; \zeta) \Gamma(\zeta, \zeta_1) d\eta - \\
& - \int_{\xi_1}^x \mathcal{K}_\alpha^\beta(z; \xi, \eta_1) P(\xi, \eta_1; \xi_1) d\xi - \int_{\eta_1}^y \mathcal{K}_\alpha^\beta(z; \xi_1, \eta) Q(\xi_1, \eta; \eta_1) d\eta + \\
& + \mathcal{K}_\alpha(z; \eta_1) P(x, \eta_1; \xi_1) + \mathcal{K}^\beta(z; \xi_1) Q(\xi_1, y; \eta_1).
\end{aligned}$$

Пусть

$$\begin{aligned}
F_\alpha^\beta(z) &= \int_0^x P(z; \xi_1) f_\alpha^\beta(\xi_1, y) d\xi_1 + f_\alpha^\beta(z) + \\
& + \int_0^y Q(z; \eta_1) f_\alpha^\beta(x, \eta_1) d\eta_1 + \int_0^x d\xi_1 \int_0^y \Gamma(z; \zeta_1) f_\alpha^\beta(\zeta_1) d\eta_1, \\
P^i(z; \eta) &= \int_0^x P(z; \xi_1) \alpha^i(\xi_1, y; \eta) d\xi_1 + \int_\eta^y Q(z; \eta_1) \alpha^i(x, \eta_1; \eta) d\eta_1 + \alpha^i(z; \eta) + \\
& + \int_0^x d\xi_1 \int_\eta^y \Gamma(z; \zeta_1) \alpha^i(\zeta_1; \eta) d\eta_1, \\
Q^j(z; \xi) &= \int_\xi^x P(z; \xi_1) \beta^j(\xi_1, y; \xi) d\xi_1 + \int_0^y Q(z; \eta_1) \beta^j(x, \eta_1; \xi) d\eta_1 + \beta^j(z; \xi) + \\
& + \int_\xi^x d\xi_1 \int_0^y \Gamma(z; \zeta_1) \beta^j(\zeta_1; \xi) d\eta_1, \\
\Gamma^{ij}(z) &= \int_0^x P(z; \xi_1) c^{ij}(\xi_1, y) d\xi_1 + \int_0^y Q(z; \eta_1) c^{ij}(x, \eta_1) d\eta_1 + c^{ij}(z) + \\
& + \int_0^x d\xi_1 \int_0^y \Gamma(z; \zeta_1) c^{ij}(\zeta_1) d\eta_1.
\end{aligned}$$

Формула для обращения (10) для оператора $L - B_1$ позволяет доказать, что любое решение $u(z)$ задачи Гурса (2), (3) для уравнения (1) представимо в виде

$$u(z) = \int_0^y P^i(z; \eta) \psi_i(\eta) d\eta +$$

$$+ \int_0^x Q^j(z; \xi) \varphi_j(\xi) d\xi + \Gamma^{ij}(z) \psi_i(y_j) + F_\alpha^\beta(z), \quad (11)$$

где $u(x_i, y) = \psi_i(y)$, $u(x, y_j) = \varphi_j(x)$.

Из (11) непосредственно вытекает

Теорема 2. Задача Гурса (2), (3) для уравнения (1) эквивалентна системе нагруженных интегральных уравнений Фредгольма второго рода

$$\begin{aligned} \psi_l(y) &= \int_0^y P^i(x_l, y; \eta) \psi_i(\eta) d\eta + \int_0^{x_l} Q^j(x_l, y; \xi) \varphi_j(\xi) d\xi + \\ &+ \Gamma^{ij}(x_l, y) \psi_i(y_j) + F_\alpha^\beta(x_l, y), \quad l = 1, \dots, m; \\ \varphi_k(x) &= \int_0^{y_k} P^i(x, y_k; \eta) \psi_i(\eta) d\eta + \int_0^x Q^j(x, y_k; \xi) \varphi_j(\xi) d\xi + \\ &+ \Gamma^{ij}(x, y_k) \psi_i(y_j) + F_\alpha^\beta(x, y_k), \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (12)$$

Легко видеть, что если $c^{ij}(z) \equiv 0 \forall i \in 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$ и $\alpha^i(z; \eta) \equiv 0 \forall i = 1, \dots, m$ или $\beta^j(z; \xi) \equiv 0 \forall j = 1, \dots, n$, то (12) переходит в систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода. При нарушении этих условий задача Гурса для уравнения (1) может не быть безусловно и однозначно разрешимой.

Пример 1. Однородная задача Гурса

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq h; \quad u(0, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq T \quad (13)$$

для уравнения

$$u_{xy} = \lambda \left[\int_0^x u(\xi, x_0) d\xi + \int_0^y u(x_0, \eta) d\eta \right], \quad \lambda = \text{const}, \quad x_0 > 0, \quad (14)$$

не имеет решений, отличных от тривиального, тогда и только тогда, когда $\lambda \neq -\pi^2 k^2 / x_0^3$, $k = 0, \pm 1, \dots$. Все собственные функции $u_k(z)$, т. е. нетривиальные решения задачи (13), (14), соответствующие собственным значениям $\lambda_k = -\pi^2 k^2 / x_0^3$, имеют вид

$$u_k(z) = c_0 \left(y \sin \frac{\pi k x}{x_0} - x \sin \frac{\pi k y}{x_0} \right), \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (15)$$

где c_0 — произвольная постоянная.

Действительно, на основании (11) любое решение $u(z)$ задачи (13), (14) задается формулой

$$u(z) = \lambda y \int_0^x (x - \xi) \varphi_0(\xi) d\xi + \lambda x \int_0^y (y - \eta) \psi_0(\eta) d\eta, \quad (16)$$

где $\varphi_0(\xi) = u(\xi, x_0)$; $\psi_0(\eta) = u(x_0, \eta)$. Отсюда заключаем, что искомые функции φ_0 и ψ_0 удовлетворяют системе уравнений Фредгольма второго рода

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) - \lambda x_0 \int_0^x (x - \xi) \varphi_0(\xi) d\xi &= \lambda x \int_0^{x_0} (x_0 - \xi) \psi_0(\xi) d\xi, \\ \psi_0(y) - \lambda x_0 \int_0^y (y - \xi) \psi_0(\xi) d\xi &= \lambda y \int_0^{x_0} (x_0 - \xi) \varphi_0(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (17)$$

Система (17) не имеет решений, представимых в виде

$$\varphi_0(x) = \mu_0 \sin(x\sqrt{-\lambda x_0}), \quad \psi_0(y) = \nu_0 \sin(y\sqrt{-\lambda x_0}) \quad (18)$$

при $\lambda < 0$, и в виде

$$\varphi_0(x) = \mu_1 \operatorname{sh}(x\sqrt{\lambda x_0}), \quad \psi_0(y) = \nu_1 \operatorname{sh}(y\sqrt{\lambda x_0}) \quad (19)$$

при $\lambda > 0$, где μ_i и ν_i ($i = 0, 1$) – неизвестные постоянные. Подставляя (18) и (19) в (17) и принимая во внимание, что

$$\lambda x_0 \int_0^x (x - \xi) \sin(\xi\sqrt{-\lambda x_0}) d\xi = \sin(x\sqrt{-\lambda x_0}) - x\sqrt{-\lambda x_0}, \quad \lambda < 0;$$

$$\lambda x_0 \int_0^x (x - \xi) \operatorname{sh}(\xi\sqrt{\lambda x_0}) d\xi = \operatorname{sh}(x\sqrt{\lambda x_0}) - x\sqrt{\lambda x_0}, \quad \lambda > 0,$$

получим

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} y_0 \mu_0 + (y_0 - \sin y_0) \nu_0 &= 0, \\ y_0 \nu_0 + (y_0 - \sin y_0) \mu_0 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (\lambda < 0), \\ \left. \begin{aligned} y_0 \mu_1 + (y_0 - \operatorname{sh} y_0) \nu_1 &= 0, \\ y_0 \nu_1 + (y_0 - \operatorname{sh} y_0) \mu_1 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (\lambda > 0), \end{aligned}$$

где $y_0 = x_0 \sqrt{|\lambda| x_0}$. Из этих систем алгебраических уравнений заключаем, что $\mu_1 = \nu_1 = 0$, а μ_0 и ν_0 отличны от нуля тогда и только тогда, когда $y_0 = \pi k$, $k = 0, \pm 1, \dots$

Пусть $y_0 = \pi k$, тогда, очевидно, $\mu_0 + \nu_0 = 0$. Стало быть, равенство (18) можно переписать в виде

$$\varphi_0(x) = \mu_0 \sin \frac{\pi k x}{x_0}, \quad \psi_0(y) = -\mu_0 \sin \frac{\pi k y}{x_0}. \quad (20)$$

Теперь легко заметить, что из (16) и (20) вытекает (15).

Пример 2. Задача Гурса (13) для уравнения

$$u_{xy} - f(z) = B_3 u \equiv c^{ij} u(x_i, y_j), \quad c^{ij} = \text{const}, \quad (21)$$

не имеет более одного решения тогда и только тогда, когда

$$\Delta = 1 - c^{ij} x_i y_j \neq 0.$$

При $\Delta \neq 0$ единственное решение $u(z)$ задается формулой

$$u(z) = xy [c^{ij} F(x_i, y_j)] / \Delta + F(z),$$

где

$$F(z) = \int_0^x d\xi \int_0^y f(\xi, \eta) d\eta.$$

Действительно, задача (13), (21) эквивалентна нагруженному функциональному уравнению

$$u(z) = xy B_3 u + F(z).$$

Стало быть,

$$B_3 u = c^{ij} x_i y_j B_3 u + c^{ij} F(x_i, y_j).$$

В заключении параграфа заметим, что и задача Коши в классической постановке

$$\left. \frac{\partial^j u}{\partial t^j} \right|_{t=0} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m-1,$$

для нагруженных дифференциальных уравнений и систем вида

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m} = Au + c^{ij}(x, t) u(x_i, t_j) + f(x, t), \quad x = (x_1, \dots, x_n),$$

где A – дифференциальный оператор, не содержащий производных по временной переменной t порядка выше $m-1$, не будет безусловно разрешимой. Например, задача Коши

$$u(0) = u'(0) = \dots = u^{(m-1)}(0) = 0$$

для уравнения

$$u^{(m)} = c^i u(t_i) + f(t),$$

$u = u(t)$, $c^i = \text{const}$, $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, разрешима тогда и только тогда, когда $c^i t_i^n \neq n!$

2. Нелокальные задачи и их приложения. Пусть α_j и $\tau(y)$ – заданные достаточно гладкие на сегменте $0 \leq y \leq T$ функции, а $x_0 > 0$, x^j , $j = 1, \dots, n$ – фиксированные точки, принадлежащие промежутку $0 \leq x \leq h$.

Задача А. Найти регулярное в области Ω решение $u(z)$ уравнения (1), непрерывное в Ω и удовлетворяющее условию (2), если дополнительно для всех $y \in [0, T]$ известно, что

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_0^{x_0} u(\xi, y) d\xi = \tau(y) \quad (22)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial y} \sum_{j=1}^n \alpha_j(y) u(x^j, y) = \tau(y). \quad (23)$$

Нелокальные условия (22) и (23) можно переписать в виде

$$\int_0^{x_0} u(\xi, y) d\xi = \tau_1(y) = \int_0^y \tau(t) dt + \int_0^{x_0} \varphi(\xi) d\xi, \quad (24)$$

$$\alpha_j(y) u(x^j, y) = \tau_1(y) = \int_0^y \tau(t) dt + \alpha_j(0) \varphi(x^j). \quad (25)$$

При численной реализации на ЭВМ нелокальных краевых задач с условием вида (24) может оказаться весьма полезным редукция условия (24) к условиям вида (25). Так, например, на основании квадратурной формулы Симпсона условие (24) можно приближенно заменить условием

$$u(0, y) + 4u(x_0/2, y) + u(x_0, y) = 6\tau_1(y)/x_0 \quad (26)$$

и тем самым редуцировать его к условию вида (25).

Следует отметить, что условие (25) является непосредственным обобщением условий Бизадзе–Самарского [6].

Очевидно, нельзя ожидать безусловной и однозначной разрешимости задачи (2), (22) или (2), (23) для общего уравнения (1).

Единственное решение $u(z)$ задачи (2), (22) для уравнения $u_{xy} = 0$ задается формулой

$$u(z) = \varphi(x) + \frac{1}{x_0} \int_0^y \tau(t) dt.$$

Для этого же уравнения задача (2), (22) имеет решение и притом единственное, если

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j(y) \neq 0 \quad \forall y \in [0, T]. \quad (27)$$

Нарушение условий (27) может вызвать некорректность задачи.

Пользуясь общим представлением (7) для всех регулярных в области Ω и непрерывных в $\bar{\Omega}$ решений уравнения (5), нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Теорема 3. Если для всех $y \in [0, T]$

$$\int_0^{x_0} \left[R(0, y; \xi, y) + \int_0^{\xi} P(\xi, y; \xi_1) R(0, y; \xi_1, y) d\xi_1 \right] d\xi \neq 0,$$

то нелокальная задача (2), (22) для уравнения (5) всегда разрешима и притом единственным образом.

В силу (4) $R(x, \eta; z) > 0$. Принимая это во внимание, можно доказать, что условие теоремы 3 имеет место в случае, когда $b(z) \beta(z; \xi) \geq 0$.

Рассмотрим однородную нелокальную задачу

$$u(0, x) = 0, \quad \alpha_j(y) u(x^j, y) = 0 \quad (28)$$

для уравнения

$$Lu = f(z). \quad (29)$$

На основании приведенного в п.1 общего представления всех регулярных и непрерывных в $\bar{\Omega}$ решений уравнения (29) получаем, что задача (28), (29) эквивалентна уравнению Вольтерра

$$\begin{aligned} \alpha_j(y) R(0, y; x^j, y) \psi(y) + \int_0^y \alpha_j(y) [A(0, \eta) R(0, \eta; x^j, y) - \\ - R_\eta(0, \eta; x^j, y)] \psi(\eta) d\eta + F(x^j, y; f) \alpha_j(y), \end{aligned}$$

где $\psi(y) = u(0, y)$, $0 \leq y \leq T$, которое безусловно и однозначно разрешимо, если

$$\alpha_j(y) \exp \left(\int_0^{x^j} B(t, y) dt \right) \neq 0 \quad \forall y \in [0, T].$$

Многие задачи, связанные с динамикой почвенной влаги и грунтовой воды, редуцируются к локальным и нелокальным краевым задачам для различных частных случаев уравнения (1).

Рассмотрим, например, линеаризованное уравнение Аллера [7, 8]

$$u_y = \frac{\partial}{\partial x} (Du_x + Au_{xy}) \equiv \frac{\partial}{\partial x} \Pi(x, y), \quad (30)$$

где A и D – достаточно гладкие положительные функции, $\Pi(x, y)$ – поток почвенной влаги в точке x в момент времени $y \geq 0$.

Очевидно, если известен поток $\Pi(0, y) = f(y)$ влаги на поверхности $x = 0$ почвы для любого момента времени $y \in [0, T]$, то уравнение (30) можно переписать в виде

$$Au_{xy} + Du_x = \frac{\partial}{\partial y} \int_0^x u(\xi, y) d\xi + f(y).$$

Из теорем 1 и 3 вытекает, что для уравнения влагопереноса (30) корректно поставлена

Задача В. Определить распределение влаги $u(x, y)$ в почвенном слое $0 \leq x \leq h$ для всех времен $y \in [0, T]$, если известны

- 1) поток влаги на поверхности почвы $\Pi(0, y) = f(y)$, $0 \leq y \leq T$;
- 2) глубинный ход влажности в начальный момент $u(x, 0) = \varphi(x)$, $0 \leq x \leq h$;
- 3) распределение влаги на поверхности почвы $u(0, y) = \psi(y)$, $0 \leq y \leq T$, или же скорость расхода влаги в слое $0 \leq x \leq x_0$, $0 < x_0 \leq l$:

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_0^{x_0} u(\xi, y) d\xi = \tau(y), \quad 0 \leq y \leq T.$$

Для уравнения (30) физически содержательный смысл имеют нелокальные задачи, когда одно из классических граничных условий при $x = 0$ или $x = h$ заменено условием вида (23) или более общим условием, связывающим значения искомого решения $u(x, y)$ и ее производной по пространственной координате в фиксированных точках $x^j \in [0, h]$. Сформулируем одну из таких задач для уравнения (30) в случае, когда $D = \text{const} > 0$, $A \equiv 0$.

Задача С. Найти регулярное в области Ω решение $u(x, y)$ уравнения

$$u_y = Du_{xx}, \quad (31)$$

непрерывное в $\bar{\Omega}$ и удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq h; \quad u(h, y) = \psi_h(y), \quad 0 \leq y \leq T; \quad (32)$$

$$u(0, y) = \alpha_j(y) u(x^j, y) + \delta(y), \quad 0 \leq y \leq T, \quad (33)$$

где $0 < x^1 < x^2 < \dots < x^n < h$; $\varphi(0) = \alpha_j(0) \varphi(x^j) + \delta(0)$.

Для простоты записи ограничимся случаем, когда $\varphi(x) = \psi_h(y) \equiv 0$. Пусть $\psi(y) \equiv u(0, y)$ и $G(x, y; \xi, \eta)$ – функция Грина первой краевой задачи

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq h; \quad u(0, y) = \psi(y), \quad u(h, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq T,$$

для уравнения (31). Как хорошо известно

$$u(x, y) = D \int_0^y \psi(\eta) [G_\xi(x, y; \xi, \eta)]_{\xi=0} d\eta. \quad (34)$$

Удовлетворяя (34) нелокальному условию (33), получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\psi(y) = D\alpha_j(y) \int_0^y \psi(\eta) [G_\xi(x^j, y; \xi, \eta)]_{\xi=0} d\eta + \delta(y),$$

из которого однозначно определяется искомая функция $\psi(y)$.

Как было отмечено выше, к нелокальным условиям типа (33) могут привести многие практически важные задачи, например задача (см. [9, 10]) отыскания решения $u(x, y)$ уравнения (30) или (31) по краевым условиям (32) и (22) с $x_0 = h$. Действительно, если (24) приближенно заменить условием (26), то из последнего с учетом (32) получаем нелокальное условие типа условия Бицадзе–Самарского [6]

$$u(0, y) + 4u(h/2, y) = 6\tau_1(y)/h - \psi_h(y) \quad \forall y \in [0, T].$$

При надлежащей схематизации процесса поглощения почвенной влаги корнями растений (см. [8, с. 196]) давление $u(x, y)$, $x = \xi^2 + \eta^2$, в области корневого впитывания удовлетворяет уравнению вида

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{x} \right) (u_{xy} + \lambda u_x) = \mu u_y, \quad \lambda, \mu = \text{const}. \quad (35)$$

Если сделать естественное предположение об ограниченности «потока» $u_{xy} + \lambda u_x$ на оси симметрии $x = 0$, то уравнение (35) редуцируется к нагруженному гиперболическому уравнению с характеристическим вырождением порядка при $x = 0$

$$x(u_{xy} + \lambda u_x) = \mu \frac{\partial}{\partial y} \int_0^x \xi u(\xi, y) d\xi. \quad (36)$$

Задача Гурса (2), (3) для уравнения (36) эквивалентна нагруженному интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$u(x, y) = \mu \int_0^x \xi \log \frac{x}{\xi} u(\xi, y) d\xi - \lambda \mu \int_0^x d\xi \int_0^y \exp[\lambda(\eta - y)] \xi \log(x/\xi) \times$$

$$\times u(\xi, \eta) d\eta + \left[\varphi(x) - \varphi(0) - \mu \int_0^x \log(x/\xi) \varphi(\xi) d\xi \right] \exp(-\lambda y) + \psi(y),$$

которое безусловно и однозначно разрешимо.

Литература

1. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 1.
2. Бицадзе А. В. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976.
3. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959.
4. Векуа И. Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. М.–Л., 1948.
5. Гурса Э. Курс математического анализа. Т. 2, ч. 3. М.–Л.: ГТТИ, 1934.
6. Бицадзе А. В., Самарский А. А. ДАН СССР. 1969. Т. 185, № 4.
7. Чудновский А. Ф. Теплофизика почв. М.: Наука, 1976.
8. Нерпин С. В., Чудновский А. Ф. Энерго- и массообмен в системе растение-почва-воздух. Л.: Гидрометеиздат, 1975.
9. Ионкин Н. И. Дифференц. уравнения. 1977. Т. 8, № 2.
10. Дикинов Х. Ж., Сохов Т. З. Дифференциальные и интегральные уравнения // Межвуз. сборник. Вып. 1. Нальчик, 1977.

Поступила в редакцию
27 июня 1978 г.

Кабардино-Балкарский
государственный университет

Критерий единственности решения задачи Дарбу для одного вырождающегося гиперболического уравнения влагопереноса

Одномерный поток влаги $u = u(\xi, t)$ в коллоидном капиллярно-пористом теле поликапиллярной структуры связан с влажностью $w = w(\xi, t)$ в точке ξ в момент времени t обобщенным законом переноса влаги [1]

$$u = -D\rho \frac{\partial w}{\partial \xi} - \tau_0 \frac{\partial u}{\partial t} \quad (D, \rho = \text{const}),$$

где D – коэффициент диффузии, ρ – плотность, $\tau_0 = D/v$ – время релаксации, которая существенно может зависеть от пространственной координаты ξ . Отсюда на основании закона сохранения массы

$$\rho \frac{\partial w}{\partial \xi} = -\frac{\partial u}{\partial \xi}$$

нетрудно увидеть, что

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial}{\partial t} \tau_0 \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (1)$$

А. В. Лыков [1], принимая во внимание, что для ряда капиллярно-пористых тел скорость переноса v примерно равна скорости капиллярного движения, которая в свою очередь обратно пропорциональна пути движения ξ , полагает

$$\tau_0 = \frac{D}{a_0^2} \xi^2, \quad (2)$$

где a_0 – коэффициент пропорциональности, зависящий от пористости тела, его капиллярных свойств и вязкости жидкости.

Из (1) в соответствии с (2) получаем уравнение влагопереноса

$$u_t = Du_{\xi\xi} - \left(\frac{D}{a_0^2}\right) \xi^2 u_{tt}, \quad (3)$$

которое выведено А. В. Лыковым [1] (см. также [2]), с помощью методов термодинамики необратимых процессов.

Переходя в уравнении (3) к безразмерным независимым переменным $x = t/t_0$, $y = \xi/\sqrt{a_0 t_0}$ (t_0 – характерное время), получим

$$y^2 u_{xx} - u_{yy} - au_x = 0 \quad (a = \text{const}), \quad (4)$$

где $a = -a_0/D$ – безразмерная величина.

Любопытно отметить, что уравнение (4) впервые было приведено А. В. Бицадзе [3] как пример уравнения, для которого при $|a| \leq 1$ корректна по Адамару задача Коши с начальными данными на любом участке $x_0 < x < x_1$ линии $y = 0$ параболического вырождения, хотя нарушено известное условие Геллерстедта [4], а автором [5] – как пример уравнения, для которого при $|a| = 1$ задача Дарбу корректно не поставлена и характеристики не являются равноправными как носители граничных данных.

Рассмотрим уравнение (4) в области Ω , ограниченной его характеристиками AC : $\xi = 0$, BC : $\eta = 1$ и отрезком AB : $0 \leq x \leq 1$ прямой $y = 0$, где

$$\xi = x - \frac{1}{2}y^2, \quad \eta = x + \frac{1}{2}y^2 \quad (5)$$

здесь и в дальнейшем означают характеристические координаты.

В работе [5] (см. также [6]), в частности, доказано, что задача Дарбу для уравнения (4) в области Ω с данными на $AB \cup BC$ при $a \geq 0$ или на $AB \cup AC$ при $a \leq 0$ не имеет более одного решения.

Пусть $u(x, y)$ – любое, принадлежащее классу $C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega \cup I) \cap C^2(\Omega)$, где $\bar{\Omega}$ – замыкание Ω , I – единичный интервал $0 < x < 1$, решение уравнения (4) с $|a| < 1$ и

$$\begin{aligned} \tau(x) &= u(x, 0), \quad \nu(x) = u_y(x, 0), \quad x \in I, \\ u|_{BC} &= \varphi(\xi), \quad \xi \in \bar{I}, \quad u|_{AC} = \psi(\eta), \quad \eta \in \bar{I}. \end{aligned}$$

Тогда при дополнительном предположении о суммируемости функции $x^{-(a+1)/4}(1-x)^{(a-1)/4}\nu(x)$ на сегменте $\bar{I}$ можно доказать, что

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) = & B(\beta, \beta')\sqrt{1-\xi} \int_{\xi}^1 \frac{(1-t)^{\beta'-1}\tau(t)dt}{(t-\xi)^{1-\beta}} - \\ & - B(1-\beta, 1-\beta') \int_{\xi}^1 \frac{(1-t)^{-\beta}\nu(t)dt}{(t-\xi)^{\beta'}} \quad \forall \xi \in I, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \psi(\eta) = & B(\beta, \beta')\sqrt{\eta} \int_0^{\eta} \frac{t^{\beta-1}\tau(t)dt}{(\eta-t)^{1-\beta'}} - \\ & - B(1-\beta, 1-\beta') \int_0^{\eta} \frac{t^{-\beta'}\nu(t)dt}{(\eta-t)^{\beta}} \quad \forall \eta \in I, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\beta = (1+a)/4$, $\beta' = (1-a)/4$, а $B(x, y) = \Gamma(x+y)/[\Gamma(x)\Gamma(y)]$ – бета-функция.

Справедливость соотношений (6) и (7) между функциями $\tau(x)$, $\nu(x)$, $\varphi(\xi)$ и $\psi(\eta)$ вытекает из того, что функция $u(x, y)$ представима при $|a| < 1$ в виде [3]

$$\begin{aligned} u(x, y) = & B(\beta, \beta') \int_0^1 \tau[\eta - (\eta - \xi)s] s^{\beta'-1}(1-s)^{\beta-1} ds - \\ & - B(1-\beta', 1-\beta)\sqrt{\eta - \xi} \int_0^1 \nu[\eta - (\eta - \xi)s] s^{-\beta}(1-s)^{-\beta'} ds, \quad 0 < \xi < \eta < 1. \end{aligned}$$

Из (6) и (7) заключаем, что при $|a| < 1$ первая задача Дарбу

$$u|_{AB} = \tau(x), \quad u|_{AC} = \psi(\eta)$$

и ей сопряженная

$$u|_{AB} = \tau(x), \quad u|_{BC} = \varphi(\xi),$$

а также вторая задача Дарбу

$$u_y|_{AB} = \nu(x), \quad u|_{AC} = \psi(\eta)$$

и ей сопряженная

$$u_y|_{AB} = \nu(x), \quad u|_{BC} = \varphi(\xi)$$

для уравнения (4) в области Ω всегда разрешимы и притом единственным образом.

Пусть теперь $a \leq -1$. Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. Решение $u(x, y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ однородной первой задачи Дарбу

$$u|_{AB} = 0, \quad u|_{BC} = 0 \quad (8)$$

для уравнения (4) не совпадает с тривиальным $u(x, y) \equiv 0$ тогда и только тогда, когда коэффициент $a = -4k - 3$, $k = 0, 1, \dots$

Теорема 2. Регулярное решение $u(x, y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega \cup I)$ однородной второй задачи Дарбу

$$u_y|_{AB} = 0, \quad u|_{BC} = 0 \quad (9)$$

для уравнения (4), которое в случае, когда $-3 < a < -1$, обладает тем дополнительным свойством, что производная по η от сужения $u|_{AC} = \psi(\eta)$, $0 < \eta < 1$, при $\eta \rightarrow 1$ не обращается в бесконечность неинтегрируемого порядка, будет тривиальным тогда и только тогда, когда $a \neq -4k - 1$, $k = 0, 1, \dots$

В самом деле, уравнение (4) в характеристических координатах (5) имеет вид

$$(\eta - \xi) u_{\xi\eta} + \beta' u_{\xi} - \beta u_{\eta} = 0. \quad (10)$$

Образом области Ω при отображении (5) является треугольник

$$\Delta = \{(\xi, \eta) : 0 < \xi < \eta < 1\}.$$

Условия (8) и (9) переходят соответственно в условия

$$u|_{\eta=\xi} = 0, \quad u|_{\eta=1} = 0, \quad (11)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow \xi} \sqrt{\eta - \xi} (u_{\eta} - u_{\xi}) = 0, \quad u|_{\eta=1} = 0. \quad (12)$$

Любое решение u уравнения Эйлера–Дарбу–Пуассона (10), удовлетворяющее условию $u|_{\eta=1} = 0$ в области Δ , представимо в виде [3]

$$u = R(0, \eta; \xi, \eta) \psi(\eta) + \int_1^{\eta} \left[-\frac{\partial R(0, t; \xi, \eta)}{\partial t} + \frac{\beta' R(0, t; \xi, \eta)}{t} \right] \psi(t) dt, \quad (13)$$

где

$$R(0, t; \xi, \eta) = \sqrt{t} \eta^{-\beta'} (t - \xi)^{-\beta} F(\beta, \beta', 1; z), \quad z = \frac{\xi(t - \eta)}{\eta(t - \xi)},$$

– значение функции Римана $R(t_1, t; \xi, \eta)$ для уравнения (10) при $t_1 = 0$.

Используя известную формулу приведения Гаусса

$$b(1 - z)F(a + 1, b + 1, c + 1; z) = cF(a, b, c; z) - (c - b)F(a + 1, b, c + 1; z)$$

для гипергеометрической функции $F(a, b, c; z)$, упростим выражение, стоящее в квадратной скобке под знаком интеграла (13)

$$\begin{aligned} \frac{\beta' R}{t} - \frac{\partial R}{\partial t} &= \left(\frac{\beta'}{t} - \frac{1}{2t} + \frac{\beta}{t - \xi} \right) R - \sqrt{t} \eta^{-\beta'} (t - \xi)^{-\beta} \times \\ &\times \beta' \beta (1 - z) F(\beta + 1, \beta' + 1, 1 + 1; z) \frac{\eta(t - \xi)}{t(\eta - \xi)} \frac{\xi(\eta - \xi)}{\eta(t - \xi)^2} = \\ &= \left(\frac{\beta' - 1/2}{t} + \frac{\beta}{t - \xi} \right) R - \frac{\beta \xi \sqrt{t} \eta^{-\beta'} (t - \xi)^{-\beta}}{t(t - \xi)} \times \\ &\times [F(\beta, \beta', 1; z) - (1 - \beta') F(\beta + 1, \beta', 2; z)] = \\ &= \beta(1 - \beta') \xi t^{-1/2} \eta^{-\beta'} (t - \xi)^{-\beta-1} F(\beta + 1, \beta', 2; z). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$u = \eta^\beta (\eta - \xi)^{-\beta} \psi(\eta) - \beta(1 - \beta') \xi \eta^{-\beta'} \int_{\eta}^1 \frac{F(\beta + 1, \beta', 2; z)}{\sqrt{t}(t - \xi)^{\beta+1}} \psi(t) dt. \quad (14)$$

Пусть нарушено условие теоремы 1, т. е. пусть $\beta' = k + 1$, $k = 0, 1, \dots$. Тогда из (14) с учетом (8) и того факта, что $\beta < 0$ и

$$\lim_{\eta \rightarrow \xi} F(\beta + 1, \beta', 2; z) = \lim_{z \rightarrow 1} F(\beta + 1, \beta', 2; z) = \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(1 - \beta) \Gamma(2 - \beta')},$$

получаем уравнение Абеля

$$\tau(\xi) = \lim_{\eta \rightarrow \xi} u = - \frac{\beta(1 - \beta') \Gamma(1/2)}{\Gamma(1 - \beta) \Gamma(2 - \beta')} \xi^{1-\beta'} \int_{\xi}^1 \frac{\psi(t) dt}{\sqrt{t}(t - \xi)^{\beta+1}} = 0,$$

из которого вытекает, что $\psi(\eta) \equiv 0$. Стало быть, $u(x, y) \equiv 0$.

Пусть теперь $\beta' = k + 1$, $k = 0, 1, \dots$. В случае, когда $\beta' = 1$, ($a = -3$), из (14) заключаем, что все нетривиальные решения задачи (8) задаются формулой

$$u = \left(\frac{\eta - \xi}{\eta} \right)^{1/2} \psi(\eta),$$

если же $\beta' = 2$ ($a = -7$), то

$$u = \left(\frac{\eta - \xi}{\eta} \right)^{1/2} \left[\frac{\eta - \xi}{\eta} \psi(\eta) - \frac{3}{2} \frac{\xi}{\eta^2} \int_{\eta}^1 \psi(t) dt \right].$$

При $\beta' = n + 2$, $n = 1, 2, \dots$, на основании известной формулы автотрансформации

$$F(a, b, c; z) = (1 - z)^{c-a-b} F(c - a, c - b, c; z)$$

можно написать (см., например, [7])

$$\begin{aligned} F(\beta + 1, \beta', 2; z) &= (1 - z)^{1/2} F(-n, 1 - \beta, 2; z) = \\ &= (1 - z)^{1/2} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \frac{\Gamma(1 - \beta + m)}{\Gamma(1 - \beta)\Gamma(2 + m)} (-z)^m. \end{aligned} \quad (15)$$

Из (14) с учетом (15) получаем формулу

$$\begin{aligned} u &= \left(\frac{\eta - \xi}{\eta} \right)^{1/2} \left[\left(\frac{\eta - \xi}{\eta} \right)^{n+1} \psi(\eta) - \frac{(n + 3/2)(n + 1)}{\Gamma(n + 5/2)} \xi \eta^{-n-2} \times \right. \\ &\quad \left. \times \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \frac{\Gamma(n + m + 5/2)}{\Gamma(m + 2)} \left(-\frac{\xi}{\eta} \right)^m \int_{\eta}^1 \frac{(t - \eta)^m}{(t - \xi)^{m-n}} \psi(t) dt \right], \end{aligned}$$

которая определяет все нетривиальные решения однородной первой задачи Дарбу (8) для уравнения (4) при $a = -4n - 7$, $n = 1, 2, \dots$. Таким образом, теорема 1 полностью доказана.

Предположим теперь, что нарушено условие теоремы 2: $a = -4k - 1$, $k = 0, 1, \dots$ т. е. $\beta = -k$, $\beta' = k + 1/2$. Поскольку $F(0, \beta', 1; z) \equiv 1$, то из (13) следует, что при $a = -1$ ($\beta = 0$) все нетривиальные решения однородной второй задачи Дарбу (12) задаются формулой

$$u = \psi(\eta),$$

а при $a = -5$ ($\beta = -1$) в силу (14) – формулой

$$u = \frac{\eta - \xi}{\eta} \psi(\eta) - \frac{1}{2} \xi \eta^{-3/2} \int_{\eta}^1 \psi(t) t^{-1/2} dt.$$

Если же $\beta + 1 = -n$, $n = 1, 2, \dots$, то на основании (14) и тождества

$$F(-n, \beta', 2; z) = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \frac{\Gamma(\beta' + m)}{\Gamma(\beta')\Gamma(m + 2)} (-z)^m$$

получаем

$$u = \left(\frac{\eta - \xi}{\eta} \right)^{n+1} \psi(\eta) - \frac{(n + 1)(n + 1/2)}{\Gamma(n + 3/2)} \xi \eta^{-n-3/2} \times$$

$$\times \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \frac{\Gamma(n+m+3/2)}{\Gamma(m+2)} \left(-\frac{\xi}{\eta}\right)^m \int_{\eta}^1 \frac{(t-\eta)^m \psi(t) dt}{\sqrt{t}(t-\xi)^{m-n}}.$$

Из (14) в случае, когда $a < -3$ ($-k \neq \beta < -1/2$, $k = 0, 1, \dots$), имеем

$$\begin{aligned} \nu(x) = \lim_{y \rightarrow -0} u_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow -0} \left\{ -\beta(1-\beta') \xi \eta^{\beta-1} (-y)^{-2\beta-1} \psi(\eta) - \beta(1-\beta') \times \right. \\ \left. \times \xi \eta^{-\beta'} \int_{\eta}^1 \left[\frac{\beta'(\beta+1)F(\beta+2, \beta'+1, 3; z)(-y) t(\xi(t-\xi) + \eta(t-\eta))}{2t^{1/2}(t-\xi)^{\beta+3}\eta^2} - \right. \right. \\ \left. \left. - (\beta+1) \left(\frac{\eta-\xi}{t-\xi}\right)^{1/2-\varepsilon} \frac{(-y)^{2\varepsilon} F(\beta+1, \beta', 2; z)}{t^{1/2}(t-\xi)^{\beta+\varepsilon+3/2}} \right] \psi(t) dt \right\}, \end{aligned}$$

где $0 < \varepsilon < -\beta - 1/2$. Отсюда, поскольку

$$\begin{aligned} F(\beta+2, \beta'+1, 3; z) &= (1-z)^{1/2} F(1-\beta, 2-\beta', 3; z), \\ F(1-\beta, 2-\beta', 3; 1) &= \frac{2\Gamma(1/2)}{\Gamma(2+\beta)\Gamma(1+\beta')}, \end{aligned}$$

находим

$$\begin{aligned} \nu(x) &= \beta(\beta'-1)\beta'(\beta+1)x^{1-\beta'} \times \\ &\times \lim_{y \rightarrow -0} \int_{\eta}^1 \frac{\eta^{1/2}(t-\xi)^{1/2} F(1-\beta, 2-\beta', 3; z)}{2(\eta-\xi)^{1/2}(t-\xi)^{\beta+3}\eta^2} (-y) [\xi(t-\xi) + \eta(t-\eta)] \times \\ &\times \psi(t) dt = \frac{2\beta\beta'(\beta+1)(\beta'-1)\Gamma(1/2)}{\Gamma(2+\beta)\Gamma(1+\beta')} x^{\beta} \int_x^1 \frac{\psi(t) dt}{(t-x)^{\beta+3/2}}. \end{aligned}$$

Таким образом, если $a < -3$, то

$$\nu(x) = \frac{2\Gamma(1/2)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta'-1)} x^{\beta} \int_x^1 \frac{\psi(t) dt}{(t-x)^{\beta+3/2}}. \quad (16)$$

Из (16) в силу (9) ($\nu(x) \equiv 0$) заключаем, что $\psi(x) \equiv 0$.

В случае, когда $-3 < a < -1$, представление (13) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} u &= \int_1^{\eta} \left[\frac{\beta'}{t} \psi(t) + \psi'(t) \right] R(0, t, \xi; \eta) dt = \\ &= \eta^{-\beta} \int_1^{\eta} \left[\frac{\beta'}{t} \psi(t) + \psi'(t) \right] t^{1/2}(t-\xi)^{-\beta} F(\beta, \beta', 1; z) dt. \end{aligned}$$

Отсюда непосредственным вычислением находим

$$\begin{aligned}
 \nu(x) &= \lim_{y \rightarrow -0} u_y = -\beta\beta'x^{-\beta'} \lim_{y \rightarrow -0} \int_{\eta}^1 \left[\frac{\beta'}{t} \psi(t) + \psi'(t) \right] t^{1/2} \times \\
 &\times F(\beta + 1, \beta' + 1, 2; z)(t - \xi)^{-\beta} \frac{(-y)t}{\eta(t - \xi)} \left(\frac{t - \eta}{t - \xi} + \frac{\xi}{\eta} \right) dt = \\
 &= -\beta\beta'x^{-\beta'} \lim_{y \rightarrow -0} \int_{\eta}^1 \left[\frac{\beta'}{t} \psi(t) + \psi'(t) \right] t^{1/2} \frac{\eta^{1/2}(t - \xi)^{1/2}}{t^{1/2}(-y)} \times \\
 &\times F(1 - \beta, 1 - \beta', 2; z)(t - \xi)^{-\beta} \frac{(-y)t}{\eta(t - \xi)} \left(\frac{t - \eta}{t - \xi} + \frac{\xi}{\eta} \right) dt = \\
 &= -2\beta\beta'F(1 - \beta, 1 - \beta', 2; 1) x^{\beta-1} \int_x^1 \frac{\beta'\psi(t) + t\psi'(t)}{(t - x)^{1-\beta'}} dt
 \end{aligned}$$

или

$$\nu(x) = -2B(\beta, \beta') x^{\beta-1} \int_x^1 \frac{\beta'\psi(t) + t\psi'(t)}{(t - x)^{1-\beta'}} dt. \quad (17)$$

Из (17) с учетом того, что в силу (9) $\nu(x) \equiv 0$ и $\psi(1) = 0$, будем иметь $\psi(\eta) \equiv 0$. Стало быть, $u(x, y) \equiv 0$. Таким образом, теорема 2 доказана.

Теоремы 1 и 2 в случае, когда $\psi'(\eta) = \frac{\partial}{\partial \eta}(u|_{\xi=0})$ при $\eta \rightarrow 1$ может иметь лишь особенность интегрируемого порядка, впервые были доказаны Т. Ш. Кальменовым [8] (см. также [9]).

Литература

1. Лыков А. В. Инженерно-физический журнал. 1965. Т. 9, № 3.
2. Лыков А. В. Тепломассообмен. М.: Энергия, 1978.
3. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959.
4. Gellerstedt S. Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik. 1937. Vol. 25 A, no. 29. Pp. 1–23.
5. Нахушев А. М. Доклады АН СССР. 1970. Т. 195, № 4.
6. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, № 1.
7. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М.: ИЛ, 1957.
8. Кальменов Т. Ш. Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, № 1.
9. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8, № 1.

Поступила в редакцию
29 января 1979 г.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и механики КБГУ

О справедливости одной априорной оценки

В n -мерной области Q рассмотрим линейный дифференциальный оператор в частных производных второго порядка

$$Lu \equiv a^{ij}(x) u_{x_i x_j} + b^i(x) u_{x_i} + c(x) u, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

где $a^{ij}(x)$, $b^i(x)$, $c(x)$ – достаточно гладкие в замыкании $\bar{Q}$ функции точки $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и по повторяющимся индексам i, j подразумевается суммирование от 1 до n .

Пусть s – произвольное целое число, $\|u\|_s$ – норма функции $u = u(x)$ в пространстве $W_2^s(Q)$ (см. [1]). В работе исследуется вопрос об априорной оценке вида

$$\|u\|_{s+2} \leq c_0 \|Lu\|_s \quad (\text{для всех } u \in C_0^\infty(\Omega)), \quad (1)$$

где c_0 – не зависящая от u положительная постоянная, Ω – строго внутренняя подобласть области Q . В частности, устанавливается, что оценка (1) не выполняется, если оператор L является оператором смешанного эллиптико-гиперболического типа.

Справедлива следующая

Теорема. Если для некоторого s и любой функции $u \in C_0^\infty(\Omega)$ имеет место априорная оценка (1), то оператор L в области Ω является эллиптическим.

Доказательство этой теоремы при $s = 0$ принадлежит Л. Гордунгу и для любого $s \geq 0$ приводится в книге Ю. М. Березанского [1, с. 124]. Поэтому остается рассмотреть случай $s < 0$.

Пусть $u(x)$ – любая функция из $C_0^\infty(\Omega)$. Применяя оценку (1) к функции u_{x_k} , которая, очевидно, принадлежит $C_0^\infty(\Omega)$, и принимая во внимание равенство

$$Lu_{x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} Lu - lu, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

где

$$lu = a_{x_k}^{ij}(x) u_{x_i x_j} + b_{x_k}^i(x) u_{x_i} + c_{x_k}(x) u,$$

получим

$$\|u_{x_k}\|_{s+2} \leq c_0 \|Lu_{x_k}\|_s = c_0 \left\| \frac{\partial}{\partial x_k} Lu - lu \right\|_s \leq c_0 \left(\left\| \frac{\partial}{\partial x_k} Lu \right\|_s + \|lu\|_s \right).$$

Отсюда в силу очевидных неравенств (см. [1, с. 154], лемма 3.6)

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_k} Lu \right\|_s \leq c_2 \|Lu\|_{s+1} \|lu\|_s \leq c_2 \|u\|_{s+2} \leq c_0 c_2 \|Lu\|_s \leq c_3 \|Lu\|_{s+1}$$

можно записать

$$\|u_{x_k}\|_{s+2} \leq c_4 \|Lu\|_{s+1} \quad (\text{для всех } k = 1, 2, \dots). \quad (2)$$

Здесь и ниже $c_i, i = 2, 3, \dots$, означают положительные постоянные, которые не зависят от u . Из (1) и (2) легко видеть, что $\|u\|_{s+3} \leq c_1 \|Lu\|_{s+1}$ (для всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$).

Если $s + 1 = 0$, то, используя результат Л. Гординга [1], получим, что оператор L в Ω эллиптивен. Если же $s + 1 < 0$, то рассуждения повторяются до тех пор, пока не придем к априорной оценке

$$\|u\|_{s+k+2} \leq c_k \|Lu\|_{s+k} \quad (\text{для всех } u \in C_0^\infty(\Omega))$$

с $s + k = 0$. После этого доказательство опять завершается применением результата Л. Гординга.

Отметим, что аналогичное утверждение справедливо и для любого линейного дифференциального оператора в частных производных четного порядка.

На основании доказанной теоремы можно судить о характере гладкости решения краевых задач для уравнений второго порядка смешанного эллиптико-гиперболического типа. Для этих уравнений можно получить априорные оценки в смешанных нормах, которые завывают гладкость на две единицы лишь в строго внутренних подобластях эллиптической части смешанной области (см. [2]).

Рассмотрим уравнение

$$T_\lambda u \equiv k(y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \lambda u = f(x, y), \quad \lambda = \text{const},$$

где $k(y)$ — непрерывно дифференцируемая для всех $y \in (-\infty, \infty)$ функция, удовлетворяющая условиям $k'(0) > 0, yk(y) > 0$ при $y \neq 0$, в конечной смешанной области Q , которая ограничена гладкой кривой $\Gamma_0 \subset \{(x, y) \mid y > 0\}$ с концами в точках $(0, 0)$ и $(1, 0)$ кривой

$$\Gamma_1: x = \mu(y), \quad y \leq 0, \quad \mu'(y) \leq \sqrt{-k(y)}, \quad \mu(0) = 0$$

и характеристикой

$$\Gamma_2: x = 1 - \int_y^0 \sqrt{-k(t)} dt.$$

Пусть $\widetilde{W}_2^1(Q)$ — пространство функций из $W_2^1(Q)$, обращающихся в нуль на $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$, а $\overset{\circ}{W}_2^{-1}(Q)$ — пространство линейных функционалов над $\overset{\circ}{W}_2^1(Q)$.

В работе [3] (см. также [4]) В. П. Михайлова в области Q исследуется однородная обобщенная задача Трикоми $u|_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1} = 0$ для неоднородного уравнения $T_\lambda u = f$. Результаты В. П. Михайлова сформулированы в виде двух теорем (1.1 и 3.1), которые эквивалентны оценке

$$\|u\|_{\widetilde{W}_2^1(Q)} \leq c \|T_\lambda u\|_{\widetilde{W}_2^{-1}(Q)}, \quad (3)$$

справедливой, по его утверждению, для любой функции $u = u(x, y)$ из $\widetilde{W}_2^1(Q)$ (и тем более справедливой для любой функции u из класса $C_0^\infty(Q)^*$).

Пусть Ω – строго внутренняя подобласть гиперболической части $Q \cap \{(x, y) \mid y < 0\}$ смешанной области Q . Из (3) следует, что

$$\|u\|_1 \leq c \|T_\lambda u\|_{-1} \quad (\text{для всех } u \in C_0^\infty(\Omega)).$$

Но это противоречит доказанной выше теореме, и, стало быть, априорная оценка В. П. Михайлова (3), а также обе теоремы 1.1 и 3.1 из его работы [3] являются ошибочными. Нетрудно указать и непосредственную ошибку в приведенном доказательстве. Следует также отметить, что аналогичная ошибка допущена и в статье И. М. Петрушко [5].

Среди работ, в какой-то степени посвященных обсуждению оценки вида (3) для уравнений смешанного типа, отметим работу Г. Д. Карато-праклиева [6], где указывалось, что «важный вопрос о получении неравенства (3) остается открытым», и работу В. П. Диденко [7], в которой на странице 16 написано: «Если бы H^{**} было множеством второй категории, то по соответствующей теореме о замкнутых операторах было бы справедливо неравенство типа $\|u\|_{W_1} \leq \|Lu\|_{W_{-1}}$ (скачок в две единицы). Однако, по-видимому, H является множеством первой категории, поэтому получить оценку со скачком гладкости на две единицы здесь нельзя».

Литература

1. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наукова думка, 1965.
2. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8, № 1.
3. Михайлов В. П. Тр. МИАН. 1968. Т. 103, № 142.
4. Михайлов В. П. ДАН. 1967. Т. 175, № 5.
5. Петрушко И. М. Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, № 1.
6. Каратопраклиев Г. Д. Докл. Болг. Акад. наук. 1970. Т. 23, № 10.
7. Диденко В. П. Укр. матем. журн. 1973. Т. 25, № 1.

Поступила в редакцию
23 октября 1980 г.

Кабардино-Балкарский
государственный университет

*См. неравенство (3.5) в работе [3, с. 160].

** H – множество значений операторов Трикоми.

Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод

Пусть Ω – n -мерная область евклидова пространства R^n точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Заданное в области Ω дифференциальное, интегродифференциальное или функциональное уравнение $Lu = f(x)$ называется нагруженным, если оно содержит некоторые операции от следа искомого решения $u = u(x)$ на принадлежащих замыканию $\bar{\Omega}$ многообразиях размерности $< n$ (см. [1]).

Односкоростное уравнение переноса

$$x_2 \frac{\partial u}{\partial x_1} + u = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 u(x, t) dt, \quad u(x) = u(x_1, x_2), \quad x \in R^2,$$

с изотропным рассеянием [2], или уравнение [3]

$$x_1 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) = \mu \frac{\partial}{\partial x_2} \int_0^{x_1} tu(t, x_2) dt,$$

которое описывает распределение давления почвенной влаги, поглощаемой корнями растений, представляют собой простейшие примеры нагруженных дифференциальных уравнений.

Важным классом квазилинейных нагруженных дифференциальных уравнений в частных производных, к которым сводятся задачи управления уровнем грунтовых вод при искусственном орошении больших площадей, являются уравнения вида

$$\begin{aligned} a^{ij} u_{x_i x_j} + b^i(x) u_{x_i} + c(x) u + c_k(x) u(x^k) + c_{(m)}(x) u(x^{(m)}) = \\ = \begin{cases} f^*(x), & \text{если } u(x^*) < u^*, \\ f_*(x), & \text{если } u(x^*) > u_*, \end{cases} \end{aligned}$$

где по повторяющимся индексам $i, j = 1, 2, \dots, n$; $k, m = 1, 2, \dots$ подразумевается суммирование; $a^{ij}, b^i, c_k, c_{(m)}, f^*, f_*$ – заданные в области Ω функции точки x ; x^k и x^* – фиксированные точки из $\bar{\Omega}$; u^* и u_* – заданные числа, $x^{(m)}$ – проекция точки $x \in \bar{\Omega}$ на заданную гиперплоскость $x_m = \text{const}$.

Пусть L – дифференциальный или интегродифференциальный оператор с областью определения $D(L)$, а $\tilde{L}$ – нагруженный дифференци-

альный или интегро-дифференциальный оператор такого же типа и порядка, что и L , который с той или иной степенью точности аппроксимирует L . Предлагаемый метод отыскания приближенного решения $\tilde{u} \in D(L)$ уравнения

$$Lu = f(x), \quad u \in D(L), \quad (1)$$

который для простоты назовем методом *редукции к нагруженным уравнениям*, состоит в замене этого уравнения аппроксимирующим

$$\tilde{L}u = f(x), \quad u \in D(\tilde{L}) = D(L). \quad (2)$$

Функция $\tilde{u} \in D(L)$ называется приближенным решением задачи (1), если оно является точным (или приближенным) решением аппроксимирующей задачи (2).

Раскроем сущность метода на некоторых модельных задачах, являющихся весьма важными как в теоретическом аспекте, так и в прикладном.

1. Хорошо известно, что основные краевые задачи для обыкновенного интегро-дифференциального уравнения второго порядка

$$a(x)u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) + \int_{\alpha}^{\beta} d(x, t)u(t)dt = f(x) \quad (3)$$

в интервале $a < x < \beta$ охватываются следующей постановкой: *найти непрерывное на сегменте $[\alpha, \beta]$ (вместе со своими производными до соответствующих порядков) решение $u = u(x)$ уравнения (3), удовлетворяющее (нелокальному) условию (см. [4]):*

$$\sum_{j=1}^2 \left[\alpha_{ij} \frac{d^{j-1}u}{dx^{j-1}} \Big|_{x=\alpha} + \beta_{ij} \frac{d^{j-1}u}{dx^{j-1}} \Big|_{x=\beta} \right] = \gamma_i, \quad i = 1, 2, \quad (4)$$

где α_{ij} , β_{ij} , γ_i – заданные числа, $d^0 u/dx^0 = u(x)$.

Пусть $u(x) \approx c^j(x) u(x_j)$, $j = 1, 2, \dots, p$, – соответствующая искомой функции $u(x)$ интерполяционная формула (например, Лагранжа) с узлами интерполирования $x_1, x_2, \dots, x_p$ из сегмента $[\alpha, \beta]$, а

$$\int_{\alpha}^{\beta} d(x, t)u(t)dt \approx \beta^j(x)u(x_j), \quad j = p+1, p+2, \dots, q,$$

– некоторая квадратурная формула (например, Симпсона) с узлами в точках $x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_q$ из $[\alpha, \beta]$. Тогда метод *редукции к нагруженным уравнениям применительно к задаче (3), (4) заключается в за-*

мене интегро-дифференциального уравнения (3) следующим нагруженным дифференциальным уравнением второго порядка

$$a(x)u''(x) + b(x)u'(x) + \beta^j(x)u(x_j) = f(x), \quad j = 1, 2, \dots, q, \quad (5)$$

где $\beta^j(x) = c(x)c^j(x)$, и, как и ранее, по повторяющемуся индексу j подразумевается суммирование от 1 до q . При этом за приближенное решение $\tilde{u}$ задачи (3), (4) принимается точное решение $u(x)$ задачи (4), (5).

Обращая дифференциальный оператор $a(x)d^2/dx^2 + b(x)d/dx$ с соответствующим образом подобранной областью определения, задачу (4), (5) можно эквивалентно редуцировать к нагруженному функциональному уравнению вида

$$u(x) + B(\beta^j)u(x_j) = B_x(f).$$

В частности, при $a(x) \equiv 1$ и в случае однородной задачи Коши

$$u|_{x=\alpha} = \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=\alpha} = 0$$

оператор $B \equiv B_x$ и

$$B(\varphi) \equiv \int_{\alpha}^x b^+(t)\varphi(t)dt \int_t^x \frac{d\xi}{b^+(\xi)}, \quad b^+(x) = \exp \left[\int_{\alpha}^x b(t)dt \right].$$

Из нагруженного функционального уравнения получим систему алгебраических уравнений

$$u(x_i) + b^{ij}u(x_j) = B_{x_i}(f), \quad b^{ij} = B(\beta^j)|_{x=x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, q,$$

из которых при естественных ограничениях на входные данные можно определить значения искомого решения $u(x)$ в узлах интерполирования $x_1, x_2, \dots, x_p$ и в точках $x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_q$.

Если воспользоваться формулой Симпсона (см. [5])

$$\int_0^1 u(t)dt \approx \frac{u(0) + u(1)}{6} + \frac{2}{3}u\left(\frac{1}{2}\right),$$

то интегро-дифференциальное уравнение

$$u''(x) + \lambda \int_0^1 u(t)dt = 0, \quad \lambda = \text{const}, \quad 0 < x < 1, \quad (6)$$

аппроксимируется нагруженным дифференциальным уравнением

$$u''(x) + \frac{2}{3}\lambda u(1/2) = -\frac{\lambda}{6} [u(0) + u(1)]. \quad (7)$$

Любопытно отметить, что *двухточечная задача Дирихле*

$$u(0) = u_0, \quad u(1) = u_1 \quad (8)$$

для уравнений (6) и (7) однозначно и безусловно разрешима тогда и только тогда, когда $\lambda \neq 12$. Более того, решение

$$u(x) = u_0 + (u_1 - u_0)x + \frac{3\lambda}{12 - \lambda}(u_1 + u_0)x(1 - x)$$

задачи (6), (8) в точности совпадает с решением задачи (8) для аппроксимирующего уравнения (7).

2. Многие задачи уровня и солевого прогноза в капиллярно-пористых средах сводятся к нелокальной задаче отыскания функции $u = u(x, t)$, если известно, что

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(x, t) \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} + B(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + C(x, t)u + f(x, t),$$

$$u|_{t=0} = \tau(x), \quad \alpha < x < \beta,$$

$$\sum_{j=1}^2 \left[\alpha_{ij}(t) \frac{\partial^{j-1} u}{\partial x^{j-1}} \Big|_{x=\alpha} + \beta_{ij}(t) \frac{\partial^{j-1} u}{\partial x^{j-1}} \Big|_{x=\beta} \right] = \gamma_i(t), \quad 0 < t < T,$$

где $A, B, C, f, \alpha, \beta, T, \alpha_{ij}, \beta_{ij}, \gamma_i$ – заданные входные величины, $i = 1, 2$.

Эта задача в случае, когда α_{ij}, β_{ij} , постоянны, $\gamma_i = 0$ и уравнение линейно $u_t = u_{xx} - q(x)u + f(x, t)$, исследована Н. И. Ионкиным и Е. И. Моисеевым в работе [6], где получены весьма интересные результаты.

Рассмотрим задачу долгосрочного прогноза уровня $u = u(x, t)$ грунтовой воды на участке $0 \leq x \leq l$ с однородными гидрогеологическими условиями, расположенном между двумя водоемами.

При определенных условиях (см. [7]) неустановившееся движение грунтовых вод со слабоизменяющейся свободной поверхностью описывается уравнением Буссинеска

$$2\sigma \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad (9)$$

где σ – водоотдача, k – коэффициент фильтрации, $u = u(x, t)$ – уровень грунтовой воды в точке $x \in [0, l]$ в момент времени t .

Предположим, что из натурных наблюдений нам известны:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \nu(t), \quad 0 < t < T, \quad (10)$$

– закон изменения уклона потока грунтовых вод в точке $x = 0$ для всех времен от начального $t = 0$ до расчетного $t = T$ (например, $\nu(t) = Q/(kH)$, где Q – расход, H – вертикальный размер потока);

$$u|_{t=0} = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (11)$$

– уровень грунтовой воды в начальный момент времени;

$$u(0, t) = \alpha u(l, t), \quad \alpha = \text{const} > 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (12)$$

– условие, характеризующее, что водоемы, примыкающие к мелиорируемой территории $0 \leq x \leq l$ слева и справа, находятся в одинаковых условиях.

Найдем приближенное решение задачи (10), (11), (12) для нелинейного уравнения (9) методом редукции к нагруженным дифференциальным уравнениям.

Пусть

$$\delta = \bar{u} = \frac{1}{l} \int_0^l u(x, t) dx \quad (13)$$

– среднее значение $u(x, t)$ в момент времени t .

Один из классических методов линеаризации уравнения (9) состоит в том, что δ считается не зависящим от времени, и уравнение (9) аппроксимируется уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где $a = k\delta/\sigma$ – параметр, получивший специальное название – коэффициент уровнепроводности, который, как правило, определяется экспериментальным путем. Мы же будем считать, что $\delta = \delta(t)$ – неизвестная функция времени t , и уравнение (9) заменим нагруженным уравнением

$$k\delta(t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\sigma\delta'(t), \quad (14)$$

где δ связана с u формулой (11).

Легко видеть, что любое решение $u = u(x, t)$ уравнения (12) представимо в виде

$$u(x, t) = \frac{\sigma\delta'}{k\delta} x^2 + A(t)x + B(t), \quad (15)$$

где $A(t)$ и $B(t)$ – произвольные непрерывные для всех $t \in [0, T]$ функции.

Удовлетворяя (15) условию (10) и соотношению (13), будем иметь:

$$A(t) = \nu(t), \quad \delta = \frac{\sigma l^2 \delta'}{3k\delta} + \frac{l\nu(t)}{2} + B(t).$$

Стало быть,

$$u(x, t) = \frac{\sigma\delta'}{k\delta} \left(x^2 - \frac{l^2}{3} \right) + \nu(t) \left(x - \frac{l}{2} \right) + \delta. \quad (16)$$

Далее из (12) в силу (16) находим

$$-\frac{\sigma l^2 \delta'}{3k\delta} - \frac{\nu(t)l}{2} + \delta = \frac{3\alpha\sigma l^2 \delta'}{3k\delta} + \frac{\alpha l\nu(t)}{2} + \alpha\delta,$$

или

$$\delta' = \varepsilon(t)\delta - \lambda\delta^2, \quad 0 < t < T, \quad (17)$$

где

$$\varepsilon(t) = -\frac{3k(1+\alpha)\nu(t)}{2\sigma(1+2\alpha)l}, \quad \lambda = \frac{3k(-1+\alpha)}{\sigma(1+2\alpha)l^2}.$$

При $\varepsilon(t) \equiv 0$ решение задачи Коши (см. [9])

$$\delta(0) = \frac{1}{l} \int_0^l u(x, 0) dx = \frac{1}{l} \int_0^l \tau(x) dx = \bar{\tau} \quad (18)$$

для уравнения Бернулли (17) имеет вид $\delta(t) = \bar{\tau}/(1 + \lambda\bar{\tau}t)$. Из (16), принимая во внимание, что

$$\frac{\delta'(t)}{\delta(t)} = -\frac{\lambda\bar{\tau}}{1 + \lambda\bar{\tau}t},$$

находим

$$u(x, t) = \frac{\bar{\tau} [3k - \lambda\sigma(3x^2 - l^2)]}{3k(1 + \lambda\bar{\tau}t)}.$$

Уравнение (17) хорошо известной заменой $z = 1/\delta$ сводится к уравнению $z' = \varepsilon z - \lambda$, из которого при $\varepsilon(t) \equiv \varepsilon = \text{const}$ следует, что $z = C \exp(-\varepsilon t) + \lambda/\varepsilon$, где C – произвольная постоянная. Отсюда на основании (18) получаем

$$\delta = \frac{\varepsilon\bar{\tau}}{\lambda\bar{\tau} + (\varepsilon - \lambda\bar{\tau}) \exp(-\varepsilon t)} \quad (\bar{\tau} \neq 0). \quad (19)$$

Таким образом, установлено, что *среднее значение $\delta(t)$ уровня грунтовой воды на участке $0 \leq x \leq l$ меняется по «логистической» кривой Ферхюльста* (см. [8], с. 245), и формулы (19) с $\varepsilon = \text{const}$ и $\bar{\tau} \neq 0$ представляют собой алгоритм для поиска приближенного решения и нелокальной краевой задачи (10), (11), (12) для уравнения (9).

3. При определенных физических допущениях одномерное движение почвенной влаги с учетом гравитационных сил описывается нелинейным уравнением параболического типа [7], [9]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[D(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right] - \frac{\partial k(u)}{\partial x}, \quad (20)$$

где $u = u(x, t)$ – влажность в точке x почвогрунта в момент времени t ; $k(u)$ – коэффициент влагопроводности при влажности u ; $D(u)$ – коэффициент диффузивности.

Анализ натуральных наблюдений и экспериментальных данных процессов инфильтрации и капиллярного подъема показывает, что движение

почвенной влаги происходит с конечной скоростью (см. [10]) и, стало быть, носит волновой характер. Однако линеаризацию уравнения (20), как правило, производят методом редукции к линейным уравнениям параболического типа, которые означают, что любое возмущение с бесконечной скоростью скажется (хотя бы в ничтожной степени) на любом сколь угодно далеком расстоянии от источника. Поэтому более естественно линеаризацию (или квазилинеаризацию) тех или иных уравнений параболического типа, описывающих реальные процессы тепло-массообмена с конечной скоростью, произвести методом редукции к нагруженным уравнениям, как правило, гиперболического типа.

Продemonстрируем сказанное на конкретных ситуациях. Пусть

$$D(u) \approx \alpha + \beta u, \quad \alpha, \beta = \text{const} > 0$$

и скорость $b(u) = dk(u)/du$ движения влаги под действием гравитационных сил является постоянной. Тогда уравнение (20) приближенно можно заменить уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2\beta} \frac{\partial^2 (\alpha + \beta u)^2}{\partial x^2} - b \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (21)$$

Отсюда после почленного дифференцирования по t будем иметь

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 [(\alpha + \beta u)u_t]}{\partial x^2} - b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}.$$

Если теперь множитель $u_t = \partial u / \partial t$ в квадратной скобке заменить его средним значением $\delta'(t)$ в почвенном слое $0 \leq x \leq l$ (см. формулу [11]), то это уравнение приближенно редуцируется к нагруженному уравнению гиперболического типа

$$u_{tt} + bu_{xt} - \beta \delta'(t)u_{xx} \quad (\delta'(t) \geq 0).$$

Такой метод поиска приближенного решения уравнения влагопереноса (21) оказывается весьма эффективным в случае, когда задано нелокальное условие вида

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^l u(x, t) dx = \omega(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (22)$$

т. е. скорость $\delta'(t) = \omega(t)/l$ расхода в слое $0 \leq x \leq l$.

4. Вернемся к уравнению Буссинеска (9), которое после почленного дифференцирования по t можно переписать в виде

$$\sigma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k \frac{\partial^2 (uu_t)}{\partial x^2}. \quad (23)$$

Предположим, что u_t прямо пропорциональна расходу

$$\sigma \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l u(x, t) dx, \quad 0 \leq t \leq T,$$

грунтовой воды на прогнозируемом участке $0 \leq x \leq l$ с коэффициентом пропорциональности γ , который в зависимости от начальных, нелокальных и граничных условий определяется как функция точки x . Если теперь, как и выше, множитель u_t в уравнении (23) заменить выражением

$$\gamma(x) \sigma \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l u(x, t) dx \approx u_t,$$

то оно редуцируется к нагруженному уравнению гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_0^l u(x, t) dx \right] \frac{\partial^2 (\gamma u)}{\partial x^2}. \quad (24)$$

Здесь же уместно отметить, что приближенные решения уравнения Буссинеска (9) можно найти, заменив его более простым, чем (24), нагруженным уравнением параболического типа

$$\frac{k}{2} \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} = \gamma(x) \sigma^2 \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l u(x, t) dx. \quad (25)$$

Уравнение (25) в свою очередь можно аппроксимировать линейным нагруженным дифференциальным уравнением

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \gamma(x) \sigma \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l u(x, t) dx.$$

С. М. Тарг [11], строя приближенное решение следующей математической модели задачи о теплообмене в смазочном слое $0 \leq x \leq 1$ между шипом и подшипником, когда температура $u = u(x, t)$ шипа неизменна:

$$u_{xx} - u_t = f_0 \equiv \text{const}, \quad (26)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad u(0, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$(u_x + \beta u_t + \gamma u)|_{x=1} = 0, \quad t \geq 0, \quad \beta = \text{const} \gg 1, \quad \gamma = \text{const} \ll \beta,$$

заменил производную в (26) ее средним значением $\int_0^1 u_t(x, t) dx$.

Иначе говоря, С. М. Тарг аппроксимировал уравнения (26) нагруженным дифференциальным уравнением

$$u_{xx} - \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 u(\xi, t) d\xi = f_0.$$

И. С. Теплицкий [12], утверждая, что обычно в конкретных задачах уровня прогноза по граничным условиям можно выяснить до некоторой степени характер распределения вдоль горизонтали величины u_t , полагает

$$u_t \approx \theta(t)\chi(x) \quad (27)$$

и заменяет уравнение Буссинеска (9) соотношением

$$k(u^2)_{xx} = 2\sigma\theta(t)\chi(x).$$

Очевидно,

$$\theta(t) = \frac{1}{L} \int_0^l u_t(\xi, t) d\xi, \quad L = \int_0^l \chi(\xi) d\xi \neq 0,$$

стало быть, уравнение (9) по существу, как и в [11], аппроксимируется нагруженным уравнением в частных производных

$$kL(u^2)_{xx} = 2\sigma\chi(x) \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l u(\xi, t) d\xi. \quad (28)$$

Если, исходя из начальных, граничных и нелокальных условий, например, вида (22) или же из решения обратных (идентификационных) задач, действительно удастся определить функции $\theta(t)$ и $\chi(x)$ из (27), то, как и выше, есть смысл поставить в соответствие уравнению (9) уравнение гиперболического типа

$$k\theta(t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\chi(x)u] = \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (29)$$

которое может более точно, чем (28), аппроксимировать (9).

Рассмотрим, в частности, задачу фильтрации из канала в сухой грунт при равномерном подъеме в нем уровня воды [7]. В качестве математической модели этой задачи предлагается (см. также [9]) следующая нелокальная краевая

Задача А. В области $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < l(t), 0 < t < T\}$ требуется найти решение $u = u(x, t)$ уравнения Буссинеска (9) и функцию $l = l(t)$, удовлетворяющую условиям

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (30)$$

– закон изменения уровня воды в канале ($\varphi(t) = \alpha t$, $\alpha = \text{const} > 0$ при равномерном подъеме в нем уровня воды);

$$u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (31)$$

$$\sigma \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{l(t)} u(\xi, t) d\xi = -k\varphi(t) \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0}, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (32)$$

Построим приближенное решение задачи А при $\varphi(t) = \alpha t$, аппроксимировав уравнение (9) уравнением вида (29), где $\theta(t) = \alpha$, $\chi(x) = 1$, а именно уравнением

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad c = \sqrt{\frac{\alpha k}{\sigma}}. \quad (33)$$

Передний край языка грунтовой воды перемещается вдоль непроницаемого водоупора $u = 0$, $x \geq 0$ на плоскости переменных x и u со скоростью $dx/dt = l'(t)$. На характеристике уравнения (33) $dx/dt = c$.

Принимая это во внимание, естественно положить $l'(t) = c$. Так как $l(0) = 0$, то $l(t) = ct$. Теперь легко заметить, что единственное решение $u(x, t)$ задачи Дарбу (30), (31) для уравнения (33) задается формулой

$$u(x, t) = (\alpha/c)(ct - x). \quad (34)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что найденные функции $l = ct$ и $u(x, t)$ из (34) обращают (32) в тождество.

Примечательно, что функция (34) является точным решением уравнения (9) и нагруженного уравнения Буссинеска

$$k \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} = \frac{2\sigma}{l} \int_0^l u_t(\xi, t) d\xi,$$

которое получается из (28) при $\chi(x) \equiv 1$.

Если уровень воды в канале меняется по закону

$$u(0, t) = \varphi(t) = \frac{\alpha}{m+1} t^{m+1}, \quad m = \text{const},$$

то уравнение Буссинеска (9) можно аппроксимировать обобщенным уравнением Трикоми $u_{tt} = c^2 t^m u_{xx}$, общее решение которого выписывается в явном виде в [13].

Отметим также, что если уравнение влагопереноса Аллера [14]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[D(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + A u_{xxt} \quad (A = \text{const})$$

линеаризовать одним из приведенных выше приемов, то можно получить уравнение псевдогоиперболического типа следующего вида:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + b u_{xxt},$$

которое описывает волновые процессы с диссипацией [15].

5. В заключение кратко остановимся на замечании о том, что метод редукции к нагруженным уравнениям может оказаться весьма эффективным при отыскании приближенного решения хорошо известного уравнения Кортевега де Фриза

$$u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = 0, \quad \beta = \text{const} > 0. \quad (35)$$

Уравнение (35), в частности, можно аппроксимировать одним из нагруженных дифференциальных уравнений, которое получается из него, если сомножитель $u = u(x, t)$ во втором слагаемом заменить одним из следующих приближенных значений:

$$u \approx c^i(x, t)u(x_i, t), \quad i = 1, 2, \dots;$$

$$u \approx c^{ij}(x, t)u(x_i, t_j), \quad i, j = 1, 2, \dots;$$

$$u \approx \frac{1}{L-l} \int_l^L u(x, t) dx; \quad (36)$$

$$u \approx \frac{1}{T(L-l)} \int_l^L dx \int_0^T u(x, t) dt \equiv \bar{u},$$

где $x_i, (x_i, t_j)$ – характерные точки, выступающие в качестве узлов интерполирования; l, L и T – заданные величины.

В случае (36) уравнение Кортевега де Фриза (35) аппроксимируется нагруженным дифференциальным уравнением с кратными характеристиками

$$u_t + \bar{u}u_x + \beta u_{xxx} = 0. \quad (37)$$

Уравнение (37) заменой (см. [16], а также [17])

$$\xi = x - \bar{u}t, \quad \eta = t, \quad v = v(\xi, \eta) = u(\xi + \bar{u}\eta, \eta)$$

сводится к линеаризованному уравнению Кортевега де Фриза [16]

$$Kv \equiv v_\eta + \beta v_{\xi\xi\xi} = 0. \quad (38)$$

Неизвестная величина $\bar{u}$ может быть определена после обращения оператора K в области его определения $D(K)$.

Рассмотрим, например, задачу Коши

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad -\infty < x < +\infty,$$

для нагруженного уравнения (37). Если $u(x, t)$ – решение этой задачи, то функция $v(\xi, \eta)$ будет решением задачи Коши

$$v(\xi, 0) = \tau(\xi), \quad -\infty < \xi < +\infty,$$

для уравнения (38). Так как (см. [16], с. 14)

$$v(\xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt[3]{3\beta\eta}} \int_{-\infty}^{+\infty} Ai\left(\frac{\xi - s}{\sqrt[3]{3\beta\eta}}\right) \tau(s) ds,$$

где $Ai(z)$ – функция Эйри, то нетрудно проверить, что неизвестная величина $\bar{u}$ должна удовлетворять уравнению

$$\bar{u} = \frac{\pi^{-1/2} (3\beta)^{-1/3}}{(L-l)T} \int_l^L dx \int_0^T \frac{dt}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} Ai\left(\frac{x - \bar{u}t - s}{\sqrt[3]{3\beta t}}\right) \tau(s) ds.$$

Литература

1. Nakhushev A. M. Soviet Math. Docl. 1978. Vol. 19, no. 5.
2. Pomraning G. C., Larsen E. W. J. Math. Phys. 1980. Vol. 21, no. 7. Pp. 1603–1612.
3. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16, № 9.
4. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1958.
5. Бахвалов Н. С. Численные методы. М.: Наука, 1975.
6. Ионкин Н. И., Моисеев Е. И. Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 7.
7. Полубаринова-Кочина П. Я., Пряженская В. Г., Элих В. Н. Математические методы в вопросах орошения. М.: Наука, 1969.
8. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976.
9. Нахушев А. М. Краевые задачи для уравнений смешанного типа и родственные проблемы функционального анализа и прикладной математики (межвузовский сборник), вып. 2. Нальчик, 1979.
10. Ведерников В. В. Вестник сельскохозяйственной науки. М.: Колос, 1972.
11. Тарг С. М. Основные задачи ламинарных течений. М.–Л.: ГИТТЛ, 1951.
12. Теплицкий И. С. Некоторые вопросы расчета безнапорной неустановившейся фильтрации: автореф. дис. ... к.ф.-м.н. Ташкент, 1960.
13. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959.
14. Нерпин С. В., Чудновский А. Ф. Энерго- и массообмен в системе растение-почва-воздух. Л.: Гидрометеиздат, 1975.
15. Виноградов М. В., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. М.: Наука, 1979.
16. Карпмон В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973.
17. Джурраев Т. Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанносоставного типов. Ташкент: ФАН, 1979.

Нагруженные уравнения и их приложения

За последние годы в связи с интенсивным исследованием задач оптимального управления агроэкосистемой, например задачи долгосрочного прогнозирования и регулирования уровня грунтовых вод и почвенной влаги, существенно повысился интерес к нагруженным уравнениям [1–14].

В работах [1], [6] и [14] дано (общее) определение нагруженных интегральных, функциональных и дифференциальных уравнений.

Заданное в n -мерной области Ω евклидова пространства точек $z = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ уравнение $L\omega = f(z)$ мы назвали *нагруженным*, если оно содержит некоторые операции от следа искомого решения $\omega = \omega(z)$ на принадлежащих замыканию $\bar{\Omega}$ многообразиях размерности $< n$.

Среди работ, посвященных нагруженным уравнениям и выполненным до 1976 г., особо следует отметить работы А. Кнезера [15], Л. Лихтенштейна, Н. М. Гюнтера (см. [16, с. 166]), Н. Н. Назарова [17], А. Ш. Габиб-заде [18], В. М. Будака и А. Д. Искендерова [19–21].

Простейшие нагруженные функциональные уравнения возникают при отыскании приближенного решения $\omega(z)$ интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$\omega(z) = \int_{\Omega} K(z, y)\omega(y)d\Omega = f(z)$$

методом конечных сумм, когда полагают

$$\int_{\Omega} K(z, y)\omega(y)d\Omega \approx \beta_j(z)\omega(z^j),$$

где z^j , $j = 1, 2, \dots$ – узлы квадратурной (или кубатурной) формулы, и по повторяющемуся индексу подразумевается конечное суммирование. В результате для искомого приближенного решения получают уравнение

$$\omega(z) + \beta_j(z)\omega(z^j) = f(z),$$

которое, очевидно, является частным случаем более общего нагруженного функционального уравнения

$$\omega(z) + G(z)\omega[\alpha(z)] + \beta_j(z)\omega(z^j) = f(z),$$

где $G(z)$, $\beta_j(z)$ и $f(z)$ – заданные непрерывные в $\bar{\Omega}$ функции; $\alpha(z)$ – заданное топологическое отображение $\bar{\Omega}$ на компакт $\omega \subseteq \bar{\Omega}$; z^j – фиксированные точки из $\bar{\Omega}$, $j = 1, 2, \dots$

В основе простейшей, но как отмечает Г. И. Марчук [22], практически интересной математической модели задачи переноса частиц в плоскопараллельной геометрии лежит уравнение

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \omega(z)}{\partial z_3} + z_2 \frac{\partial \omega(z)}{\partial z_1} + \sigma(z_1) \omega(z) = \frac{\sigma_s(z_1)}{2} \int_{-1}^1 \omega(z) dz_2 + f(z),$$

где $\omega(z) = \omega(z_1, z_2, z_3)$ – плотность частиц в точке z_1 в момент времени $z_3 \geq 0$, летящих со скоростью c под углом θ , $\cos \theta = z_2$, к прямой $z_3 z_2 = 0$, $\sigma(z_1)$, $\sigma_s(z_1)$, и $f(z)$ – заданные функции. Это уравнение в трехмерной области Ω евклидова пространства точек $z = (z_1, z_2, z_3)$ представляет собой нагруженное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка.

Нагруженным является и стационарное односкоростное уравнение переноса [23]

$$\frac{1}{\alpha(z)} \sum_{j=1}^3 y_j \frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial z_j} + \varphi(y, z) = \frac{\lambda}{4\pi} \int_{|\xi|=1} \theta(z, y, \xi) \varphi(\xi, z) d\xi + F(y, z)$$

в фазовой области $\left\{ (y, z) : |y| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} = 1, z \in \Omega \right\}$. Здесь $\varphi(y, z)$ – неизвестная функция, которая обозначает плотность частиц, летящих в направлении y , $|y| = 1$, из точки $z = (z_1, z_2, z_3)$; $\alpha(z)$ – заданная в Ω положительная и ограниченная функция, характеризующая поглощение среды; λ – спектральный параметр; $\theta(z, y, \xi)$ и $F(y, z)$ – заданные функции.

Если Ω – содержащая начало координат область на плоскости комплексного переменного $z = z_1 + iz_2$, $\partial/\partial \bar{z}$ – оператор Коши–Римана, то уравнения вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}} + A(z) \omega + R(z) \bar{\omega} + C(z) \omega(\operatorname{Re} z) + D(z) \omega(\operatorname{Im} z) + c(z) \bar{\omega}(\operatorname{Re} z) + \\ + d(z) \bar{\omega}(\operatorname{Im} z) + A_j(z) \omega(z^j) + B_j(z) \bar{\omega}(z^j) = f(z), \quad \omega = u + iv, \end{aligned}$$

образуют весьма широкий класс нагруженных эллиптических систем двух уравнений с двумя неизвестными функциями $u = \operatorname{Re} \omega$ и $v = \operatorname{Im} \omega$.

Задача Дирихле для двумерного уравнения Лапласа

$$\Delta_z u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u(z) = 0, \quad z = x + iy,$$

в ее классической постановке и в случае круга $|z| < r$ эквивалентна задаче отыскания решения $u = u(z)$ нагруженного уравнения

$$\Delta_z u + u(r \exp(i \arg z)) = f(z)$$

в классе функций, гармонических в круге $|z| < r$ и непрерывных при $|z| \leq r$. С другой стороны, задача поиска решений нагруженных дифференциальных уравнений в наперед заданных классах может привести к новым краевым задачам для ненагруженных уравнений. Это можно продемонстрировать на следующем примере.

Пусть Ω – соответствующая уравнению Лаврентьева–Бицадзе

$$Su \equiv \left(\operatorname{sign} y \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u(z) = 0$$

смешанная область, гиперболическая часть границы которой состоит из характеристик $AC: x+y=0$ и $CB: x-y=1$; $x_0, x_1, \dots, x_n$ – заданные точки такие, что $1 = x_0 > x_1 > \dots > x_n > 0$; $2\theta_j(x) = x_j + x + i(x_j - x)$ – точка пересечения характеристики, выходящей из точки $x \in]x_j, x_{j-1}[$ с характеристикой $x + y = x_j$. В области Ω рассмотрим нагруженное уравнение смешанного типа

$$Su + u[\theta_0(x)] = \sum_{j=m}^n \alpha_m^j(x) u[\theta_j(x)] \quad (u(z) \equiv u[z]),$$

где m является целочисленной функцией от x , а именно $m(x) = k$ для всех $x \in]x_k, x_{k-1}[$. Легко видеть, что если решения этого уравнения искать в классе $U = \{u: u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega), Su = 0, u|_{\sigma} = \varphi(z), u[\theta_0(x)] = \psi(x), 0 \leq x \leq x_n\}$, где σ – эллиптическая часть границы $\partial\Omega$ области Ω ; φ и ψ – заданные достаточно гладкие функции, то мы придем к новой краевой задаче для уравнения Лаврентьева–Бицадзе с нелокальным условием вида

$$u[\theta_0(x)] = \sum_{j=m}^n \alpha_m^j(x) u[\theta_j(x)].$$

Заметим, что при $n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ условие $u[\theta_0(x)] = \psi(x), 0 \leq x \leq x_n$, может оказаться дополнительным.

При решении прикладных задач, как правило, заранее задаются точки $z^1, z^2, \dots, z^m$ области, где исследователю хочется знать значение искомого решения $\omega(z)$ тех или иных задач для дифференциальных или интегро-дифференциальных уравнений, например задачи Дирихле: $\omega|_{\partial\Omega} = \varphi(z)$ для уравнения

$$\Delta_z \omega = C(z)\omega(z) + \int_{\Omega} \lambda(z, y)\omega(y)dy$$

с оператором Лапласа по переменным $z_1, z_2, \dots, z_n$ в ограниченной области с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Если в этом уравнении слагаемое

$C(z)\omega(z)$ заменить выражением $C(z)\alpha_j(z)\omega(z^j)$, где $\omega(z) \approx \alpha_j(x)\omega(z^j)$, $j = 1, 2, \dots, m, m+1, \dots, m^*$, – интерполяционная формула, которая не выводит за пределы допустимых (исследователем) погрешностей аппроксимации, то естественным образом придем к нагруженному интегро-дифференциальному уравнению эллиптического типа. Если же положить $\lambda(z, y) > 0$ для всех $(z, y) \in \bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$ и интеграл аппроксимировать суммой $\lambda_j(z)\omega(z^j)$, то с необходимостью возникает вопрос о спектре однородной задачи Дирихле $\omega|_{\partial\Omega} = 0$ для нагруженного уравнения

$$\Delta_z \omega - C(z)\omega = \lambda_j(z)\omega(z^j). \quad (1)$$

Оставив этот вопрос открытым, заметим, что если

$$C(z) < 0, \quad \lambda_j(z) = \text{const} = \lambda_j > 0, \quad z \in \Omega, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (2)$$

и $\omega(z)$ – регулярное в области Ω и непрерывное в $\bar{\Omega}$ решение однородной задачи Дирихле для уравнения (1), то $\omega(z) \equiv 0$. Действительно, пусть $\max_{\Omega} \omega(z) = \omega(\hat{z}) > 0$. Тогда поскольку $\Delta_z \omega \leq 0$, то из (1) и (2) заключаем $\lambda_j \omega(z^j) < 0$. Следовательно, существует такая точка $z^k \in \Omega$, что

$$\omega(z^k) < 0. \quad (3)$$

В силу (3) в области Ω найдется точка $\tilde{z}$ такая, что $\min_{\Omega} \omega(z) = \omega(\tilde{z}) < 0$. Так как $\Delta_z \omega \geq 0$, то из (1) и (2) имеем $\lambda_j \omega(z^j) > 0$. Теперь ясно, что $\omega(z) \equiv 0$.

Установленный факт безусловно остается в силе, если в (1) оператор $\Delta_z + C(z)$ заменить любым дифференциальным оператором, для которого имеют место принципы Хопфа и Заремба–Жиро [24].

Задача Дирихле $\omega(0) = \omega_0$, $\omega(1) = \omega_1$ для уравнения (1), при $n = 1$ ($z \equiv z_1$), $C(z) \equiv \text{const} = C$, $\lambda_j(z) \equiv \text{const} = \lambda_j$, $\Omega = \{z: 0 < z < 1\}$, как это следует из непосредственных вычислений, выполненных В. М. Казиевым по схеме редукции к нагруженному функциональному уравнению (см. пример 2 в [10]), однозначно разрешима тогда и только тогда, когда

$$\lambda_j \operatorname{sh} \frac{z^j \sqrt{C}}{2} \operatorname{sh} \frac{(1-z^j)\sqrt{C}}{2} \neq -\frac{C}{2} \operatorname{ch} \frac{\sqrt{C}}{2} \quad (j = 1, 2, \dots, N), \quad \text{если } C > 0,$$

и

$$\lambda_j \sin \frac{z^j \sqrt{-C}}{2} \sin \frac{(1-z^j)\sqrt{-C}}{2} \neq \frac{C}{2} \cos \frac{\sqrt{-C}}{2}, \quad \text{если } C < 0.$$

1. Нелокальные задачи и их связь с нагруженными уравнениями. А. В. Бицадзе и А. А. Самарский в работе [25] предложили качественно новую краевую задачу для эллиптических уравнений в частных производных. Эта задача для двухмерного уравнения Лапласа

$$\Delta_z u \equiv u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad z = x + iy$$

и в случае прямоугольной области $\Omega = \{z: |x| < l, 0 < y < 1\}$ ставится следующим образом.

Задача Бицадзе–Самарского. Найти гармоническую в области Ω функцию $u(z) = u(x, y)$, непрерывную в $\bar{\Omega}$ и удовлетворяющую условиям

$$u(x) = \varphi_1(x), \quad u(x+i) = \varphi_2(x), \quad |x| \leq l, \quad u(iy-l) = \varphi_3(y), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (4)$$

$$u(l+iy) = u(iy), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (5)$$

где φ_1, φ_2 и φ_3 – заданные непрерывные на сегменте $[0, 1]$ функции.

Докажем, что задача Бицадзе–Самарского редуцируется к задаче Дирихле для нагруженного уравнения

$$\Delta_z v + \frac{x+l}{2l} \frac{d^2}{dy^2} v(iy) = 0, \quad z \in \Omega. \quad (6)$$

В самом деле, пусть $u(z)$ – регулярное решение уравнения Лапласа, удовлетворяющее условиям (4) и (5). Рассмотрим функцию

$$v(z) = u(z) - \frac{x+l}{2l} u(iy). \quad (7)$$

На основании (4) и (5) легко видеть, что

$$v(x) = \varphi_1(x) - \frac{x+l}{2l} \varphi_1(0), \quad v(x+i) = \varphi_2(x) - \frac{x+l}{2l} \varphi_2(0), \quad |x| \leq l, \quad (8)$$

$$v(iy-l) = u(iy-l) = \varphi_3(y), \quad v(l+iy) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1. \quad (9)$$

Поскольку $v(iy) = u(iy)$, то функция (7) будет регулярным в Ω и непрерывным в $\bar{\Omega}$ решением задачи Дирихле (8), (9) для уравнения (6), что и требовалось доказать.

В этой же области Ω рассмотрим теперь (локальную краевую) задачу Дирихле, т. е. задачу (4) и (5), где нелокальное условие (5) заменено условием

$$u(l+iy) = \varphi_4(y), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (10)$$

для нагруженного уравнения

$$\Delta_z u = \lambda_j(y) u(x^j, y), \quad |x^j| < l \quad \forall j = 1, 2, \dots, m. \quad (11)$$

Докажем, что если $\varphi_4(y) \in C^2[0, 1]$, то задача Дирихле (4), (10) для нагруженного уравнения (11) редуцируется к следующей нелокальной задаче:

$$v(iy-l) = v(iy+l) + \alpha(y), \quad 0 < y < 1, \quad (12)$$

$$\left(-\frac{d^2}{dy^2} + \lambda\right) v(iy+l) = \lambda_j(y) v(x^j + iy) + \beta(y), \quad 0 < y < 1, \quad (13)$$

$$v(x) = \varphi_1(x), \quad v(x+i) = \varphi_2(x), \quad |x| \leq l, \quad (14)$$

где

$$\lambda = \sum_{j=1}^m \lambda_j(y), \quad \alpha(y) = \varphi_3(y) - \varphi_4(y), \quad \beta(y) = \lambda \varphi_4(y) - \varphi_4''(y), \quad (15)$$

для уравнения Лапласа

$$\Delta_z v = 0. \quad (16)$$

Действительно, любое решение $u(z)$ уравнения (11) представляет собой решение составного типа уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x} \Delta_z u = 0,$$

стало быть (см. [26]),

$$u(z) = v(z) + \omega(y), \quad \omega(0) = \omega(1) = 0, \quad (17)$$

где $v(z)$ – гармоническая в области Ω функция, а $\omega(y)$ в силу (4) и (10) такова, что

$$\omega(y) = \varphi_4(y) - v(iy+l) = \varphi_3(y) - v(iy-l). \quad (18)$$

Из (15) и (18) имеем первое нелокальное условие (12). Для получения второго условия (13) подставим (17) в (11).

В результате будем иметь

$$\omega''(y) = \lambda_j(y)[v(x^j + iy) + \omega(y)],$$

или

$$\omega''(y) - \sum_{j=1}^m \lambda_j(y) \omega(y) = \lambda_j(y) v(x^j + iy).$$

Отсюда, принимая во внимание (18) и обозначения (15), заключаем, что решение $v(z)$ уравнения (16) должно удовлетворять нелокальному условию (13). Справедливость локальных краевых условий (14) прямо вытекает из (17).

В частном случае, когда $m = 1$, $\lambda_1(y) > 0$ для всех $y \in [0, 1]$, единственность решения $u(z)$ задачи Дирихле для уравнения (1) следует из следующего принципа экстремума для решения $v(z)$ соответствующей нелокальной задачи (12)–(14) для уравнения (16): *если $\alpha(y) \equiv 0$, $\beta(y) \equiv 0$, $v(z) \not\equiv \text{const}$, то положительный максимум и отрицательный минимум функции $v(z)$ в $\bar{\Omega}$ достигается на части $y(y-1) = 0$, $|x| \leq l$ границы $\partial\Omega$, которая является носителем локальных условий (14).*

Для одномерного уравнения теплопроводности

$$u_t = u_{xx} \quad (19)$$

в области $D = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t < T\}$ рассмотрим следующую нелокальную задачу, которая исследовалась в работа [27], [28] (см. также [10]):

$$u(0, t) = \tau(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (20)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 u(\xi, t) d\xi = \nu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (21)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (22)$$

Заданные функции τ , ν и φ предполагаются достаточно гладкими, а решение $u = u(x, t)$ – классическими непрерывным в $\bar{D}$.

Непосредственным вычислением можно убедиться, что замена

$$v(x, t) = (1 - x)u(x, t) + \int_0^x u(\xi, t) d\xi,$$

которая обращается по формуле

$$u(x, t) = \frac{v(x, t)}{1 - x} + \int_0^x \frac{v(\xi, t)}{(1 - \xi)^2} d\xi$$

редуцирует нелокальную задачу (20)–(22) для уравнения (19) к первой краевой задаче $v(0, t) = \tau(t)$, $v(1, t) = \mu(t)$, $v(x, 0) = \Phi(x)$, $t \in [0, T]$, $x \in [0, 1]$, для нагруженного уравнения параболического типа

$$v_t = v_{xx} + \frac{1}{1 - x} v_x + (x - 1) \frac{\partial}{\partial t} \int_0^x \frac{v(\xi, t)}{(1 - \xi)^2} d\xi,$$

где

$$\mu(t) = \int_0^t \nu(s) ds + \int_0^1 \varphi(x) dx, \quad \Phi(x) = (1 - x)\varphi(x) + \int_0^x \varphi(\xi) d\xi.$$

Здесь уместно отметить, что сеточные уравнения, соответствующие нагруженному уравнению теплопроводности с полностью локальными условиями и уравнению теплопроводности (19) с нелокальными условиями, приводятся по существу к одному алгоритму, который в определенном смысле можно считать одним из вариантов метода циклической прогонки (см. [4] и [27]).

Аналоги задачи (20), (22) для двухмерного уравнения теплопроводности

$$u_t = u_{xx} + u_{yy}, \quad |x| < l, \quad 0 < y < 1,$$

естественным образом приводят к нелокальным задачам вида

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u(x, 1) = \psi(x), \quad u(l, y) = \tau(y), \quad |x| \leq l, \quad y \in [0, 1], \quad (23)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_{-l}^l u(\xi, y) d\xi = \nu(y), \quad y \in [0, 1], \quad (24)$$

для уравнения

$$u_{xx} + u_{yy} = \lambda u. \quad (25)$$

При численной реализации задачи (23), (24) для (25) может оказаться весьма полезной замена условия (24) (пользуясь одной из квадратурных формул) нелокальным условием вида

$$\alpha_j(y)u(x^j, y) = \mu(y), \quad \mu(y) = \int_0^y \nu(t)dt + \alpha_j(0)u(x^j, 0), \quad (26)$$

которое является непосредственным обобщением нелокального условия Бицадзе–Самарского (5).

Задача (23), (26) для уравнения (25) с $\lambda \equiv 0$ посвящена работе Е. П. Ерошенкова (см. [13, с. 105]).

2. Об одной нелокальной задаче для уравнений математической биологии. В первую очередь хочется отметить, что если сопоставить историю развития математической физики с происходящим процессом зарождения теоретической биологии, особенно математической экологии [29–35], то можно с определенной уверенностью утверждать, что в ближайшие десятилетия будут заложены основы теории уравнения математической биологии, предметом которой станет исследование дифференциальных уравнений, описывающих модели различных биологических процессов и явлений. Достаточно, например, отметить, что в настоящее время нет удовлетворительной теории краевых задач даже для уравнения

$$u_t = \beta(y^2 - xy)u_{xy} + \gamma(1 - y)u_y + \mu(x - 1)u, \quad (\beta, \gamma, \mu = \text{const}),$$

которое возникает в теории эпидемии [33] и относится к классу уравнений в частных производных ультрапараболического (псевдопараболического) типа.

Среди работ, посвященных краевым задачам для модельных уравнений второго порядка псевдопараболического типа, следует особо отметить работы А. А. Дезина [36], [37].

Здесь уместно отметить, что дифференциальные операторы и соответствующие им граничные условия, которые являются «патологическими» (см. [36]) в теории уравнений математической физики, могут стать типичными (не «патологическими») в теории уравнений математической биологии.

При определенных предположениях количество $u = u(x, t)$ клеток возраста $x \geq 0$ в единице объема и в момент времени t описывается уравнением неразрывности Фон-Ферстера

$$u_t + u_x + [\alpha(t) + \beta(x, t) + \gamma(x, t)]u = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T. \quad (27)$$

Здесь (см. Н. В. Степанова [35, с. 95]) α – скорость притока клеток; β и γ – удельные скорости гибели и деления клеток, достигших возраста x ; l – продолжительность жизни клеток всех возрастов $x \leq l \leq \infty$; T – расчетное время.

Для уравнения (27) естественным образом возникает [34] следующая нелокальная краевая задача: *найти регулярное в области*

$$\Omega = \{(x, t) : 0 < x < l, \quad 0 < t < T\}$$

непрерывное в $\overline{\Omega}$ решение $u(x, t)$ уравнения (27), удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (28)$$

$$u(0, t) = \varepsilon \int_0^l \gamma(\xi, t) u(\xi, t) d\xi, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (29)$$

где параметр $\varepsilon = 1$ для клеток, размножающихся почкованием. Условие (28) задает начальное возрастное распределение клеток, а (29) выражает прибыль клеток в нулевой возраст при делении родительских клеток всех возрастов $x \leq l$.

Обратимая замена

$$v(x, t) = u(x, t) - \varepsilon \int_x^l \gamma(\xi, t) u(\xi, t) d\xi$$

сводит нелокальную задачу (28), (29) для уравнения (27) к локальной задаче

$$v(0, t) = 0, \quad v(x, 0) = \tau(x) - \varepsilon \int_x^l \gamma(\xi, 0) \tau(\xi) d\xi$$

для нагруженного уравнения (относительно v) в частных производных первого порядка.

При численной реализации на ЭВМ условие (29) можно заменить условием

$$u(0, t) = \gamma_j(t)u(x^j, t), \quad j = 1, 2, \dots, n^*. \quad (30)$$

Стационарный вариант задачи (27)–(29) имеет вид

$$u'(x) = \lambda(x)u(x), \quad \lambda(x) = \alpha + \gamma(x), \quad \alpha = \text{const}, \quad (31)$$

$$u(0) = \varepsilon \int_0^l \gamma(x)u(x)dx. \quad (32)$$

Пусть $u(x) \approx c_j(x)u(x^j)$, $j = 1, 2, \dots, p$ – соответствующая искомой функции $u(x)$ интерполяционная формула (например, Лагранжа) с узлами интерполирования $x^1, x^2, \dots, x^p$ из сегмента $[0, l]$, а

$$u(0) = \gamma_j u(x^j), \quad j = p+1, p+2, \dots, q, \quad (33)$$

– аналог (30) в случае (32). Тогда нелокальную задачу (32) для уравнения (31) можно аппроксимировать (см. [14]) задачей (33) для нагруженного дифференциального уравнения первого порядка

$$u'(x) = \lambda_j(x)u(x^j), \quad j = 1, 2, \dots, p, \quad (34)$$

где $\lambda_j(x) = \lambda(x)c_j(x)$. Из (34) с учетом (33) имеем

$$u(x) = [\beta_j(x) + \gamma_j] u(x^j), \quad j = 1, 2, \dots, q, \quad (35)$$

где $\beta_j(x) = \int_0^x \lambda_j(\xi)d\xi$. Следовательно, задача по существу свелась к следующей системе алгебраических уравнений:

$$u_i = (\beta_{ij} + \gamma_j)u_j, \quad u_i = u(x^i), \quad \beta_{ij} = \beta_j(x^i), \quad i = 1, 2, \dots, q.$$

Нелокальное условие типа (29) для уравнения вида

$$Au \equiv u_t + u_x + c(x, t)u = 0 \quad (36)$$

возникает и при моделировании динамики популяции биологических объектов [30].

Для уравнения (36) с коэффициентом $c(x, t) \in C(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ корректна следующая

Задача А. Найти регулярное всюду в области $\Omega = \{(x, t): 0 < x < l, 0 < t < T\}$, за исключением характеристики $x = t$, решение $u = u(x, t)$ уравнения (36), непрерывное в $\bar{\Omega}$, удовлетворяющее условию (28) и нелокальному краевому условию

$$u(0, t) = \int_0^t k(x, t)u(x, t)dx + \psi(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (37)$$

$k(x, t)$ и $\psi(t)$ – заданные достаточно гладкие в $\bar{\Omega}$ функции, $\psi(0) = \tau(0)$.

Действительно, уравнение (36) заменой $\xi = x - t$, $\eta = x + t$ редуцируется к уравнению $2u_\eta + cu = 0$. Поэтому любое решение задачи А представимо в виде

$$u(x, t) = \begin{cases} \tau(x - t) \omega(x, t), & x \geq t, \\ \chi(t - x) \omega(x, t), & x \leq t, \end{cases} \quad (38)$$

где

$$\omega(x, t) = \exp \left[-\frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} c \left(\frac{s+x-t}{2}, \frac{s-x+t}{2} \right) ds \right], \quad (39)$$

$\chi(t)$ – произвольная функция из класса $C[0, T] \cap C^1]0, T[$. Из (37) на основании (38) для искомой функции $\chi(t)$ получаем интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\omega(0, t) \chi(t) = \int_0^t k(t - \xi, t) \omega(t - \xi, t) \chi(\xi) d\xi + \psi(t),$$

которое, как хорошо известно, однозначно разрешимо.

Поскольку условие (28) единственным образом определяет решение $u(x, t)$ уравнения (27) в характеристической полосе $0 \leq x - t \leq l$, то нелокальное краевое условие (29) сводится к условию (37) с $k(x, t) = \varepsilon \gamma(x, t)$ и

$$\psi(t) = \varepsilon \int_t^l \gamma(x, t) \tau(x - t) \omega(x, t) dx,$$

где $\omega(x, t)$ находится по формуле (39), полагая

$$c(x, t) = \alpha(t) + \beta(x, t) + \gamma(x, t).$$

Биологический содержательный смысл имеет задача А и для нагруженного дифференциального уравнения

$$Au + u(x, t) \int_0^\infty c(x, t) u(x, t) dx = 0.$$

В частности, если $c(x, t)$ – удельная скорость деления клеток (см. [34, с. 103]), $k(x, t) = 2c(x, t)$, то этому уравнению удовлетворяет нормированное возрастное распределение непрерывной культуры.

В заключение отметим, что многие краевые задачи для уравнения математической биологии являются нелокальными. Например, при определенных условиях краевая задача

$$u(0, t) = u(1, t), \quad u_x(0, t) = u_x(1, t)$$

для уравнения вида

$$u_t = u_{xx} - \alpha \frac{u(x, t - \tau) - \beta}{\beta} u(x, t), \quad \alpha, \beta = \text{const} > 0,$$

является математической моделью процесса размножения отдельной популяции в биологическом реакторе, имеющем форму достаточно длинной трубы, замкнутой в кольцо (см. [35, с. 47]).

Литература

1. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 1. С. 103–108.
2. Нахушев А. М., Борисов В. Н. Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 1. С. 105–110.
3. Эшдавлатов Э. Уч. зап. МВ и ССО АзССР. Сер. физ.-мат. наук. 1976. № 6. С. 29–35.
4. Шхануков М. Х. Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 1. С. 163–167.
5. Нахушев А. М. Докл. АН СССР. 1978. Т. 242, № 5. С. 1008–1011.
6. Nakhusev A. M. Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1978. Vol. 242, no. 5. Pp. 1243–1247.
7. Бородин А. В. Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14, № 1. С. 11–21.
8. Казиев В. М. Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14, № 1. С. 181–184.
9. Казиев В. М. Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 1. С. 173–175.
10. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 1. С. 96–105.
11. Ланин И. Н. Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, № 1. С. 97–106.
12. Казиев В. М. Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, № 2. С. 313–319.
13. Кадомский А. М., Нахушев А. М. и др. Некоторые математические аспекты построения САПР гидромелиоративных систем и систем сельхозводоснабжения // Математические методы в мелиорации. Межвуз. сб. Нальчик, 1981. 213 с.
14. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 1. С. 72–81.
15. Kneser A. Rendicon ti del circolo matematico di palermo. 1914. Vol. 37. Pp. 169–197.
16. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 4. М.–Л.: ГИТТЛ, 1951. 804 с.
17. Назаров Н. Н. Об одном новом классе линейных интегральных уравнений // Труды Ин-та мат. и мех. АН УзССР. 1948. Вып. 4. С. 77–106.
18. Габиб-заде А. Ш. Исследование решения одного класса линейных нагруженных интегральных уравнений // Труды Ин-та физ. и мат. АН АзССР. Сер. мат. 1959. Т. 8. С. 177–182.
19. Будак В. М., Искендеров А. Д. Докл. АН СССР. 1967. Т. 176, № 1. С. 20–23.
20. Искендеров А. Д. Докл. АН СССР. 1971. Т. 199, № 6. С. 1237–1239.
21. Искендеров А. Д. Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, № 10. С. 1911–1913.
22. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977. 455 с.
23. Владимиров В. С. Труды мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1961. Т. 61. 158 с.
24. Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.
25. Бицадзе А. В., Самарский А. А. Докл. АН СССР. 1969. Т. 185, № 4. С. 739–740.
26. Салахитдинов М. С. Уравнения смешанно-составного типа. Ташкент: Фан, 1974. 156 с.
27. Ионкин Н. И. Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 2. С. 294–304.
28. Ионкин Н. И., Моисеев Е. И. Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 7. С. 1284–1295.
29. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976. 288 с.
30. Ляпунов А. А., Багриновская Г. П., Свирежев Ю. М. и др. Математическое моделирование в биологии. М.: Наука, 1975. 156 с.
31. Свирежев Ю. М., Логофет Д. Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978. 352 с.

32. Термодинамика и кинетика биологических процессов (Коллективная монография). М.: Наука, 1980. 400 с.
33. Бейли Н. Математика в биологии и медицине. М.: Мир, 1970. 326 с.
34. Степанова Н. В. Математические модели непрерывной культуры микроорганизмов, распределенных по возрастам и размерам. Математические модели в экологии. Межвуз. сб. Горький: Изд-во ГГУ, 1980. С. 95–113.
35. Горяченко В. Д., Денисов В. А., Иванов Б. Н., Казакова Т. В. К динамике одной диффузионной системы. Математические модели в экологии. Межвуз. сб. Горький: Изд-во ГГУ, 1980. С. 47–61.
36. Дезин А. А. Докл. АН СССР. 1963. Т. 148, № 5. С. 1013–1016.
37. Дезин А. А. Изв. АН СССР. Сер. мат. 1967. Т. 31, № 1. С. 61–86.

Поступила в редакцию
7 июля 1982 г.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и механики КБГУ

О нелокальных краевых задачах со смещением и их связи с нагруженными уравнениями

1. Определение нелокальных задач и их классификация. Нелокальным задачам и особенно краевым задачам со смещением за последние пятнадцать лет уделяется пристальное внимание, и это в первую очередь благодаря теории уравнений смешанного типа, которая достигла значительных результатов [1].

Пусть Ω – n -мерная область евклидова пространства R^n точек $z = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ с границей $\partial\Omega$; w – принадлежащее замыканию $\bar{\Omega}$ непустое множество, а $\{j\}$ – индексное множество точек числовой прямой.

В области Ω рассмотрим матричное, вообще говоря, нагруженное интегро-дифференциальное уравнение

$$Lu = f(z). \quad (1)$$

Определение 1. Задачу отыскания решения $u = u(z)$ уравнения (1) в области Ω , удовлетворяющего на множестве w условиям вида

$$B_j u(z) = \psi_j, \quad j \in \{j\}, \quad (2)$$

назовем локальной задачей для уравнения (1), если образ ψ_j отображения $B_j u: z \rightarrow \psi_j(z)$ в любой точке $z \in w$ однозначно определяется значением u или ее производных до определенных порядков в этой же точке z .

Участвующие в определении 1 условия (2) и операторы B_j назовем локальными, а множество w – носителем локальных условий. Задачи для уравнения (1), соответствующие условиям и операторы, которые не являются локальными, естественно называть нелокальными.

Определение 2. Локальную задачу для уравнения (1) в области Ω назовем внутренней, если замыкание $\bar{\omega}$ носителя локальных условий принадлежит Ω , краевой, если $\omega \subseteq \partial\Omega$, и внутреннекраевой, если $\bar{\omega}$ содержит как точки области Ω , так и ее границы.

Аналогично вводятся определения нелокальной краевой (или граничной), внутренней, внутреннекраевой задач для уравнений и систем вида (1).

Задача об охлаждении неоднородного изогнутого стержня [2, с. 63] при определенной ее схематизации редуцируется к задаче отыскания решения $u(z)$, $z = (x, y) \in R^2$, уравнения

$$gu_y - (k_0 u_x)_x + m_0 u = 0 \quad (3)$$

в области $\Omega = \{z: 0 < x < l, 0 < y < T\}$, удовлетворяющего краевым условиям:

$$B_1 u(z) \equiv u(x, 0) = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$B_j u(z) \equiv a_1^j u(0, y) + a_2^j u_x(0, y) + a_3^j u(l, y) + a_4^j u_x(l, y) = 0, \quad 0 < y < T,$$

где $j = 2, 3$; g, k_0, m_0 – параметры тонкого стержня длины l , отсчитываемой от концевой точки $x = 0$; a_k^j – заданные постоянные величины. Эта задача, которая является локальной лишь при $a_3^2 = a_4^2 = a_1^3 = a_2^3 = 0$ или $a_1^2 = a_2^2 = a_3^3 = a_4^3 = 0$, предложена В. А. Стекловым как обобщение следующих двух краевых задач:

$$u_x(x_j, y) = a_1^j u(0, y) + a_3^j u(l, y), \quad u(x, 0) = \psi_1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = l,$$

$$u_x(l, y) = a_2^1 u_x(0, y) + a_1^1 u(0, y),$$

$$u(l, y) = a_1^2 u(0, y), \quad u(x, 0) = \psi_1,$$

для уравнения (3), названных им задачами первого и второго классов соответственно [2, с. 67].

К краевым задачам с локальным $B_1 u = \psi_1(x)$ и нелокальным

$$\begin{aligned} B_j u(z) &= \sum_{i=1}^2 \left[\alpha_{ij}(y) \frac{\partial^{i-1} u}{\partial x^{i-1}} \bigg|_{x=0} + \beta_{ij}(y) \frac{\partial^{i-1} u}{\partial x^{i-1}} \bigg|_{x=l} \right] = \\ &= \gamma_j(y), \quad 0 < y < T, \quad j = 1, 2, \end{aligned} \quad (4)$$

условиями для параболического типа уравнений вида

$$u_y + A_1(z)u_{xx} + A_2(z)(u^2)_{xx} + B(z)u_x + C(z) = f(z)$$

сводятся многие проблемы физики плазмы [3], уровня и солевого прогнозов в капиллярно-пористых средах [4].

Определение 3. *Нелокальное условие*

$$\sum_{k=1}^p B_j^k u(z) = \beta_j(z), \quad z \in w, \quad (5)$$

назовем условием локального смещения (сдвига) или условием первого класса для уравнения (1), если оператор B_j^k является локальным для любого $k = 1, 2, \dots, p$ и $j \in \{j\}$.

Интуитивно ясно, как теперь следует ввести понятие краевых, внутренних, внутреннекраевых условий и задач с локальным (нелокальным) смещением, сдвигом или задач первого (второго) класса.

Здесь уместно отметить, что термин «нелокальное условие», по-видимому, впервые прозвучал в следующем предложении А. А. Дезина [5]: «Есть основания подозревать, что использование «нелокальных» условий вида (1)*, по крайней мере по одному из переменных, неизбежно при описании разрешимых расширений для некоторых классов операторов».

Нетрудно видеть, что предложенные А. А. Дезиным для ультрагиперболического и псевдопараболического операторов нелокальные условия, как и (4), представляют собой краевые условия первого класса.

Рассмотрим теперь уравнение

$$T_m u \equiv \operatorname{sign} y \cdot |y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad m = \operatorname{const} \geq 0 \quad (6)$$

в области Ω_m , ограниченной кривой Жордана $\sigma_m \subset \{z: y > 0\}$ с концами в точках $A(0, 0)$, $B(1, 0)$ и характеристиками

$$AC_m: (m+2)x = 2(-y)^{(m+2)/2}, \quad BC_m: (m+2)(1-x) = 2(-y)^{(m+2)/2}.$$

Задача Трикоми – задача отыскания регулярного в области Ω_m при $y \neq 0$ решения $u = u(x, y)$ уравнения (6) из класса $C(\overline{\Omega}_m) \cap C^1(\Omega_m)^{**}$, удовлетворяющего условиям:

$$u|_{\sigma_m} = \varphi; \quad u|_{AC_m} = \psi(y),$$

является локальной. Однако, при хорошо известных (см. [1, с. 295]) ограничениях на гладкость функции ψ и характер поведения производной u_y искомого решения в точках A и B , эта задача при $m \neq 0$ редуцируется к существенно новой нелокальной краевой задаче для эллиптического в области $\Omega_m^+ = \Omega_m \cap \{z: y > 0\}$ уравнения

$$y^m u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

*Граничное условие вида $\gamma_1[u(s_1)] + \gamma_2[u(s_2)] = 0$, где γ_1 и γ_2 – некоторые линейные операторы, а s_1 и s_2 – различные точки границы. «Для классических операторов граничные условия всегда могут быть заданы в виде $\gamma_1[u(s_1)] = 0$ », – пишется в [5].

**При $m = 0$ задача Трикоми будет некорректной, если ее решение искать в классе $C^2(\Omega_0)$.

когда на σ_m задано локальное условие

$$u|_{\sigma_m} = \varphi,$$

а на $AB = \{z: y = 0, 0 < x < 1\}$ – нелокальное условие

$$u_y(x, 0) = \gamma_m D_{0x}^{\alpha_m} u(x, 0) + \psi_1(x),$$

которое линейно связывает $u_y(x, 0)$ с дробной производной $D_{0x}^{\alpha_m} u(x, 0)$ порядка $\alpha_m = 2/(m+2)$ и не является условием первого класса.

Если $m = 0$, $\sigma_0 = \{z: |z - 1/2| = 1/2, y > 0\}$, то задача Трикоми приводит к следующей нелокальной краевой задаче [1, с. 304]:

$$u|_{AC_0} = \psi(y), \quad u(x, 0) - \frac{1}{\pi} \int_0^1 u_y(t, 0) \log \left| \frac{t-x}{t+x-2tx} \right| dt = \varphi_*(x)$$

для гиперболического в области $\Omega_0^- = \{z: y < 0\} \cap \Omega_0$ уравнения $u_{xx} = u_{yy}$.

В задаче Трикоми часть BC_m характеристического многообразия $AC_m \cup BC_m$ свободна от граничных условий. Следовательно, точки гиперболической части границы $\partial\Omega_m$ не являются равноправными как носители граничных данных. Этот факт не позволяет найти непосредственный аналог задачи Трикоми для уравнений смешанного типа в многомерных областях, особенно в случае, когда поверхность изменения типа пространственно ориентирована.

В связи с этим в шестидесятых годах А. В. Бицадзе была выдвинута проблема поиска корректно поставленных краевых задач для уравнений смешанного типа с двумя независимыми переменными, когда все точки характеристической части границы равноправны как носители граничных данных. Этой проблеме посвящены работы [6], [7], где предложен ряд нового типа нелокальных задач, вошедших в математическую литературу под названием краевых задач со смещением. Такая терминология заимствована автором из теории граничных задач сопряжения со смещением (см. [8]) для аналитических функций $\Phi(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$.

К граничным задачам сопряжения со смещением относят и задачу Карлемана: найти аналитическую в области Ω функцию $\Phi(z)$ из класса $C(\bar{\Omega})$, удовлетворяющую граничному условию

$$\Phi[\Theta(t)] = G(t)\Phi(t) + g(t), \quad t \in \partial\Omega, \quad (7)$$

где $\Theta(t)$ – гомеоморфизм границы $\partial\Omega$ на себя с изменением направления обхода контура $\partial\Omega$, $\Theta[\Theta(t)] = t$.

Условие (7) является краевым условием первого класса, и оно с помощью локальных операторов связывает значение $\Phi[\Theta(t)]$ и $\Phi(t)$ искомой функции $\Phi(z)$ в гомеоморфных точках $\Theta(t)$ и t из $\partial\Omega$.

В краевых задачах со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типов характеристическая часть границы является носителем нелокальных условий, связывающих значение искомого решения или его дробных производных определенных порядков в гомеоморфных точках ([6], [7], [9], [10]), и они, как правило, относятся к классу задач с нелокальным смещением.

Задача Бицадзе–Самарского [11] является нелокальной внутренне-краевой задачей.

Нелокальное условие вида (5) разумно назвать условием со смешанным сдвигом, если среди операторов B_j^k найдется по крайней мере один оператор с локальным сдвигом и один – с нелокальным.

Многие математические модели энерго- и массообмена в среде обитания растений сводятся (см. [12]) к задаче отыскания неизвестных коэффициентов уравнения в частных производных вида

$$u_y = Au_{xy} + Bu_{xx} + au_x + bu$$

и решения $u(z) = u(x, y)$, удовлетворяющего начальному условию $u(x, 0) = \tau(x)$, $x \in [0, l]$, и локальным и нелокальным условиям следующих видов:

$$\begin{aligned} u(0, y) = \varphi_0(y), \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = \psi_0(y), \quad y \in [0, T], \\ \sum_{i=1}^2 \left[\sum_{j=0}^m \alpha_{ki}^j(y) \frac{\partial^{i-1} u}{\partial x^{i-1}} \Big|_{x=x_j} + \sum_{j=0}^n \beta_{ki}^j \frac{\partial^{i-1} u}{\partial y^{i-1}} \Big|_{y=y_j} \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \int_{\alpha}^{\beta} \beta_k(x, y) u(x, y) dx = \gamma_k(x, y), \quad k = 1, 2, \dots, k_0. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь m и n – заданные числа, $0 \leq x_0 < x < \dots < x_m \leq l$, $0 \leq y_0 < y_1 < \dots \leq y_n \leq T$, $0 \leq \alpha < \beta \leq l$, k_0 – число условий, которое существенно зависит от числа неизвестных коэффициентов. Условия (8) представляют собой нелокальные условия со смешанными сдвигами.

Следует обратить внимание на то, что во многих весьма важных в приложении задачах нелокальные условия означают не что иное, как требование к искомому решению $u(z)$ уравнения (1) быть решением заданных в $\bar{\Omega}$ нагруженных уравнений [13]. Например, на условия (8) можно смотреть как на заданные в прямоугольнике $[0, l] \times [0, T]$ нагруженные уравнения относительно $u(z)$.

Интерес к полному описанию краевых задач со смещением даже для модельного уравнения (6) объясняется не только тем, что они представляют собой существенное обобщение задачи Трикоми и имеют многомерные аналоги [14], [15], но и тем, что содержат широкий класс корректных самосопряженных задач [16], [17].

2. Об одном свойстве нелокальных операторов дробного интегро-дифференцирования. При описании корректно поставленных краевых задач для уравнения (6) положительную роль играет следующее свойство операторов дробного интегро-дифференцирования.

Пусть α – любое действительное число, $[\alpha]$ – целая часть α , $[\alpha] \leq \alpha \leq [\alpha] + 1$, $\Gamma(z)$ – гамма-функция.

Оператор D_{ax}^α дробного интегрирования (при $\alpha < 0$) и дробного дифференцирования (при $\alpha > 0$) порядка $|\alpha|$ с началом в точке $t = a$ определим, как и принято, формулой

$$D_{ax}^\alpha \varphi(x) = \begin{cases} \frac{\text{sign}(x-a)}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(t) dt}{|x-t|^{\alpha+1}}, & \alpha < 0, \\ \varphi(x), & \alpha = 0, \\ \text{sign}(x-a) \frac{\partial^{[\alpha]+1}}{\partial x^{[\alpha]+1}} D_{ax}^{\alpha-[\alpha]-1} \varphi(x), & \alpha > 0. \end{cases} \quad (9)$$

Лемма 1. Пусть функция $\varphi(x)$ интегрируема и непрерывна в интервале $x_0 < x < x_1$, $a \in [x_0, x_1]$. Тогда для любого $\beta < 0$, $\alpha \in [0, 1[$ и $|\alpha + \beta| < 1$ справедлива формула

$$D_{ax}^\alpha |x-a|^{\alpha+\beta} D_{ax}^\beta \varphi(x) = |x-a|^\beta D_{ax}^{\alpha+\beta} |x-a|^\alpha \varphi(x). \quad (10)$$

Действительно, в силу (9) имеем

$$\begin{aligned} \Gamma(1-\alpha)\Gamma(-\beta) \text{sign}(x-a) D_{ax}^\alpha |a-x|^{\alpha+\beta} D_{ax}^\beta \varphi(x) &= \frac{d}{dx} \int_x^a \frac{|a-t|^{\alpha+\beta}}{|t-x|^\alpha} dt \times \\ &\times \int_t^a \frac{\varphi(\xi) d\xi}{|\xi-t|^{\beta+1}} = \frac{d}{dx} \int_x^a \varphi(\xi) d\xi \int_x^\xi |t-x|^{-\alpha} |\xi-t|^{-\beta-1} |a-t|^{\alpha+\beta} dt. \end{aligned} \quad (11)$$

Произведем замену переменной интегрирования t по формуле $t = x + (\xi - x)\eta$ и воспользуемся следующими свойствами гипергеометрической функции $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$:

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-zt)^{-\alpha} dt,$$

$$\text{Re}(\gamma) > \text{Re}(\beta) > 0, \quad |z| < 1,$$

$$\frac{d}{dz} z^{\gamma-1} F(\alpha, \beta, \gamma; z) = (\gamma-1) z^{\gamma-2} F(\alpha, \beta, \gamma-1; z),$$

$$F(\alpha, \beta, \alpha; z) = (1-z)^{-\beta}, \quad |\arg(1-z)| < \pi.$$

В результате можно записать

$$\begin{aligned}
 J_{\beta}^{\alpha}(a, x, \xi) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(-\beta)} \int_x^{\xi} |t-x|^{-\alpha} |\xi-t|^{-\beta-1} |a-t|^{\alpha+\beta} dt = \\
 &= \frac{\operatorname{sign}(\xi-x)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(-\beta)} \left| \frac{a-x}{\xi-x} \right|^{\alpha+\beta} \int_0^1 \eta^{-\alpha} (1-\eta)^{-\beta-1} \left(1 - \frac{\xi-x}{a-x} \eta \right)^{\alpha+\beta} d\eta = \\
 &= \frac{\operatorname{sign}(a-x)}{\Gamma(1-\alpha-\beta)} \left(\frac{a-x}{\xi-x} \right)^{\alpha+\beta} F\left(-\alpha-\beta, 1-\alpha, 1-\alpha-\beta; \frac{\xi-x}{a-x}\right), \\
 \frac{\partial}{\partial x} J_{\beta}^{\alpha}(a, x, \xi) &= -\frac{(\alpha+\beta) \operatorname{sign}(a-x)}{\Gamma(1-\alpha-\beta)} \frac{\xi-a}{(a-x)^2} \times \\
 &\times \left(\frac{a-x}{\xi-x} \right)^{\alpha+\beta+1} F\left(-\alpha-\beta, 1-\alpha, -\alpha-\beta; \frac{\xi-x}{a-x}\right) = \\
 &= \frac{\operatorname{sign}(a-x)}{\Gamma(-\alpha-\beta)} \left(\frac{a-x}{a-\xi} \right)^{1-\alpha} \left(\frac{a-x}{\xi-x} \right)^{\alpha+\beta+1} \frac{\xi-a}{(a-x)^2} = \\
 &= -\Gamma^{-1}(-\alpha-\beta) |a-x|^{\beta} |a-\xi|^{\alpha} |x-\xi|^{-\alpha-\beta-1}. \tag{12}
 \end{aligned}$$

Из (11) и (12) нетрудно видеть, что если δ – бесконечно малая положительная величина, $x \pm \delta = x + \delta \operatorname{sign}(x-a)$, то

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sign}(x-a) D_{ax}^{\alpha} |x-a|^{\alpha+\beta} D_{ax}^{\beta} \varphi(x) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{d}{dx} \int_{x \pm \delta}^a \varphi(\xi) J_{\beta}^{\alpha}(a, x, \xi) d\xi = \\
 &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_{x \pm \delta}^a \varphi(\xi) \frac{\partial}{\partial x} J_{\beta}^{\alpha}(a, x, \xi) d\xi - \varphi(x \pm \delta) J_{\beta}^{\alpha}(a, x, x \pm \delta) \right] = \\
 &= -\lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\frac{|a-x|^{\beta}}{\Gamma(-\alpha-\beta)} \int_{x \pm \delta}^a \frac{|a-\xi|^{\alpha} \varphi(\xi)}{|x-\xi|^{\alpha+\beta+1}} d\xi + \frac{\operatorname{sign}(x-a)}{\Gamma(1-\alpha-\beta)} \left| \frac{a-x}{\delta} \right|^{\alpha+\beta} \times \right. \\
 &\quad \left. \times F\left(\alpha-\beta, 1-\alpha, 1-\alpha-\beta; \frac{\delta}{|a-x|}\right) \varphi(x \pm \delta) \right].
 \end{aligned}$$

Отсюда, принимая во внимание, что $(-\alpha-\beta)\Gamma(-\alpha-\beta) = \Gamma(1-\alpha-\beta)$,

$$\int_{x \pm \delta}^a |a-\xi|^{\alpha} |x-\xi|^{-\alpha-\beta-1} \varphi(\xi) d\xi =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\operatorname{sign}(a-x)}{(\alpha+\beta)} \frac{d}{dx} \int_{x \pm \delta}^a |a-\xi|^\alpha |x-\xi|^{-\alpha-\beta} \varphi(\xi) d\xi + \frac{(|a-x|-\delta)^\alpha \varphi(x \pm \delta)}{\delta^{\alpha+\beta} (\alpha+\beta) \operatorname{sign}(\alpha-x)}, \\
&F\left(-\alpha-\beta, 1-\alpha, 1-\alpha-\beta; \frac{\delta}{|a-x|}\right) = \\
&= \left(\frac{|x-a|-\delta}{|x-a|}\right)^\alpha F\left(1, -\beta, 1-\alpha-\beta; \frac{\delta}{|x-a|}\right),
\end{aligned}$$

находим

$$\begin{aligned}
D_{ax}^\alpha |x-a|^{\alpha+\beta} D_{ax}^\beta \varphi(x) &= \frac{|x-a|^\beta}{\Gamma(1-\alpha-\beta)} \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{d}{dx} \int_a^{x \pm \delta} \frac{|x-\xi|^\alpha \varphi(\xi) d\xi}{|x-\xi|^{\alpha+\beta}} + \right. \\
&\left. + \frac{\varphi(x \pm \delta) (|a-x|-\delta)^\alpha}{\delta^{\alpha+\beta}} \left[F\left(1, -\beta, 1-\alpha-\beta; \frac{\delta}{|x-a|}\right) - 1 \right] \right\}. \quad (13)
\end{aligned}$$

Так как $F\left(1, -\beta, 1-\alpha-\beta; \frac{\delta}{|x-a|}\right) = O(\delta)$ и $\alpha+\beta < 1$, то из (13) вытекает справедливость леммы.

Пусть теперь $\alpha = 1$. Докажем, что (см. (10))

$$\frac{d}{dx} |x-a|^{\beta+1} D_{ax}^\beta \varphi(x) = |x-a|^\beta D_{ax}^{\beta+1} (x-a) \varphi(x).$$

В самом деле, если $-1 \leq \beta < 0$, то

$$\begin{aligned}
D(\varphi) &\equiv |x-a|^{-\beta} \operatorname{sign}(x-a) \frac{d}{dx} |x-a|^{\beta+1} D_{ax}^\beta \varphi = (\beta+1) D_{ax}^\beta \varphi + \\
&+ |x-a| D_{ax}^{\beta+1} \varphi = \frac{1}{\Gamma(-\beta)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{|a-x| - |t-x|}{|x-t|^{\beta+1}} \varphi(t) dt = D_{ax}^{\beta+1} |x-a| \varphi.
\end{aligned}$$

Если же $-2 \leq \beta < -1$, то

$$\begin{aligned}
D(\varphi) &= (\beta+1) D_{ax}^\beta \varphi - (\beta+1) \frac{x-a}{\Gamma(-\beta)} \int_a^x \frac{\varphi(t) dt}{|x-t|^{\beta+2}} = \\
&= \frac{\operatorname{sign}(x-a)}{\Gamma(-\beta-1)} \int_a^x \frac{|a-x| - |t-x|}{|x-t|^{\beta+2}} \varphi(t) dt = D_{ax}^{\beta+1} |x-a| \varphi.
\end{aligned}$$

3. Структурно-функциональная связь между значениями решений уравнения (6) на вершинах характеристического четырехугольника. Пусть

$$\Omega_m^- = \Omega_m \setminus \Omega_m^+, \quad N_\varepsilon^1 = \left\{ u(z) \in C(\overline{\Omega_m^-}) \cap C(\Omega_m^-), \int_0^1 u_y(x) |x - x^2|^{-\varepsilon} dx < \infty \right\}.$$

Обобщенным решением уравнения (6) в области Ω_m^- назовем любое принадлежащее классу N_ε^1 решение $u(z) = u[z]$ нагруженного уравнения

$$\begin{aligned} u[z] = & \frac{\Gamma(2\varepsilon)}{\Gamma^2(\varepsilon)} \int_0^1 u \left[x + \frac{2}{m+2} (-y)^{(m+2)/2} (2t-1) \right] (t-t^2)^{\varepsilon-1} dt + \\ & + \frac{\Gamma(2-2\varepsilon)}{\Gamma^2(1-\varepsilon)} y \int_0^1 u_y \left[x + \frac{2}{m+2} (-y)^{(m+2)/2} (2t-1) \right] (t-t^2)^{-\varepsilon} dt, \end{aligned} \quad (14)$$

если $\varepsilon = m/(2m+4) \neq 0$, и уравнения

$$2u[z] = u[x+y] + u[x-y] + \int_{x-y}^{x+y} u_y[t] dt, \quad (15)$$

если $\varepsilon = 0$.

Примем следующие обозначения:

$$J = \{z: 0 < x < 1, y = 0\}, \quad I_{ab}^\alpha \varphi(x) = (D_{ax}^\alpha - D_{bx}^\alpha) \varphi(x), \quad a < x < b,$$

$$\Theta_\xi^m(\eta) = \frac{\eta + \xi}{2} - i \left[\frac{m+2}{4} |\eta - \xi| \right]^{2/(m+2)}.$$

Очевидно, что если $0 < a < 1$, то

$$I_{ab}^\alpha \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^b \frac{\varphi(t) dt}{|x-t|^\alpha}. \quad (16)$$

Легко установить, что $\Theta_0^m(\eta) = \Theta_\xi^m(\eta)|_{\xi=0}$ и $\Theta_1^m(\eta) = \Theta_\xi^m(\eta)|_{\xi=1}$ для любого $\eta \in J$ представляют собой точки пересечения характеристик $2(-y)^{1+m/2} = (m+2)(\eta-x)$, $2(-y)^{1+m/2} = (m+2)(x-\eta)$ уравнения (6) с характеристиками AC_m и BC_m соответственно. Поэтому точки η , $\Theta_0^m(\eta)$, $\Theta_0^m(1) = C_m$ и $\Theta_1^m(\eta)$ являются вершинами характеристического четырехугольника.

Лемма 2. Пусть $u[z]$ – обобщенное решение уравнения (6) в области Ω_m^- и $m \neq 0$. Тогда

$$u[\Theta_j^m(x)] = \Gamma(2\varepsilon)\Gamma^{-1}(\varepsilon)|x-j|^{1-2\varepsilon}D_{jx}^{-\varepsilon}|x-j|^{\varepsilon-1}u[x] - \\ - \left(\frac{1}{2-4\varepsilon}\right)^{1-2\varepsilon} \frac{\Gamma(2-2\varepsilon)}{\Gamma(1-\varepsilon)}D_{jx}^{\varepsilon-1}|x-j|^{-\varepsilon}u_y[x], \quad j = 0, 1. \quad (17)$$

Свойство (17), устанавливающее структурно-функциональную связь между $u[\Theta_j^m(x)]$, $u[x] = \tau(x)$ и $u_y[x] = \nu(x)$, непосредственно получается из (14) (см. [7]).

Справедлива

Теорема. Пусть $u[z]$ – обобщенное решение уравнения (6) в области Ω_m^- обладающее тем свойством, что $I_{01}^{1-2\varepsilon}u[x]$ и $D_{jx}^{1-\varepsilon}u[\Theta_j^m(x)]$, $j = 0, 1$, существуют и непрерывны в интервале J . Тогда для всех $x \in J$

$$|x-j|^\varepsilon D_{jx}^{1-\varepsilon}u[\Theta_j^m(x)] = \\ = \Gamma(2\varepsilon)\Gamma^{-1}(\varepsilon)D_{jx}^{1-2\varepsilon}u[x] - (2-4\varepsilon)^{2\varepsilon-1}\Gamma(2-2\varepsilon)\Gamma^{-1}(1-\varepsilon)u_y[x], \quad (18)$$

$$\Gamma(\varepsilon) \sum_{j=0}^1 (-1)^j |x-j|^\varepsilon D_{jx}^{1-\varepsilon}u[\Theta_j^m(x)] = \Gamma(2\varepsilon)I_{01}^{1-2\varepsilon}u[x], \quad (19)$$

если $\varepsilon \neq 0$, и

$$2\frac{d}{dx}u[\Theta_j^0(x)] = \frac{d}{dx}u[x] - (-1)^j u_y[x], \quad (20)$$

$$\frac{d}{dx}\{u[\Theta_0^0(x)] + u[\Theta_1^0(x)]\} = \frac{d}{dx}u[x], \quad (21)$$

если $\varepsilon = 0$.

Действительно, в силу леммы 2 левую часть соотношения (18) можно переписать в виде

$$\Gamma(2\varepsilon)\Gamma^{-1}(\varepsilon)|x-j|^\varepsilon D_{jx}^{1-\varepsilon}|x-j|^{1-2\varepsilon}D_{jx}^{-\varepsilon}|x-j|^{\varepsilon-1}u[x] - \\ - (2-4\varepsilon)^{2\varepsilon-1}\Gamma(2-2\varepsilon)\Gamma^{-1}(1-\varepsilon)|x-j|^\varepsilon D_{jx}^{1-\varepsilon}D_{jx}^{\varepsilon-1}|x-j|^{-\varepsilon}u_y[x].$$

Теперь, воспользовавшись леммой 1, легко убедиться в достоверности формулы (18).

Свойство (20) следует из (15). Формулы (19) (см. (16)) и (21) прямо вытекают из (18) и (21) соответственно.

Утверждение (19) является аналогом хорошо известной теоремы о среднем значении

$$u[\Theta_0^0(x)] + u[\Theta_1^0(x)] = u[x] + u[\Theta_0^0(1)]$$

для волнового уравнения, и его доказательство, по существу, содержится в работах [17], [18].

4. Об одном классе задач с нелокальным смещением. Многие гиперболические краевые задачи как с локальным, так и нелокальным смещением, изученные с большой полнотой и общностью, в случае уравнения (6) можно охватить следующей постановкой: в области Ω_m^- найти обобщенное решение $u[z]$ уравнения (6), удовлетворяющее краевым условиям

$$A(x)u_x[x] + B(x)u_y[x] + C(x)u[x] = D(x), \quad (22)$$

$$A_i(x)D_{0x}^{\alpha_i}u[\Theta_0^m(x)] + B_i(x)D_{1x}^{\beta_i}u[\Theta_1^m(x)] + [a_j(x)D_{0x}^{\alpha_j} + \beta_j(x)D_{1x}^{\beta_j}]u[x] + \\ + [C_k(x)D_{0x}^{\alpha_k} + \alpha_k(x)D_{1x}^{\beta_k}]u_y[x] = \psi(x), \quad x \in J, \quad (23)$$

где $\alpha_i, \beta_i \leq 2$, по повторяющимся индексам i, j, k подразумевается суммирование, и заданные функции считаются достаточно гладкими.

Условие (22) является локальным, а (23) – нелокальным.

Непосредственным и существенным обобщением задачи Трикоми является следующая внутреннекраевая задача со смешанным сдвигом: в области Ω_m найти решение $u[z]$ уравнения

$$T_mu + a[z]u_x + b[z]u_y + c[z]u = f[z] \quad (24)$$

из класса $C(\bar{\Omega}_m) \cap C^1(\Omega_m)$, удовлетворяющее условию (23) и локальному условию вида

$$A[z]u_x[z] + B[z]u_y[z] + C[z]u[z] = D[z], \quad z \in \sigma_m. \quad (25)$$

Теорема и лемма 2 играют весьма важную роль при описании как прямых, так и обратных задач для уравнений вида (24). В случае уравнения (6) эти утверждения позволяют легко свести задачу (6), (22), (23) к системе двух интегро-дифференциальных уравнений относительно $\tau(x) = u[x]$ и $\nu(x) = u_y[x]$. В частности, опираясь на свойства (19), можно показать, что краевая задача со смещением

$$u[\Theta_1^m(x)] = \psi_1(x), \quad x \in \bar{J}, \quad (26)$$

$$D_{0x}^{1-\varepsilon}u[\Theta_0^m(x)] + G(x)I_{01}^{1-2\varepsilon}u[x] = g(x), \quad x \in J, \quad (27)$$

для уравнения (6) в области Ω_m^- однозначно разрешима, если заданные непрерывные в $\bar{J}$ функции таковы, что $\psi_1(x) \in C^2(\bar{J})$, $D_{0x}^{\varepsilon-1}g(x)$, $D_{0x}^{\varepsilon-1}G(x) \in C^2(\bar{J})$, $G_\varepsilon(x) = \Gamma(2\varepsilon)/\Gamma(\varepsilon) + x^\varepsilon G(x) \neq 0$ для всех $x \in \bar{J}$. Действительно, из (19), (26) и (27) видим, что

$$u[\Theta_0^m(x)] = D_{0x}^{\varepsilon-1} \left[\frac{\Gamma(2\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon)} g(x) + G(x)(1-x)^\varepsilon D_{1x}^{1-\varepsilon} \psi_1(x) \right] G_\varepsilon^{-1}(x).$$

Стало быть, задача редуцируется к задаче Гурса: $u|_{AC_m} = u[\Theta_0^m(x)]$, $u|_{BC_m} = \psi_1(x)$, $x \in J$ для уравнения (6).

С помощью теоремы можно сформулировать критерий однозначной разрешимости следующей обратной (коэффициентной) задачи.

Задача. Найти порядок вырождения m уравнения (6), если известно существование хотя бы одного его обобщенного решения $u[z]$, удовлетворяющего нелокальному условию

$$\Gamma(1-2\varepsilon) \sum_{j=0}^1 (-1)^j |x-j|^\varepsilon D_{jx}^{1-\varepsilon} u[\Theta_j^m(x)] = \lambda \Gamma(1-\varepsilon) I_{01}^{1-2\varepsilon} u[x],$$

и обладающего тем свойством, что $I_{01}^{1-2\varepsilon} u[x] \neq 0$.

В самом деле, из свойства (19) всех обобщенных решений уравнения (6) заключаем, что

$$\lambda \Gamma(1-\varepsilon) / \Gamma(1-2\varepsilon) = \Gamma(2\varepsilon) / \Gamma(\varepsilon). \quad (28)$$

Поскольку (см. [19, с. 13])

$$\Gamma(\varepsilon) \Gamma(1-\varepsilon) = \pi / \sin \pi \varepsilon, \quad \lambda \Gamma(\varepsilon) \Gamma(1-\varepsilon) = \Gamma(2\varepsilon) \Gamma(1-2\varepsilon) \Leftrightarrow$$

$$\lambda \sin 2\pi \varepsilon = \sin \pi \varepsilon \Rightarrow 2\lambda \cos \pi \varepsilon = 1 \Rightarrow |\lambda| \geq 1/2,$$

то уравнение (28) однозначно разрешимо тогда и только тогда, когда $\lambda > 1/2$. Пусть $\varepsilon_0 = 1/\pi \arccos(1/(2\lambda))$ – решение (28), тогда единственное решение задачи задается формулой $m = 4\varepsilon_0/(1-2\varepsilon_0)$.

В настоящее время исследованы лишь различные частные случаи задачи (23), (24) и в основном для уравнений, которые в характеристических координатах редуцируются к уравнению Эйлера–Дарбу–Пуассона. Все еще остается нерешенным вопрос о фредгольмовости краевых задач даже с локальным смещением и в случае уравнения (24). Среди работ, посвященных задачам со смещением вида (23), следует отметить работы [20–23].

Наиболее простой, но вместе с тем интересной задачей является краевая задача с нелокальным сдвигом, которая состоит в отыскании решения $u[z]$ уравнения (6) из класса $C(\bar{\Omega}_m) \cap C^1(\Omega_m)$, удовлетворяющего (25) и условию

$$\frac{d}{dx} \{x^\varepsilon D_{0x}^{1-\varepsilon} u[\Theta_0^m(x)] + (1-x)^\varepsilon D_{1x}^{1-\varepsilon} u[\Theta_1^m(x)]\} = \Psi_\varepsilon(x)$$

при $\varepsilon \neq 0$ и

$$\frac{d^2}{dx^2} \{u[\Theta_0^0(x)] + u[\Theta_1^0(x)]\} = \Psi_0(x), \quad 0 < x < 1,$$

при $\varepsilon = 0$. Если в этой задаче нелокальное условие заменить условием (см. (18))

$$\Gamma(\varepsilon) x^\varepsilon D_{0x}^{1-\varepsilon} u[\Theta_0^m(x)] - \Gamma(2\varepsilon) D_{0x}^{1-2\varepsilon} u[x] = \Psi_\varepsilon(x), \quad \varepsilon \neq 0, \quad 0 < x < 1,$$

то придем к задаче типа Бицадзе–Самарского [11], [24].

Задачи типа задачи Бицадзе–Самарского имеют непосредственную связь с задачами со смещением, и это хорошо видно на примере задачи (25), (27) для уравнения (6) в смешанной области Ω_m , потому, что условие (27) в силу (19) редуцируется к краевому условию с нелокальным смещением

$$G_\varepsilon(x)D_{0x}^{1-\varepsilon}u[\Theta_0^m(x)] - (1-x)^\varepsilon G(x)D_{1x}^{1-\varepsilon}u[\Theta_1^m(x)] = g(x)\Gamma(2\varepsilon)/\Gamma(\varepsilon).$$

В заключение отметим, что изложенные здесь результаты были доложены на Международной конференции по дифференциальным уравнениям с частными производными (Новосибирск, 10–14 октября 1983 г.).

Литература

1. Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.
2. Стеклов В. А. Основные задачи математической физики. М.: Наука, 1983. 432 с.
3. Самарский А. А. Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16, № 11. С. 1925–1935.
4. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 1. С. 72–81.
5. Дезин А. А. Докл. АН СССР. 1963. Т. 148, № 5. С. 1013–1016.
6. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5, № 1. С. 44–59.
7. Нахушев А. М. Докл. АН СССР. 1969. Т. 187, № 4. С. 736–739.
8. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962. 600 с.
9. Бицадзе А. В. В кн.: Некоторые проблемы математики и механики. Л.: Наука, 1970. С. 112–119.
10. Смирнов М. М. Вырождающиеся гиперболические уравнения. Минск: Вышэйш. шк., 1977. 160 с.
11. Бицадзе А. В., Самарский А. А. Докл. АН СССР. 1969. Т. 185, № 4. С. 739–740.
12. Нахушев А. М., Карданов Р. Г. В межвед. сб.: САПР и АСПР в мелиорации. Нальчик, 1983. С. 3–19.
13. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 1. С. 86–94.
14. Бицадзе А. В., Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10, № 1. С. 2184–2191.
15. Алдашев С. А. Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 1. С. 3–14.
16. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8, № 1. С. 107–117.
17. Кальменов Т. Ш. Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 1. С. 66–75.
18. Кумыкова С. К. Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10, № 1. С. 78–88.
19. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М. – Л.: Физматгиз, 1963. 359 с.
20. Салахитдинов М. С. Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 1. С. 116–127.
21. Салахитдинов М. С. Докл. АН СССР. 1982. Т. 262, № 3. С. 539–541.
22. Saigo M. *Mathematica Japonica*. 1981. Vol. 26, no. 1. Pp. 103–119.
23. Жегалов В. И. В кн.: Труды семинара по краевым задачам. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1974. Вып. 11. С. 43–52.
24. Абрегов М. Х. Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10, № 1. С. 3–6.

К теории дробного исчисления

1. Определения дробного интегро-дифференцирования и их взаимосвязь. Пусть α – любое действительное число, $[\alpha]$ – целая часть α , $[\alpha] \leq \alpha < [\alpha] + 1$, $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера.

Оператор $D_{ax}^\alpha: \varphi(t) \rightarrow D_{ax}^\alpha \varphi(t)$, где $\varphi(x) \in L[A, B]$,

$$D_{ax}^\alpha \varphi(x) = \begin{cases} \frac{\text{sign}(x-a)}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(t) dt}{|x-t|^{\alpha+1}}, & \alpha < 0, \\ \varphi(x), & \alpha = 0, \\ \text{sign}(x-a) \frac{\partial^{[\alpha]+1}}{\partial x^{[\alpha]+1}} D_{ax}^{\alpha-[\alpha]-1} \varphi(x), & \alpha > 0, \end{cases} \quad (1)$$

назовем оператором дробного (в смысле Римана–Лиувилля) интегро-дифференцирования порядка $|\alpha|$ с началом в точке $a \in [A, B]$. При $\alpha < 0$ $D_{ax}^\alpha \varphi(x)$ представляет собой дробный интеграл порядка $-\alpha$, а при $\alpha > 0$ – дробную производную порядка α .

Отображение $\varphi(t) \rightarrow D_{ax}^\alpha \varphi(x)$, естественно называть интегральным или дифференциальным преобразованием Римана–Лиувилля в зависимости от того, если $\alpha < 0$ или $\alpha > 0$.

Интегральное преобразование Римана–Лиувилля можно переписать в виде

$$\begin{aligned} D_{ax}^\alpha \varphi(x) &= \frac{\text{sign}(x-a)}{\Gamma(-\alpha)} |x-a|^{-\alpha-1} \int_a^x \left(1 - \frac{t-a}{x-a}\right)^{-\alpha-1} \varphi(t) dt = \\ &= \frac{\text{sign}(x-a)}{\Gamma(-\alpha) |x-a|^{\alpha+1}} \int_a^x F\left(\alpha+1, \beta, \beta; \frac{t-a}{x-a}\right) \varphi(t) dt, \end{aligned}$$

где $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ – гипергеометрическая функция Гаусса [1].

Исходя из этого, можно ввести обобщенный дробный интеграл $D_{ax}^{\alpha, \beta, \gamma} \varphi(x)$ порядка $-\alpha$ с началом в точке a от функции $\varphi(t)$:

$$D_{ax}^{\alpha, \beta, \gamma} \varphi(x) = \frac{\text{sign}(x-a)}{\Gamma(-\alpha) |x-a|^{\alpha+1}} \int_a^x F\left(\alpha+1, \beta, \gamma; \frac{t-a}{x-a}\right) \varphi(t) dt, \quad (2)$$

где $\alpha + \beta < \gamma \neq 0, -1, -2, \dots$

Обобщенным интегральным преобразованием Римана–Лиувилля можно назвать (см. [2]) и преобразование вида

$$D_{cx, a}^{\alpha, \beta, \gamma} \varphi(x) = \frac{\text{sign}(x-c)}{\Gamma(-\alpha) \Gamma(1-\beta)} |x-a|^{-\alpha-1} \times$$

$$\times \int_c^x F\left(\alpha + 1, \gamma, 1 - \beta; \left|\frac{t - a}{x - a}\right|^{\text{sign}(x-c)}\right) \varphi(t) dt, \quad (3)$$

$$\alpha + \beta + \gamma < 1, \quad \alpha, \beta - 1 \neq 0, 1, 2, \dots; \quad x, a, c \in [A, B].$$

Если $x > a$, то $D_{ax,a}^{\alpha,\beta,\gamma}\varphi(x) = D_{ax}^{\alpha,\gamma,1-\beta}\varphi(x)$.

Преобразование Эрдейи–Кобе $E_{ax}^{\alpha,\beta}$ определяется формулой [3]

$$E_{ax}^{\alpha,\beta}\varphi(x) = \frac{(x-a)^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^\beta \varphi(t) dt, \quad (4)$$

$$x > a, \quad \alpha > 0, \quad \beta > -1.$$

В силу (1) из (4) имеем

$$\begin{aligned} E_{ax}^{\alpha,\beta}\varphi(x) &= (x-a)^{-\alpha-\beta} D_{ax}^{-\alpha} (x-a)^\beta \varphi(x) = \\ &= \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \left(1 - \frac{x-t}{x-a}\right)^\beta \varphi(t) dt = \\ &= \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} F\left(-\beta, \gamma, \gamma; \frac{x-t}{x-a}\right) \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

Поэтому разумно отображение

$$\begin{aligned} E_{ax}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}\varphi(x) &= \frac{\text{sign}(x-a)}{\Gamma(\alpha)} |x-a|^{-\alpha} \times \\ &\times \int_a^x |x-t|^{\alpha-1} F\left(-\beta, \gamma, \delta; \frac{x-t}{x-a}\right) \varphi(t) dt, \quad (5) \\ \gamma - \beta - 1 &< \delta \neq 0, -1, -2, \dots \end{aligned}$$

называть обобщенным преобразованием Эрдейи–Кобе. В соответствии с (2) и отображение $\varphi(t) \rightarrow |x-a|^{-\alpha-\beta} D_{ax}^{-\alpha,\gamma,\delta} |x-a|^\beta \varphi(x)$ обобщает преобразование Эрдейи–Кобе.

Введем оператор $H_{ax}^{\alpha,\beta,\gamma}$, который действует на $\varphi(t) \in L[A, B]$, по формуле

$$H_{ax}^{\alpha,\beta,\gamma}\varphi(x) = \frac{\text{sign}(x-a)}{\Gamma(\gamma)} \int_a^x |x-t|^{\gamma-1} F\left(\alpha, \beta, \gamma; \frac{x-t}{x-a}\right) \varphi(t) dt.$$

Исследованию свойств этого оператора при $a = 0, 1, \infty$ посвящены работы [5, 6] (см. также [4]). Легко видеть, что

$$H_{ax}^{\alpha,\beta,\gamma}\varphi(x) = |x-a|^\gamma E_{ax}^{\gamma,-\alpha,\beta,\gamma}\varphi(x). \quad (6)$$

Оператор $I_{ax}^{\alpha,\beta,\gamma}: \varphi(t) \rightarrow I_{ax}^{\alpha,\beta,\gamma}\varphi(x)$, где $\varphi(t) \in L[A, B]$, $\beta - \gamma < 1$,

$$I_{ax}^{\alpha,\beta,\gamma}\varphi(x) = \frac{\text{sign}(x-a)}{\Gamma(\alpha)|x-a|^{\alpha+\beta}} \int_a^x |x-t|^{\alpha-1} F\left(\alpha+\beta, -\gamma, \alpha; \frac{x-t}{x-a}\right) \varphi(t) dt,$$

назовем обобщенным оператором дробного (в смысле Сайго [3]) интегрирования порядка $\alpha > 0$ с началом в точке $a \in [A, B]$. Из (5) и (6) следует, что

$$I_{ax}^{\alpha,\beta,\gamma}\varphi(x) = |x-a|^{-\alpha-\beta} H_{ax}^{\alpha+\beta, -\gamma, \alpha}\varphi(x) = |x-a|^{-\beta} E_{ax}^{\alpha, -\alpha-\beta, -\gamma, \alpha}\varphi(x).$$

Важную роль в теории дробного исчисления играет оператор

$$I_{ab}^{\alpha}\varphi(x) = (D_{ax}^{\alpha} - \text{sign } \alpha D_{bx}^{\alpha})\varphi(x), \quad a < x < b, \quad (7)$$

который можно назвать оператором дробного интегро-дифференцирования порядка $|\alpha|$ с фиксированным началом и концом в точках a и $b \in [A, B]$.

Нетрудно видеть, что

$$I_{ab}^{\alpha}\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^b \frac{\varphi(t) dt}{|x-t|^{\alpha+1}}, & \alpha < 0, \\ \frac{\partial^{[\alpha]+1}}{\partial x^{[\alpha]+1}} I_{ab}^{\alpha-[\alpha]-1}\varphi(x), & \alpha > 0, \end{cases} \quad (8)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow -0} I_{ab}^{\alpha}\varphi(x) = 2\varphi(x) \quad \forall \varphi(t) \in C[a, b],$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} I_{ab}^{\alpha}\varphi(x) = 0 \quad \forall \varphi(t) \in C^1[a, b].$$

В справедливости последних двух равенств убеждаемся следующим образом:

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow -0} I_{ab}^{\alpha}\varphi(x) &= \lim_{\alpha \rightarrow -0} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \left[\int_a^x \frac{\varphi(t) dt}{(x-t)^{\alpha+1}} + \int_x^b \frac{\varphi(t) dt}{(t-x)^{\alpha+1}} \right] = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow -0} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left\{ (x-a)^{-\alpha} \int_0^1 \varphi[x - (x-a)\xi^{-1/\alpha}] d\xi + \right. \\ &\quad \left. + (b-x)^{-\alpha} \int_0^1 \varphi[x + (b-x)\eta^{-1/\alpha}] d\eta \right\} = 2\varphi(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha \rightarrow +0} I_{ab}^{\alpha} \varphi(x) &= \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{\partial}{\partial x} \int_a^b \frac{\varphi(t) dt}{|x-t|^{\alpha}} = \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{\partial}{\partial x} \int_{x-b}^{x-a} \varphi(x-\xi) |\xi|^{-\alpha} d\xi = \varphi(a) - \varphi(b) + \\
&+ \lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_{x-b}^{x-a} |\xi|^{-\alpha} \varphi_x(x-\xi) d\xi = - \int_{x-b}^{x-a} \varphi_{\xi}(x-\xi) d\xi + \varphi(a) - \varphi(b) = 0.
\end{aligned}$$

Напомним, что $\ln(1-z) = -zF(1, 1, 2; z)$, $|\arg(1-z)| < \pi$, и вычислим

$$\begin{aligned}
&\lim_{\alpha \rightarrow -0} \Gamma(-\alpha) D_{ax}^{\alpha, 1, 2} \varphi(x) = \operatorname{sign}(x-a) \times \\
&\times \lim_{\alpha \rightarrow -0} |x-a|^{-\alpha-1} \int_a^x F\left(\alpha+1, 1, 2; \frac{t-a}{x-a}\right) \varphi(t) dt = \\
&= (x-a)^{-1} \int_a^x F\left(1, 1, 2; \frac{t-a}{x-a}\right) \varphi(t) dt = - \int_a^x \frac{\varphi(t)}{t-a} \ln\left(1 - \frac{t-a}{x-a}\right) dt.
\end{aligned}$$

Итак, установлено, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow -0} \Gamma(-\alpha) D_{ax}^{\alpha, 1, 2} \varphi(x) = \int_a^x \ln\left(\frac{x-t}{x-a}\right) \frac{\varphi(t)}{a-t} dt. \quad (9)$$

Отображение $\varphi(t) \rightarrow H_{ax}^0 \varphi(x)$, где

$$H_{ax}^0 \varphi(x) = \int_a^x \varphi(t) \ln|x-t| dt, \quad (10)$$

назовем дробным интегралом бесконечно малого порядка с началом в точке $a \in [A, B]$ от функции $\varphi(t) \in L[A, B]$, а оператор

$$H_{ax}^1 = (\partial/\partial x) H_{ax}^0 \quad (11)$$

– оператором Адамара. В дальнейшем нам понадобится следующая

Лемма 1. Пусть последовательность $\{f_{\varepsilon}\}$, $1/\varepsilon = 1, 2, 3, \dots$, непрерывно дифференцируемых на сегменте $[a, b]$ функций $f_{\varepsilon} = f_{\varepsilon}(x)$ сходится хотя бы в одной точке $s \in [a, b]$, а последовательность $\{f'_{\varepsilon}\}$ их производных $f'_{\varepsilon}(x)$ равномерно сходится на $[a, b]$. Тогда $\{f_{\varepsilon}\}$ равномерно сходится на $[a, b]$, ее предел – непрерывно дифференцируемая на этом сегменте функция и $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f'_{\varepsilon}(x) = \frac{d}{dx} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_{\varepsilon}(x)$, $a \leq x \leq b$ [7, с. 535].

Докажем, что для любой функции $\varphi(t)$, удовлетворяющей на $[a, b]$ условию Гельдера, справедливы равенства

$$H_{ax}^1 \varphi(x) = \int_a^x \frac{\varphi(t) dt}{x-t}, \quad (12)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow -0} \Gamma(-\alpha) \frac{\partial}{\partial x} D_{ax}^{\alpha, 1, 2} \varphi(x) = (a-x)^{-1} H_{ax}^1 \varphi(x), \quad (13)$$

где интеграл понимается в смысле конечной части по Адамару [8]:

$$\int_a^x \frac{\varphi(t) dt}{x-t} \equiv \overline{\int_a^x \frac{\varphi(t) dt}{x-t}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\int_a^{x_\varepsilon} \frac{\varphi(t) dt}{x-t} + \varphi(x_\varepsilon) \ln \varepsilon \right], \quad (14)$$

$x_\varepsilon = x + \varepsilon \operatorname{sign}(a-x)$. В самом деле, из (10) на основании (11) и леммы 1 имеем

$$\begin{aligned} H_{ax}^1 \varphi(x) &= \frac{\partial}{\partial x} H_{ax}^0 \varphi(x) = \frac{\partial}{\partial x} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{x_\varepsilon} \varphi(t) \ln |x-t| dt = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\partial}{\partial x} \int_a^{x_\varepsilon} \varphi(t) \ln |x-t| dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\varphi(x_\varepsilon) \ln \varepsilon + \int_a^{x_\varepsilon} \frac{\varphi(t) dt}{x-t} \right]. \end{aligned}$$

Аналогично, исходя из (9), проверяется и (13). Условие Гельдера гарантировало существование интеграла в смысле (14).

Пусть $\overset{\varkappa}{Lip}[A, B]$ – множество функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих на $[A, B]$ условию Липшица ($0 < \varkappa \leq 1$) или Гельдера ($0 < \varkappa < 1$) порядка $\varkappa$. Для функции $\varphi(t)$ из класса $\overset{\varkappa}{Lip}[A, B]$ интеграл (12) можно вычислить одним из следующих способов:

$$\begin{aligned} \int_a^x \frac{\varphi(t) dt}{x-t} &= \frac{\partial}{\partial x} \int_a^x \varphi(t) \ln |x-t| dt = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ [\varphi(x_\varepsilon) - \varphi(x)] \ln \varepsilon + \varphi(x) \ln |x-a| + \int_a^{x_\varepsilon} \frac{\varphi(t) - \varphi(x)}{x-t} dt \right\} = \\ &= \int_a^x \frac{\varphi(t) - \varphi(x)}{x-t} dt + \varphi(x) \ln |x-a|. \end{aligned}$$

С оператором дробного интегро-дифференцирования существенно связаны сингулярные операторы вида

$$S_{ab}^{\alpha} \varphi(x) = \frac{\operatorname{sign}(b-a)}{\pi} \int_a^b \left| \frac{t-a}{x-a} \right|^{\alpha} \frac{\varphi(t) dt}{t-x},$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Пусть

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma} D_{ax}^{\alpha \rightarrow -1} \varphi(x) &= \lim_{\alpha \rightarrow -1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \Gamma(-\alpha) D_{ax}^{\alpha} \varphi(x), \\ \dot{\Gamma} I_{ab}^{\alpha \rightarrow -1} \varphi(x) &= \lim_{\alpha \rightarrow -1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \Gamma(-\alpha) I_{ab}^{\alpha} \varphi(x). \end{aligned}$$

В силу определения (1) получаем

$$\dot{\Gamma} D_{ax}^{\alpha \rightarrow -1} \varphi(x) = \operatorname{sign}(a-x) \lim_{\alpha \rightarrow -1} \int_a^x \frac{\varphi(t) \ln |x-t|}{|x-t|^{\alpha+1}} dt.$$

Стало быть,

$$\dot{\Gamma} D_{ax}^{\alpha \rightarrow -1} \varphi(x) = \operatorname{sign}(a-x) H_{ax}^0 \varphi(x), \quad \dot{\Gamma} I_{ax}^{\alpha \rightarrow -1} \varphi(x) = - \int_a^b \varphi(t) \ln |x-t| dt.$$

Нетрудно заметить, что если функция $\varphi(t)/(t-x)$ интегрируема на сегменте $a \leq t \leq b$ в смысле (14), то

$$\frac{\partial}{\partial x} \dot{\Gamma} I_{ab}^{\alpha \rightarrow -1} \varphi(x) = H_{bx}^1 \varphi(x) - H_{ax}^1 \varphi(x), \quad (15)$$

если же $\varphi(t) \in \overset{\sim}{Lip}[a, b]$, то

$$(H_{bx}^1 - H_{ax}^1) \varphi(x) = \pi S_{ab}^0 \varphi(x). \quad (16)$$

Формулы (15), (16) широко используются в теории краевых задач для уравнений смешанного типа с оператором Лаврентьева–Бицадзе в главной части [9].

Рассмотрим обобщенные конечно-разностные отношения

$$\Delta_n^{\alpha} \varphi(x) = \delta_n^{-\alpha} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{\alpha}{k} \varphi(x - k\delta_n),$$

где $\delta_n = (x-a)/n$, $\binom{\alpha}{k} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)/k!$, $x > a$.

Если существует предел обобщенных конечно-разностных отношений $\Delta_n^{\alpha} \varphi(x)$ при $n \rightarrow \infty$, то этот предел назовем дробной или междупредельной по Летникову производной порядка $|\alpha|$ от функции $\varphi(t)$, взятой в пределах от a до x .

А. В. Летниковым установлено (см. [10, с. 521]), что если $\alpha < 0$ и $\varphi(t) \in L[a, x]$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n^\alpha \varphi(x) = D_{ax}^\alpha \varphi(x); \quad (17)$$

если же $\alpha > 0$ и $\varphi(t) \in C^{[\alpha]}[a, x]$, $\varphi^{([\alpha]+1)}(t) \in L[a, x]$, то

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n^\alpha \varphi(x) &= \sum_{k=0}^{[\alpha]} \frac{\varphi^{(k)}(a)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} (x - a)^{k - \alpha} + \\ &+ D_{ax}^{\alpha - [\alpha] - 1} \varphi^{([\alpha]+1)}(x) = D_{ax}^\alpha \varphi(x). \end{aligned} \quad (18)$$

Поскольку задача дифференцирования функции, заданной приближенно, является некорректной [11], то определение дробной производной по Летникову может быть успешно использовано при реализации на компьютерах задач дробного исчисления. В частности, выраженная формулой (17), (18) взаимосвязь определений дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана–Лиувилля и Летникова весьма полезна при введении дискретного (разностного) аналога операций дробного дифференцирования и интегрирования.

2. Формула обращения дробного интеграла бесконечно малого порядка и обыкновенные непрерывные дифференциальные уравнения. Если придерживаться определения производной по Летникову, то задача обращения оператора $H_{ax}^\alpha \equiv D_{ax}^\alpha H_{ax}^0$ приводит к обыкновенным непрерывным (по терминологии Вольтерра [12, с. 100]) дифференциальным уравнениям. К таким уравнениям относится, например, уравнение

$$M_{ax}^{\alpha, \beta} y(x) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m(x) D_{ax}^{\alpha_m} y(x) = f(x), \quad (19)$$

где $y(x)$ – неизвестная функция,

$$M_{ax}^{\alpha, \beta} y(x) = \int_{\alpha}^{\beta} a_{\xi}(x) D_{ax}^{\xi} y(x) d\xi. \quad (20)$$

Б. Мандельброт [13] (см. также [12, с. 99]) показал, что функция, доставляющая экстремум величины (20), удовлетворяет уравнению вида (19).

С целью обращения оператора H_{ax}^0 и установления его связи с оператором $M_{ax}^{\alpha, \beta}$ рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра первого рода с логарифмическим ядром

$$H_{ax}^0 \varphi(x) = f(x), \quad a < x < b. \quad (21)$$

Справедлива следующая

Лемма 2. Пусть $\varphi(t) \in L[a, b]$ и существует $H_{ax}^\alpha \varphi(x)$. Тогда если $a_\mu = \exp(-\mu\Gamma'(1))$, то

$$-H_{ax}^\alpha \varphi(x) = \begin{cases} a_{-\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} a_\alpha D_{ax}^{\alpha-1} \varphi(x), & \alpha < 0, \\ a_{-\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} a_\alpha \frac{\partial^{[\alpha]}}{\partial x^{[\alpha]}} D_{ax}^{\alpha-[\alpha]-1} \varphi(x), & \alpha > 0. \end{cases}$$

Действительно, для всех $\mu < 0$ имеем

$$\begin{aligned} D_{ax}^\mu H_{ax}^0 \varphi(x) &= \frac{1}{\Gamma(-\mu)} \int_a^x \frac{dt}{(x-t)^{\mu+1}} \int_a^t \varphi(\xi) \ln(t-\xi) d\xi = \\ &= \frac{1}{\Gamma(-\mu)} \int_a^x \varphi(\xi) d\xi \int_\xi^x (x-t)^{-\mu-1} \ln(t-\xi) dt. \end{aligned}$$

Во внутреннем интеграле произведем замену $t = \xi + (x-\xi)\eta$. В результате получим

$$H_{ax}^\mu \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(-\mu)} \int_a^x (x-\xi)^{-\mu} \varphi(\xi) d\xi \int_0^1 \frac{\ln \eta (x-\xi)}{(1-\eta)^{\mu+1}} d\eta.$$

Отсюда, принимая во внимание, что

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\ln t dt}{(1-t)^{\mu+1}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int_0^1 t^{\varepsilon-1} (1-t)^{-\mu-1} dt = \Gamma(-\mu) \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon-\mu)} = \\ &= \frac{\Gamma(-\mu)}{\Gamma(1-\mu)} \left[\Gamma'(1) - \frac{\Gamma'(1-\mu)}{\Gamma(1-\mu)} \right] \equiv -\frac{\gamma_\mu}{\mu}, \end{aligned}$$

с учетом равенства $\Gamma(1-\mu) = -\mu\Gamma(-\mu)$ находим

$$\int_0^1 (1-\eta)^{-\mu-1} \ln \eta (x-\xi) d\eta = -[\ln(x-\xi) + \gamma_\mu] / \mu.$$

Но это говорит о том, что для любого $\mu < 0$

$$H_{ax}^\mu \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \int_a^x (x-\xi)^{-\mu} [\ln(x-\xi) + \gamma_\mu] \varphi(\xi) d\xi. \quad (22)$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial \mu} a_\mu \frac{(x - \xi)^{-\mu}}{\Gamma(1 - \mu)} = -\frac{(x - \xi)^{-\mu}}{\Gamma(1 - \mu)} a_\mu [\ln(x - \xi) + \gamma_\mu],$$

то формулу (22) можно переписать в виде

$$H_{ax}^\mu \varphi(x) = -a_{-\mu} \frac{\partial}{\partial \mu} a_\mu D_{ax}^{\mu-1} \varphi(x). \quad (23)$$

Из (23) при $\mu = \alpha < 0$ следует лемма 2.

Пусть теперь $\alpha > 0$. Тогда из (1) и (23) имеем

$$\begin{aligned} H_{ax}^\alpha \varphi(x) &= \frac{\partial^{[\alpha]+1}}{\partial x^{[\alpha]+1}} H_{ax}^{\alpha-[\alpha]-1} \varphi(x) = \\ &= \frac{\partial^{[\alpha]+1}}{\partial x^{[\alpha]+1}} a_{1+[\alpha]-\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} a_{\alpha-[\alpha]-1} D_{ax}^{\alpha-[\alpha]-2} \varphi(x) = -a_{-\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} a_\alpha \frac{\partial^{[\alpha]}}{\partial x^{[\alpha]}} D_{ax}^{\alpha-[\alpha]-1} \varphi(x), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Пользуясь леммой 2 и тем, что постоянная Эйлера $-\Gamma'(1) > 0$, легко видеть, что

$$-\int_{-\infty}^1 a_\alpha H_{ax}^\alpha \varphi(x) d\alpha = a_\alpha D_{ax}^{\alpha-1} \varphi(x) \Big|_{-\infty}^1 = a_1 \varphi(x).$$

Следовательно,

$$\varphi(x) = -\int_{-\infty}^1 a_{\alpha-1} H_{ax}^\alpha \varphi(x) d\alpha = -\int_{-\infty}^1 a_{\alpha-1} D_{ax}^\alpha H_{ax}^0 \varphi(x) d\alpha. \quad (24)$$

Из (24) заключаем: если $f(t) \in L[a, b] \cap C^1[a, b]$, то единственное решение уравнения (21) задается формулой

$$\varphi(x) = -\int_{-\infty}^1 a_{\xi-1} D_{ax}^\xi f(x) d\xi = -a_{-1} M_{ax}^{-\infty, 1} f(x). \quad (25)$$

Известную (см. [14, с. 575]) в случае, когда $f(t) \in C^2[a, b]$, формулу обращения

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \int_a^x f''(t) dt \int_0^\infty (x-t)^\nu \exp(\Gamma'(1)\nu) \Gamma^{-1}(\nu+1) d\nu - \\ &\quad - f'(a) \int_0^\infty x^\nu \exp(\Gamma'(1)\nu) \Gamma^{-1}(\nu+1) d\nu \end{aligned}$$

уравнения (замкнутого цикла) (21) нетрудно получить из (25).

Рассмотрим теперь уравнение

$$\overline{\int_a^x \frac{\varphi(t)}{x-t} dt} = f(x), \quad a < x < b, \quad (26)$$

с правой частью $f(x) \in \overset{\times}{Lip}[a, b]$. В классе функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих на сегменте $a \leq t \leq x$ условию Гельдера, уравнение (26) эквивалентно уравнению

$$H_{ax}^0 \varphi(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Поэтому на основании (25) можно утверждать, что единственное решение $\varphi(x)$ уравнения (26) задается формулой

$$\varphi(x) = -M_{ax}^{-\infty, 0} f(x) \equiv - \int_{-\infty}^1 a_{\xi-1} D_{ax}^{\xi} \int_a^x f(t) dt d\xi = - \int_{-\infty}^0 a_{\alpha} D_{ax}^{\alpha} f(x) d\alpha.$$

3. Правила композиции операторов дробного интегро-дифференцирования с различными началами. Закон композиции $D_{ax}^{\alpha} D_{ax}^{\beta} = D_{ax}^{\alpha+\beta}$ операторов дробного интегрирования порядка $\alpha < 0$ и $\beta < 0$ с началом в одной и той же точке $a \in [A, B]$ допускает следующее обобщение.

Лемма 3. Пусть $\varphi(t) \in L[a, b] \cap C]a, b[$. Тогда для любых $\alpha < 0$, $\beta < 0$ и $x \in]a, b[$

$$D_{ax}^{\alpha} D_{bx}^{\beta} \varphi(x) = D_{ax,a}^{\alpha, \beta, 1} (x-a)^{-\beta} \varphi(x) + (x-a)^{\beta-\alpha+1} D_{bx,a}^{\beta, \alpha, 1} (x-a)^{-\beta-1} \varphi(x).$$

Доказательство начнем с очевидных равенств

$$\begin{aligned} \Gamma(-\alpha) \Gamma(-\beta) D_{ax}^{\alpha} D_{bx}^{\beta} \varphi(x) &= \int_a^x (x-\xi)^{-\alpha-1} d\xi \left[\int_{\xi}^x + \int_x^b \right] \frac{\varphi(t) dt}{(t-\xi)^{\beta+1}} = \\ &= \int_a^x \varphi(t) dt \int_a^t \frac{(x-\xi)^{-\alpha-1}}{(t-\xi)^{\beta+1}} d\xi + \int_x^b \varphi(t) dt \int_a^x (x-\xi)^{-\alpha-1} (t-\xi)^{-\beta-1} d\xi. \end{aligned} \quad (27)$$

В первом и втором внутренних интегралах произведем замену $\xi = a + (t-a)\eta$ и $\xi = a + (x-a)\eta$ соответственно. В результате получим, что правая часть (27) равна

$$\int_a^x \frac{(t-a)^{-\beta} \varphi(t)}{(x-a)^{\alpha+1}} dt \int_0^1 (1-\eta)^{-\beta-1} \left(1 - \frac{t-a}{x-a} \eta \right)^{-\alpha-1} d\eta +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_x^b \frac{(t-a)^{-\beta-1}}{(x-a)^\alpha} \varphi(t) dt \int_0^1 (1-\eta)^{-\alpha-1} \left(1 - \frac{x-a}{t-a} \eta\right)^{-\beta-1} d\eta = \\
& = \frac{\Gamma(-\beta)}{\Gamma(1-\beta)} (x-a)^{-\alpha-1} \int_a^x (t-a)^{-\beta} F\left(\alpha+1, 1, 1-\beta; \frac{t-a}{x-a}\right) \varphi(t) dt + \\
& + \frac{\Gamma(-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{-\alpha} \int_x^b (t-a)^{-\beta-1} F\left(\beta+1, 1, 1-\alpha; \frac{x-a}{t-a}\right) \varphi(t) dt,
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Теорема 1. Пусть $\varphi(t) \in L[a, b] \cap C]a, b[$. Тогда* для любых $\alpha < 0$, $\beta < 0$, удовлетворяющих условию $\alpha + \beta < -1$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} D_{ax}^\alpha D_{bx}^\beta \varphi(x) &= D_{ax,a}^{\alpha+1,\beta,1} (x-a)^{-\beta} \varphi(x) + \\
&+ (x-a)^{\beta-\alpha} D_{bx,a}^{\beta,\alpha+1,1} (x-a)^{-\beta-1} \varphi(x).
\end{aligned} \tag{28}$$

Хорошо известно [1, 15], что

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z} z^a F(a, b, c; z) &= a z^{a-1} F(a+1, b, c; z), \\
\frac{\partial}{\partial z} z^{c-1} F(a, b, c; z) &= (c-1) z^{c-2} F(a, b, c-1; z), \\
\lim_{z \rightarrow 1-0} F(a, b, c; z) &= \Gamma(c) \Gamma(c-a-b) / [\Gamma(c-a) \Gamma(c-b)],
\end{aligned}$$

если $\operatorname{Re}(c-a-b) > 0$.

Опираясь на эти свойства гипергеометрической функции, нетрудно убедиться в достоверности следующих вычислений:

$$\begin{aligned}
& \Gamma(-\alpha) \Gamma(1-\beta) \frac{\partial}{\partial x} D_{ax,a}^{\alpha,\beta,1} (x-a)^{-\beta} \varphi(x) = \\
& = (x-a)^{-\alpha-\beta-1} F(\alpha+1, 1, 1-\beta; 1) \varphi(x) + \\
& + \int_a^x (t-a)^{-\alpha-\beta-1} \varphi(t) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{t-a}{x-a}\right)^{\alpha+1} F\left(\alpha+1, 1, 1-\beta; \frac{t-a}{x-a}\right) dt = \\
& = F(\alpha+1, 1, 1-\beta; 1) \varphi(x) (x-a)^{-\alpha-\beta-1} - \\
& - (\alpha+1) \int_a^x \frac{\varphi(t) (t-a)^{-\beta}}{(x-a)^{\alpha+2}} F\left(\alpha+2, 1, 1-\beta; \frac{t-a}{x-a}\right) dt \Rightarrow
\end{aligned}$$

*В [2, с. 159] коэффициент $\Gamma(\beta+1)/\Gamma(-\beta)$ лишний.

$$\begin{aligned}
& \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} D_{ax,a}^{\alpha,\beta,1} (x-a)^{-\beta} \varphi(x) = \\
& = -\frac{\varphi(x)(x-a)^{-\alpha-\beta-1}}{(\alpha+\beta+1)\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\beta)} + D_{ax,a}^{\alpha+1,\beta,1} (x-a)^{-\beta} \varphi(x), \quad (29) \\
& \Gamma(1-\alpha)\Gamma(-\beta) \frac{\partial}{\partial x} (x-a)^{1-\alpha+\beta} D_{bx,a}^{\beta,\alpha,1} (x-a)^{-\beta-1} \varphi(x) = \\
& = -(x-a)^{-\alpha-\beta-1} F(\beta+1, 1, 1-\alpha; 1) \varphi(x) + \\
& + \int_x^b (t-a)^{-\alpha-\beta-1} \varphi(t) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^{-\alpha} F\left(\beta+1, 1, 1-\alpha; \frac{x-a}{t-a}\right) dt = \\
& = -(x-a)^{-\alpha-\beta-1} F(\beta+1, 1, 1-\alpha; 1) \varphi(x) - \\
& - \alpha(x-a)^{-\alpha-1} \int_x^b F\left(\beta+1, 1, -\alpha; \frac{x-a}{t-a}\right) (t-a)^{-\beta-1} \varphi(t) dt \Rightarrow \\
& \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} (x-a)^{1-\alpha+\beta} D_{bx,a}^{\beta,\alpha,1} (x-a)^{-\beta-1} \varphi(x) = \quad (30) \\
& = \frac{\varphi(x)(x-a)^{-\alpha-\beta-1}}{(\alpha+\beta+1)\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\beta)} + (x-a)^{\beta-\alpha} D_{bx,a}^{\beta,\alpha+1,1} (x-a)^{-\beta-1} \varphi(x).
\end{aligned}$$

Правило композиции (28) вытекает из леммы 3 и равенств (29), (30).

Теорема 2. Если $\varphi(t)$ удовлетворяет условию Гельдера и интегрируема на $]a, b[$, то для всех $\alpha \in]0, 1[$

$$D_{ax}^{\alpha} D_{bx}^{-\alpha} \varphi(x) = \cos \pi \alpha \varphi(x) + \sin \pi \alpha S_{ab}^{\alpha} \varphi(x). \quad (31)$$

Достоверность закона композиции (31) нетрудно усмотреть из следующих истинных в силу лемм 1, 3 равенств:

$$\begin{aligned}
D_{ax}^{\alpha} D_{bx}^{-\alpha} \varphi(x) &= \frac{\partial}{\partial x} D_{ax}^{\alpha-1} D_{bx}^{-\alpha} \varphi(x) = \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x} [D_{ax-\varepsilon,a}^{\alpha-1,-\alpha,1} (x-a)^{\alpha} + (x-a)^{2-2\alpha} D_{bx+\varepsilon,a}^{-\alpha,\alpha-1,1} (x-a)^{\alpha-1}] \varphi(x).
\end{aligned}$$

Поскольку для любого $\alpha \in]0, 1[$ $D_{ax}^{\alpha} D_{ax}^{-\alpha} \varphi(x) = \varphi(x)$, то из (31) получаем формулу для дробной производной потенциала со степенным ядром

$$D_{ax}^{\alpha} I_{ab}^{-\alpha} \varphi(x) = 2 \cos^2 \frac{\pi \alpha}{2} \varphi(x) + \sin \pi \alpha S_{ab}^{\alpha} \varphi(x). \quad (32)$$

При $a = 0$, $b = 1$, $\varphi(x) \equiv \nu(x)$, $\alpha = 2/(m+2)$, $m = 1, 2, \dots$, из (32) имеем

$$\frac{d}{dx} \int_0^1 \left[\int_0^x |\xi - y|^{-m/(m+2)} (x - \xi)^{-2/(m+2)} \right] \nu(y) dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{y}{x}\right)^{2/(m+2)} \frac{\nu(y)dy}{y-x} + \pi \operatorname{tg} \frac{\pi m}{2m+4} \nu(x). \quad (33)$$

Формула (33), устанавливающая связь интеграла Коши с интегралами Римана–Лиувилля, впервые получена Ф. Трикоми [15, гл. VI, § 7] в случае, когда $m = 1$, и С. Геллерстедтом [17] в общем случае, и она играет важную роль при доказательстве существования решения задачи Трикоми для уравнений смешанного типа с оператором $y^m \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ в главной части. Легко увидеть, что при выводе формулы (33) Геллерстедт [17, с. 71–73] нигде не пользуется тем, что m нечетно. Ему достаточно, чтобы положительное число $\beta = m/(2m+4) < 1/2$.

Пусть соблюдены условия теоремы 2. Тогда из (32) и равенства $D_{ax}^{-\alpha} D_{ax}^{\alpha} \varphi(x) = \varphi(x)$ имеем [18, 19]

$$D_{bx}^{-\alpha} \varphi(x) = \cos \pi \alpha D_{ax}^{-\alpha} \varphi(x) + \sin \pi \alpha D_{ax}^{-\alpha} S_{ax}^{\alpha} \varphi(x).$$

Лемма 4. Пусть $(x-a)^{-\alpha} \varphi(x) \in L[a, b]$, $D_{bx}^{\alpha} \varphi(x) \in C[a, b]$. Тогда для любых $\alpha \in]0, 1[$ и $x \in]a, b[$

$$D_{ax}^{-\alpha} D_{bx}^{\alpha} \varphi(x) = \sin \pi \alpha R_{ab}^{-\alpha} \varphi(x) - D_{ax}^{1-\alpha} D_{bx}^{\alpha-1} \varphi(x), \quad (34)$$

$$R_{ab}^{-\alpha} \varphi(x) = (S_{ab}^{1-\alpha} - S_{ab}^{-\alpha}) \varphi(x) = \frac{1}{\pi} \int_a^b \left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\alpha} \frac{\varphi(t)dt}{x-a}. \quad (35)$$

Лемма 4 вытекает из равенств $\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha) = \pi / \sin \pi \alpha$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[D_{ax-\varepsilon}^{-\alpha} \frac{\partial}{\partial x} D_{bx}^{\alpha-1} + \frac{\partial}{\partial x} D_{ax-\varepsilon}^{-\alpha} D_{bx}^{\alpha-1} - \sin \pi \alpha R_{ab}^{-\alpha} \right] \varphi(x) = 0.$$

Теорема 3. Пусть $\varphi(x) \in Lip^{\kappa}]a, b[$, $(x-a)^{-\alpha} \varphi(x)$ и $I_{ab}^{\alpha} \varphi(x) \in L[a, b]$. Тогда для любого $\alpha \in]0, 1[$

$$D_{ax}^{-\alpha} I_{ab}^{\alpha} \varphi(x) = 2 \sin \frac{\pi \alpha}{2} \varphi(x) + \sin \pi \alpha S_{ab}^{-\alpha} \varphi(x). \quad (36)$$

Формула (36) следует из (31), (34) и (35):

$$\begin{aligned} D_{ax}^{-\alpha} I_{ab}^{\alpha} \varphi(x) &= (D_{ax}^{-\alpha} D_{ax}^{\alpha} - D_{ax}^{-\alpha} D_{bx}^{\alpha}) \varphi(x) = \varphi(x) + D_{ax}^{1-\alpha} D_{bx}^{\alpha-1} \varphi(x) - \\ &- \sin \pi \alpha R_{ab}^{-\alpha} \varphi(x) = [1 + \cos(1-\alpha)\pi] \varphi(x) + \sin(1-\alpha)\pi S_{ab}^{1-\alpha} \varphi(x) - \\ &- \sin \pi \alpha R_{ab}^{-\alpha} \varphi(x) = 2 \sin^2(\pi \alpha / 2) \varphi(x) + \\ &+ \sin \pi \alpha (S_{ab}^{-\alpha} + R_{ab}^{-\alpha}) \varphi(x) - \sin \pi \alpha R_{ab}^{-\alpha} \varphi(x). \end{aligned}$$

Пусть функция $\psi(x)$ такова, что $\varphi(x) \equiv D_{bx}^{-\alpha} \psi(x) \in \overset{\sim}{Lip}[a, b[, (x-a)^{-\alpha} \varphi(x)$ и $I_{ab}^{\alpha} \varphi(x) \in L[a, b]$. Тогда

$$D_{ax}^{-\alpha} \psi(x) = \cos \pi \alpha D_{bx}^{-\alpha} \psi(x) - \sin \pi \alpha S_{ab}^{-\alpha} D_{bx}^{-\alpha} \psi(x). \quad (37)$$

Действительно, согласно теореме 3, имеем

$$\begin{aligned} D_{ax}^{-\alpha} I_{ab}^{\alpha} D_{bx}^{-\alpha} \psi(x) &= D_{ax}^{-\alpha} (D_{ax}^{\alpha} - D_{bx}^{\alpha}) D_{bx}^{-\alpha} \psi(x) = \\ &= (D_{bx}^{-\alpha} - D_{ax}^{-\alpha}) \psi(x) = 2 \sin^2(\pi \alpha / 2) D_{bx}^{-\alpha} \psi(x) + \sin \pi \alpha S_{ab}^{-\alpha} D_{bx}^{-\alpha} \psi(x). \end{aligned}$$

Формула (37) в случае, когда $D_{bx}^{-\alpha} \psi(x) = (x-a)^{-\alpha_1} (b-x)^{-\beta_1} \psi_0(x)$, $\alpha_1, \beta_1 \in [0, 1-\alpha]$, $\psi_0(x) \in \overset{\sim}{Lip}[a, b]$, другим методом получена в [20].

Теорема 4. Пусть суммируемая на $[a, b]$ функция $\varphi(t) \in \overset{\sim}{Lip}[a, c[$ при $c > x$, $\varphi(t) \in \overset{\sim}{Lip}[c, b[$ при $x > c$. Тогда для всех $x \neq a, b, c$

$$D_{cx}^{\alpha} I_{ab}^{-\alpha} \varphi(x) = [2 \cos^2(\pi \alpha / 2) + \text{sign}(x-c) \sin \pi \alpha (S_{ca}^{\alpha} + S_{cb}^{\alpha})] \varphi(x).$$

Эта формула, которая весьма полезна при решении задачи Геллерстедта [17], является следствием (32) и равенств

$$\begin{aligned} D_{cx}^{\alpha} I_{ac}^{-\alpha} \varphi(x) &= [1 - \text{sign}(x-c)] \cos^2(\pi \alpha / 2) \varphi(x) + \text{sign}(x-c) S_{ac}^{\alpha} \varphi(x), \\ D_{cx}^{\alpha} I_{ac}^{-\alpha} \varphi(x) &= \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_a^c \varphi(\eta) d\eta \frac{\partial}{\partial x} \int_c^x \left(\frac{\xi - \eta}{x - \xi} \right)^{\alpha} \frac{d\xi}{\xi - \eta} = \\ &= \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_a^c \varphi(\eta) d\eta \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{(x-c)/(c-\eta)} t^{-\alpha} (1+t)^{-1} dt = \sin \pi \alpha S_{ca}^{\alpha} \varphi(x), \quad x > c, \end{aligned}$$

$$D_{cx}^{\alpha} I_{ac}^{-\alpha} \varphi(x) = D_{ay}^{\alpha} I_{ac}^{-\alpha} \varphi(a+c-y), \quad y = a+c-x > a,$$

$$D_{cx}^{\alpha} I_{cb}^{-\alpha} \varphi(x) = D_{bz}^{\alpha} I_{cb}^{-\alpha} \varphi(b+c-z) = -\sin \pi \alpha S_{cb}^{\alpha} \varphi(x), \quad z = b+c-x > b.$$

Автор выражает искреннюю благодарность М. С. Салахитдинову, соавтору леммы 3 и теоремы 1, за обсуждение результатов работы.

Литература

1. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М. – Л.: ГИФМЛ, 1963. 358 с.
2. Нахушев А. М., Салахитдинов М. С. Нелокальные задачи для уравнений в частных производных и их приложения к моделированию и автоматизации проектирования сложных систем. Нальчик. 1986. С. 158–159.
3. Saigo M. Math. Japon. 1979. Vol. 24, no. 1. Pp. 377–385.
4. Love E. R. Proc. Edinburgh Math. Soc. 1967. Vol. 15, no. 3. Pp. 169–198.

5. Higgins T. P. J. Soc. Indust. Appl. Math. 1963. Vol. 11, no. 6. Pp. 886–893.
6. Wimp Jet. Proc. Glasgow Math. Assoc. 1965. Vol. 7, no. 3. Pp. 42–44.
7. Кудрявцев Л. Д. Математический анализ. М., 1970.
8. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М., 1978.
9. Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М., 1981.
10. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.–Л., 1951.
11. Самарский А. А. Введение в численные методы. М., 1982.
12. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. М., 1982.
13. Mandelbrojt S. Rend. R. Accad. dei Lincei. 1925. Vol. 1, no. 6. Pp. 151–156.
14. Андре Анго. Математика для электро- и радиоинженеров. М., 1965.
15. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М., 1957.
16. Tricomi F. Sulle equazioni lineari alle derivate pazziali di 2° ordine di tipo misto // Mem. Lincei. 1923. Ser. 5, 14. Fasc. 7.
17. Gellerstedt S. Sur un problème aux limites pour une équation lineaire aux dériveés partielles du second ordre type mixte: Thés pour le doctorat. 1935.
18. Самко С. Г. Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, № 2. С. 298–314.
19. Рубин Б. С. Дифференц. уравнения. 1980. Т. 26, № 5. С. 917–927.
20. Wolfersdorf L. Math. Zeit. 1965. Vol. 90, no. 1. Pp. 24–28.

Поступила в редакцию
16 апреля 1987 г.

Кабардино-Балкарский
государственный университет

О законе композиции операторов дробного интегро-дифференцирования с различными началами

Пусть α – любое действительное число с целой частью $[\alpha]$, $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера.

Оператор $D_{ax}^\alpha: \varphi(t) \rightarrow D_{ax}^\alpha \varphi(x)$, где $\varphi(t) \in L[A, B]$,

$$D_{ax}^\alpha \varphi(x) = \begin{cases} \frac{\text{sign}(x-a)}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(t) dt}{|x-t|^{\alpha+1}}, & \alpha < 0, \\ \varphi(x), & \alpha = 0, \\ \text{sign}(x-a) \frac{\partial^{[\alpha]+1}}{\partial x^{[\alpha]+1}} D_{ax}^{\alpha-[\alpha]-1} \varphi(x), & \alpha > 0, \end{cases} \quad (1)$$

назовем оператором дробного в смысле Римана–Лиувилля интегро-дифференцирования порядка $|\alpha|$ с началом в точке $a \in [A, B]$ и с концом в точке $x \in]A, B[$.

Введем в рассмотрение оператор

$$D_{cx,a}^{\alpha,\beta}\varphi(x) \equiv \operatorname{sign}(x-c)|x-a|^{-\alpha-1}\Gamma^{-1}(-\alpha)\Gamma^{-1}(1-\beta) \times \\ \times \int_c^x F\left(\alpha+1, 1, 1-\beta; \left|\frac{t-a}{x-a}\right|^{\operatorname{sign}(x-c)}\right) \varphi(t) dt,$$

где $\alpha + \beta < 0$, $\alpha, \beta - 1 \neq 0, 1, 2, \dots$, $c \in [A, B]$, $F(a, b, c; z)$ – гипергеометрическая функция Гаусса [1].

В теории краевых задач, особенно нелокальных, для уравнений смешанного типа [2] с необходимостью возникает проблема поиска аналога известного (см., например, [3], [4]) закона композиции $D_{ax}^\alpha D_{ax}^\beta = D_{ax}^{\alpha+\beta}$ операторов дробного интегрирования порядка $-\alpha > 0$ и $-\beta > 0$ с началом в одной и той же точке a в случае операторов дробного интегрирования и дифференцирования с различными началами.

Первый закон композиции (операторов дробного интегрирования с различными началами). Пусть $\varphi(t) \in L[a, b] \cap C]a, b[$, тогда для любых $\alpha < 0$, $\beta < 0$ и $x \in]a, b[$

$$D_{ax}^\alpha D_{bx}^\beta \varphi(x) = D_{ax,a}^{\alpha,\beta} (x-a)^{-\beta} \varphi(x) + (x-a)^{\beta-\alpha+1} D_{bx,a}^{\beta,\alpha} (x-a)^{-\beta-1} \varphi(x). \quad (2)$$

Действительно, легко видеть, что

$$\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\beta)D_{ax}^\alpha D_{bx}^\beta \varphi(x) = \int_a^x (x-\xi)^{-\alpha-1} d\xi \left[\int_\xi^x + \int_x^b \right] \frac{\varphi(t)dt}{(t-\xi)^{\beta+1}} = \\ = \int_a^x \varphi(t)dt \int_a^t \frac{(x-\xi)^{-\alpha-1}}{(t-\xi)^{\beta+1}} d\xi + \int_x^b \varphi(t)dt \int_a^x (x-\xi)^{-\alpha-1} (t-\xi)^{-\beta-1} d\xi. \quad (3)$$

В первом и втором внутренних интегралах произведем замену $\xi = a + (t-a)\eta$ и $\xi = a + (x-a)\eta$ соответственно. В результате, согласно интегральному представлению для функции Гаусса

$$F(a, b, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-zt)^{-a} dt,$$

$\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$, $|z| < 1$, получаем, что правая часть (3) равна

$$\int_a^x \frac{(t-a)^{-\beta} \varphi(t)}{(x-a)^{\alpha+1}} dt \int_0^1 (1-\eta)^{-\beta-1} \left(1 - \frac{t-a}{x-a} \eta\right)^{-\alpha-1} d\eta +$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_x^b \frac{(t-a)^{-\beta-1}}{(x-a)^\alpha} \varphi(t) dt \int_0^1 (1-\eta)^{-\alpha-1} \left(1 - \frac{x-a}{t-a} \eta\right)^{-\beta-1} d\eta = \\
 & = \frac{\Gamma(-\beta)}{\Gamma(1-\beta)} (x-a)^{-\alpha-1} \int_a^x (t-a)^{-\beta} F\left(\alpha+1, 1, 1-\beta; \frac{t-a}{x-a}\right) \varphi(t) dt + \\
 & + \frac{\Gamma(-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{-\alpha} \int_x^b (t-a)^{-\beta-1} F\left(\beta+1, 1, 1-\alpha; \frac{x-a}{t-a}\right) \varphi(t) dt.
 \end{aligned}$$

Второй закон композиции (операторов дробного интегро-дифференцирования с различными началами). Пусть $\varphi(t) \in L[a, b] \cap C]a, b[$, тогда для любых $\alpha < 0$, $\beta < 0$, удовлетворяющих условию $\alpha + \beta < -1$,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} D_{ax}^\alpha D_{bx}^\beta \varphi(x) &= D_{ax,a}^{\alpha+1,\beta} (x-a)^{-\beta} \varphi(x) + \\
 &+ (x-a)^{\beta-\alpha} D_{bx,a}^{\beta,\alpha+1} (x-a)^{-\beta-1} \varphi(x).
 \end{aligned} \tag{4}$$

В самом деле, на основании равенств (см. [5])

$$\lim_{z \rightarrow 1-0} F(a, b, c; z) = \Gamma(c) \Gamma(c-a-b) / [\Gamma(c-a) \Gamma(c-b)], \quad \operatorname{Re}(c-a-b) > 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial z} z^a F(a, b, c; z) = a z^{a-1} F(a+1, b, c; z),$$

нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned}
 & \Gamma(-\alpha) \Gamma(1-\beta) \frac{\partial}{\partial x} D_{ax,a}^{\alpha,\beta} (x-a)^{-\beta} \varphi(x) = \\
 & = \frac{\partial}{\partial x} \int_a^x (t-a)^{-\alpha-\beta-1} \varphi(t) \left(\frac{t-a}{x-a}\right)^{\alpha+1} F\left(\alpha+1, 1, 1-\beta; \frac{t-a}{x-a}\right) dt = \\
 & = (x-a)^{-\alpha-\beta-1} \varphi(x) F(\alpha+1, 1, 1-\beta; 1) + \\
 & + \int_a^x (t-a)^{-\alpha-\beta-1} \varphi(t) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{t-a}{x-a}\right)^{\alpha+1} F\left(\alpha+1, 1, 1-\beta; \frac{t-a}{x-a}\right) dt = \\
 & = \varphi(x) F(\alpha+1, 1, 1-\beta; 1) (x-a)^{-\alpha-\beta-1} - \\
 & - (\alpha+1) \int_a^x \frac{\varphi(t) (t-a)^{-\beta}}{(x-a)^{\alpha+2}} F\left(\alpha+2, 1, 1-\beta; \frac{t-a}{x-a}\right) dt.
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} D_{ax,a}^{\alpha,\beta} (x-a)^{-\beta} \varphi(x) &= D_{ax,a}^{\alpha+1,\beta} (x-a)^{-\beta} \varphi(x) - \\ &- \varphi(x) / [(x-a)^{\alpha+\beta+1} (\alpha+\beta+1) \Gamma(-\alpha) \Gamma(-\beta)]. \end{aligned} \quad (5)$$

Аналогично, опираясь на соотношение

$$\frac{\partial}{\partial z} z^{c-1} F(a, b, c; z) = (c-1) z^{c-2} F(a, b, c-1; z),$$

находим

$$\begin{aligned} &\Gamma(1-\alpha) \Gamma(-\beta) \frac{\partial}{\partial x} (x-a)^{1-\alpha+\beta} D_{bx,a}^{\beta,\alpha} (x-a)^{-\beta-1} \varphi(x) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \int_x^b (t-a)^{-\alpha-\beta-1} \varphi(t) \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^{-\alpha} F\left(\beta+1, 1, 1-\alpha; \frac{x-a}{t-a}\right) dt = \\ &= -\varphi(x) F(\beta+1, 1, -\alpha+1; 1) (x-a)^{-\alpha-\beta-1} - \\ &- \alpha (x-a)^{-\alpha-1} \int_x^b F\left(\beta+1, 1, -\alpha; \frac{x-a}{t-a}\right) (t-a)^{-\beta-1} \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x} (x-a)^{1-\alpha+\beta} D_{bx,a}^{\beta,\alpha} (x-a)^{-\beta-1} \varphi(x) = \\ &= (x-a)^{\beta-\alpha} D_{bx,a}^{\beta,\alpha+1} (x-a)^{-\beta-1} \varphi(x) + \frac{\varphi(x) (x-a)^{-\alpha-\beta-1}}{(\alpha+\beta+1) \Gamma(-\alpha) \Gamma(-\beta)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Правило (4) теперь можно получить как следствие (2), (5) и (6).

Если при $\alpha > -1$ функция $D_{bx}^{\beta} \varphi(x)$ имеет дробную производную порядка $\alpha+1$ с началом в точке a , то $(\partial/\partial x) D_{ax}^{\alpha} D_{bx}^{\beta} \varphi(x) = D_{ax}^{\alpha+1} D_{bx}^{\beta} \varphi(x)$, поэтому в этом случае формулу (4) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} D_{ax}^{\alpha+1} D_{bx}^{\beta} \varphi(x) &= D_{ax,a}^{\alpha+1,\beta} (x-a)^{-\beta} \varphi(x) + \\ &+ (x-a)^{\beta-\alpha} D_{bx,a}^{\beta,\alpha+1} (x-a)^{-\beta-1} \varphi(x). \end{aligned} \quad (7)$$

Третий закон композиции. Пусть

$$(x-a)^{-\beta-1} \varphi(x) \in L[a, b], \quad D_{bx}^{\beta+1} \varphi(x) \in C[a, b[,$$

тогда если $\alpha < 0$, $\beta < 0$, $\alpha + \beta < -1$, то

$$D_{ax}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} D_{bx}^{\beta} \varphi(x) = D_{ax,a}^{\alpha+1,\beta} (x-a)^{-\beta} \varphi(x) +$$

$$+ (x-a)^{\beta-\alpha} D_{bx,a}^{\beta,\alpha+1} (x-a)^{-\beta-1} \varphi(x) + \sin \pi \alpha R_{ab}^{\alpha,\beta} \varphi(x), \quad (8)$$

где

$$R_{ab}^{\alpha,\beta} \varphi(x) = -\frac{(x-a)^{-\alpha-1}}{\sin \pi \alpha \Gamma(-\alpha) \Gamma(-\beta)} \int_a^b (t-a)^{-\beta-1} \varphi(t) dt.$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} D_{ax}^\alpha \frac{\partial}{\partial x} D_{bx}^\beta \varphi(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \Gamma^{-1}(-\alpha) \int_a^{x-\varepsilon} (x-t)^{-\alpha-1} \frac{\partial}{\partial t} D_{bt}^\beta \varphi(t) dt = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} [\varepsilon^{-\alpha-1} D_{bx-\varepsilon}^\beta \varphi(x) - (x-a)^{-\alpha-1} D_{bt}^\beta \varphi(t)|_{t=a} - \\ &- (\alpha+1) \int_a^{x-\varepsilon} (x-t)^{-\alpha-2} D_{bt}^\beta \varphi(t) dt] / \Gamma(-\alpha) = \sin \pi \alpha R_{ab}^{\alpha,\beta} \varphi(x) + \\ &+ \Gamma^{-1}(-\alpha) \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\partial}{\partial x} \int_a^{x-\varepsilon} (x-t)^{-\alpha-1} D_{bt}^\beta \varphi(t) dt, \end{aligned}$$

поэтому

$$D_{ax}^\alpha \frac{\partial}{\partial x} D_{bx}^\beta \varphi(x) = \frac{\partial}{\partial x} D_{ax}^\alpha D_{bx}^\beta \varphi(x) + \sin \pi \alpha R_{ab}^{\alpha,\beta} \varphi(x). \quad (9)$$

Из (9) в соответствии с (7) и получается (8).

Второй закон композиции в случае, когда $\alpha + \beta = -1$, вытекает из равенства

$$\begin{aligned} \pi \frac{\partial}{\partial x} D_{ax}^\alpha D_{bx}^{-\alpha-1} \varphi(x) &= -\sin \pi \alpha \times \\ &\times \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_a^{x-\varepsilon} \left(\frac{t-a}{x-a} \right)^{\alpha+1} \frac{\varphi(t)}{\alpha+1} F \left(\alpha+1, 1, 2+\alpha; \frac{t-a}{x-a} \right) dt + \right. \\ &\left. + \int_{x+\varepsilon}^b \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^{-\alpha} \frac{\varphi(t)}{-\alpha} F \left(-\alpha, 1, 1-\alpha; \frac{x-a}{t-a} \right) dt, \right] \end{aligned}$$

$$\frac{z^\alpha}{\alpha} F(\alpha, 1, \alpha+1; z) = -\ln(1-z) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{k!} [\psi(k+1) - \psi(k+\alpha)] (1-z)^k,$$

$$\lim_{z \rightarrow 1-0} \left[\frac{(1-z)^{\alpha+1}}{\alpha+1} F(\alpha+1, 1, 2+\alpha; 1-z) + \right. \\ \left. + \frac{(1+z)^\alpha}{\alpha} F\left(-\alpha, 1, 1-\alpha; \frac{1}{1+z}\right) \right] = \psi(-\alpha) - \psi(1+\alpha) = \pi \operatorname{ctg}(\alpha+1)\pi, \\ (\alpha)_k = \Gamma(\alpha+k)/\Gamma(\alpha), \quad \psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z),$$

и формируется следующим образом. Пусть $\varphi(t)$ непрерывна по Гельдеру и интегрируема на $]a, b[$. Тогда для любого $\alpha < 0$

$$\frac{\partial}{\partial x} D_{ax}^\alpha D_{bx}^{-\alpha-1} \varphi(x) = \cos \pi \alpha \varphi(x) - \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_a^b \left(\frac{t-a}{x-a} \right)^{\alpha+1} \frac{\varphi(t) dt}{t-x},$$

где интеграл понимается в смысле Коши.

Литература

1. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М.—Л.: ГИФМЛ, 1963. 358 с.
2. Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.
3. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.—Л.: ГИТТЛ, 1951. 544 с.
4. Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 671 с.
5. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М.: ИЛ, 1957. 443 с.

Поступила в редакцию
31 октября 1986 г.

Кабардино-Балкарский
государственный университет

Институт математики
им. В. И. Романовского АН УзССР

О непрерывных дифференциальных уравнениях и их разностных аналогах

Рассмотрим обобщенные конечно-разностные отношения

$$\Delta_n^\alpha \varphi(x) = \delta_n^{-\alpha} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{\alpha}{k} \varphi(x - k\delta_n),$$

где

$$\delta_n = \frac{(x-a)}{n} > 0, \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{1}{k!} \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-k+1).$$

Если существует предел $D_{ax}^\alpha \varphi(t)$ обобщенных конечно-разностных отношений $\Delta_n^\alpha \varphi(x)$ при $n \rightarrow \infty$, то этот предел назовем *дробной* или

междупредельной по Летникову производной порядка α от функции $\varphi(t)$, взятой в пределах от a до x .

Пусть α – любое действительное число с целой частью $[\alpha] \leq \alpha < [\alpha] + 1$, $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера. Тогда если $\alpha < 0$, $\varphi(t) \in L[a, x]$, то (см. [1, с. 521])

$$D_{ax}^{\alpha} \varphi(t) = \Gamma^{-1}(-\alpha) \int_a^x (x-t)^{-\alpha-1} \varphi(t) dt, \quad (1)$$

если же $\alpha > 0$ и $\varphi(t) \in C^{[\alpha]}[a, x]$, $\varphi^{([\alpha]+1)}(t) \in L[a, x]$, то

$$\begin{aligned} D_{ax}^{\alpha} \varphi(t) &= \sum_{k=0}^{[\alpha]} \frac{\varphi^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (x-a)^{k-\alpha} + D_{ax}^{\alpha-[\alpha]-1} \varphi^{([\alpha]+1)}(t) = \\ &= \left(\frac{\partial^{[\alpha]+1}}{\partial x^{[\alpha]+1}} \right) D_{ax}^{\alpha-[\alpha]-1} \varphi(t), \end{aligned} \quad (2)$$

т. е. междупредельная производная $D_{ax}^{\alpha} \varphi(t)$ совпадает с дробной производной (дробным интегралом) в смысле Римана–Лиувилля порядка $\alpha > 0$ ($-\alpha > 0$) от функции $\varphi(t)$ в точке $t = x$ с началом в точке $t = a$.

Формулы (1) и (2) получаются из равенства

$$D_{cx}^{\alpha} \varphi(t) = \frac{\text{sign}(x-c)}{\Gamma(-\alpha)} \int_c^x \frac{\varphi(t) dt}{|x-t|^{\alpha+1}}, \quad c \in [a, b], \quad (3)$$

где интеграл понимается в смысле конечной части по Адамару [2], при $c = a$. Поэтому разумно выражение, стоящее в правой части (3), называть *дробной производной порядка α с началом в точке c* от функции $\varphi(t)$ в точке x .

В связи с (3) *дробной производной порядка $\alpha > 0$ с началом в точке $c \in [a, b]$* от функции $\varphi(t) \in L[a, b]$ в точке $x \in [a, b]$, $x \neq c$, можно назвать и предел

$$\begin{aligned} D_{cx}^{\alpha} \varphi(t) &= \frac{1}{\Gamma(1+[\alpha]-\alpha)} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\partial^{[\alpha]+1}}{\partial x^{[\alpha]+1}} \int_c^{x_{\varepsilon}} \frac{\varphi(t) dt}{|x-t|^{\alpha-[\alpha]}}, \\ x_{\varepsilon} &= x + \varepsilon \text{sign}(c-x). \end{aligned} \quad (4)$$

Если функция $\varphi(t)$ в достаточно малой окрестности

$$x_{\delta} + x - \delta \leq 2t \leq x_{\delta} + x + \delta$$

точки x удовлетворяет условию Гельдера с показателем $h > \alpha$, то из (4) при $0 < \alpha < 1$ в силу (3) имеем

$$D_{cx}^{\alpha} \varphi(t) - \varphi(x) |x-c|^{-\alpha} / \Gamma(1-\alpha) = D_{cx}^{\alpha} [\varphi(t) - \varphi(x)]. \quad (5)$$

Предел правой части (5), когда $c = a \rightarrow -\infty$, в работе [3] назван дробной производной Марше.

Следуя В. Вольтерра (см. [4, с. 100]), *обыкновенным* (линейным) *непрерывным дифференциальным уравнением* назовем уравнение вида

$$M_{ax}^{\alpha,\beta}y(x) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m(x) D_{ax}^{\alpha_m}y(t) = f(x), \quad (6)$$

где $y(x)$ – неизвестная функция, $-\infty < \alpha_m$, α , $\beta < \infty$, $\alpha < \beta$,

$$M_{ax}^{\alpha,\beta}y(x) = \int_{\alpha}^{\beta} a_{\xi}(x) D_{ax}^{\xi}y(t) d\xi. \quad (7)$$

Будет естественным назвать непрерывным или континуумальным дифференциальным уравнением любое уравнение относительно неизвестной функции $y(x)$, обладающее тем свойством, что множество всех входящих в него производных $D_{cx}^{\alpha}y(t)$ содержит локально-связный метрический континуум.

Уравнение, содержащее дробную производную от искомой функции, назовем дробным или междупредельным дифференциальным уравнением, а порядок входящей в него старшей производной – порядком уравнения.

В соответствии с (3) уравнение (6) можно назвать и гиперсингулярным интегральным уравнением Вольтерра.

При исследовании ядра дифференциальных операторов и при реализации многих оптимизационных задач важную роль играет вытекающий из (5)

Аналог теоремы Ферма. Пусть интегрируемая на $[a, b]$ функция $\varphi(t)$ в точке $x \in [a, b]$ принимает наибольшее или наименьшее значение и существует такое $\delta > 0$, что $\varphi(t)$ на сегменте

$$x_{\delta} + x - \delta \leq 2t \leq x_{\delta} + x + \delta$$

удовлетворяет условию Гельдера с показателем $h > \alpha$. Тогда для любого $\alpha \in [0, 1[$ и отличного от x $c \in [a, b]$ производная

$$D_{cx}^{\alpha}\varphi(t) \geq \frac{\varphi(x)|x - c|^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)}$$

в случае наибольшего значения и

$$D_{cx}^{\alpha}\varphi(t) \leq \frac{\varphi(x)|x - c|^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)}$$

в случае наименьшего значения.

Обратим теперь внимание и на следующий факт. Если интегрируемая на $[a, b]$ функция $\varphi(t)$ в точке $x \in [a, b]$ принимает наибольшее значение и существует такое $\delta > 0$, что производная $\varphi'(t)$ на сегменте $x_\delta + x - \delta \leq 2t \leq x_\delta + x + \delta$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $h > \alpha - 1$, то для любого $\alpha \in]1, 2[$ и отличного от x $c \in [a, b]$

$$\operatorname{sign}(x - c) D_{cx}^\alpha \varphi(t) \leq \frac{\varphi(x) |x - c|^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)}. \quad (8)$$

Этот факт вместе с аналогом теоремы Ферма позволяет сформулировать аналоги принципов Хопфа и Заремба–Жиро для континуумальных дифференциальных операторов, как и для («дискретных») уравнений с дробными производными в младших членах [5].

С континуумальными дифференциальными операторами существенно связано отображение $\varphi(t) \rightarrow H_{ax}^\alpha \varphi(t)$, где $H_{ax}^\alpha = D_{ax}^\alpha H_{ax}^0$,

$$H_{ax}^0 \varphi(t) \equiv \int_a^x \varphi(t) \ln |x - t| dt = f_0(x), \quad a < x < b, \quad (9)$$

$$H_{ax}^1 \varphi(t) = \int_a^x (x - t)^{-1} \varphi(t) dt,$$

и интеграл понимается в смысле конечной части по Адамару. В частности, если $f_0(x) \in L[a, b] \cap C^1[a, b[$, то единственное решение $\varphi(x)$ уравнения (9) представимо в виде

$$\varphi(x) = - \int_{-\infty}^1 e_{\xi-1} D_{ax}^\xi f_0(t) d\xi, \quad e_\xi = \exp(-\xi \Gamma'(1)).$$

Можно показать, что если $\varphi(t) \in L(a, b]$ и существует $H_{ax}^\alpha \varphi(t)$, то

$$H_{ax}^\alpha \varphi(t) = \begin{cases} e_{-\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} e_\alpha D_{ax}^{\alpha-1} \varphi(t), & \alpha < 0, \\ e_{-\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} e_\alpha \frac{\partial^{[\alpha]}}{\partial x^{[\alpha]}} D_{ax}^{\alpha-[\alpha]-1} \varphi(x), & \alpha > 0. \end{cases} \quad (10)$$

Обратимая замена $y(x) = H_{ax}^0 z(t)$ и формула (10) дают возможность редуцировать локальные и нелокальные задачи для непрерывного дифференциального уравнения (6) к нагруженным линейным интегральным уравнениям второго рода. Пусть, например, требуется найти решение $y = y(x)$ непрерывного дифференциального уравнения порядка $\alpha \geq 1$

$$\int_0^\alpha D_{ax}^\xi y d\xi = f(x) \in C^1[a, b], \quad (11)$$

если известно, что $D_{ax}^\alpha y \in C[a, b]$, и соблюдено нелокальное условие

$$\int_0^\alpha \sum_{k=1}^{[\xi]} \frac{D_{aa}^{\xi-k} y}{\Gamma(\alpha - k + 1)} (x - a)^{\alpha-k} d\xi = \psi(x), \quad D_{aa}^\beta y = D_{ax}^\beta y|_{x=a}. \quad (12)$$

Действуя на обе части уравнения (11) оператором $D_{ax}^{-\alpha}$ и принимая во внимание (12), равенства (см. [6])

$$D_{ax}^{-\alpha} D_{ax}^\xi y = D_{ax}^{\xi-\alpha} y - \sum_{k=1}^{[\xi]+1} \frac{D_{aa}^{\xi-k} y}{\Gamma(\alpha - k + 1)} (x - a)^{\alpha-k}, \quad D_{aa}^{\xi-[\xi]-1} y = 0$$

и соотношение (10), получим

$$\begin{aligned} \psi(x) + D_{ax}^{-\alpha} f &= \int_0^\alpha H_{ax}^{\xi-\alpha} z d\xi = \int_0^\alpha e_{\alpha-\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} e_{\xi-\alpha} D_{ax}^{\xi-\alpha-1} z d\xi = D_{ax}^{\xi-\alpha-1} z \Big|_0^\alpha - \\ &- \Gamma'(1) \int_0^\alpha D_{ax}^{\xi-\alpha-1} z d\xi = \int_a^x z(t) dt - D_{ax}^{-\alpha-1} z - \Gamma'(1) \int_0^\alpha D_{ax}^{\xi-\alpha-1} z d\xi. \end{aligned}$$

Следовательно, $z(x)$ является решением уравнения Вольтерра второго рода

$$z(x) - D_{ax}^{-\alpha} z - \Gamma'(1) \int_0^\alpha D_{ax}^{\xi-\alpha} z d\xi = \psi'(x) + D_{ax}^{1-\alpha} f$$

или

$$z(x) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{z(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} - \Gamma'(1) \int_a^x \frac{\text{Vi}(\alpha, x-t)}{x-t} z(t) dt = g(x),$$

где

$$\text{Vi}(\alpha, x) = \int_0^\alpha \frac{x(t) dt}{\Gamma(t)}, \quad g(x) = \psi'(x) + D_{ax}^{1-\alpha} f.$$

Разностные аналоги дробного дифференциального уравнения разумно называть *дробными* или *междупредельными разностными уравнениями*.

Междупредельное разностное уравнение

$$\sum_{k=0}^n A_{kn}(x) y(x - k\delta_n) = f(x), \quad (13)$$

где

$$A_{kn}(x) = \int_{\alpha}^{\beta} a_{\xi}(x) \binom{\xi}{k} \delta_n^{-\xi} d\xi + \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m(x) \binom{\alpha_m}{k} \delta_n^{-\alpha_m}$$

представляет собой один из разностных аналогов уравнения (6).

Аналог теоремы Ферма и оценка (8) дают возможность распространить принцип максимума для разностных уравнений [7] на случай дробных разностных уравнений порядка $\alpha \in]0, 2]$ и вида (13).

Литература

1. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.–Л.: ГИТТЛ, 1951. 544 с.
2. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978. 352 с.
3. Самко С. Г. Гиперсингулярные интегралы и их приложения. Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1984. 208 с.
4. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1982. 304 с.
5. Нахушев А. М. ДАН. 1977. Т. 234, № 2. С. 308–311.
6. Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 671 с.
7. Самарский А. А. Введение в численные методы. М.: Наука, 1982. 272 с.

Поступила в редакцию
15 декабря 1986 г.

Кабардино-Балкарский
государственный университет

Эффект локализации особенности градиента решения задачи Дарбу для уравнения Геллерстедта и критерий его непрерывности

Рассмотрим неоднородное уравнение Геллерстедта

$$u_{yy} - (-y)^m u_{xx} = f(x, y) \quad (1)$$

в области D евклидовой плоскости точек (x, y) , ограниченной кривыми $AC_m: \xi = 0$, $BC_m: \eta = l$, где

$$\xi = x - \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}, \quad \eta = x + \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}, \quad (2)$$

и отрезком $AB: 0 \leq x \leq l$ прямой $y = 0$.

Пусть $\beta = m/(2m+4)$, $\gamma_1 = -(2-4\beta)^{4\beta}/4$, $\gamma_2 = (2-4\beta)^{2\beta-1}$;

$$u = u(x, y), \quad v = v(\xi, \eta) = u\left(\frac{\xi + \eta}{2}, -\gamma_2(\eta - \xi)^{1-2\beta}\right),$$

$$F(\xi, \eta) = \gamma_1 f \left(\frac{\xi + \eta}{2}, -\gamma_2 (\eta - \xi)^{1-2\beta} \right);$$

$\Omega = \{(\xi, \eta): 0 < \xi < \eta < l\}$ – образ области D при отображении (2): $\bar{D}$ – замыкание D .

Уравнение (1) в характеристических координатах (2) принимает хорошо известный вид

$$v_{\xi\eta} + \frac{\beta}{\eta - \xi}(v_{\xi} - v_{\eta}) = \frac{F(\xi, \eta)}{(\eta - \xi)^{4\beta}}. \quad (3)$$

Как и в работе [1], через $D(\beta, \beta)$ обозначим множество действительных функций $v(\xi, \eta)$ из класса $C(0 \leq \xi < \eta \leq l) \cap C^1(\Omega)$, имеющих непрерывную в Ω смешанную производную $v_{\xi\eta}$.

Функции $u(x, y)$ назовем решением уравнения (1) в области D , если v – решение уравнения (3) в области Ω из класса $D(\beta, \beta)$.

Задача Дарбу. Найти решение u уравнения (1), непрерывное в $\bar{D}$ и удовлетворяющее краевому условию

$$u(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in AB \cup AC_m. \quad (4)$$

Вопрос об изолированных особенностях решений уравнения Трикоми, лежащих в области его эллиптичности вплоть до параболической линии $y = 0$, впервые поставлен самим Ф. Трикоми еще в 1928 г. (см. [2, с. 181]). Очевидно, что если f не зависит от x и $u(x, y)$ – трижды непрерывно дифференцируемое по x решение уравнения (1), то и первая компонента градиента $\nabla u = (u_x, u_y)$ будет его решением. Поэтому история проблемы об особенностях градиента решения задачи Трикоми и Дарбу, по существу, началась с работы [2].

Традиционно считается, что уравнение (1) с достаточно гладкой в $\bar{D}$ правой частью не может иметь решение с изолированной особой точкой, лежащей даже на AB , ибо эта особенность должна уноситься вдоль характеристики, выходящей из этой точки. Однако и это правило не без исключения. Об этом говорит следующая

Теорема 1 (о локализации особенности). Пусть $2 < m < 4$, $f \in C^1(\bar{D})$ и $f(0, 0) \neq 0$. Тогда первая компонента градиента ∇u решения $u(x, y)$ задачи Дарбу (4) для уравнения (1) непрерывна всюду в $\bar{D}$ за исключением точки $(0, 0)$, где она обращается в ∞ , а вторая непрерывна в $\bar{D}$.

Пусть

$$R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta) = (\eta_1 - \xi_1)^{2\beta} [(\eta - \xi_1)(\eta_1 - \xi)]^{-\beta} F \left(\beta, \beta, 1; \frac{(\xi - \xi_1)(\eta_1 - \eta)}{(\xi - \eta_1)(\xi_1 - \eta)} \right),$$

где $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ – гипергеометрическая функция, означает функцию Римана для уравнения (3).

Схема доказательства теоремы 1 такова.

1. Устанавливается справедливость следующей леммы о необходимых краевых условиях для уравнения (1) в области D .

Лемма 1. Пусть $F(\xi, \eta) \in C(\bar{\Omega})$, $v(\xi, \eta)$ – решение уравнения (3) из класса $D(\beta, \beta)$. Тогда

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)} \lim_{\eta \rightarrow \xi} (\eta - \xi)^{2\beta} (v_\eta - v_\xi) = \xi^\beta D_{l\xi}^{1-\beta} [v(0, \eta_1) - v(0, l)] + \\ & + (l - \xi)^\beta D_{0\xi}^{1-\beta} [v(\xi_1, l) - v(0, l)] - \Gamma(\beta) D_{0\xi}^{-\beta} D_{l\xi}^{-\beta} (\eta_1 - \xi)^{1-4\beta} F(\xi_1, \eta_1), \\ & \frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1-2\beta)} v(\xi, \xi) = \xi^{-\beta} [D_{l\xi}^\beta \eta_1^{2\beta} v(0, \eta_1) + \beta D_{l\xi}^{\beta-1} \eta_1^{2\beta-1} v(0, \eta_1)] + \\ & + (l - \xi)^{-\beta} \{ D_{0\xi}^{\beta-1} [(l - \xi_1)^{2\beta} v(\xi_1, l)]' + \beta D_{l\xi}^{\beta-1} (l - \xi_1)^{2\beta-1} v(\xi_1, l) \} - \\ & - \Gamma(1-\beta) D_{0\xi}^{\beta-1} D_{l\xi}^{\beta-1} (\eta_1 - \xi_1)^{-2\beta} F(\xi_1, \eta_1). \end{aligned}$$

Здесь и далее $\Gamma(z)$ – гамма-функция, D_{ax}^α – оператор дробного интегро-дифференцирования [3].

Лемма 1 позволяет, в частности, утверждать, что если $v(\xi, \eta)$ удовлетворяет ее условиям, то $v(\xi, \eta)$ и взвешенная производная $(\eta - \xi)^{2\beta} (v_\eta - v_\xi)$ непрерывны всюду в $\bar{\Omega}$ за исключением, быть может, точек $(0, 0)$ и (l, l) .

2. На основании леммы 1 и свойств функции Римана доказывается, что решение $u(x, y)$ задачи Дарбу (1), (4) представимо в виде

$$u = u^1 + u^2,$$

$$u^1(x, y) = \frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)} y \int_0^1 \nu [\eta - (\eta - \xi)t] (t - t^2)^{-\beta} dt, \quad \nu[x] \equiv u_y(x, 0),$$

$$u^2(x, y) = \int_\xi^\eta d\xi \int_{\xi_1}^\eta F(\xi_1, \eta_1) (\eta_1 - \xi_1)^{-4\beta} R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta) d\eta_1.$$

3. Доказывается следующая лемма о свойстве решения однородной задачи Коши:

$$u^2(x, 0) = 0, \quad u_y^2(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l,$$

для уравнения (1) в точках $\theta_0^m(x) = (x/2, -\gamma_2 x^{1-2\beta})$, $x \in [0, l]$, лежащих на характеристике AC_m .

Лемма 2. Если $f \in C(\bar{D})$, то существует такая функция $\nu_0 \in C[0, l]$, что

$$D_{0x}^{1-\beta} u^2[\theta_0^m(x)] = x^{1-3\beta} \nu_0(x), \quad \nu_0(0) = 0 \Leftrightarrow f(0, 0) = 0.$$

4. Устанавливается достоверность леммы об априорных оценках решения u^2 однородной задачи Коши для уравнения (1) в области D .

Лемма 3. Пусть $f \in C(\overline{D})$, тогда

$$|u^2(x, y)| \leq C \|f\| y^2.$$

Если же $f \in C^1(\overline{D})$, то

$$|u_x^2(x, y)| \leq C \|f_x\| y^2, \quad |u_y^2(x, y)| \leq C \|f\| y.$$

Здесь и в дальнейшем C означает положительную постоянную, которая может зависеть только от β и l , а $\|\cdot\|_k$ – норма в пространстве C^k , $\|\cdot\| = \|\cdot\|_0$.

5. Существенно опираясь на лемму 2, можно доказать, что

$$\begin{aligned} \nu_1(x) \Gamma(1 - \beta) &\equiv [x \nu'_0(x) + (1 - 2\beta) \nu_0(x)] \gamma_2 \Gamma(2 - 2\beta) \in C[0, l], \\ \nu'(x) &= \nu_1(x) x^{-2\beta}, \quad \nu_1(0) = (1 - 2\beta) \nu_0(0). \end{aligned} \quad (5)$$

6. Пользуясь равенством (4), первой формулой среднего значения интеграла [4], а затем интегральным представлением для гипергеометрических функций [5], показываем, что

$$u_x^1 = y \nu_1 [\eta - (\eta - \xi) t_0] \eta^{-2\beta} F(2\beta, 1 - \beta, 2 - 2\beta; 1 - \xi/\eta), \quad (6)$$

где t_0 – некоторая точка из $[0, 1]$.

Лемма 3 и представление (5) позволяют рассмотреть и случай $m \leq 2$.

Теорема 2. Пусть $f \in C^1(\overline{D})$, $f(0, 0) \neq 0$ и $m = 2$. Тогда если u – решение задачи Дарбу (1), (4), то $u_x \in C(\overline{D} \setminus A)$ и ограничена в D , $a \ddot{E} u_y \in C(\overline{D})$.

Теорема 3. Пусть u – решение задачи Дарбу (4) для уравнения (1) с $m \leq 2$ и $f \in C^1(\overline{D})$. Тогда

$$\|u\| \leq C \|f\|_1, \quad \text{если } m < 2,$$

u

$$\|u\| + \|u_y\| + \sup_{\overline{D}} |u_x| \leq C \|f\|_1, \quad \text{если } m = 2.$$

Необходимое и достаточное условие существования конечного предела следа $\nu(x)$ при $x \rightarrow 0$, l производной по y от решения $u(x, y)$ задачи Трикоми для уравнения

$$u_{yy} + y u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, \quad (7)$$

впервые было найдено в работе [2]. Для уравнения же вида

$$u_{yy} + \text{sign } y \cdot |y|^m u_{xx} = f(x, y), \quad 0 < x < l, \quad (8)$$

этот вопрос и связанная с ним проблема *ограниченности градиента решения задачи Трикоми и ее сингулярного варианта* – первой задачи Дарбу в гиперболической части D смешанной области задания уравнения (7) – оставались открытыми.

Имеет место

Теорема 4. Если $2k \leq m < 2(k+1)$, $f \in C^k(\overline{D})$, $k = 1, 2, \dots$, то решение $u(x, y)$ задачи Дарбу (4) для уравнения (1) в области D будет принадлежать пространству $C^1(\overline{D})$ тогда и только тогда, когда

$$\partial^i f / \partial y^i(0, 0) = 0 \quad \forall i = 0, 1, \dots, k-1. \quad (9)$$

В силу теоремы 3 условие (8) является лишним, когда $m < 2$.

Доказательство теоремы 4 основывается на леммах 2, 3 и на следующем представлении для функции $\nu_0(x)$:

$$\begin{aligned} \nu_0(x) = & \int_0^1 \frac{z^{1-3\beta}(1-z)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} dz \left\{ \int_0^1 \frac{F(x\xi, x\zeta(z))}{(1-\xi)^{2\beta}[\zeta(z)]^\beta} d\xi + \right. \\ & + \beta^2 \int_0^1 \xi(1-\xi)^{-2\beta}[\zeta(z)]^{-2\beta} d\xi \int_0^1 \eta^{1-4\beta}[\zeta(z\eta)]^{\beta-1} \times \\ & \left. \times F(x\xi, x\zeta(z\eta)) F(1-\beta, 1-\beta, 2; (1-\eta)\xi/\zeta(z\eta)) d\eta \right\}, \end{aligned}$$

где $\zeta(\mu) = \xi + (1-\xi)\mu$, $\mu \in [0, 1]$, $\xi \in [0, 1]$.

Для любой функции $f(x, y) \in C^1(\overline{D})$ введем отображения $f \rightarrow f_1^1$ и $f \rightarrow f_2^2$ определяемые формулами

$$f_1^1(x, y) = \int_0^1 f_1(xt, yt^{1-2\beta}) dt, \quad f_2^2(x, y) = (1-2\beta) \int_0^1 t^{-2\beta} f_2(xt, yt^{1-2\beta}) dt,$$

где субиндексы 1 и 2 означают производные по X и Y от $f(X, Y)$. Примем следующие обозначения:

$$x_1 = x\zeta_1, \quad x_2 = -(x\zeta_2)^{1-2\beta},$$

$$\zeta_1 = \xi + 1/2(1-\xi)\mu, \quad \zeta_2 = (1-\xi)\mu\gamma_2^{1/(1-2\beta)},$$

$2 * n = 22 \dots 2$ – кортеж длины n .

При доказательстве теоремы 4 существенно используется и тот факт, что

$$f(x_1, x_2) = x_2^i f_{2*i}^{2*i}(0, 0) + x_1 x_2^i f_{2*i1}^{2*i1}(x_1, x_2) + x_2^k f_{2*k}^{2*k}(x_1, x_2), \quad i = 0, 1, \dots, k-1;$$

$$x \frac{d}{dx} f(x_1, x_2) = (1 - 2\beta) \left[x_2^{j+1} f_{22*j}^{2*j}(0, 0) + x_2^k f_{22*(k-1)}^{2*(k-1)}(x_1, x_2) \right] + \\ + x_1 \left[f_1(x_1, x_2) + (1 - 2\beta) x_2^{j+1} f_{22*j}^{2*j}(x_1, x_2) \right], \quad j = 0, 1, \dots, k-2.$$

Здесь по индексам i и j подразумевается суммирование.

В заключение выражаю сердечную признательность моему учителю чл.-корр. РАН А. В. Бицадзе за внимание к работе и проф. Недю Попиванову за совместную работу в г. Варне в сентябре 1990 г., которая вернула меня к проблеме о градиенте решения задачи Дарбу.

Литература

1. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10, № 1. С. 100–111.
2. Трикоми Ф. О линейных уравнениях смешанного типа. М.–Л.: ГИТТЛ, 1947. 192 с.
3. Нахушев А. М., Салахитдинов М. С. Доклады АН СССР. 1988. Т. 299, № 6. С. 1313–1316.
4. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. Т. 1. М.: МГУ, 1985. 666 с.
5. Никифоров А. Ф., Уваров В. Б. Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1984. 344 с.

Поступила в редакцию
25 февраля 1992 г.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и автоматизации

Критерий непрерывности градиента решения задачи Дарбу для уравнения Геллерстедта

1. Необходимые краевые условия для уравнения Геллерстедта.
Рассмотрим неоднородное уравнение Геллерстедта

$$u_{yy} - (-y)^m u_{xx} = f(x, y) \quad (1)$$

в конечной области $D = D_m$ евклидовой плоскости точек (x, y) , ограниченной кривыми $AC_m : \xi = 0$, $BC_m : \eta = l$, где

$$\xi = x - \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}, \quad \eta = x + \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}, \quad (2)$$

и отрезком $AB : 0 \leq x \leq l$ прямой $y = 0$.

Пусть $\beta = m/(2m+4)$ и $T_m u$ означает левую часть уравнения (1). Поскольку

$$u_x = u_\xi + u_\eta, \quad u_y = \left(\frac{\eta - \xi}{2 - 4\beta} \right)^{2\beta} (u_\xi - u_\eta), \quad (3)$$

$$T_m u = -4 \left(\frac{\eta - \xi}{2 - 4\beta} \right)^{4\beta} \left[u_{\xi\eta} + \frac{\beta}{\eta - \xi} (u_\xi - u_\eta) \right], \quad (4)$$

то уравнение (1) в характеристических координатах (2) принимает хорошо известный вид

$$\hat{u}_{\xi\eta} + \frac{\beta}{\eta - \xi}(\hat{u}_{\xi} - \hat{u}_{\eta}) = \frac{F(\xi, \eta)}{(\eta - \xi)^{4\beta}}. \quad (5)$$

Здесь и в дальнейшем

$$\gamma_1 = -\frac{1}{4} \left(\frac{4}{m+2} \right)^{4\beta}, \quad \gamma_2 = \left(\frac{m+2}{4} \right)^{1-2\beta},$$

$$u = u(x, y), \quad \hat{u} = \hat{u}(\xi, \eta) = u \left(\frac{\xi + \eta}{2}, -\gamma_2(\eta - \xi)^{1-2\beta} \right), \quad (6)$$

$$F(\xi, \eta) = \gamma_1 \hat{f}(\xi, \eta). \quad (7)$$

Образом области D при преобразовании (2) является область $\Omega = \{(\xi, \eta) : 0 < \xi < \eta < l\}$ на евклидовой плоскости точек (ξ, η) .

Как и в работе [1], через $D(\beta, \beta)$ обозначим множество действительных функций $\hat{u}(\xi, \eta)$ с непрерывной смешанной производной $\hat{u}_{\xi\eta}$, принадлежащих классу $C(0 \leq \xi < \eta \leq l) \cap C^1(\Omega)$ и таких, что

$$\hat{u}(0, \eta) \in C^1(0 < \eta \leq l), \quad \hat{u}(\xi, l) \in C^1(0 \leq \xi < l).$$

В теории уравнения (1) или (5) важную роль играет функция Римана

$$R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta) = (\eta_1 - \xi_1)^{2\beta} [(\eta - \xi_1)(\eta_1 - \xi)]^{-\beta} \times \\ \times F \left(\beta, \beta, 1; \frac{(\xi - \xi_1)(\eta_1 - \eta)}{(\xi - \eta_1)(\xi_1 - \eta)} \right), \quad (8)$$

где $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ – гипергеометрическая функция.

Характеристику структурным свойствам решения уравнения (5) дает следующая

Лемма 1. Пусть $F(\xi, \eta) \in C(\overline{\Omega})$, $v(\xi, \eta)$ – решение уравнения (5) из класса $D(\beta, \beta)$. Тогда $v(\xi, \eta)$ является решением нагруженного дифференциального уравнения первого порядка

$$v(\xi, \eta) = R(0, l; \xi, \eta)v(0, l) + \Phi(\xi, \eta) - \int_{\eta}^l \left[v'(0, \eta_1) + \frac{\beta}{\eta_1} v(0, \eta_1) \right] \times \\ \times R(0, \eta_1; \xi, \eta) d\eta_1 + \int_0^{\xi} \left[v'(\xi_1, l) - \frac{\beta}{l - \xi_1} v(\xi_1, l) \right] R(\xi_1, l; \xi, \eta) d\xi_1, \quad (9)$$

где

$$\Phi(\xi, \eta) = - \int_0^{\xi} d\xi_1 \int_l^{\eta} \frac{F(\xi_1, \eta_1)}{(\eta_1 - \xi_1)^{4\beta}} R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta) d\eta_1.$$

Уравнение (9) возникает при реализации метода Римана (см. [2]) решения задачи Гурса, поэтому лемма 1 считается известной.

Имеет место

Лемма 2. Пусть $F(\xi, \eta) \in C(\overline{\Omega})$, $v(\xi, \eta)$ – решение уравнения (5) из класса $D(\beta, \beta)$. Тогда

$$\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)} \lim_{\eta \rightarrow \xi} (\eta - \xi)^{2\beta} (v_\eta - v_\xi) = \xi^\beta D_{l\xi}^{1-\beta} [v(0, \eta_1) - v(0, l)] +$$

$$+ (l - \xi)^\beta D_{0\xi}^{1-\beta} [v(\xi_1, l) - v(0, l)] - \Gamma(\beta) D_{0\xi}^{-\beta} D_{l\xi}^{-\beta} (\eta_1 - \xi_1)^{1-4\beta} F(\xi_1, \eta_1), \quad (10)$$

$$\frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1-2\beta)} v(\xi, \xi) = \xi^{-\beta} [D_{l\xi}^\beta \eta_1^{2\beta} v(0, \eta_1) + \beta D_{l\xi}^{\beta-1} \eta_1^{2\beta-1} v(0, \eta_1)] +$$

$$+ (l - \xi)^{-\beta} \left\{ D_{0\xi}^{\beta-1} [(l - \xi_1)^{2\beta} v(\xi_1, l)]^1 + \beta D_{0\xi}^{\beta-1} (l - \xi_1)^{2\beta-1} v(\xi_1, l) \right\} -$$

$$- \Gamma(1-\beta) D_{0\xi}^{\beta-1} D_{l\xi}^{\beta-1} (\eta_1 - \xi_1)^{-2\beta} F(\xi_1, \eta_1). \quad (11)$$

Здесь $\Gamma(z)$ – гамма-функция, D_{ax}^α – оператор дробного интегро-дифференцирования [3].

Действительно, функция $w(\xi, \eta) = v(\xi, \eta) - v(0, l)$ является решением уравнения (5) из класса $D(\beta, \beta)$, удовлетворяющим условию $w(0, l) = 0$. В силу леммы 1 функция $w(\xi, \eta)$ удовлетворяет уравнению (9). Стало быть,

$$w(\xi, \eta) = \Phi(\xi, \eta) + \int_l^\eta \varphi(\beta; \eta_1) R(0, \eta_1; \xi, \eta) d\eta_1 +$$

$$+ \int_0^\xi \psi(\beta; \xi_1) R(\xi_1, l; \xi, \eta) d\xi_1, \quad (12)$$

где

$$\varphi(\beta; \eta_1) = v'(0, \eta_1) + \frac{\beta}{\eta_1} [v(0, \eta_1) - v(0, l)],$$

$$\psi(\beta; \xi_1) = v'(\xi_1, l) - \frac{\beta}{(l - \xi_1)} [v(\xi_1, l) - v(0, l)].$$

Свойство

$$\frac{\partial}{\partial z} F(\alpha, \beta, \gamma; z) = \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1; z)$$

гипергеометрической функции дает нам право записать

$$\frac{\partial R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{\beta R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta)}{\eta_1 - \xi} + \beta^2 (\eta_1 - \xi_1)^{2\beta+1} (\eta_1 - \xi)^{-\beta-2} \times$$

$$\times (\eta - \xi_1)^{-\beta-1} (\eta_1 - \eta) F \left(\beta + 1, \beta + 1, 2; \frac{(\xi - \xi_1)(\eta_1 - \eta)}{(\xi - \eta_1)(\xi_1 - \eta)} \right).$$

Отсюда на основании равенства

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = (1 - z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma; z)$$

имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta)}{\partial \xi} &= \frac{\beta R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta)}{\eta_1 - \xi_1} + (\eta - \xi)^{-2\beta} (\eta_1 - \xi)^{\beta-2} \times \\ &\times \beta^2 (\eta_1 - \xi_1) (\eta_1 - \eta) (\eta - \xi_1)^{\beta-1} F \left(1 - \beta, 1 - \beta, 2; \frac{(\xi - \xi_1)(\eta_1 - \eta)}{(\xi - \eta_1)(\xi_1 - \eta)} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Аналогично можно убедиться, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta)}{\partial \eta} &= -\frac{\beta R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta)}{\eta - \xi_1} - (\eta - \xi)^{-2\beta} (\eta - \xi_1)^{\beta-2} \times \\ &\times \beta^2 (\eta_1 - \xi_1) (\xi - \xi_1) (\eta_1 - \xi)^{\beta-1} F \left(1 - \beta, 1 - \beta, 2; \frac{(\xi - \xi_1)(\eta_1 - \eta)}{(\xi - \eta_1)(\xi_1 - \eta)} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Из (12), (13) и (14) нетрудно усмотреть, что

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow \xi} (\eta - \xi)^{2\beta} (v_\eta - v_\xi) &= \lim_{\eta \rightarrow \xi} (\eta - \xi)^{2\beta} \left\{ \varphi(\beta; \eta) R(0, \eta; \xi, \eta) - \right. \\ &- \psi(\beta; \xi) R(\xi, l; \xi, \eta) + \int_l^\eta \varphi(\beta; \eta_1) [R_\eta(0, \eta_1; \xi, \eta) - R_\xi(0, \eta_1; \xi, \eta)] d\eta_1 + \\ &+ \int_0^\xi \psi(\beta; \xi_1) [R_\eta(\xi_1, l; \xi, \eta) - R_\xi(\xi_1, l; \xi, \eta)] d\xi_1 - \int_0^\xi \frac{F(\xi_1, \eta)}{(\eta - \xi_1)^{4\beta}} \times \\ &\times R(\xi_1, \eta; \xi, \eta) d\xi_1 + \int_l^\eta \frac{F(\xi, \eta_1)}{(\eta_1 - \xi)^{4\beta}} R(\xi, \eta_1; \xi, \eta) d\eta_1 - \\ &- \left. \int_0^\xi d\xi_1 \int_l^\eta \frac{F(\xi_1, \eta_1)}{(\eta_1 - \xi_1)^{4\beta}} [R_\eta(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta) - R_\xi(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta)] d\eta_1 \right\} = \\ &= -2\beta^2 F(1 - \beta, 1 - \beta, 2; 1) \left\{ \xi^{\beta-1} \int_l^\xi \varphi(\beta, \eta_1) \eta_1 (\eta_1 - \xi)^{\beta-1} d\eta_1 + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (l - \xi)^{\beta-1} \int_0^{\xi} \psi(\beta; \xi_1) (l - \xi_1) (\xi - \xi_1)^{\beta-1} d\xi_1 - \\
& - \int_0^{\xi} (\xi - \xi_1)^{\beta-1} d\xi_1 \int_0^{\xi} (\eta_1 - \xi_1)^{1-4\beta} F(\xi_1, \eta_1) (\eta_1 - \xi)^{\beta-1} d\eta_1 \Big\}. \quad (15)
\end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned}
\eta_1 \varphi(\beta; \eta_1) &= (\eta_1 - \xi) v'(0, \eta_1) + \beta [v(0, \eta_1) - v(0, l)] + \xi v'(0, \eta_1) = \\
&= (\eta_1 - \xi)^{1-\beta} \frac{\partial}{\partial \eta_1} \left\{ (\eta_1 - \xi)^{\beta} [v(0, \eta_1) - v(0, l)] \right\} + \xi v'(0, \eta_1), \\
(l - \xi_1) \psi(\beta; \xi_1) &= (\xi - \xi_1) v'(\xi_1, l) - \beta [v(\xi_1, l) - v(0, l)] + (l - \xi) v'(\xi_1, l) = \\
&= (\xi - \xi_1)^{1-\beta} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left\{ (\xi - \xi_1)^{\beta} [v(\xi_1, l) - v(0, l)] \right\} + (l - \xi) v'(\xi_1, l),
\end{aligned}$$

то (15) эквивалентно равенству

$$\begin{aligned}
& \lim_{\eta \rightarrow \xi} (\eta - \xi)^{2\beta} (v_{\eta} - v_{\xi}) = -2\beta^2 F(1 - \beta, 1 - \beta, 2; 1) \times \\
& \times \left\{ \xi^{\beta-1} \int_l^{\xi} \frac{\partial}{\partial \eta_1} \{ (\eta_1 - \xi)^{\beta} [v(0, \eta_1) - v(0, l)] \} d\eta_1 + \xi^{\beta} \int_l^{\xi} \frac{v'(0, \eta_1) d\eta_1}{(\eta_1 - \xi)^{1-\beta}} + \right. \\
& + (l - \xi)^{\beta-1} \int_0^{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \{ (\xi - \xi_1)^{\beta} [v(\xi_1, l) - v(0, l)] \} d\xi_1 + (l - \xi)^{\beta} \int_0^{\xi} \frac{v'(\xi_1, l) d\xi_1}{(\xi - \xi_1)^{1-\beta}} - \\
& \left. - \int_0^{\xi} (\xi - \xi_1)^{\beta-1} d\xi_1 \int_l^{\xi} \frac{(\eta_1 - \xi_1)^{1-4\beta} F(\xi_1, \eta_1)}{(\eta_1 - \xi)^{1-\beta}} d\eta_1 \right\}. \quad (16)
\end{aligned}$$

Из (16) в силу равенства

$$\beta^2 F(1 - \beta, 1 - \beta, 2; 1) = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)},$$

$$D_{ax}^{\alpha} \varphi(t) = \frac{\text{sign}(x - a)}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^x \varphi(t) |x - t|^{-\alpha-1} dt, \quad \alpha < 0,$$

ВИДИМ, ЧТО

$$\lim_{\eta \rightarrow \xi} (\eta - \xi)^{2\beta} (v_{\eta} - v_{\xi}) = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)} \xi^{\beta} D_{l\xi}^{-\beta} v'(0, \eta_1) +$$

$$+ \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)}(l - \xi)^\beta D_{0\xi}^{-\beta} v'(\xi_1, l) + \Gamma(2\beta) D_{0\xi}^{-\beta} D_{l\xi}^{-\beta} \frac{F(\xi_1, \eta_1)}{(\eta_1 - \xi_1)^{4\beta-1}}. \quad (17)$$

Поскольку

$$D_{l\xi}^{1-\beta}[v(0, \eta_1) - v(0, l)] = D_{l\xi}^{-\beta} v'(0, \eta_1),$$

$$D_{0\xi}^{1-\beta}[v(\xi_1, l) - v(0, l)] = D_{0\xi}^{-\beta} v'(\xi_1, l),$$

то ясно, что (17) является другой формой записи (10).

Чтобы доказать (11), в первую очередь заметим, что

$$R(\xi_1, \eta_1; \xi, \xi) = F(\beta, \beta, 1; 1)(\eta_1 - \xi_1)^{2\beta}[(\xi - \xi_1)(\eta_1 - \xi)]^{-\beta},$$

где $F(\beta, \beta, 1; 1) = \Gamma(1 - 2\beta)/\Gamma^2(1 - \beta)$. Принимая это во внимание, из (9) получаем

$$\begin{aligned} v(\xi, \xi) = & F(\beta, \beta, 1; 1)\{l^{2\beta}[\xi(l - \xi)]^{-\beta}v(0, l) - \xi^{-\beta} \int_{\xi}^l \varphi_{\beta}(\eta_1) \eta_1^{2\beta-1} (\eta_1 - \xi)^{-\beta} d\eta_1 + \\ & + (l - \xi)^{-\beta} \int_0^{\xi} \psi_{\beta}(\xi_1) (l - \xi_1)^{2\beta-1} (\xi - \xi_1)^{-\beta} d\xi_1 - \\ & - \int_0^{\xi} (\xi - \xi_1)^{-\beta} d\xi_1 \int_{\xi}^l (\eta_1 - \xi_1)^{-2\beta} (\eta_1 - \xi)^{-\beta} F(\xi_1, \eta_1) d\eta_1\}, \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\varphi_{\beta}(\eta_1) = \eta_1 v'(0, \eta_1) + \beta v(0, \eta_1), \quad \psi_{\beta}(\xi_1) = (l - \xi_1)v(\xi_1, l) - \beta v(\xi_1, l).$$

Так как $\varphi_{\beta}(\eta_1) = \eta_1^{1-2\beta}[\eta_1^{2\beta}v(0, \eta_1)]' - \beta v(0, \eta_1)$, то

$$\begin{aligned} (l - \xi)^{-\beta} l^{2\beta} v(0, l) + \int_l^{\xi} (\eta_1 - \xi)^{-\beta} \eta_1^{2\beta-1} \varphi_{\beta}(\eta_1) d\eta_1 = & (l - \xi)^{-\beta} l^{2\beta} v(0, l) + \\ & + \int_l^{\xi} [\eta_1^{2\beta} v(0, \eta_1)]' (\eta_1 - \xi)^{-\beta} d\eta_1 - \beta \int_l^{\xi} \eta_1^{2\beta-1} v(0, \eta_1) (\eta_1 - \xi)^{-\beta} d\eta_1 = \\ & = \Gamma(1 - \beta) D_{l\xi}^{\beta} \eta_1^{2\beta} v(0, \eta_1) + \beta \Gamma(1 - \beta) D_{l\xi}^{\beta-1} \eta_1^{2\beta-1} v(0, \eta_1). \end{aligned} \quad (19)$$

Аналогично в соответствии с равенством

$$\psi_{\beta}(\xi_1) = (l - \xi_1)^{1-2\beta}[(l - \xi_1)^{2\beta}v(\xi_1, l)]' + \beta v(\xi_1, l)$$

получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{\xi} \psi_{\beta}(\xi_1)(l - \xi_1)^{2\beta-1}(\xi - \xi_1)^{-\beta} d\xi_1 &= \Gamma(1 - \beta) D_{0\xi}^{\beta-1} [(l - \xi_1)^{2\beta} v(\xi_1, l)]' + \\ &+ \beta \Gamma(1 - \beta) D_{0\xi}^{\beta-1} (l - \xi_1)^{2\beta-1} v(\xi_1, l) = -l^{2\beta} v(0, l) \xi^{-\beta} + \\ &+ \Gamma(1 - \beta) \{ D_{0\xi}^{\beta} (l - \xi_1)^{2\beta} v(\xi_1, l) + \beta D_{0\xi}^{\beta-1} (l - \xi_1)^{2\beta-1} v(\xi_1, l) \}. \end{aligned} \quad (20)$$

Свойство (11) сейчас можно увидеть из (18)–(20).

Равенства (10) и (11) представляют собой необходимые краевые условия, которым должны удовлетворять все решения уравнения (5) из класса $D(\beta, \beta)$.

Из леммы 2 вытекает, что если $v(\xi, \eta)$ – решения уравнения (5) из класса $D(\beta, \beta)$, то оно и взвешенная производная $(\eta - \xi)^{2\beta}(v_{\eta} - v_{\xi})$ непрерывны всюду в $\bar{\Omega}$, за исключением, быть может, точек $(0, 0)$ и (l, l) .

2. Постановка задачи Дарбу и история проблемы. Функцию $u(x, y)$ назовем (обобщенным) решением уравнения (1) в области D , если функция $\hat{u}(\xi, \eta)$ – решение уравнения (5) в области Ω из класса $D(\beta, \beta)$.

Задача Дарбу. Найти обобщенное решение $u(x, y)$ уравнения (1), непрерывное в $\bar{D}$ и удовлетворяющее краевому условию

$$u(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in AB \cup AC_m. \quad (21)$$

Пусть $u(x, y)$ – решение задачи Дарбу. Из леммы 2 и соотношения (3) следует, что $u \in C^1(D \cup AB)$. Принимая это во внимание и опираясь на свойства функции Римана (8), нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{\Gamma(2 - 2\beta)}{\Gamma^2(1 - \beta)} y \int_0^1 \nu \left[x + \frac{2}{m+2} (-y)^{(m+2)/2} (2t - 1) \right] (t - t^2)^{-\beta} dt + \\ &+ \int_{\xi}^{\eta} d\xi_1 \int_{\xi_1}^{\eta} \frac{F(\xi_1, \eta_1)}{(\eta_1 - \xi_1)^{4\beta}} R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta) d\eta_1, \end{aligned} \quad (22)$$

где $\nu[x] \equiv \nu(x) \equiv u_y(x, 0)$, $0 < x < l$. Представление (22) при $m = 0$ имеет простой вид

$$u(x, y) = -\frac{1}{2} \int_{\xi}^{\eta} \nu(\xi_1) d\xi_1 - \frac{1}{4} \int_{\xi}^{\eta} d\xi_1 \int_{\xi_1}^{\eta} f \left(\frac{\xi_1 + \eta_1}{2}, \frac{\xi_1 - \eta_1}{2} \right) d\eta_1. \quad (23)$$

Здесь $\xi = x + y$, $\eta = x - y$.

В силу (21)

$$u(x/2, -x/2) = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (24)$$

Равенства (23) и (24) совместны тогда и только тогда, когда

$$\nu(x) = \frac{1}{2} \int_0^x f\left(\frac{\xi_1 + x}{2}, \frac{\xi_1 - x}{2}\right) d\xi_1. \quad (25)$$

Из (23) и (25) тривиально вытекает, что если $f \in C(\overline{D})$, то обобщенное решение u задачи Дарбу принадлежит $C^1(\overline{D})$ и

$$\|u\|_1 \leq C\|f\|_0, \quad (26)$$

где $\|\cdot\|_k$ — норма в пространстве C^k : $\|f\|_0 \equiv \|f\| = \max_{\overline{D}} |f(x, y)|$. Здесь и далее C означает положительную постоянную, которая может зависеть только от l и коэффициентов уравнения.

Оценка (26) остается в силе и для общего линейного уравнения с волновым оператором T_0 в главной части и с достаточно гладкими коэффициентами при младших членах. В 1970 г. (см. [4]) было обнаружено, что оценка (26) не имеет места для уравнения

$$u_{yy} - y^2 u_{xx} + u_x = 1. \quad (27)$$

В 1971 г. (см. [5]) было доказано, что если $f \in C^2(\overline{D})$ и $m < 2$, то справедливо неравенство

$$\|u\|_1 \leq C\|f\|_2. \quad (28)$$

В этом же году (см. [5]) Т. Ш. Кальменов показал, что если $m > 2$, то решение u задачи Дарбу для уравнения (1) не принадлежит $C^1(\overline{D})$ даже в случае, когда $f = \text{const} \neq 0$. В. В. Коврижкин [6] для доказательства существования сильного решения задачи Дарбу, имеющего гладкость на единицу выше гладкости правой части уравнения, требовал от f ее обращения в нуль в окрестности точки пересечения характеристического и нехарактеристического носителей данных Дарбу.

Условие $f(x, 0) = 0$ возникло и у В. Н. Врагова [7] при доказательстве существования решения $u \in W_2^2(\Omega)$ однородной задачи Дарбу для любой правой части $f \in W_2^1(\Omega)$.

Допустим, что решение $u(x, y)$ задачи Дарбу для уравнения вида

$$T_m u + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = f(x, y) \quad (29)$$

описывает состояние некоторой системы, т. е. является переменной состояния с точки зрения теории катастроф [8].

Если функция $b = b(x, y)$ непрерывно дифференцируема по y , то замена

$$u = v \exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^y b(x, t) dt \right)$$

сводит однородную задачу Дарбу к такой же задаче для уравнения

$$T_m v + a(x, y) v_x + c_1(x, y) v = f_1(x, y), \quad (30)$$

где

$$c_1(x, y) = c - \frac{1}{4} b^2 - \frac{1}{2} b_y, \quad f_1(x, y) = f \exp \left(\frac{1}{2} \int_0^y b(x, t) dt \right).$$

Уравнение (30) в характеристических координатах ξ и η имеет вид

$$(\eta - \xi) \hat{v}_{\xi\eta} + B' \hat{v}_{\xi} - B \hat{v}_{\eta} + C \hat{v} = (\eta - \xi)^{1-4\beta} F_1(\xi, \eta), \quad (31)$$

где

$$B' = \beta + \gamma_1(\eta - \xi)^{1-4\beta} \hat{a}, \quad B = \beta - \gamma_1(\eta - \xi)^{1-4\beta} \hat{a}, \quad (32)$$

$$C = \gamma_1(\eta - \xi)^{1-4\beta} \hat{c}_1, \quad F_1 = \gamma_1 \hat{f}_1.$$

При $m = 2$, $a \equiv \text{const}$, $c \equiv 0$ уравнение (31) переходит в уравнение Эйлера–Дарбу–Пуассона

$$(\eta - \xi) \hat{v}_{\xi\eta} + B' \hat{v}_{\xi} - B \hat{v}_{\eta} = F_1(\xi, \eta). \quad (33)$$

Поэтому ясно, что порядок вырождения m и коэффициент a могут качественно влиять на свойства переменной состояния $u(x, y)$, т. е. они могут выступать в качестве управляющих параметров состояния системы, моделируемой уравнением (29).

Как видно из (32), $B + B' = m/(m + 2)$. Стало быть,

$$B + B' < 1 \quad (34)$$

тогда и только тогда, когда $m > -2$. Условие $m \geq 0$ означает, что параболическая линия $y = 0$ уравнения (29) не является характеристическим многообразием. В связи с этим весьма разумно называть уравнение (общего) вида

$$(y - x) z_{xy} + B'(x, y) z_x - B(x, y) z_y + C(x, y) z = f(x, y) \quad (35)$$

уравнением первого (второго) рода, если $B + B' < 1$ ($B + B' > 1$) в области $\Omega_0 = \{(x, y) : x_0 < x < y < y_0\}$.

С. Геллерстедт в работе [9] (см. сноску на с. 53) сообщает, что он исследовал на однозначную разрешимость задачу Пикара (Дарбу): $z(0, y) = f(y)$, $z(x, y) = g(x)$ для гиперболического уравнения первого рода в случае, когда

$$B < -1. \quad (36)$$

В силу (32) для уравнения (29) с достаточно гладкими в области D коэффициентами u с $m \geq 0$ имеет место (34) и, как легко видеть, условие (36) эквивалентно условию

$$2a < -(3m + 4)(-y)^{(m-2)/(m+2)}. \quad (37)$$

Если $a(x, y) \in C(\overline{D})$, то условие (37) предполагает, что $m \geq 2$. Когда $m = 2$, условие (37) принимает простой вид: $a < -5$. Из (37) при $y \rightarrow 0$ получаем

$$a(x, y) < 0 \quad \forall x \in [0, l]. \quad (38)$$

Пусть Lu – дифференциальное выражение, стоящее в левой части (29). В работе [10] (см. также [11]) было доказано, что условие (37) гарантирует априорную оценку

$$\|u\|_{W_2^1(D)} \leq C \|Lu\|_{L_2(D)} \quad (39)$$

для любой достаточно гладкой функции u удовлетворяющей условию (21).

Н. И. Попиванов [12] для широкого класса вырождающихся гиперболических уравнений, у которых коэффициент при соответствующей производной удовлетворяет условию типа (38), установил оценку вида (39) и доказал существование сильного решения $u \in W_2^1(D)$ задачи Дарбу для любой правой части $f \in L_2(D)$.

Н. Ю. Капустин [13] исследовал задачу Дарбу для уравнения (35) в случае, когда $m = 2$; $a, a_x, b, b_y, c \in L_\infty(D)$, $a(x, y) \leq \mu < 0$ для почти всех $(x, y) \in D$ и, в частности, установил априорную оценку вида (39).

3. Свойства решения задачи Коши для уравнения Геллерстедта на границе области определения. Функцию $u^2(x, y)$, которая по определению совпадает со второй слагаемой в правой части (22), будем называть обобщенным решением однородной задачи Коши $u^2(x, 0) = 0$, $u_y^2(x, 0) = 0$ для уравнения (1) с $f(x, y) \in C(\overline{D})$.

Через $F_1(x)$ обозначим след u^2 на характеристике AC_m . Очевидно, $F_1(x) = \hat{u}^2(0, x)$. Поэтому

$$F_1(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{(x - \xi)^\beta} \int_\xi^x \frac{\eta^{-\beta} F(\xi, \eta)}{(\eta - \xi)^{2\beta}} F\left(\beta, \beta, 1; \frac{\xi(x - \eta)}{\eta(x - \xi)}\right) d\eta. \quad (40)$$

Лемма 3. Если $f(x, y) \in C(\overline{D})$, то $D_{0x}^{1-\beta} F_1(t) = x^{1-3\beta} \nu_0(x)$, где $\nu_0 \in C[0, l]$ и $\nu_0(0) = 0$, тогда и только тогда, когда $f(0, 0) = 0$.

Действительно, в силу (40)

$$D_{0x}^{1-\beta} F_1(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^x (x-t)^{\beta-1} dt \int_0^t (t-\xi)^{-\beta} d\xi \times \\ \times \int_{\xi}^t \frac{\eta^{-\beta} F(\xi, \eta)}{(\eta-\xi)^{2\beta}} F\left(\beta, \beta, 1; \frac{\xi(t-\eta)}{\eta(t-\xi)}\right) d\eta$$

или (после перестановки порядка интегрирования, а затем замены переменной интегрирования t по $t = \xi + (x-\xi)z$)

$$\Gamma(\beta) D_{0x}^{1-\beta} F_1(t) = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^1 z^{-\beta} (1-z)^{\beta-1} dz \times \\ \times \int_0^x d\xi \int_{\xi}^{\xi+(x-\xi)z} F(\xi, \eta) \eta^{-\beta} (\eta-\xi)^{-2\beta} F\left(\beta, \beta, 1; \frac{\xi[\xi-\eta+(x-\xi)z]}{z\eta(x-\xi)}\right) d\eta. \quad (41)$$

Через $F_{1.1}(x, \xi, z)$ обозначим третий интеграл с переменной интегрирования η , стоящий в правой части (41). В этом интеграле введем новую переменную интегрирования $\eta_1 = (\eta - \xi)/[z(x - \xi)]$. Тогда будем иметь

$$F_{1.1}(x, \xi, z) = [z(x-\xi)]^{1-2\beta} \int_0^1 \frac{F(\xi, \xi + (x-\xi)z\eta_1)}{\eta_1^{2\beta} [\xi + (x-\xi)z\eta_1]^{\beta}} \times \\ \times F\left(\beta, \beta, 1; \frac{\xi(1-\eta_1)}{\xi + (x-\xi)z\eta_1}\right) d\eta_1.$$

Отсюда легко видеть, что $F_{1.1}(x, x, z) = 0$ для всех $x > 0$ и $z \geq 0$. Поэтому равенство (41) можно переписать в виде

$$\Gamma(\beta) D_{0x}^{1-\beta} F_1(t) = \int_0^x d\xi \int_0^l z^{-\beta} (1-z)^{\beta-1} \frac{\partial F_{1.1}(x, \xi, z)}{\partial x} dz. \quad (42)$$

Прямые вычисления показывают

$$\frac{\partial F_{1.1}(x, \xi, z)}{\partial x} - z^{1-2\beta} (x-\xi)^{-2\beta} [\xi + (x-\xi)z]^{-\beta} F(\xi, \xi + (x-\xi)z) =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\xi}^{\xi+(x-\xi)z} \frac{F(\xi, \eta)}{\eta^{\beta}(\eta-\xi)^{2\beta}} \frac{\partial}{\partial x} F\left(\beta, \beta, 1; \frac{\xi[\xi-\eta+(x-\xi)z]}{(x-\xi)z\eta}\right) d\eta = \\
&= \beta^2 \int_{\xi}^{\xi-(x-\xi)z} \frac{\xi(\eta-\xi)^{1-2\beta}}{z\eta^{\beta+1}(x-\xi)^2} F(\xi, \eta) F\left(\beta+1, \beta+1, 2; \frac{\xi[\xi-\eta+(x-\xi)z]}{(x-\xi)z\eta}\right) d\eta.
\end{aligned} \tag{43}$$

На основе формулы автотрансформации гипергеометрических функций [14] имеем

$$\begin{aligned}
&F(\beta+1, \beta+1, 2; \xi[\xi-\eta+(x-\xi)z]/(x-\xi)z\eta) = \\
&= \left\{ \frac{(x-\xi)z\eta}{[\xi+(x-\xi)z](\eta-\xi)} \right\}^{2\beta} F\left(1-\beta, 1-\beta, 2; \frac{\xi[\xi-\eta+(x-\xi)z]}{(x-\xi)z\eta}\right).
\end{aligned} \tag{44}$$

Из (42) в соответствии с (43) и (44) получаем

$$\begin{aligned}
\Gamma(\beta) D_{0x}^{1-\beta} F_1(t) &= \int_0^1 z^{1-3\beta} (1-z)^{\beta-1} dz \int_0^x \frac{F(\xi, \xi+(x-\xi)z) d\xi}{(x-\xi)^{2\beta} [\xi+(x-\xi)z]^{\beta}} + \\
&+ \beta^2 \int_0^1 (z-z^2)^{\beta-1} dz \int_0^x \xi(x-\xi)^{2\beta-2} [\xi+(x-\xi)z]^{-2\beta} d\xi \times \\
&\int_{\xi}^{\xi+(x-\xi)z} \frac{F(\xi, \eta)}{\eta^{1-\beta}(\eta-\xi)^{4\beta-1}} F\left(1-\beta, 1-\beta, 2; \frac{\xi[(x-\xi)z-\eta+\xi]}{(x-\xi)z\eta}\right) d\eta.
\end{aligned}$$

Во втором слагаемом правой части этого равенства произведем замену переменной интегрирования по формуле $\eta = \xi + (x-\xi)z\eta_1$. В результате увидим, что

$$\begin{aligned}
\Gamma(\beta) D_{0x}^{1-\beta} F_1(t) &= \int_0^1 z^{1-3\beta} (1-z)^{\beta-1} dz \times \\
&\times \left\{ \int_0^x \frac{F(\xi, \xi+(x-\xi)z) d\xi}{(x-\xi)^2 [\xi+(x-\xi)z]^{\beta}} + \beta^2 \int_0^x \xi[(x-\xi)(\xi+(x-\xi)z)]^{-2\beta} d\xi \times \right. \\
&\times \left. \int_0^1 \frac{F(\xi, \xi+(x-\xi)z\eta_1)}{\eta_1^{4\beta-1} [\xi+(x-\xi)z\eta_1]^{1-\beta}} F\left(1-\beta, 1-\beta, 2; \frac{(1-\eta_1)\xi}{\xi+(x-\xi)z\eta_1}\right) d\eta_1 \right\}.
\end{aligned}$$

Отсюда, если произвести преобразования $\xi \rightarrow x\xi$, $\eta_1 \rightarrow \eta$ переменных интегрирования ξ , η_1 и ввести обозначения $\zeta(y) = \xi + (1 - \xi)y$, $y \in [0, l]$, найдем

$$D_{0x}^{1-\beta} F_1(t) = \nu_0(x) x^{1-3\beta}, \quad 0 < x \leq l, \quad (45)$$

где

$$\begin{aligned} \nu_0 = & \int_0^1 \frac{z^{1-3\beta}(1-z)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} dz \left\{ \int_0^1 \frac{F(x\xi, x\zeta(z))}{(1-\xi)^{2\beta}[\zeta(z)]^\beta} d\xi + \right. \\ & + \beta^2 \int_0^1 \xi(1-\xi)^{-2\beta}[\zeta(z)]^{-2\beta} d\xi \int_0^1 \eta^{1-4\beta}[\zeta(z\eta)]^{\beta-1} \times \\ & \left. \times F(x\xi, x\zeta(z\eta)) F(1-\beta, 1-\beta, 2; (1-\eta)\xi/\zeta(z\eta)) d\eta \right\}. \end{aligned} \quad (46)$$

Из (46) видно, что $\nu_0 \in C[0, l]$ и

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \nu_0(x) = \nu_0(0), \quad \Gamma(\beta)\nu_0(0) = F(0, 0) \int_0^1 z^{1-3\beta}(1-z)^{\beta-1} dz \times \\ \times \left\{ \int_0^1 (1-\xi)^{-2\beta}[\zeta(z)]^{-\beta} d\xi + \beta^2 \int_0^1 \xi(1-\xi)^{-2\beta}[\zeta(z)]^{-2\beta} d\xi \times \right. \\ \left. \times \int_0^1 \eta^{1-4\beta}[\zeta(z\eta)]^{\beta-1} F\left(1-\beta, 1-\beta, 2; \frac{\xi(1-\eta)}{\zeta(z\eta)}\right) d\eta \right\}. \end{aligned} \quad (47)$$

Так как гипергеометрическая функция

$$F(1-\beta, 1-\beta, 2; Z) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\beta)} \int_0^1 \left(\frac{1-t}{t}\right)^\beta (1-Zt)^{\beta-1} dt$$

и $\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\beta) = \beta\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta) = \beta\pi/\sin\pi\beta > 0$, то она положительна для всех $Z \in [0, 1]$. Это говорит о том, что выражение, стоящее в фигурной скобке в правой части (47), – положительная величина. Поэтому $\nu_0(0) = 0 \Leftrightarrow F(0, 0) = 0 \Leftrightarrow f(0, 0) = 0$, что и требовалось доказать.

Лемма 4. Пусть $f \in C(\overline{D})$, тогда $|u^2| \leq C\|f\|y^2$. Если же $f \in C^1(\overline{D})$, то

$$|u_x^2| \leq C\|f_x\|y^2, \quad |u_y^2| \leq C\|f\|y.$$

В самом деле, в двойном интеграле, стоящем в правой части (22), произведем замену переменных интегрирования, положив $\xi_1 = \xi + (\eta - \xi)\xi_2$, $\eta_1 = \xi + (\eta - \xi)\eta_2$. Тогда, согласно (2), (6), (7),

$$\gamma_1(\eta - \xi)^{2-4\beta} = -(1 - 2\beta)^2 y^2; \quad F(\xi + (\eta - \xi)\xi_2, \xi + (\eta - \xi)\eta_2) = \gamma_1 f(X, Y),$$

где

$$X = x + \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}(\xi_2 + \eta_2 - 1), \quad Y = y(\eta_2 - \xi_2)^{1-2\beta},$$

будем иметь

$$\begin{aligned} u^2(x, y) &= y^2 \tilde{f}(x, y), \quad \tilde{f}(x, y) = -(1 - 2\beta)^2 \int_0^1 \frac{d\xi_2}{(1 - \xi_2)^\beta} \times \\ &\times \int_{\xi_2}^1 \frac{\eta_2^{-\beta} f(X, Y)}{(\eta_2 - \xi_2)^{2\beta}} F\left(\beta, \beta, 1; \frac{\xi_2(1 - \eta_2)}{\eta_2(1 - \xi_2)}\right) d\eta_2. \end{aligned} \quad (48)$$

Нетрудно проверить, что интеграл

$$\begin{aligned} J_\beta(z) &= \int_z^1 \eta_2^{-\beta} (\eta_2 - z)^{-2\beta} d\eta_2 = (1 - z)^{1-2\beta} \int_0^1 (1 - t)^{-2\beta} [1 - (1 - z)t]^{-\beta} dt = \\ &= \frac{(1 - z)^{1-2\beta}}{1 - 2\beta} F(\beta, 1, 2 - 2\beta; 1 - z). \end{aligned}$$

Следовательно, $J_\beta(z) \in C[0, 1]$, когда $\beta < 1/3$; $J_\beta(z) \in C]0, 1]$, когда $\beta \geq 1/3$, причем $J_\beta(z)$ при $\beta = 1/3$, $z \rightarrow 0$ обращается в бесконечность логарифмического порядка, а при $\beta > 1/3$ – в бесконечность порядка $3\beta - 1$.

Отсюда заключаем, что

$$\int_0^1 (1 - z)^{-\beta} J_\beta(z) dz = \frac{1}{1 - 2\beta} \int_0^1 (1 - z)^{1-3\beta} F(\beta, 1, 2 - 2\beta; 1 - z) dz < \infty.$$

Стало быть, $\tilde{f} \in C(\overline{D})$ и $|u^2(x, y)| \leq C\|f\|y^2$. Из (48) легко усмотреть, что $|u_x^2| \leq C\|f_x\|$ если $f_x \in C(\overline{D})$.

Отсюда же видно, что

$$u_y^2 = 2y\tilde{f}(x, y) - (1 - 2\beta)^2 y^2 \int_0^1 (1 - \xi_2)^{-\beta} d\xi_2 \times$$

$$\times \int_{\xi_2}^1 \frac{(1 - \xi_2 - \eta_2)(-y)^{m/2} f_1(X, Y) + (\eta_2 - \xi_2)^{1-2\beta} f_2(X, Y)}{\eta_2^\beta (\eta_2 - \xi_2)^{2\beta} / F(\beta, \beta, 1; \xi_2(1 - \eta_2)) / [\eta_2(1 - \xi_2)]} d\eta_2,$$

где субиндексы 1 и 2 у функции $f(X, Y)$ соответственно означают частную производную по первому X и второму Y ее аргументам. Поэтому если $f \in C^1(\overline{D})$, то $|u_y| \leq C \|f\|_1 y$.

4. Эффект локализации особенности градиента решения задачи Дарбу. Вопрос об изолированных особенностях решений уравнения Трикоми

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (49)$$

лежащих в области его эллиптичности вплоть до параболической линии $y = 0$, впервые поставлен Ф. Трикоми еще в 1928 г. [15, с. 181]

Традиционно считается, что уравнение (1) с достаточно гладкой в $\overline{D}$ правой частью не может иметь решение с изолированной особой точкой, лежащей даже на AB , ибо эта особенность должна уноситься вдоль характеристики, выходящей из этой точки. Однако и это правило не без исключения. Об этом говорит следующая

Теорема (о локализации особенности). Пусть $f \in C^1(\overline{D})$ и $f(0, 0) \neq 0$, $2 < m < 4$. Тогда первая компонента градиента $\nabla u = (u_x, u_y)$ решения $u(x, y)$ задачи Дарбу (21) для уравнения (1) непрерывна всюду в $\overline{D}$, за исключением точки $(0, 0)$, где она обращается в бесконечность, а вторая — непрерывна в $\overline{D}$.

Действительно, пусть $\Theta_0^m(x) = (x/2, -\gamma_2 x^{1-2\beta})$. В силу (21) $u[\Theta_0^m(x)] = 0 \ \forall x \in [0, l]$. Поэтому из (22) при $(x, y) = \Theta_0^m(x)$ и в силу обозначения (40) находим

$$\frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-2\beta)} \gamma_2 x^{1-2\beta} \int_0^1 \nu(xt) t^{-\beta} (1-t)^{-\beta} dt = F_1(x)$$

или

$$\gamma_0 D_{0x}^{\beta-1} z^{-\beta} \nu(z) = F(x), \quad \gamma_0 = \gamma_2 \Gamma(2-2\beta) / \Gamma(1-\beta).$$

Стало быть,

$$\gamma_0 \nu(x) = x^\beta D_{0x}^{\beta-1} F_1(t). \quad (50)$$

Из (50) и леммы 1 имеем

$$\gamma_0 \nu(x) = \nu_0(x) x^{1-2\beta}, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (51)$$

В дальнейшем потребуются следующие обозначения:

$$\zeta_1 = \xi + \frac{1}{2} (1 - \xi) \mu, \quad \zeta_2 = (1 - \xi) \mu \gamma_2^{1/(1-2\beta)}, \quad x_1 = x \zeta_1,$$

$$x_2 = -(x\zeta_2)^{1-2\beta} \quad \forall \xi \in [0, 1], \mu \in [0, 1]. \quad (52)$$

Легко видеть, что если $(\partial/\partial x_i)f(x_1, x_2) \equiv f_i(x_1, x_2)$, то для любой функции $f(x, y) \in C^1(\overline{D})$

$$x(d/dx)f(x_1, x_2) = x_1 f_1(x_1, x_2) + (1 - 2\beta)x_2 f_2(x_1, x_2). \quad (53)$$

Поскольку $x(d/dx)F(x\xi, x\zeta(\mu))/\gamma_1 = x_1 f_1(x_1, x_2) + (1 - 2\beta)x_2 f(x_1, x_2)$, то из (46) заключаем, что функция $x\nu'_0(x)$ непрерывна при $0 \leq x \leq l$ и обращается в нуль при $x = 0$. Это вместе с (51) дает основание утверждать, что

$$\begin{aligned} \nu_1(x)/\gamma_0 &= x\nu'_0(x) + (1 - 2\beta)\nu_0(x) \in C[0, l], \\ \nu'(x) &= \nu_1(x)x^{-2\beta}, \quad \nu_1(0) = (1 - 2\beta)\nu_0(0). \end{aligned} \quad (54)$$

По условию теоремы $f(0, 0) \neq 0$. Поэтому из (54) и леммы 1 вытекает, что $\nu_1(0) \neq 0$.

Через $u^1 = u^1(x, y)$ обозначим первую слагаемую в правой части (22). Пользуясь связью (2), нетрудно заметить, что

$$u_x^1(x, y)\gamma_3(\eta - \xi)^{1-2\beta} \int_0^1 \nu'[\eta - (\eta - \xi)t](t - t^2)^{-\beta} dt, \quad (55)$$

$$\begin{aligned} u_y^1(x, y) &= \gamma_4 \int_0^1 \nu[\eta - (\eta - \xi)t](t - t^2)^{-\beta} dt + \\ &+ \gamma_5(\eta - \xi) \int_0^1 \nu'[\eta - (\eta - \xi)t](2t - 1)(t - t^2)^{-\beta} dt, \end{aligned} \quad (56)$$

где $\gamma_3 = -\gamma_0/\Gamma(1 - \beta)$, $\gamma_4 = -\gamma_3/\gamma_2$, $\gamma_5 = \gamma_4(m + 2)/4$.

На основании (54) и первой формулы среднего значения интеграла [16] равенство (55) можно переписать в виде

$$u_x^1 = \gamma_3\gamma_6\nu_1[\eta - (\eta - \xi)t_0](\eta - \xi)^{1-2\beta}\eta^{-2\beta}F(2\beta, 1 - \beta, 2 - 2\beta, 1 - \xi/\eta), \quad (57)$$

где t_0 – некоторая точка из $[0, 1]$, $\gamma_6 = \Gamma^2(1 - \beta)/\Gamma(2 - 2\beta)$.

Условие $2 < m < 4$ теоремы эквивалентно неравенству $\frac{1}{4} < \beta < \frac{1}{3}$. При $\eta > \xi \rightarrow 0$ функция

$$F\left(2\beta, 1 - \beta, 2 - 2\beta; \frac{\eta - \xi}{\eta}\right) \rightarrow F(2\beta, 1 - \beta, 2 - 2\beta; 1) = \frac{\Gamma(2 - 2\beta)\Gamma(1 - 3\beta)}{\Gamma(2 - 4\beta)\Gamma(1 - \beta)}.$$

Поэтому из (57) при $\eta > \xi \rightarrow 0$ имеем

$$u_x^1[\Theta_0^m(x)] = c\nu_1[(1 - t_0)x]x^{1-4\beta}, \quad c = \text{const} \neq 0, \quad x \in]0, l].$$

Так как $\nu_1(0) \neq 0$, то $u_x^1[\Theta_0(x)] \rightarrow \infty$, когда $x \rightarrow 0$. Не вызывает сомнения включение $u_x^1 \in C(\overline{D} \setminus A)$. Из (56) ввиду (51) и (54) ясно, что $u_y^1 \in C(\overline{D})$ и $u_y^1(x, y) \rightarrow u_y^1(0, 0) = 0$ при $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

В силу леммы 4 $\nabla u^2 \in C(\overline{D})$ и $\nabla u^2(x, y) \rightarrow 0$, когда $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Функция $u = u^1 + u^2$, поэтому теорема 1 полностью доказана.

Равенство (57) и лемма 4 говорят и о достоверности следующих теорем.

Теорема 1. Пусть $f \in C^1(\overline{D})$, $f(0, 0) \neq 0$ и $m = 2$. Тогда если $u(x, y)$ – решение задачи Дарбу (1), (2), то $u_x \in C(\overline{D} \setminus A)$ и ограничена в D , а $u_y \in C(\overline{D})$.

Теорема 2. Пусть $u(x, y)$ – решение задачи Дарбу (2) для уравнения (1) с $m \leq 2$ и $f \in C^1(\overline{D})$. Тогда $\|u\|_1 \leq C\|f\|_1$, если $m < 2$ и $\|u\| + \|u_y\| + \sup_{\overline{D}} |u_x| \leq C\|f\|_1$, если $m = 2$.

5. Критерий непрерывности ∇u . В дальнейшем мы существенно будем использовать одно свойство функции $f = f(x, y) \in C^k(\overline{D})$.

Для любой $f \in C^1(\overline{D})$ справедлива формула

$$f(x_1, x_2) = f(0, 0) + \int_0^x \frac{d}{dt} f(t\zeta_1 - (t\zeta_2)^{1-2\beta}) dt,$$

которую можно записать в виде

$$f(x_1, x_2) = f(0, 0) + x_1 f_1^1(x_1, x_2) + x_2 f_2^2(x_1, x_2), \quad (58)$$

где

$$f_2^2(x, y) = (-2\beta + 1) \int_0^1 t^{-2\beta} f_2(xt, yt^{1-2\beta}) dt, \quad (59)$$

$$f_1^1(x, y) = \int_0^1 f_1(xt, yt^{1-2\beta}) dt, \quad f_i = \partial f / \partial x_i, \quad i = 1, 2. \quad (60)$$

Здесь x_i и ζ_i определяются согласно (52).

Преобразования (59) и (60) говорят о том, что если $f \in C^k(\overline{D})$, то $f_i^i \in C^{k-1}(\overline{D})$. При $k = 2$ $f_2^2 \in C^1(\overline{D})$ и, стало быть, к ней применима формула (58). Поэтому при $k = 2$ разложению (58) можно придать вид

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) = & f(0, 0) + x_2 f_2^2(0, 0) + x_1 [f_1^1(x_1, x_2) + \\ & + x_2 f_{21}^{21}(x_1, x_2)] + x_2^2 f_{22}^{22}(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (61)$$

Методом индукции легко доказать, что если $f \in C^k(\overline{D})$, то

$$f(x_1, x_2) = x_2^i f_{2*i}^{2*i}(0, 0) + x_1 x_2^i f_{2*i\ 1}^{2*i\ 1}(x_1, x_2) +$$

$$+ x_2^k f_{2*k}^{2*k}(x_1, x_2), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (62)$$

где $2 * n = 22 \dots 2$ – кортеж длины n , $f_{2*0}^{2*0} \equiv f$ и по индексу i подразумевается суммирование от $i = 0$ до $i = k - 1$.

Нетрудно заметить, что отображение $f \rightarrow f_2^2$, задаваемое формулой (58), таково, что

$$f_{2*(i+n)}^{2*i}(x, y) = (-2\beta + 1) \int_0^1 t^{(1-2\beta)n-2\beta} f_{2*(i+n)}^{2*(i-1)}(xt, yt^{1-2\beta}) dt.$$

Следовательно, $f_{2*(i+n)}^{2*i}(0, 0) = \frac{1}{n+1} f_{2*(i+n)}^{2*(i-1)}(0, 0)$, $n = 0, 1, \dots$. Отсюда ясно, что

$$\begin{aligned} f_{2*i}^{2*i}(0, 0) &= \frac{1}{1!} f_{2*(i-1+1)}^{2*(i-1)}(0, 0) = \frac{1}{2!} f_{2*(i-2+2)}^{2*(i-2)}(0, 0) = \dots = \\ &= \frac{1}{j!} f_{2*(i-j+j)}^{2*(i-j)}(0, 0). \end{aligned} \quad (63)$$

Из (63) при $j = i$ имеем

$$f_{2*i}^{2*i}(0, 0) = \frac{1}{i!} f_{2*i}^{2*i}(0, 0). \quad (64)$$

Если к функции $f_2 \in C^{k-1}(\overline{D})$ применить представление (62), то равенство (53) примет вид

$$\begin{aligned} x \frac{d}{dx} f(x_1, x_2) &= (1 - 2\beta) [x_2^{j+1} f_{2*2*j}^{2*j}(0, 0) + x_2^k f_{2*2*(k-1)}^{2*(k-1)}(x_1, x_2)] + \\ &+ x_1 [f_1(x_1, x_2) + (1 - 2\beta) x_2^{j+1} f_{2*2*i}^{2*i} 1_1(x_1, x_2)], \end{aligned} \quad (65)$$

где суммирование производится от $j = 0$ до $j = k - 2 \geq 0$.

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 3. Если $2k \leq m < 2(k+1)$, $f \in C^k(\overline{D})$, $k = 1, 2, \dots$, то решение и задачи Дарбу (21) для уравнения (1) будет принадлежать пространству $C^1(\overline{D})$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial^i f}{\partial y^i}(0, 0) = 0 \quad \forall i = 0, 1, \dots, k-1. \quad (66)$$

Действительно, сосредоточим внимание на функции

$$F(x\xi, x\zeta) = \gamma_1 f(x_1, x_2),$$

которая входит в (46). Поскольку $f \in C^k(\overline{D})$, то из (62) и (65) видно, что

$$F(x\xi, x\zeta) = a_i x_2^i + x_1 S_1(x_1, x_2) + x_2^k S_2(x_1, x_2), \quad (67)$$

$$x \frac{d}{dx} F(x\xi, x\zeta) = b_j x_2^{j+1} + x_1 S^1(x_1, x_2) + x_2^k S^2(x_1, x_2), \quad (68)$$

где

$$a_i = \gamma_1 f_{2*i}^{2*i}(0, 0), \quad i = 0, 1, \dots, k-1;$$

$$b_j = (1 - 2\beta) \gamma_1 f_{2*j}^{2*j}(0, 0), \quad j = 0, 1, \dots, k-2 \geq 0;$$

$S_n(x, y), S^n(x, y) \in C(\overline{D})$, $n = 1, 2$. При $k = 1$ в формуле (68), согласно (53), нужно полагать $b_j = 0$.

Через c^i обозначим значение интеграла, стоящего в правой части равенства (46), в случае, когда

$$F(x\xi, x\zeta(z)) = [\zeta_2(z)]^{(1-2\beta)i}, \quad F(x\xi, x\zeta(z\eta)) = [\zeta_2(z\eta)]^{(1-2\beta)i}.$$

Нетрудно показать, что $c^i > 0$ для всех $i = 0, 1, \dots$.

Из преобразования (46) $F \rightarrow \nu_0$ в силу (52), (67) и (68) заключаем

$$\nu_0(x) = A_i x^{(1-2\beta)i} + x \nu_{01}(x) + x^{(1-2\beta)k} \nu_{02}(x), \quad (69)$$

$$x \nu_0^1(x) = B_j x^{(1-2\beta)(j+1)} + x \nu_{01}^1(x) + x^{(1-2\beta)k} \nu_{02}^1(x), \quad (70)$$

где

$$A_i = (-1)^i a_i c^i, \quad i = 0, 1, \dots, k-1;$$

$$B_j = (-1)^{j+1} b_j c^{j+1}, \quad j = 0, 1, \dots, k-2;$$

$$\nu_{0n}(x), \quad \nu_{0n}^1 \in C[0, l], \quad n = 1, 2.$$

На основании (69) и (70) из (54) имеем

$$\nu'(x) = c_0 x^{-2\beta} + c_i x^{(1-2\beta)i-2\beta} + N_0(x) x^{1-2\beta} + N_1(x) x^{(1-2\beta)k-2\beta}, \quad (71)$$

где $N_0(x)$ и $N_1(x) \in C[0, l]$; $i = 1, 2, \dots, k-1$;

$$c_0 = \gamma_0 A_0, \quad c_i = \gamma_0 (-1)^i [b_{i-1} + (1 - 2\beta) a_i] c^i. \quad (72)$$

Покажем, что для всех $i = 0, 1, \dots, k-1$

$$c_i = 0 \Leftrightarrow f_{2*i}^{2*i}(0, 0) = 0 \quad \forall i = 0, 1, \dots, k-1. \quad (73)$$

В самом деле, $\gamma_0 \neq 0$ и $c^i > 0$. Поэтому $c_0 = 0 \Leftrightarrow a_0 = 0$. Но $a_0 = 0 \Leftrightarrow f(0, 0) = 0$.

Аналогично из (72) вытекает, что $c_i = 0 \Leftrightarrow b_{i-1} + (1 - 2\beta) a_i = 0$. Так как $\gamma_1 \neq 0$, то

$$b_{i-1} + (1 - 2\beta) a_i = (1 - 2\beta) \gamma_1 \left[f_{2*2*(i-1)}^{2*(i-1)}(0, 0) + f_{2*i}^{2*i}(0, 0) \right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f_{2*2*(i-1)}^{2*(i-1)}(0, 0) + f_{2*i}^{2*i}(0, 0) = 0.$$

Отсюда на основе (64) приходим к (73).

Подставим $\nu'(x)$ из (71) в (55), а затем в двух интегралах воспользуемся формулой среднего значения. Тогда будем иметь

$$u_x^1 = \gamma_0(\eta - \xi)^{1-2\beta} \{c_i J^i + N_0[\eta - (\eta - \xi)t_0]J_0 + N_1[\eta - (\eta - \xi)t_1]J^k\}, \quad (74)$$

где t_0 и t_1 — точки из $[0, 1]$,

$$J^i = \int_0^1 [\eta - (\eta - \xi)t]^{(1-2\beta)i-2\beta} (t - t^2)^{-\beta} dt,$$

$$J_0 = \int_0^1 [\eta - (\eta - \xi)t]^{1-2\beta} (t - t^2)^{-\beta} dt \in C(\overline{D}).$$

Для любого $i = 0, 1, \dots, k$ функция (см. (57))

$$J^i = \gamma_6 \eta^{(1-2\beta)i-2\beta} F\left(2\beta - (1-2\beta)i, 1-\beta, 2-2\beta; 1 - \frac{\xi}{\eta}\right).$$

Через $\omega^+(\omega^-)$ обозначим множество всех чисел $i = 0, 1, \dots, k$, удовлетворяющих неравенству $i + 1 > m/4(i + 1) \leq m/4$, а через $u_1^i(x, y)$ — функцию $\gamma_3(\eta - \xi)^{1-2\beta} J^i$. Легко видеть, что

$$u_1^i = \gamma_3 \gamma_6 (1 - \xi/\eta)^{1-2\beta} \eta^{(1-2\beta)(i+1)-2\beta} \times$$

$$\times F(2\beta - (1-2\beta)i, 1-\beta, 2-2\beta; 1 - \xi/\eta). \quad (75)$$

Формула автотрансформации

$$F(2\beta - (1-2\beta)i, 1-\beta, 2-2\beta; 1 - \xi/\eta) =$$

$$= (\xi/\eta)^{(1-2\beta)(i+1)-\beta} F((1-2\beta)(i+2), 1-\beta, 2-2\beta; 1 - \xi/\eta)$$

позволяет переписать (75) в виде

$$u_1^i = \gamma_3 \gamma_6 (1 - \xi/\eta)^{1-2\beta} \eta^{-\beta} \xi^{(1-2\beta)(i+1)-\beta} \times$$

$$\times F((1-2\beta)(i+2), 1-\beta, 2-2\beta; 1 - \xi/\eta). \quad (76)$$

Пусть $i \in \omega^+$. Так как $m = 4\beta/(1-2\beta)$, то это включение эквивалентно неравенству

$$(i+1)(1-2\beta) > \beta, \quad (77)$$

которое является необходимым и достаточным условием ограниченности и непрерывности гипергеометрической функции из (75) в $\overline{D} \setminus A$. По условию теоремы $3k+1 > m/2 \Rightarrow k+1 > m/4$. Поэтому $k \in \omega^+$. Это же условие эквивалентно неравенству $(1-2\beta)(k+1) > 2\beta$. Следовательно,

$$u_1^k(x, y) \in C(\overline{D}). \quad (78)$$

Из условия теоремы $k \leq m/2$ следует, что $i + 1 \leq m/2$ для всех $i = 0, 1, \dots, k - 1$. Значит,

$$(1 - 2\beta)(i + 1) - 2\beta \leq 0 \quad \forall i = 0, 1, \dots, k - 1. \quad (79)$$

В силу (75), (79) и неравенства $F(2\beta - (1 - 2\beta)i, 1 - \beta, 2 - 2\beta; 1) \neq 0$ функция u_1^i не является непрерывной в точке $A = (0, 0)$. При $i + 1 < m/2$ функция $u_1^i[\Theta_0^m(x)] \rightarrow \infty$, когда $x \rightarrow 0$. Если же $i + 1 = m/2$, то $u_1^i(x, y)$ конечно в точке A .

В случае, когда $i \in \omega^-$, функция u_1^i обращается в ∞ порядка $\beta - (1 - 2\beta)(i + 1)$ относительно ξ вдоль всей характеристики AC_m : $\xi = 0$, при $i + 1 = m/4$ эта бесконечность имеет логарифмический порядок (см. (76)).

Перепишем равенство (74) в виде

$$u_x^1(x, y) = u_x^{1,1}(x, y) + u_x^{1,2}(x, y), \quad u_x^{1,1} = c_i u_1^i. \quad (80)$$

Из проведенного анализа поведения функции u_1^i в точке A становится очевидным, что

$$u_x^{1,1} \in C(\overline{D}) \Leftrightarrow c_i = 0 \quad \forall i = 0, 1, \dots, k - 1. \quad (81)$$

Но в силу (73) $c_i = 0 \Leftrightarrow f_{2*i}(0, 0) = 0$. Включение (78) с учетом непрерывности функций N_0 , N_1 и J_0 дает нам основание писать: $u_x^{1,2} \in C(\overline{D})$.

Функция $u_x = u_x^1 + u_x^2$. Из леммы 4 вытекает, что $u_x^2 \in C(\overline{D})$ для любого $f \in C(\overline{D})$. Поэтому $u_x \in C(\overline{D}) \Leftrightarrow u_x^{1,1} \in C(\overline{D})$. Отсюда в соответствии с предложением (81) получаем

$$u_x \in C(\overline{D}) \Leftrightarrow f_{2*i}(0, 0) = 0 \quad \forall i = 0, 1, \dots, k - 1. \quad (82)$$

Сравнение (56) с (55) делает очевидным включение $u_y^1 \in C(\overline{D})$, которое вместе с леммой 4 и предложением (82) говорит о непрерывности u_y в $\overline{D}$. Здесь и завершается доказательство теоремы 3.

Как видно из представления (62), (65), (80) и схемы доказательства теоремы 3, условие $f \in C^k(\overline{D})$ можно заменить более слабым условием непрерывности в $\overline{D}$ функций $f_{2*(i+1)}$ и f_{2*i+1} для всех $i = 0, 1, \dots, k - 1$. При соблюдении этого условия и равенства (66) справедлива оценка

$$\|u\|_1 \leq C \left[\|f\| + \sum_{i=0}^{k-1} (\|f_{2*(i+1)}\| + \|f_{2*i+1}\|) \right]. \quad (83)$$

Опираясь на лемму 4, равенства (56) и (57), а также на поведение гипергеометрической функции $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ с $\gamma \geq \alpha + \beta$ в особой точке $z = 1$, можно установить достоверность и следующей оценки:

$$|u_x(x, y)| \leq \begin{cases} -y\xi^{1-3\beta}\eta^{\beta-1}c\|f\|_1 & \forall \beta > 1/3, \\ y \ln(\xi/\eta)\eta^{-2\beta}c\|f\|_1, & \beta = 1/3. \end{cases} \quad (84)$$

Оценки (83) и (84) учитывают тип уравнения и, стало быть, являются смешанными [5].

Выражаем сердечную признательность Н. Поливанову за совместную работу в Варне в сентябре 1990 г., которая вернула нас к проблеме о градиенте и априорной оценке решения задачи Дарбу.

Литература

1. Нахушев А. М. Обратные задачи для вырождающихся уравнений и интегральные уравнения Вольтерра третьего рода // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10, № 1. С. 130–135.
2. Бицадзе А. В. Уравнения математической физики. М., 1982.
3. Нахушев А. М. К теории дробного исчисления // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 24, № 2. С. 313–324.
4. Нахушев А. М. О задаче Дарбу для вырождающихся гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, № 1. С. 49–56.
5. Нахушев А. М. К априорным оценкам для задач Трикоми и Дарбу // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8, № 1. С. 107–117.
6. Коврижкин В. В. О слабых решениях задачи Дарбу // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8, № 1. С. 68–75.
7. Врагов В. Н. О задачах Гурса и Дарбу для одного класса гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8, № 1. С. 7–16.
8. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. Кн. 1. М., 1984.
9. Gellerstedt S. Sur un problème aux limites pour une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre de type mixte, Thèse, Uppsala, 1935.
10. Нахушев А. М. О задаче Дарбу для гиперболических уравнений // Доклады АН СССР. 1970. Т. 195, № 4. С. 776–779.
11. Нахушев А. М. К теории линейных краевых задач для уравнения второго порядка смешанного гиперболо-параболического типа // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14, № 1. С. 66–73.
12. Попиванов Н. И. Многомерный аналог задачи Дарбу для вырождающихся гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14, № 1. С. 80–93.
13. Капустин Н. Ю. К теории краевых задач с граничными функциями из L_2 // Доклады АН СССР. 1989. Т. 307, № 6. С. 1318–1322.
14. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М., 1957.
15. Трикоми Ф. О линейных уравнениях смешанного типа. М.–Л., 1947.
16. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. Т. 1. М., 1985.

Поступила в редакцию
18 октября 1991 г.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и автоматизации

Об уравнениях состояния непрерывных одномерных систем и их аналогах в дробном исчислении

Логистический закон изменения параметра $u = u(t)$, характеризующего состояния одномерной непрерывной системы в зависимости от фактора t , задается дифференциальным уравнением вида

$$u' = pu - qu^2, \quad u \geq 0, \quad \forall t > 0. \quad (1)$$

В экологии и теории эпидемии соотношение (1) известно как уравнение Ферхюльста [1, 2], и его решение $u(t)$ интерпретируется как численность или плотность популяции в момент времени t . В модели Ферхюльста $p = gK$, где $K = \max u$ – емкость среды обитания.

В биологии индивидуального развития животных [3] уравнение (1) называется логистическим уравнением скорости роста, $u(t)$ означает массу органа или организма, в момент времени t , $p = qU$, U – конечная масса.

Уравнение (1) представляет собой простейшее, но нелинейное обобщение закона Бугера–Ламберта–Бера для излучения интенсивности $u(t)$, распространяющегося в поглощающей среде $0 < t < 1$, когда коэффициент ослабления линейно зависит от $u(t)$ [4].

Модель (1) является частным случаем уравнения Бернулли [3]

$$u' = p(t)u - q(t)u^m, \quad u(t) \geq 0, \quad m = \text{const} \neq 1. \quad (2)$$

Функция $u(t)$ будет решением уравнения (2) тогда и только тогда, когда

$$\frac{d}{dt}u^{1-m} = (1-m)[p(t)u^{1-m} - q(t)]. \quad (3)$$

Следовательно, уравнение Бернулли относится к следующему классу нелинейных уравнений

$$\frac{d}{dt}\varphi(u) = a(t)\varphi(u) + b(t), \quad (4)$$

где $\varphi(u)$ – дифференцируемая для почти всех $u > 0$ и обратимая функция, $a(t)$ и $b(t)$ – функции переменной t .

При математическом моделировании различных синергетических систем [5] весьма часто возникают модели вида

$$u' = \varphi(u), \quad 0 < t < T < \infty, \quad (5)$$

где $\varphi(u)$ – унимодальная функция точки $u \in [0, u_m]$ такая, что $\varphi(0) = \varphi(u_m) = 0$.

Уравнение (5) редуцируется к уравнению

$$\frac{d}{dt}f(u) = 1, \quad f(u) = \int_{\varepsilon}^u \frac{dt}{\varphi(\xi)},$$

где ε – любое фиксированное число из интервала $]0, u_m[$. Поэтому оно относится к классу уравнений вида (4).

Модель Б. Гомперца [2] динамики роста численности $u(t)$ популяции определяется дифференциальным уравнением $u' = -\mu u \ln(u/K) / \ln K$ и, как легко видеть, оно эквивалентно уравнению

$$(\ln u)' = \mu - \mu u (\ln u) / \ln K.$$

Следовательно, эта модель также относится к модели вида (4).

Математическая модель проточного культиватора, в котором происходит размножение бактериальных клеток, их гибель и, кроме того, имеет место приток клеток извне в культиватор со скоростью притока $c(t)$ задается (обобщенным) уравнением Риккати

$$u' + a(t)u + b(t)u^2 = c(t), \quad (6)$$

где $a(t)$ и $b(t)$ – коэффициенты размножения и гибели клеток соответственно, а $u(t)$ – концентрация живых клеток в двуполой культуре.

Соотношение (6) редуцируется к уравнению

$$\frac{d}{dt}(v - u)^{-1} - (a + 2bv)(v - u)^{-1} + b = 0,$$

где $v = v(t)$ какое-то решение уравнения Риккати.

Таким образом, уравнение (6) при существовании хотя бы одного его решения V сводится к уравнению вида (4).

На уравнение (4) можно смотреть как на *обобщение уравнения Бернулли–Ферхюльста* и, стало быть, логистического закона.

Чтобы учесть явление последействия, можно воспользоваться следующими простыми аналогами уравнения (4) в дробном исчислении

$$D_{0t}^{\alpha} \varphi(u) = a(t) \varphi(u) + b(t), \quad \alpha < 1, \quad (7)$$

$$\int_0^1 D_{0t}^{\alpha} \varphi(u) d\alpha = a(t) \varphi(u) + b(t), \quad (8)$$

где D_{0t}^{α} – оператор дифференцирования дробного порядка [6].

Уравнение (8) в отличие от (7) является континуальным дифференциальным уравнением первого порядка [6].

Если интеграл в левой части (8) заменить квадратурной формулой с шаблоном, содержащим n узлов [7], то уравнение (8) аппроксимируется уравнением

$$\sum_{i=1}^n p_i D_{0t}^{\alpha_i} \varphi(u) = [a(t) - p_0] \varphi(u) + b(t),$$

где $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n = 1$. В случае формулы трапеции с шаблоном в два узла оно имеет вид

$$\frac{d}{dt} \varphi(u) = [2a(t) - 1] \varphi(u) + 2b(t).$$

Вектор $w = (u, v)$ с неотрицательными компонентами назовем *синергетической парой*, если существуют такие линейные дифференциальные операторы L_1 и L_2 с областями определения $D(L_1)$ и $D(L_2)$ и такие обратимые отображения $u \rightarrow \varphi(u) \in D(L_1)$ и $v \rightarrow \psi(v) \in D(L_2)$, что $L_1 \varphi(u) = L_2 \psi(v)$.

Систему с входным сигналом u и выходным сигналом v назовем квазилинейной, если существуют такие отображения $u \rightarrow \varphi(u)$ и $v \rightarrow \psi(v)$, которые обратимы для почти всех $u \in D(\varphi)$, $v \in D(\psi)$, что система с входным сигналом $\varphi(u)$ и выходным сигналом $\psi(v)$ является линейной.

Модель экологического взаимодействия «хищник-жертва» в ее вольтерровской форме задается следующими уравнениями движения [2]

$$u' = u(\varepsilon_1 - \gamma_1 v), \quad v' = -v(\varepsilon_2 - \gamma_2 u), \quad (9)$$

где $u = u(t)$ и $v = v(t)$ – численность двух видов, один из которых пожирает другого.

Пусть $w = (u, v)$ – решение системы (9). Тогда получаем

$$\gamma_2(u' - \varepsilon_1 u) = -\gamma_1(v' - \varepsilon_2 v). \quad (10)$$

Следовательно, вектор w является синергетической парой.

Вольтерровская система уравнений движения в случае двух видов, борющихся за общую пищу, имеет вид [2]:

$$u' = [\varepsilon_1 - \gamma_1 F(u, v)]u, \quad v' = [\varepsilon_2 - \gamma_2 F(u, v)]v.$$

Отсюда ясно, что

$$\gamma_2[(\ln u)' - \varepsilon_1] = \gamma_1[(\ln v)' - \varepsilon_2] \quad (11)$$

и пара (u, v) является синергетической.

Уравнение кривой роста растений Гомперца определяется следующей системой первого порядка [8]

$$u' = uv, \quad v' = -kv, \quad (12)$$

где u – сухая масса, v – удельная скорость роста, k – коэффициент старения.

Из (12) видно, что

$$k(\ln u)' = -v', \quad (13)$$

и поэтому его любое решение (u, v) представляет собой синергетическую пару.

Соотношение (13) совпадает с основным уравнением движения материальной точки переменной массы $u(t)$ (например, ракеты) со скоростью $v(t)$ [9].

Известная в теории морфогенеза модель Тьюринга процесса протекания реакции в одномерном реакторе $0 \leq x \leq l$ длины l определяется следующей системой уравнений с частными производными [10]:

$$\begin{aligned} u_t &= a + vu^2 - (b+1)u + D_1 u_{xx}, \\ v_t &= bu - vu^2 + D_2 v_{xx}, \end{aligned} \quad (14)$$

где a , b , D_1 , D_2 – постоянные величины, $u = u(x, t)$, $v = v(x, t)$ – концентрации взаимодействующих веществ в точке x реактора в момент времени t .

Пусть $w = (u, v)$ – решение системы (14). Тогда из (14) получаем

$$u_t + u - D_1 u_{xx} - a = -v_t - D_2 v_{xx}. \quad (15)$$

Линейное соотношение (15) говорит о том, что вектор w является синергетической парой.

Математическая модель симметризованного по нелинейности генератора Ван дер Поля имеет вид [11]:

$$u' = 1/2 (p - qE) u + v, \quad v' = 1/2 (p - qE) v + w_0^2 u, \quad (16)$$

где p , q , w_0 – постоянные величины, $E = 1/2 (v^2 + w_0^2 u^2)$ – решение уравнения (1).

Если положить $2k = p - qE$, то (16) примет вид

$$u' - (k + w_0^2) u = -v' + (1 + k) v, \quad (17)$$

следовательно, любое решение (u, v) модели (16) является синергетической парой.

Нетрудно увидеть, что широко используется при описании линейной вязкоупругости полимера функция Кольрауша (12)

$$u = v E_0 \exp \left[- (t/\alpha)^\beta \right],$$

u – напряжение, v – деформация, E_0 – модуль упругости, $\alpha = \text{const} > 0$, $0 < \beta = \text{const} \leq 1$, является дифференциальным уравнением дробного порядка

$$D_{0t}^\beta \ln u = D_{0t}^\beta \ln (E_0 v) - \Gamma(\beta + 1) \alpha^{-\beta}. \quad (18)$$

Здесь $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера.

Качественно новый подход к расчету релаксационных свойств полимеров дает их интерпретацию как квазилинейных систем с уравнением состояния вида

$$\varphi(u) + \sum_{i=1}^m b_i(t) D_{0t}^{\alpha_i} \varphi(u) = E_0 \psi(v) + \sum_{i=1}^n E_i(t) D_{0t}^{\beta_i} \psi(v), \quad (19)$$

или

$$\varphi(u) + \int_0^\alpha b(\xi, t) D_{0t}^\xi \varphi(u) d\xi = E_0 \psi(v) + \int_0^\beta E(\xi, t) D_{0t}^\xi \psi(v) d\xi. \quad (20)$$

Модель (19) вязкоупругого тела в случае, когда $\varphi(u) = u$ – напряжение, $\psi(v) = v$ – деформация, была предложена в [13] как новый подход к расчету конструкций с вязкоупругим демпфированием.

Известную модель Ю. Н. Работнова [14]:

$$u(t) = E \left[v(t) - \beta \int_0^t \mathfrak{D}_\alpha(-\beta, t - \tau) v(\tau) d\tau \right],$$

и его функцию

$$\mathfrak{D}_\alpha(-\beta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{n(\alpha+1)+\alpha}}{\Gamma[(\alpha+1)(n+1)]}$$

можно записать в виде

$$u(t) + \frac{1}{\beta} D_{0t}^{\alpha+1} u = \frac{E}{\beta} D_{0t}^{\alpha+1} v \quad (21)$$

$$\mathfrak{D}_\alpha(\beta, t) = t^\alpha E_{1/(\alpha+1)}(\beta t^{\alpha+1}; \alpha+1),$$

где $-1 < \alpha < 0$, $E_\rho(z; \mu)$ – функция Миттаг-Леффлера.

Модель (21) допускает следующую модификацию

$$u(t) + \frac{1}{\beta} \int_0^1 D_{0t}^\xi u d\xi = \frac{E}{\beta} \int_0^1 D_{0t}^\xi v d\xi. \quad (22)$$

Уравнения (10), (11), (13), (15), (17)–(22) можно интерпретировать как уравнения состояния квазилинейных систем, вход u и выход v которых образуют синергетическую пару (u, v) .

Линейное соотношение

$$u(t) + \int_0^1 D_{0t}^\xi u d\xi - D_1 u_{xx} = - \int_0^1 D_{0t}^\xi v d\xi + D_2 v_{xx}$$

является уравнением состояния модифицированной системы Тьюринга

$$\int_0^1 D_{0t}^\xi u d\xi = a + vu^2 - (b+1)u + D_1 u_{xx}, \quad \int_0^1 D_{0t}^\xi v d\xi = bu - vu^2 + D_2 v_{xx}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 311 – ф.11)

Литература

1. Бейли Н. Математика в биологии и медицине. М.: Мир, 1970. 226 с.
2. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976. 285 с.
3. Газарян К. Г., Белоусов Л. В. Биология индивидуальности развития животных. М.: Высшая школа, 1983. 287 с.
4. Нахушев А. М., Беккиев А. Ю. О нелинейном обобщении закона Бугера–Ламберта–Бера и теоретическом эффекте локализации особенностей градиента концентрации молекулы в поглощающей среде. Нальчик: препринт № 2, НИИ ПМА, 1992. 7 с.
5. Хакен Г. Синергетика. М.: Мир, 1985. 419 с.
6. Нахушев А. М. ДАН. 1988. Т. 300, № 4. С. 796–799.
7. Самарский А. А. Введение в численные методы. М.: Наука, 1984. 288 с.
8. Торнли Дж. Г. Математические модели в физиологии растений. Киев: Наукова думка, 1982. 310 с.
9. Математическое моделирование. М.: Мир, 1979. Редакторы Дж. Эндрюс, Р. Мак-Лоун.
10. Белоусов Л. В. Биологический морфогенез. М.: Изд-во МГУ, 1987. 239 с.
11. Климентович Ю. Л. Успехи физических наук. 1989. Т. 158, вып. 1. С. 59–91.
12. Бартнев Г. М., Бартнева А. Г. Релаксационные свойства полимеров. М.: Химия, 1992. 381 с.
13. Бэгли Р. Л., Торвик П. Дж. Аэрокосмическая техника. 1984. Т. 2, № 2. С. 84–93.
14. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 383 с.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН

О континуальных аналогах реологических уравнений состояния и логистическом законе изменения вязкоупругих свойств полимера

Пусть D_{0t}^α – оператор дробного дифференцирования порядка α с началом в точке 0 и с концом в точке $t \in [0, T]$, который действует на функцию $u = u(t)$ по формуле:

$$D_{0t}^\alpha u = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^t \frac{u(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1}}, & \alpha < 0, \\ u(t), & \alpha = 0, \\ \frac{\partial^{[\alpha]+1}}{\partial t^{[\alpha]+1}} D_{0t}^{\alpha-[\alpha]-1} u, & \alpha > 0 \end{cases} \quad (1)$$

где α – действительное число, $[\alpha]$ – целая часть α , $[\alpha] \leq \alpha < [\alpha] + 1$, $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция.

В общем виде линейная вязкоупругость полимеров описывается уравнением вида:

$$L_1\sigma = L_2\sigma, \quad (2)$$

где $\sigma = \sigma(t)$ и $\varepsilon = \varepsilon(t)$ – напряжение и деформация в момент времени t , α , L_1 и L_2 линейные, как правило, обыкновенные дифференциальные операторы, которые обратимы в областях своих определений $D(L_1)$ и $D(L_2)$.

Предложенная в работе [1] модель линейной вязкоупругости, основанная на производных дробного порядка, имеет вид:

$$\sigma(t) + \sum_{i=0}^m b_i D_{0t}^{\beta_i} \sigma = E_0 \varepsilon(t) + \sum_{i=0}^n E_i D_{0t}^{\alpha_i} \varepsilon. \quad (3)$$

Здесь зависящее от времени поле напряжений связывается с зависящими от времени полем деформации посредством двух линейных дифференциальных операторов L_1 и L_2 дробного порядка.

На основании экспериментальных наблюдений механических свойств 30 материалов (эластомеров и стекловидных эмалей) авторы считают достаточным удержать в уравнении (3) лишь первые члены с производными дробного порядка, т.е. рассмотреть более простую, чем (3), модель вязкоупругого тела, которая содержит лишь пять параметров: b , E_0 , E_1 , α и β :

$$\sigma(t) + b D_{0t}^{\beta} \sigma = E_0 \varepsilon(t) + E_1 D_{0t}^{\alpha} \varepsilon, \quad (4)$$

где $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$.

При $b = \tau$, $\beta = 1$, $E_0 = 0$, $E_1 = \tau E$, $\alpha = 1$ модель (4) переходит в модель Максвелла

$$\sigma(t) + \tau \frac{d\sigma}{dt} = E\tau \frac{d\varepsilon}{dt}, \quad (5)$$

где τ – время релаксации, E – модуль упругости полимера [2].

Если же $b = 0$ и $E_0 = 0$, $E_1 = E$, то из (4) получаем модель Скотта Блэра [3]

$$\sigma(t) = E D_{0t}^{\alpha} \varepsilon. \quad (6)$$

Г. Л. Слонимский [4] предложил следующий закон высокоэластичных полимерных тел для деформации сегмента, находящегося в вязкой среде:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{r} D_{0t}^{-1} \sigma + \frac{1}{k} \sigma(t) + \frac{1}{\chi} D_{0t}^{-\alpha} \sigma, \quad (7)$$

где ε – перемещение конца сегмента, σ – действующая на сегмент сила, r – коэффициент вязкого сопротивления, k – жесткость сегмента, χ – постоянная величина, $0 \leq \alpha \leq 1$.

Легко видеть, что уравнение (7) эквивалентно задаче Коши: $\varepsilon(0) = \sigma(0)/k$ для дифференциального уравнения

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{k} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{\chi} D_{0t}^{1-\alpha} \sigma + \frac{1}{r} \sigma. \quad (8)$$

Поэтому уравнение (8) является частным случаем модели (3).

Если деформация $\varepsilon(t)$ имеет дробную производную порядка $\rho = \alpha + 1$, то уравнение Ю. А. Работнова [5]

$$\sigma(t) = E \left[\varepsilon(t) - \beta \int_0^t \mathfrak{D}_\alpha(-\beta, t-\tau) \varepsilon(\tau) d\tau \right],$$

где $\beta = \text{const} \neq 0$, $-1 < \alpha = \text{const} < 0$,

$$\mathfrak{D}_\alpha(\beta, t) = t^\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^n t^{n(\alpha+1)}}{\Gamma[(n+1)(1+\alpha)]}$$

– дробно-экспоненциальная функция, редуцируется к модели:

$$\beta\sigma + D_{0t}^\rho \sigma = E D_{0t}^\rho \varepsilon. \quad (9)$$

Уравнение (9) получается из (4) при $E_0 = 0$. Модель (4) в случае, когда $0 < \alpha = \beta < 1$, $0 \leq b < E_1/E_0$, использована в работе [6].

Линейное уравнение (2), ((3), (4), (5) или (6)) определяет вход-выходную связь между деформацией и напряжением.

Пусть S_ε^σ отношение из входного объекта $V = \{\varepsilon: \varepsilon \geq 0\}$ в выходной объект $U = \{\sigma: \sigma \geq 0\}$. S_ε^σ , как собственное подмножество декартова произведения $V \times U$, представляет собой одномерную систему вход-выход [2].

Реологическое уравнение состояния (3) можно интерпретировать как уравнение состояния одномерной непрерывной системы S_ε^σ или как определяющий закон.

Континуальным аналогом уравнений (4), (6) и (9) соответственно можно назвать уравнения

$$\sigma(t) + b \int_0^1 D_{0t}^\alpha \sigma d\beta = E_0 \varepsilon(t) + E_1 \int_0^1 D_{0t}^\alpha \varepsilon d\alpha, \quad (10)$$

$$\sigma(t) = E \int_0^1 D_{0t}^\alpha \varepsilon d\alpha, \quad (11)$$

$$\int_0^1 D_{0t}^\alpha \sigma d\alpha + \beta\sigma = E \int_0^1 D_{0t}^\alpha \varepsilon d\alpha. \quad (12)$$

Уравнения (10), (11) и (12) относительно σ при заданной деформации ε (или наоборот) являются непрерывными (по терминологии В. Вольтерра [7]) дифференциальными уравнениями.

В работе [6] определяющее уравнение

$$\varepsilon E = D_{0t}^{-\alpha} \sigma, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (13)$$

названо обобщенным законом высокоэластичной деформации.

Если деформация $\varepsilon(t)$ имеет производную порядка α , то закон (13) сводится к модели Скотта Блэра (6).

Континуальным аналогом уравнения (13) можно назвать определяющий закон вида:

$$\varepsilon E = \int_{-1}^0 D_{0t}^{\alpha} \sigma d\alpha. \quad (14)$$

Как и законы Гука и Ньютона, модели (11) и (14) являются однопараметрическими.

Вследствие осредняющего действия операции перехода от междупредельной производной $D_{0t}^{\alpha} \varphi$ порядка α к континуальной производной

$$M_{0t}^1 \varphi = \int_0^1 D_{0t}^{\alpha} \varphi d\alpha$$

и уменьшения количества подлежащих идентификации параметров системы вход-выход, преимущество определяющих законов (10), (11), (12) перед соответствующими им реологическими уравнениями состояния (4), (6) и (7) является очевидным.

Определяющие соотношения между напряжением и деформацией для вязкоупругих тел, записанных через континуальные производные, не только правильно описывают механические свойства широкого класса полимеров, но и отражают их континуальные свойства.

На уравнение (11) можно смотреть как на простейшее обобщение законов Гука на (полимерные) системы с памятью.

В [2] обобщенный логистический закон изменения неотрицательного параметра $u = u(t)$, характеризующего состояние одномерной непрерывной системы в зависимости от фактора $t \in [0, T]$, определен дифференциальным уравнением

$$B(p, q, \varphi) u = 0, \quad (15)$$

где оператор $B(p, q, \varphi)$ совпадает с одним из операторов $B_{0t}^{\alpha}(p, q, \varphi)$, $M_{0t}^1(p, q, \varphi)$, действующих на u следующим образом:

$$B_{0t}^{\alpha}(p, q, \varphi) u = D_{0t}^{\alpha} \varphi(u) - p(t) \varphi(t) + q(t),$$

$$M_{0t}^1(p, q, \varphi)u = \int_0^1 D_{0t}^\alpha \varphi(u) d\alpha - p(t)\varphi(t) + q(t).$$

Здесь $\varphi(u)$ – нелинейная функция, обратимая для почти всех u из области $D(\varphi)$ ее определения.

Если $\varphi(u) = u^{1-m}$, то уравнение $B_{0t}^\alpha(p, q, \varphi)u = 0$ представляет собой операторную форму записи уравнения Бернулли

$$u' = p(t)u - q(t)u^m. \quad (16)$$

В экологии и теории эпидемии уравнение (16) при $m = 2$, $p(t) > 0$, $q > 0$ известно как уравнение Ферхюльста, или как логистический закон развития и его решение $u(t)$ интерпретируется как численность или плотность популяции в момент времени t .

Систему с входным сигналом $v \in V$ и выходным сигналом $u \in U$ назовем логистической системой вход-выход, если

$$B(p, q, \varphi)u = B(a, b, \Psi)v. \quad (17)$$

Пусть $\bar{\omega} = (\sigma, \varepsilon)$ – вектор, характеризующий вязко-упругое свойство полимерной системы (например, биополимера).

Простым, но весьма важным, обобщением понятия линейной вязко-упругости может стать понятие квазилинейной вязкоупругости.

Будем говорить, что полимер обладает свойством квазилинейной вязкоупругости, если его можно интерпретировать как логистическую систему с одним входом ε и с одним выходом σ , или наоборот.

В соответствии с этим определением и в силу (17) квазилинейная вязкоупругость моделируется уравнением

$$B(p, q, \varphi)\sigma = B(a, b, \Psi)\varepsilon. \quad (18)$$

Следствием реологической модели (18) является уравнение

$$B_{0t}^\alpha(p, q, \varphi) = B_{0t}^\alpha(a, b, \Psi)\varepsilon, \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (19)$$

При $\alpha = 1$ модель (19) имеет вид

$$\frac{d\varphi(\sigma)}{dt} - p\varphi(\sigma) + q = \frac{d\Psi(\varepsilon)}{dt} - u\Psi(\varepsilon) + b. \quad (20)$$

Пусть:

- 1) $\varphi(\sigma) = (\sigma/\sigma_0)^m$, $\Psi(\varepsilon) = (\varepsilon_0/\varepsilon)^n$;
- 2) $\varphi(\sigma) = \ln(\sigma/\sigma_0)^m$, $\Psi(\varepsilon) = \ln(\varepsilon/\varepsilon_0)^n$;

где $\sigma_0, \varepsilon_0, n, m$ – постоянные величины. Тогда уравнение (20) в первом случае переходит в уравнение

$$\left(\frac{\sigma_0}{\sigma}\right)^m \left[m \frac{\sigma'}{\sigma} + p - q \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m \right] = \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)^n \left[m \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} + a - b \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^n \right], \quad (21)$$

а во втором – в уравнение

$$\frac{1}{\sigma} \left[\sigma' - p\sigma \ln \frac{\sigma}{\sigma_0} + q\sigma \right] = \frac{1}{\varepsilon} \left[\varepsilon' - a\varepsilon \ln \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} + b\varepsilon \right]. \quad (22)$$

Пусть $c = c(t)$ – функция, которая в любой момент времени t совпадает с правой частью уравнения (21). Другими словами, допустим, что деформация $\varepsilon_1 = \varepsilon(t)/\varepsilon_0$ меняется по логистическому закону

$$n\varepsilon_1' + a\varepsilon_1 - (b + c)\varepsilon_1^{n+1} = 0. \quad (23)$$

Тогда, как это вытекает из (21), напряжение $\sigma_1 = \sigma(t)/\sigma_0$ также меняется по логистическому закону

$$m\sigma_1' + p\sigma_1 - (q + c)\sigma_1^{m+1} = 0. \quad (24)$$

Если же через $c(t)$ обозначена правая (левая) часть равенства (22), то соответствующие напряжению σ_1 и деформации ε_1 логистические уравнения имеют вид:

$$\sigma_1' = (c - q)\sigma_1 + p\sigma_1 \ln \sigma_1, \quad (25)$$

$$\varepsilon_1' = (c - b)\varepsilon_1 + a\varepsilon_1 \ln \varepsilon_1. \quad (26)$$

Из соотношения (23)–(26) нетрудно увидеть, что при естественных предположениях относительно параметров $p, q, a, b, c, m, n, \varepsilon_0, \sigma_0$ эти обобщенные логистические уравнения вместе с начальным условием $\sigma(0) = E_0\varepsilon(0)$, являются определяющими законами для полимеров, обладающих свойством квазилинейной вязкоупругости [5]. Приведенные математические модели хорошо коррелируют с экспериментальными данными авторов [8, 9].

Уравнение

$$\varphi(\sigma) + b \int_0^1 D_{0t}^\alpha \varphi(\sigma) d\alpha = E_0 \Psi(\varepsilon) + E_1 \int_0^1 D_{0t}^\alpha \Psi(\varepsilon) d\alpha,$$

где $\varphi(\sigma)$ и $\Psi(\varepsilon)$ – обратимые для почти всех $\sigma \in D(\varphi)$ и $\varepsilon \in \Psi(\varepsilon)$ функции, представляет собой простое нелинейное обобщение модели (10). Оно дает новый подход к расчету конструкции с вязкоупругим деформированием [1].

Работа выполнена в рамках гранта № 94-01-00605 Российского фонда фундаментальных исследований.

Литература

1. Бегли Р. Л., Торвик П. Дж. Аэрокосмическая техника. 1987. № 2. С. 84–93.
2. Нахушев А. М. Об уравнениях состояния непрерывных одномерных систем и их приложениях. Нальчик: Логос, 1995. 50 с.
3. Бленд Д. Р. Теория линейной вязкоупругости. М.: Мир, 1965. 199 с.

4. Слонимский Г. Л. ДАН. 1961. Т. 140, № 2. С. 343–346.
5. Работнов Ю. А. Элементы исследований механики твердых тел. М.: Наука, 1977.
6. Desch W., Grimmer R. Coupled elastic and viscoelastic rods // The Rocky Mountain Journal of Mathematics. 1994. Vol. 24, no. 1. Pp. 37–60.
7. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1982, 304 с.
8. Kardanow Ch. K., Tchakachow R. B., Selenew Ju. W. Plaste und Kautschuk. 1973. Vol. 20, no. 9. Pp. 613–617.
9. Tchakachow R. B., Kardanow Ch. W., Selenew Ju. W. Plaste und Kautschuk. 1973. Vol. 20, no. 8. Pp. 618–620.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН

Об одном классе дифференциальных уравнений состояния дробного порядка в сплошных средах с памятью

Состояние сплошной среды будем считать известным, если в любой ее точке $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ и в каждый момент времени t будут однозначно определены вектор скорости $q(x, t) = (q_1, q_2, q_3)$, давление $p = p(x, t)$ и плотность $\rho = \rho(x, t)$, как функция точки x и времени t .

Пусть характеристики непрерывной среды, заполняющей некоторую область Ω пространства Евклида $\mathbb{R}^3$, связаны уравнением Навье–Стокса

$$\frac{\rho dq}{dt} + \nabla p = \mu \Delta q, \quad (1)$$

уравнением неразрывности

$$\frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div} \rho q = 0, \quad (2)$$

и уравнением состояния

$$F(p, \rho, q, x, t) = 0, \quad (3)$$

где $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$ – оператор Гамильтона, μ – вязкость среды, Δ – оператор Лапласа, F – некоторый оператор (см. [1]).

Предполагается, что функции p и ρ – непрерывны в любой точке $x \in \Omega$ и для любого момента времени $t \geq 0$.

В случае упругой сплошной среды замыкающее уравнение (3) имеет вид

$$F(p, \rho) = 0 \quad (4)$$

и оно взаимнооднозначно связывает давление p и плотность ρ .

Наиболее характерным примером такой связи является следующая:

$$p = a + b \rho^{\varkappa}, \quad (5)$$

где постоянные $\varkappa$, a и b таковы, что $\frac{dp}{d\rho} > 0$. При адиабатическом движении сжимаемой жидкости предполагается, что

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma}, \quad \gamma = \text{const} > 1, \quad (6)$$

здесь p_0 и ρ_0 – давление и плотность, соответствующие состоянию покоя $q = 0$, γ – отношение удельных теплоемкостей.

Одной из центральных проблем в теории сплошных сред с памятью является проблема корректного выбора замыкающего уравнения. Для его получения часто пользуются законами термодинамики, уравнениями энергии, которые справедливы всегда, независимо от того принята гипотеза об адиабатическом течении или гипотеза упругой среды (4).

Пусть $U_\rho = \{\rho: \rho \geq 0\}$; $V_p = \{p: p \geq 0\}$; S_p^ρ – собственное подмножество декартова произведения $V_p \times U_\rho$.

Бинарное отношение S_p^ρ из входного объекта V_p в выходной объект U_ρ является системой вход-выход.

Примем замыкающее уравнение (3) (в частности (4) или (5)) за уравнение состояния системы S_p^ρ и последнюю отождествим с понятием связи, которая означает взаимодействие (в том числе синергетическое) входного V_p и выходного U_ρ объектов.

Предположим, что система S_p^ρ является логистической [2], [3]. Другими словами, допустим что между входным сигналом $p \in V_p$ и выходным сигналом $\rho \in U_\rho$ существует следующая связь

$$B(a_1, b_1, \varphi)p = B(a, b, \psi)\rho. \quad (7)$$

Здесь

$$B(a_1, b_1, \varphi)u \equiv D_{0t}^\alpha \varphi(u) - a_1 \varphi(u) + b_1 \quad (8)$$

или

$$B(a_1, b_1, \varphi)u \equiv \int_0^1 D_{0t}^\beta \varphi(u) d\beta - a_1 \varphi(u) + b_1, \quad (9)$$

где $D_{0t}^\alpha u(x, t)$ – дробная производная порядка $\alpha \in [0, 1]$ от $u(x, t)$ по t [4], a_1 и b_1 – величины, заданные (или подлежащие идентификации), характеризующие сплошную среду с памятью, $\varphi(u)$ и $\psi(u)$ – обратимые для почти всех $u \geq 0$ функции своих аргументов.

Система S_p^ρ с уравнением состояния (7) является квазилинейной, одномерной системой вход-выход, а упорядоченная пара $w = (\rho, p)$ – синергетическим вектором [3].

Уравнение (7) в случае (8) и при $\alpha = 1$ записывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(p) - a_1\varphi(p) + b_1 = \frac{\partial}{\partial t}\psi(\rho) - a_2\psi(\rho) + b_2. \quad (10)$$

Пусть $w_0 = (\rho_0, p_0)$ – равновесное состояние вектора w ; m и n – неотрицательные числа; $\varphi(p) = (p_0/p)^m$, $\psi(\rho) = (\rho_0/\rho)^n$. Тогда уравнение состояния (10) принимает следующий вид

$$\left(\frac{p_0}{p}\right)^m \left[\frac{m}{p} \frac{\partial p}{\partial t} + a_1 - b_1 \left(\frac{p_0}{p}\right)^m \right] = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^n \left[\frac{n}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + a_2 - b_2 \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^n \right]. \quad (11)$$

Уравнения (5) и (6) получаются из (11) в случае, когда $m = 1$, $a_1 = 0$, $b_1 = 0$, $a_2 = 0$, $b_2 = 0$, $n = \gamma$.

Пусть $b(t)$ – функция, которая в любой момент времени совпадает с правой (левой) частью равенства (11). Тогда из (11) заключаем, что функции $u = p/p_0$, $v = \rho/\rho_0$ удовлетворяют уравнениям Бернулли

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha_m u - \beta_m u^{m+1}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \varepsilon_n v - \lambda_n v^{n+1}, \quad (13)$$

где $m\alpha_m = -a_1$, $m\beta_m = -b - b_1$, $n\varepsilon_n = -a_2$, $n\lambda_n = -b - b_2$.

Следовательно, если плотность v сплошной среды меняется по логистическому закону (13), то и соответствующее ей давление u подчиняется логистическому закону (12).

Следует отметить, что уравнение тепловой энергии [1], как уравнение относительно плотности, можно записать в виде (11) с $m = 1$.

Если в (8) параметр $\alpha \neq 0, 1$, то класс уравнений вида (7) является качественно новым классом дифференциальных уравнений состояния дробного порядка в сплошных средах с памятью. При заданной плотности ρ уравнение (7) в случае (8) представляет собой непрерывное линейное, относительно $\varphi(p)$, дифференциальное уравнение, а оператор $B(a_1, b_1, \varphi)$ является континуальным [4].

При определении схематизации одномерное уравнение Навье–Стокса и уравнение неразрывности записываются в виде [5]

$$\rho_0 \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}, \quad q \equiv q_1, \quad x \equiv x_1, \quad (14)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad \rho_0 \equiv \text{const} > 0. \quad (15)$$

Для расчета закона дисперсии в релаксирующих средах систему (14)–(15) дополняют уравнением состояния вида [5]

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{p}{\tau} = c_\infty^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} + c_o^2 \frac{\rho}{\tau}. \quad (16)$$

Здесь c_o – скорость распространения волны, когда период звуковой волны значительно больше времени релаксации τ , а c_∞ – скорость распространения волны в противном случае.

Уравнение (16) получается из (10) в случае, когда $\varphi(p) = p$, $a_1 = -\frac{1}{\tau}$, $b_1 = 0$, $\psi(\rho) = c_\infty^2 \rho$, $a_2 = c_o^2$.

Для широкого класса сплошных сред с памятью (например, для полимерных жидкостей) исследуемому процессу более адекватно не уравнение (16), а уравнение состояния вида

$$p + \tau D_{0t}^\alpha p = c_o^2 \rho + \tau c_\infty^2 D_{0t}^\beta \rho, \quad (17)$$

где $0 < \alpha, \beta < 1$ (см. [6]), или непрерывное дифференциальное уравнение состояния

$$p + \tau \int_0^1 D_{0t}^\alpha p d\alpha = c_o^2 \rho + \tau c_\infty^2 \int_0^1 D_{0t}^\beta \rho d\beta. \quad (18)$$

Уравнения (17) и (18) являются простыми, но вместе с тем интересными, вариантами вход-выходного отношения (7).

При $\alpha = \beta$ и малых значениях c_o уравнение (17) аппроксимируется уравнением

$$p + \tau D_{0t}^\alpha p = \tau E D_{0t}^\beta \rho, \quad E = c_\infty^2, \quad (19)$$

и его в каждой фиксированной точке $x \in \Omega$ можно записать в виде

$$\frac{p}{E} = \rho - \frac{1}{\tau} \int_0^t (t - \eta)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(-(t - \eta)^\alpha / \tau; \alpha) \rho(x, \eta) d\eta, \quad (20)$$

где $E_\beta(z; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k / \Gamma(\mu + k/\beta)$ – функция типа Миттаг-Леффлера.

Легко видеть, что уравнение (19) эквивалентно уравнению

$$\tau E \rho = \tau \rho + D_{0t}^{-\alpha} p. \quad (21)$$

Уравнения состояния вида (7) приводят и к качественно новым уравнениям математической физики. Продемонстрируем это на простом примере.

Пусть $\mu = 0$. Тогда из (14) и (15) получаем

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0. \quad (22)$$

Связь (22) на основании (21) можно переписать следующим образом

$$E \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{\tau} D_{0t}^{2-\alpha} p. \quad (23)$$

Если же воспользоваться уравнением состояния (20), то из (22) будем иметь

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - E \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{E}{\tau} \int (t - \eta)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(-(t - \eta)^\alpha / \tau; \alpha) \frac{\partial^2 \rho(x, \eta)}{\partial x^2} d\eta = 0. \quad (24)$$

Уравнения (23) и (24) на плоскостях точек (x, t) относятся к классу нагруженных уравнений с частными производными гиперболического типа.

Допустим, что $c^2 \rho = D_{0t}^{\varepsilon-2} p$, где ε , $c = \text{const} > 0$. Тогда из (22) имеем

$$D_{0t}^\varepsilon p = c^2 p_{xx}. \quad (25)$$

При $\varepsilon = 2$ уравнение (25) совпадает с одномерным волновым уравнением.

Можно доказать, что если $1 < \varepsilon \leq 2$, то смешанная задача:

$$p(x, 0) = \varphi(x), \quad D_{00}^{\varepsilon-1} p = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l < \infty;$$

$$p(0, t) = f_o(t), \quad p(l, t) = f_l(t), \quad 0 \leq t \leq T < \infty$$

для уравнения (25) имеет и притом единственное регулярное решение, когда входные данные гладкие функции, удовлетворяющие необходимым условиям согласования граничных и начальных функций. Доказательство единственности решения реализуется методом априорных оценок (см. [7], § 2.7), опираясь на положительность оператора дробного дифференцирования порядка < 1 , а существование – методом разделения переменных.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 94-01-00605).

Литература

1. Мизес Р. Математическая теория течения сжимаемой жидкости. М.: ИЛ., 1961. 588 с.
2. Нахушев А. М. Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 1994. Т. 1, № 1. С. 22–27.
3. Нахушев А. М. Об уравнениях состояния непрерывных одномерных систем и их приложениях. Нальчик: Логос, 1995. 50 с.
4. Нахушев А. М. ДАН. 1988. Т. 300, № 4. С. 796–799.
5. Виноградов М. Б., Руденко О. В., Сухарков А. П. Теория волн. М.: Наука, 1979. 282 с.
6. Бегли Р. Л., Торвик П. Дж. Аэрокосмическая техника. 1984. Т. 2, № 2. С. 84–93.
7. Берс Л., Джон Ф., Шахтер М. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966. 315 с.

О положительности интегральных операторов, весьма важных в дробном исчислении и в теории уравнений смешанного типа

В теории уравнений смешанного типа и в дробном исчислении важную роль играет потенциал [1, с. 50]

$$J_{ab}^\alpha u(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^b \frac{u(t)dt}{|x-t|^{\alpha+1}}, \quad (1)$$

$\alpha = \text{const} < 0$, $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера. Очевидно, $J_{ab}^\alpha = D_{ax}^\alpha + D_{bx}^\alpha$. Здесь D_{cx}^α – оператор дробного интегрирования порядка $-\alpha$, с началом в точке $c \in [a, b]$ и с концом в точке x [1, с. 28].

Пусть

$$\langle u, u \rangle_\alpha = \int_a^b u(x) J_{ab}^\alpha u(x) dx.$$

Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть $0 > \alpha > -1$, $u(x)$ – суммируемая на $[a, b]$ функция такая, что $\langle u, u \rangle_\alpha < \infty$. Тогда

$$\begin{aligned} \langle u, u \rangle_\alpha = \frac{1}{2\pi \cos(\pi\alpha/2)} \int_0^\infty \left\{ \left[\int_a^b u(x) \cos(xy) dx \right]^2 + \right. \\ \left. + \left[\int_a^b u(x) \sin(xy) dx \right]^2 \right\} y^\alpha dy, \end{aligned}$$

$\langle u, u \rangle_\alpha = 0$ тогда и только тогда, когда $u = 0$.

Теорема 2. Пусть $\varphi(t)$ – непрерывная, положительная, убывающая и суммируемая на полуотрезке $0 < t \leq b-a$ функция, которая имеет возрастающую, непрерывную производную $\varphi'(t)$ при $0 < t < b-a$. Тогда ядро $k(x, y) = \varphi(|x-y|)$, $a < x, y < b$ является положительным.

Доказательство этих теорем существенно опирается на следующую лемму, которая может представлять самостоятельный интерес в теории рядов Фурье.

Лемма. Пусть $f(x)$ – неотрицательная, убывающая функция из класса $C[0, 1]$, которая имеет возрастающую, непрерывную производную $f'(x)$ при $0 < x < 1$.

Тогда

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \pi n x, \quad 0 < x < 1,$$

где

$$a_0 = 2 \int_0^1 f(x) dx > 0, \quad a_n = 2 \int_0^1 f(x) \cos \pi n x dx \geq 0,$$

причем, если $f'(x)$ – строго возрастающая функция, то $a_n > 0$ для всех $n = 1, 2, \dots$

Хорошо известно, что положительность ядра равносильна положительности всех собственных значений этого ядра. Поэтому уравнение Фредгольма

$$u(x) = \lambda \int_a^b \varphi(|x - y|) u(y) dy + \Psi(x),$$

где $\lambda = \text{const} \leq 0$, $\varphi(t)$ – удовлетворяет условиям теоремы 2, имеет и притом единственное решение $u(x) \in C[a, b]$ для любой $\Psi(x) \in C[a, b]$.

Рассмотрим интегральный оператор $\mathcal{P}_{01}^\varphi$, который действует на суммируемую функцию $u(x)$, $0 \leq x \leq 1$, по формуле

$$\mathcal{P}_{01}^\varphi u(x) = \int_0^1 \varphi(|x - y|) u(y) dy, \quad (2)$$

где $\varphi(x)$ на сегменте $[0, 1]$ удовлетворяет условию монотонности M .

По определению функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условию M тогда и только тогда, когда

$$\varphi(x) \in [0, 1], \quad \varphi(x) \geq 0, \quad \int_0^1 \varphi(x) dx < \infty, \quad \varphi(x) \geq \varphi(y), \quad \varphi'(x) < \varphi'(y), \quad \forall x < y.$$

Потенциал (2) обобщает потенциал (1). При $\varphi(x) = x^{-\alpha-1}/\Gamma(-\alpha)$ оператор $\mathcal{P}_{01}^\varphi = \mathcal{J}_{01}^\varphi$.

Функция $\varphi(x) = -\log x$ удовлетворяет условия M и в этом случае

$$\mathcal{P}_{01}^\varphi u(x) = - \int_0^1 \log |x - y| u(y) dy,$$

является логарифмическим потенциалом с плотностью $u(x)$.

Имеет место

Теорема 3. Пусть функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условию монотонности M . Тогда для любой суммируемой на $[0, 1]$ функции $u(x)$ интеграл Гильберта

$$\mathcal{J}(u, u) = \int_0^1 \int_0^1 \varphi(|x - y|) u(x) u(y) dx dy \geq 0$$

и $\mathcal{J}(u, u) = 0$ тогда и только тогда, когда $u(x) = 0$ для почти всех $x \in [0, 1]$.

Рассмотрим билинейный функционал

$$\langle u, v \rangle^\alpha = \frac{1}{2} [(u, D_{ax}^\alpha v)_0 + (D_{ax}^\alpha u, v)_0], \quad (3)$$

определенный на множестве абсолютно суммируемых функций $u(x)$ и $v(x)$, $\alpha \in]-1, 0[$, $(\cdot, \cdot)_0$ – скалярное произведение в $L^2[a, b]$.

Через $H^\alpha[a, b]$ обозначим пространство с внутренним произведением, где для каждой пары его элементов $u(x)$ и $v(x)$ из $L[a, b]$ по формуле (3) определим скалярное произведение. Норму в этом пространстве определим по формуле

$$\|u\|_\alpha = \sqrt{\langle u, u \rangle^\alpha} \quad \forall u \in H^\alpha[a, b]. \quad (4)$$

Пространство $H^\alpha[a, b]$ (пополненное, если оно не полно) является энергетическим и

$$\|u\|_\alpha = \sqrt{\langle u, u \rangle^\alpha}. \quad (5)$$

В пространстве $H^\alpha[a, b]$ норму можно ввести следующим образом

$$\|u\|_\alpha = \left\{ \frac{a_0}{2} \left(\int_0^1 u(x) dx \right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\left(\int_0^1 u(x) \cos \pi n x dx \right)^2 + \left(\int_0^1 u(x) \sin \pi n x dx \right)^2 \right] \right\}^{1/2}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (Проект № 96-01-00-508).

Литература

1. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. 301 с.

О положительности операторов непрерывного и дискретного дифференцирования и интегрирования весьма важных в дробном исчислении и в теории уравнений смешанного типа

1. Континуальная производная и ее связь с дискретной производной дробного порядка. Пусть: $u = u(x)$ – скалярная функция с областью определения $D(u) = \{x: x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$;

$$\Delta_n^\alpha u(x) = \left(\frac{n}{x-a}\right)^\alpha \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{\alpha}{m} u\left(x - \frac{x-a}{n}m\right) \quad (1)$$

– междупредельное конечно-разностное отношение порядка $\alpha \in \mathbb{R}$ в точке $x \in D(u)$;

$$D_{ax}^\alpha u = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n^\alpha u(x) \quad (2)$$

– летниковская производная порядка α от функции $u(x)$, взятой в пределах от a до x [1, с. 28].

Как известно, биномиальный коэффициент

$$\binom{\alpha}{m} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-m+1)}{m!} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{m!\Gamma(\alpha-m+1)}, \quad (3)$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция, которую можно определить следующим образом [2, с. 26]:

$$\Gamma(z) \cos \frac{\pi z}{2} = \int_0^\infty t^{z-1} \cos t \, dt, \quad 0 < \operatorname{Re} z < 1, \quad (4)$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad \forall x+iy. \quad (5)$$

А. В. Летников доказал (см. [1, с. 28] или [3, с. 521]), что если $u \in L[a, b]$ и $\alpha < 0$, то из (1), (2) вытекает основная формула

$$D_{ax}^\alpha u = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^x \frac{u(t) \, dt}{(x-t)^{\alpha+1}}, \quad a < x \leq b. \quad (6)$$

Если же $0 < \alpha \leq [\alpha]$, где $[\alpha]$ – целая часть α , и функция $D_{ax}^{\{\alpha\}}$, $\{\alpha\}$ – дробная часть α , в промежутке $a < x < b$ имеет все производные до порядка $[\alpha] + 1$, то

$$D_{ax}^\alpha u = \frac{\partial^{[\alpha]+1}}{\partial x^{[\alpha]+1}} D_{ax}^{\{\alpha\}} u. \quad (7)$$

Введем функцию $J_{\alpha}^{\beta}(m, n, x) = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{n}{x-a} \right)^t \binom{t}{m} dt$.

Выражение $\Delta_n^{[\alpha, \beta]} u(x) = \sum_{m=0}^n (-1)^m J_{\alpha}^{\beta}(m, n, x) u\left(x - \frac{x-a}{n}m\right)$ назовем континуальным конечно-разностным отношением порядка $[\alpha, \beta]$.

Если существует предел $D_{ax}^{[\alpha, \beta]} u$ континуальных конечно-разностных отношений $\Delta_n^{[\alpha, \beta]} u(x)$ при $n \rightarrow \infty$, то этот предел разумно назвать континуальной производной порядка $[\alpha, \beta]$ от функции $u(x)$ с началом в точке a и концом в точке $x \in]a, b]$:

$$D_{ax}^{[\alpha, \beta]} u = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n^{[\alpha, \beta]} u(x). \quad (8)$$

Пусть $\beta > 0$, функция $u(x)$ при $a < x < b$ имеет все производные до порядка β и они абсолютно суммируемы. Тогда из (2) в силу (3), (6) и (7) нетрудно видеть, что

$$D_{ax}^{[\alpha, \beta]} u = \int_{\alpha}^{\beta} D_{ax}^t u dt. \quad (9)$$

При $x > a$ летниковская производная $D_{ax}^t u$ как функция переменной t непрерывна на сегменте $\alpha \leq t \leq \beta$. Поэтому на основании теоремы о среднем значении для интегралов существует такое $\varepsilon = \varepsilon(x)$, что $\alpha < \varepsilon(x) < \beta$ для любого $x \in]a, b]$:

$$\frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} D_{ax}^t u dt = D_{ax}^{\varepsilon} u. \quad (10)$$

Отсюда и из равенства (9) следует, что $D_{ax}^{[\alpha, \beta]} u = (\beta - \alpha) D_{ax}^{\varepsilon} u$.

Оператор $D_{ax}^{[\alpha, \beta]}$ назовем оператором непрерывного интегрирования порядка $[\alpha, \beta]$ в случае, когда $\beta \leq 0$, оператором непрерывного (континуального) дифференцирования при $\alpha \geq 0$ и оператором непрерывного интегро-дифференцирования, если $\alpha < 0$, а $\beta > 0$.

2. Формулы дробного и непрерывного интегрирования по частям, взаимная сопряженность операторов D_{ax}^{β} , $D_{ax}^{[\alpha, \beta]}$ и D_{bx}^{β} , $D_{bx}^{[\alpha, \beta]}$. Через $L^p[a, b]$ обозначим пространство всех измеримых на сегменте $[a, b]$ функций $u(x)$ с конечной нормой

$$\|u\| = \left[\int_a^b |u(x)|^p dx \right]^{1/p}, \quad p \geq 1.$$

Пусть $\alpha < \beta \leq 0$, p и $q \geq 1$, $1/p + 1/q \leq 1 - \beta$ и в случае $1/p + 1/q = 1 - \beta$ числа p и $q \neq 1$. Тогда для любой функции $u \in L^p[a, b]$ и $v \in L^q[a, b]$ справедливы равенства

$$(u, D_{ax}^\beta v)_0 = (D_{bx}^\beta u, v)_0, \quad (11)$$

$$(u, D_{ax}^{[\alpha, \beta]} v)_0 = (D_{bx}^{[\alpha, \beta]} u, v)_0, \quad (12)$$

где

$$(u, v)_0 = \int_a^b u(x) v(x) dx \quad (13)$$

– скалярное произведение в пространстве $L^2[a, b]$,

$$D_{bx}^\beta u = -\frac{1}{\Gamma(-\beta)} \int_b^x \frac{u(t) dt}{|x-t|^{\beta+1}} \quad (14)$$

– дробная производная отрицательного порядка β от функции $u(x)$, взятой в пределах от b до $x < b$,

$$D_{bx}^{[\alpha, \beta]} u = \int_\alpha^\beta D_{bx}^t u dt. \quad (15)$$

Равенство (11) является следствием формулы Дирихле (теоремы Фубини) и известно как формула дробного интегрирования по частям [4, с. 42], формула (12) – следствие (11).

Формулы (11) и (12) говорят о взаимной сопряженности операторов D_{ax}^β , $D_{ax}^{[\alpha, \beta]}$ и D_{bx}^β , $D_{bx}^{[\alpha, \beta]}$ соответственно [5].

3. О положительности оператора $D_{ax}^\alpha + D_{bx}^\alpha$ при $-1 \leq \alpha < 0$. В дробном исчислении и в теории уравнений смешанного типа важную роль играет потенциал (см. [1, с. 50])

$$J_{ab}^\alpha u(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^b \frac{u(t) dt}{|x-t|^{\alpha+1}}, \quad \alpha = \text{const} < 0, \quad (16)$$

с плотностью $u(t)$ и со степенным ядром $|x-t|^{-\alpha-1}/\Gamma(-\alpha)$. В силу (6) и (14) ясно, что $J_{ab}^\alpha = D_{ax}^\alpha + D_{bx}^\alpha$.

Воспользуемся обозначением

$$\langle u, u \rangle_\alpha = (u, J_{ab}^\alpha u)_0. \quad (17)$$

Справедлива

Теорема 1. Пусть $0 > \alpha > -1$, u – суммируемая на $[a, b]$ функция такая, что $\langle u, u \rangle_\alpha < \infty$. Тогда

$$\langle u, u \rangle_\alpha = \frac{1}{2\pi \cos(\pi\alpha/2)} \times \\ \times \int_0^\infty \left\{ \left[\int_a^b u(x) \cos(xy) dx \right]^2 + \left[\int_a^b u(x) \sin(xy) dx \right]^2 \right\} y^\alpha dy, \quad (18)$$

$\langle u, u \rangle_\alpha = 0$ тогда и только тогда, когда $u = 0$.

Доказательство. В равенстве (4) произведем замену переменной интегрирования по формуле $t = \xi\eta$, где ξ – любое положительное число. В результате будем иметь

$$\Gamma(z) \cos(\pi z/2) = \xi^z \int_0^\infty \eta^{z-1} \cos(\xi\eta) d\eta, \quad 0 < \operatorname{Re} z < 1. \quad (19)$$

Отсюда при $z = \alpha + 1$, $\xi = |x - t|$ получаем

$$\Gamma(\alpha + 1) \cos[\pi(\alpha + 1)/2] = |x - t|^{\alpha+1} \int_0^\infty \eta^\alpha \cos[\eta|x - t|] d\eta$$

или

$$\Gamma(\alpha + 1) \sin(\pi\alpha/2) |x - t|^{-\alpha-1} = - \int_0^\infty \eta^\alpha \cos[\eta(x - t)] d\eta. \quad (20)$$

С учетом (16) и (20) равенство (17) запишем в виде

$$\begin{aligned} & -\Gamma(-\alpha) \Gamma(\alpha + 1) \sin(\pi\alpha/2) \langle u, u \rangle_\alpha = \\ & = \int_0^\infty \eta^\alpha d\eta \int_a^b \int_a^b u(x) u(t) \cos(\eta x - \eta t) dx dt = \\ & = \int_0^\infty \eta^\alpha d\eta \int_a^b \int_a^b u(x) u(t) [\cos(\eta x) \cos(\eta t) + \sin(\eta x) \sin(\eta t)] dx dt = \\ & = \int_0^\infty \eta^\alpha d\eta \left[\int_a^b u(x) \cos(\eta x) dx \int_a^b u(t) \cos(\eta t) dt + \right. \end{aligned}$$

$$+ \int_a^b u(x) \sin(\eta x) dx \int_a^b u(t) \sin(\eta t) dt \Bigg]. \quad (21)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} -\Gamma(-\alpha) \Gamma(\alpha+1) \sin(\pi\alpha/2) &= -\alpha \Gamma(-\alpha) \Gamma(\alpha) \sin(\pi\alpha/2) = \\ &= \Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha) \sin(\pi\alpha/2) = \pi \sin(\pi\alpha/2) / \sin(\pi\alpha) = \pi / [2 \cos(\pi\alpha/2)], \end{aligned}$$

то из равенства (21) следует справедливость (18).

Докажем теперь вторую часть теоремы. Пусть $\langle u, u \rangle_\alpha = 0$. Тогда из (18) имеем равенства

$$\int_a^b u(x) \cos(xy) dx = 0, \quad \int_a^b u(x) \sin(xy) dx = 0, \quad (22)$$

справедливые для всех $y \geq 0$. Поскольку

$$\cos(-xy) = \cos xy, \quad \sin(-xy) = -\sin xy,$$

то из (22) следует, что

$$\int_a^b u(x) \exp(-ixy) dx = 0, \quad -\infty < y < \infty,$$

где i – мнимая единица. Отсюда, при $y = 2\pi n/(b-a)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, получаем

$$\int_a^b u(x) \exp\left(-\frac{2\pi nix}{b-a}\right) dx = 0 \quad \forall \pm n = 0, 1, 2, \dots \quad (23)$$

Функция $u(x)$ суммируема на сегменте $[a, b]$, поэтому интеграл Лебега

$$v(x) = \int_a^x u(t) dt, \quad a \leq x \leq b, \quad (24)$$

абсолютно непрерывен на этом сегменте. Из (23) при $n = 0$ и (24) при $x = a$ следует, что $v(b) = 0$ и $v(a) = 0$. Функция

$$f(x) = v(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b v(x) dx \equiv v(x) - \bar{v} \quad (25)$$

такова, что

$$\int_a^b f(x) dx = 0. \quad (26)$$

Из (23) с помощью интегрирования по частям и с учетом (26) находим, что

$$\int_a^b f(x) \exp\left(-\frac{2\pi nix}{b-a}\right) dx = 0, \quad \pm n = 0, 1, 2, \dots \quad (27)$$

Абсолютно непрерывная функция $f(x)$ в силу (25) удовлетворяет условию $f(a) = f(b)$ и, следовательно, по второй теореме Вейерштрасса при любом $\varepsilon > 0$ тригонометрический полином

$$F(x) = \sum_{n=-m}^m a_n \exp\left(-\frac{2\pi nix}{b-a}\right)$$

таков, что $|f(x) - F(x)| < \varepsilon$. Поэтому на основании (27) можно записать $\|f\|_0^2 = (f, f - F)_0 \leq \varepsilon (|f|, 1)_0 \leq \varepsilon \|f\|_0 \|1\|_0$, где $\|f\| = \sqrt{(f, f)_0}$ — норма в $L^2[a, b]$, $\|1\|_0 = \sqrt{b-a}$. Отсюда в силу произвольности ε следует, что $f(x) = 0$, т. е. $v(x) = \bar{v}$, и, стало быть, $v'(x) = u(x) = 0$ почти всюду на $[a, b]$.

Начиная с соотношения (23), нами по существу доказана следующая, на наш взгляд, хорошо известная

Лемма 1. Пусть $u(x)$ — суммируемая на сегменте $[a, b]$ функция, удовлетворяющая счетной системе (23) однородных интегральных уравнений Фредгольма первого рода. Тогда $u(x) = 0$ почти всюду на $[a, b]$.

Существуют различные определения положительного оператора. Линейный симметричный оператор A с областью определения $D(A)$, действующий в гильбертовом пространстве H со скалярным произведением (u, v) , $u, v \in H$, будем называть положительным, если замыкание $\overline{D(A)} = H$, квадратичная форма $(Au, u) \geq 0$ и $(Au, u) = 0$ тогда и только тогда, когда $u = 0$.

В гильбертовом пространстве $L^2[a, b]$ оператор J_{ab}^α , $-1 < \alpha < 0$, симметричен: $(J_{ab}^\alpha u, v)_0 = (u, J_{ab}^\alpha v)_0$ и на основании теоремы 1 $(u, J_{ab}^\alpha u)_0 \geq 0$, причем $(u, J_{ab}^\alpha u)_0 = 0$ тогда и только тогда, когда $u = 0$. Следовательно, оператор J_{ab}^α положителен.

4. Об одном классе положительных ядер. Интеграл вида

$$J(u, u) = \int_a^b \int_a^b K(x, y) u(x) u(y) dx dy \quad (28)$$

с симметричным ядром $K(x, y) = K(y, x)$ принято называть интегралом Гильберта или квадратичной формой с бесконечным числом переменных [6, с. 155].

Симметричное ядро $K(x, y)$ называется положительным, если $J(u, u) \geq 0$ для любой функции $u(x) \in C[a, b]$. Поскольку $\langle u, u \rangle_\alpha \geq 0$, то квадратичная форма (28) является интегралом Гильберта с положительным в силу (18) ядром

$$K(x, y) = |x - y|^{-\alpha-1} / \Gamma(-\alpha), \quad -1 < \alpha < 0.$$

Тот факт, что ядро $|x - y|^{-\beta}$, $0 < \beta < 1$, является положительным в смысле теории интегральных уравнений, доказан Ф. Трикоми [7, с. 180], [8, с. 385].

Широкий класс положительных ядер выделяет

Теорема 2. Пусть $\varphi(t)$ – непрерывная, положительная, убывающая и суммируемая на полуотрезке $0 < t \leq b - a$ функция, которая имеет возрастающую, непрерывную производную $\varphi'(t)$ при $0 < t < b - a$. Тогда ядро

$$K(x, y) = \varphi(|x - y|), \quad a < x, y < b,$$

положительно.

Предварительно докажем лемму, которая может представлять самостоятельный интерес и в теории рядов Фурье.

Лемма 2. Пусть $f(x)$ – неотрицательная, убывающая и ненулевая функция из класса $C[0, 1]$, которая имеет возрастающую непрерывную производную $f'(x)$ при $0 < x < 1$. Тогда

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \pi n x, \quad 0 < x < 1, \quad (29)$$

где

$$a_0 = 2 \int_0^1 f(x) dx > 0, \quad a_n = 2 \int_0^1 f(x) \cos \pi n x dx \geq 0, \quad (30)$$

причем $a_n > 0$ для всех $n = 1, 2, \dots$, если $f'(x)$ – строго возрастающая функция.

Так как функция $f(x)$ монотонна и непрерывна на сегменте $[0, 1]$, то разложение (29) является следствием теоремы Дирихле.

Функция $f(x) \geq 0$, $f(x) \not\equiv 0$ и $f(x) \in C[0, 1]$, поэтому $a_0 > 0$.

Пусть

$$F(x) = f(x / (\pi n)), \quad x \in [0, \pi n], \quad n = 1, 2, \dots$$

Легко видеть, что

$$a_n = \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi n} F(t) \cos t dt = \frac{2}{\pi n} \sum_{r=0}^{n-1} \int_{\pi r}^{\pi(r+1)} F(t) \cos t dt.$$

Отсюда после замены $x = t - \pi r$ и с учетом равенства $\cos(x + \pi r) = (-1)^r \cos x$ получаем

$$a_n = \frac{2}{\pi n} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \int_0^{\pi} F(x + \pi r) \cos x \, dx$$

или

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi n} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \int_0^{\pi/2} F(x + \pi r) \cos x \, dx + \\ &+ \frac{2}{\pi n} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \int_{\pi/2}^{\pi} F(x + \pi r) \cos x \, dx. \end{aligned}$$

Стало быть,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi n} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \int_0^{\pi/2} F(x + \pi r) \cos x \, dx - \\ &- \frac{2}{\pi n} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \int_0^{\pi/2} F\left(t + \frac{2r+1}{2}\pi\right) \sin t \, dt, \end{aligned} \quad (31)$$

откуда и из теоремы о среднем значении интеграла заключаем: существуют числа x_1 и x_2 такие, что $0 < x_i < 1$, $i = 1, 2$, и

$$a_n = \frac{2}{\pi n} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r F\left(\frac{\pi}{2}x_1 + \pi r\right) - \frac{2}{\pi n} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r F\left(\frac{\pi}{2}x_2 + \frac{2r+1}{2}\pi\right). \quad (32)$$

В случае $n \equiv 0 \pmod{2}$ из (32) имеем

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi n} \sum_{i=0}^{(n-2)/2} \left[F\left(\frac{\pi}{2}x_1 + 2\pi i\right) - F\left(\frac{\pi}{2}x_1 + (2i+1)\pi\right) - \right. \\ &\left. - F\left(\frac{\pi}{2}x_2 + \frac{2i+1}{2}\pi\right) + F\left(\frac{\pi}{2}x_2 + \frac{4i+3}{2}\pi\right) \right] \end{aligned}$$

или

$$a_n = \frac{2}{\pi n} \sum_{i=0}^{(n-2)/2} \int_{\pi x_1/2 + 2i\pi}^{(x_2+1)\pi/2 + 2i\pi} [F'(y + \pi) - F'(y)] \, dy. \quad (33)$$

Допустим теперь, что $n \equiv 1 \pmod{2}$. Тогда равенство (32) можно переписать в виде

$$a_n = \frac{2}{\pi n} \left\{ F\left(\frac{\pi}{2}x_1 + \pi(n-1)\right) - F\left(\frac{\pi}{2}(x_2+1) + \pi(n-1)\right) + \sum_{i=0}^{(n-3)/2} \left[F\left(\frac{\pi}{2}x_1 + 2\pi i\right) - F\left(\frac{\pi}{2}x_2 + \frac{4i+1}{2}\pi\right) - F\left(\frac{\pi}{2}x_1 + (2i+1)\pi\right) + F\left(\frac{\pi}{2}x_2 + \frac{4i+3}{2}\pi\right) \right] \right\}, \quad (34)$$

откуда нетрудно видеть, что

$$a_n = \frac{2}{\pi n} \left[F\left(\frac{\pi}{2}x_1 + \pi(n-1)\right) - F\left(\frac{\pi}{2}(x_2+1) + \pi(n-1)\right) \right] + \frac{2}{\pi n} \sum_{i=0}^{(n-3)/2} \int_{\pi x_1/2+2i\pi}^{(x_2+1)\pi/2+2i\pi} [F'(x+\pi) - F'(x)] dx. \quad (35)$$

Поскольку $F'(x)$ – возрастающая функция, а $F(x)$ – убывающая, то из (33) и (35) вытекает (30). Если $F'(x)$ строго возрастает, то $a_n > 0$ для всех $n = 1, 2, \dots$

Доказанная лемма позволяет весьма просто убедиться в справедливости теоремы 2.

Действительно, не нарушая общности, в (28) можно положить $a = 0$, $b = 1$ и рассмотреть интеграл Гильберта

$$J_\varepsilon(u, u) = \int_0^1 \int_0^1 f_\varepsilon(|x-y|) u(x) u(y) dx dy,$$

где $f_\varepsilon(x) = \varphi(x+\varepsilon)$ при $0 \leq x \leq 1-\varepsilon$ и $f_\varepsilon(x) = \varphi(1) \exp(\varepsilon - \varepsilon^2 - \varepsilon x)$ при $1-\varepsilon \leq x \leq 1$.

Функция $f_\varepsilon(x)$ удовлетворяет условиям леммы и при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремится к $\varphi(x)$. Поэтому

$$J(u, u) = \int_0^1 \int_0^1 \varphi(|x-y|) u(x) u(y) dx dy = \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{a_0^\varepsilon}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^\varepsilon \cos \pi n(x-y) \right] u(x) u(y) dx dy,$$

где $a_n^\varepsilon = 2 \int_0^1 f_\varepsilon(x) \cos \pi n x dx \geq 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Отсюда видно, что

$$J(u, u) = \frac{1}{2} a_0^0 \left[\int_0^1 u(x) dx \right]^2 + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^0 \left\{ \left[\int_0^1 u(x) \cos \pi n x dx \right]^2 + \left[\int_0^1 u(x) \sin \pi n x dx \right]^2 \right\}, \quad (36)$$

$$a_0^0 = 2 \int_0^1 \varphi(x) dx > 0, \quad a_n^0 = 2 \int_0^1 \varphi(x) \cos \pi n x dx \geq 0.$$

Равенство (36) установлено в [9, с. 84] для специального ядра вида

$$\varphi(|x - y|) = |x - y|^{-m/(m+2)} P_0 \left(c |x - y|^{4/(m+2)} \right), \quad P_0(0) \neq 0, \quad (37)$$

которое возникает при исследовании задачи Трикоми для уравнения смешанного типа $y^m u_{xx} + u_{yy} - cu = 0$, $m \equiv 1 \pmod{2}$. При этом в [9] требуется достаточная малость спектрального параметра $c > 0$, ибо равенство (36) доказывается в случае, когда функция $\varphi(x)$ из (37) такова, что $\varphi(x) > 0$, $\varphi'(x) < 0$, $\varphi''(x) > 0$ при $0 \leq x \leq 1$.

Хорошо известно, что положительность ядра равносильна положительности всех его собственных значений [10, с. 95]. В связи с этим следует отметить, что уравнение Фредгольма второго рода

$$u(x) = \lambda \int_a^b \varphi(|x - y|) u(y) dy + \psi(x),$$

$\lambda = \text{const} \leq 0$, $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 2, $\psi(x) \in C[a, b]$, имеет и притом единственное решение $u(x) \in C[a, b]$.

5. Теорема о положительности интегрального оператора, обобщающего оператор J_{ab}^α . Рассмотрим интегральный оператор $\mathcal{P}_{01}^\varphi$, который действует на суммируемую функцию $u(x)$, $0 \leq x \leq 1$ по формуле

$$\mathcal{P}_{01}^\varphi = \int_0^1 \varphi(|x - y|) u(y) dy, \quad (38)$$

где функция $\varphi(x)$ на сегменте $[0, 1]$ удовлетворяет условию монотонности М, которое определяется следующим образом.

Функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условию монотонности **М** тогда и только тогда, когда, для любых x и y из $]0, 1[$

$$\begin{aligned} \varphi(x) \in C^1]0, 1], \quad \varphi(x) \geq 0, \quad \int_0^1 \varphi(x) dx < \infty, \\ \varphi(x) \geq \varphi(y), \quad \varphi'(x) < \varphi'(y) \quad \forall x < y. \end{aligned} \quad (39)$$

Потенциал (38) представляет собой некоторое обобщение потенциала (16). При $\varphi(x) = x^{-\alpha-1}/\Gamma(-\alpha)$ оператор $\mathcal{P}_{01}^\varphi$ совпадает с J_{01}^α .

Функция $\varphi(x) = -\log x$ удовлетворяет условию **М** и в этом случае

$$\mathcal{P}_{01}^\varphi u(x) = - \int_0^1 \log|x-y| u(y) dy \quad (40)$$

является логарифмическим потенциалом с плотностью $u(x)$.

Имеет место

Теорема 3. Пусть функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условию **М**. Тогда для любой суммируемой на $[0, 1]$ функции $u(x)$ интеграл Гильберта

$$J(u, u) = \int_0^1 \int_0^1 \varphi(|x-y|) u(x) u(y) dx dy \geq 0 \quad (41)$$

и $J(u, u) = 0$ тогда и только тогда, когда $u(x) = 0$ для почти всех $x \in [0, 1]$.

Неравенство (41), т. е. положительность ядра $K(x, y) = \varphi(|x-y|)$, следует из теоремы 2, поэтому остановимся на второй части теоремы 3.

В силу (38) и (39) форма $J(u, u)$ представима в виде (36). В силу леммы 2 коэффициенты этого представления таковы, что $a_0^0 > 0$, $a_n^0 > 0$ для всех $n = 1, 2, \dots$. Следовательно,

$$\int_0^1 u(x) \cos \pi n x dx = 0, \quad \int_0^1 u(x) \sin \pi n x dx = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

т. е.

$$\int_0^1 u(x) \exp(-2\pi n i x) dx = 0 \quad \forall \pm n = 0, 1, 2, \dots$$

Отсюда, на основании леммы 1 получаем $u(x) = 0$ почти всюду на $[0, 1]$.

В пространстве $L^2[0, 1]$ оператор $\mathcal{P}_{01}^\varphi$ симметричен и, согласно теореме 3, $(u, \mathcal{P}_{01}^\varphi u) \geq 0$, причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $u = 0$. Это означает положительность оператора $\mathcal{P}_{01}^\varphi$ с ядром φ , удовлетворяющим условию **М**.

6. О положительности операторов дискретного и непрерывного интегрирования. Введем в рассмотрение оператор, действующий на суммируемую на $[a, b]$ функцию $u(x)$ по формуле

$$J_{ab}^{[\alpha, \beta]} u(x) = \int_a^b \frac{V_i(-\beta, -\alpha, |x-y|)}{|x-y|} u(y) dy, \quad (42)$$

где $-1 \leq \alpha < \beta \leq 0$,

$$V_i(\gamma, \delta, x) = \int_{\gamma}^{\delta} \frac{x^t dt}{\Gamma(t)}, \quad x \geq 0, \quad 0 \leq \gamma \leq \delta. \quad (43)$$

Функция

$$\nu(x; \mu) = \int_0^{\infty} \frac{x^{\mu+t} dt}{\Gamma(1+\mu+t)} = \frac{1}{x} \int_{\mu+1}^{\infty} \frac{x^{\tau} d\tau}{\Gamma(\tau)}$$

называется функцией Вольтерра [11, с. 261]. Очевидно, что

$$x\nu(x; \mu) = V_i(\mu+1, -\infty, x)$$

— специальная функция, введенная в [12], [13, с. 16]. Легко видеть, что $J_{ab}^{[\alpha, \beta]} = D_{ax}^{[\alpha, \beta]} + D_{bx}^{[\alpha, \beta]}$.

Действительно, согласно (9), (15) и (16),

$$\begin{aligned} D_{ax}^{[\alpha, \beta]} u + D_{bx}^{[\alpha, \beta]} u &= \int_{\alpha}^{\beta} (D_{ax}^t + D_{bx}^t) u dt = \int_{\alpha}^{\beta} J_{ab}^t u dt \int_a^b \frac{|x-y|^{-t-1}}{\Gamma(-t)} u(y) dy = \\ &= \int_a^b u(y) dy \int_{\alpha}^{\beta} \frac{|x-y|^{-t-1}}{\Gamma(-t)} dt = \int_a^b \frac{u(y)}{|x-y|} dy \int_{-\beta}^{-\alpha} \frac{|x-y|^{\tau}}{\Gamma(\tau)} d\tau. \end{aligned}$$

Функция $\varphi(x) = V_i(-\beta, -\alpha, x)/x$ при $-1 \leq \alpha < \beta \leq 0$ удовлетворяет условию М. Поэтому оператор $J_{ab}^{[\alpha, \beta]}$ положителен в $L^2[a, b]$.

Рассмотрим билинейный функционал

$$\langle u, v \rangle^{\alpha} = \frac{1}{2} [(u, D_{ax}^{\alpha} v)_0 + (D_{ax}^{\alpha} u, v)_0], \quad (44)$$

определенный на множестве абсолютно суммируемых функций $u(x)$ и $v(x)$, для которых справедливо равенство (11) с $\beta = \alpha \in]-1, 0[$.

Из (44) видно, что

$$\begin{aligned} \langle u, u \rangle^{\alpha} &= (u, D_{ax}^{\alpha} u)_0 = \frac{1}{2} [(u, D_{ax}^{\alpha} u)_0 + (u, D_{bx}^{\alpha} u)_0] = \\ &= \frac{1}{2} (u, J_{ab}^{\alpha} u)_0 = \frac{1}{2} \langle u, u \rangle_{\alpha}. \end{aligned} \quad (45)$$

Отсюда на основании теоремы 1 заключаем, что $\langle u, u \rangle^\alpha \geq 0$, $\langle u, u \rangle^\alpha = 0$ тогда и только тогда, когда $u = 0$ почти везде на $[a, b]$. Функционал (44) удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения.

Через $\mathbf{H}^\alpha[a, b]$ обозначим пространство с внутренним произведением, где для каждой пары его элементов $u(x)$ и $v(x)$ из $L[a, b]$ формулой (44) определено скалярное произведение, а норму введем следующим образом:

$$\|u\|_\alpha = \sqrt{\langle u, u \rangle^\alpha} \quad \forall u \in \mathbf{H}^\alpha[a, b]. \quad (46)$$

Итак, пусть $\mathbf{H}^\alpha[a, b]$ – гильбертово пространство действительных функций с конечной нормой (46). Очевидно, $\mathbf{H}^0[a, b] = L^2[a, b]$. Из (45) и (46) вытекает, что

$$(u, D_{ax}^\alpha u)_0 = (u, D_{bx}^\alpha u)_0 \geq 0 \quad \forall u \in \mathbf{H}^\alpha[a, b] \quad (47)$$

и $(u, D_{ax}^\alpha u)_0 = 0$ тогда и только тогда, когда u – нулевой элемент пространства $\mathbf{H}^\alpha[a, b]$.

Это пространство (пополненное, если оно неполное) является энергетическим [14, с. 64] и в силу (18) соотношение (46) можно переписать в виде

$$\|u\|_\alpha = \frac{1}{2\sqrt{\pi \cos(\pi\alpha/2)}} \times \left\{ \int_0^\infty \left[\left(\int_a^b u(x) \cos xy \, dx \right)^2 + \left(\int_a^b u(x) \sin xy \, dx \right)^2 \right] y^\alpha dy \right\}^{1/2}.$$

Согласно (37), норму в $\mathbf{H}^\alpha[0, 1]$ можно ввести и таким образом:

$$\|u\|_\alpha = \left\{ \frac{a_0}{2} \left(\int_0^1 u(x) \, dx \right)^2 + \sum_{n=1}^\infty a_n \left[\left(\int_0^1 u(x) \cos \pi n x \, dx \right)^2 + \left(\int_0^1 u(x) \sin \pi n x \, dx \right)^2 \right] \right\}^{1/2},$$

где $a_0 = 1/(\Gamma(1-\alpha))$, $a_n = (1/(\Gamma(\alpha))) \int_0^1 x^{-\alpha-1} \cos \pi n x \, dx > 0$.

Пусть $\mathbf{H}^{[\alpha, \beta]}[a, b]$ – гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle u, v \rangle^{[\alpha, \beta]} = (1/2) \left[(u, D_{ax}^{[\alpha, \beta]} v)_0 + (D_{ax}^{[\alpha, \beta]} u, v)_0 \right]$ и с конечной нормой $\|u\|_{[\alpha, \beta]} = \sqrt{\langle u, u \rangle^{[\alpha, \beta]}}$, $-1 \leq \alpha < \beta \leq 0$.

Как и выше, можно доказать, что если $-1 \leq \alpha < \beta \leq 0$, то для любого $u \in \mathbf{H}^{[\alpha, \beta]}[a, b]$ имеем

$$(u, D_{ax}^{[\alpha, \beta]} u)_0 = (u, D_{bx}^{[\alpha, \beta]} u)_0 \geq 0. \quad (48)$$

Неравенству (47) при $a = 0, b = 1, \alpha = -2/3$ можно придать вид

$$\int_0^1 v(x) dx \int_0^x (x-y)^{-1/3} v(y) dy \geq 0. \quad (49)$$

Это неравенство впервые доказано Ф. Трикоми в [6, с. 43], [8, с. 385], правда, в указанных работах $v(x) = z_y(x, 0)$, где $z(x, y)$ – решение уравнения $yz_{xx} + z_{yy} = 0$, которое обращается в нуль на характеристике $x = (2/3)(-y)^{3/2}, y < 0$.

7. О положительности операторов дробного дифференцирования и континуального интегрирования порядка $[\alpha, \beta] \in [-1, 1]$. Пусть $\mathcal{A}_0^\alpha[1, b]$ – множество всех функций $u(x)$, имеющих абсолютно непрерывный на $[a, b]$ дробный интеграл порядка $1 - \alpha$ с началом в точке a и концом в точке x , который обращается в нуль при $x = a$. Справедлива

Теорема 4. Для любого $\alpha \in [0, 1]$ и любой функции $u(x) \in \mathcal{A}_0^\alpha[a, b]$ скалярное произведение $(u, D_{ax}^\alpha u)_0 \geq 0$ и $(u, D_{ax}^\alpha u)_0 = 0$ тогда и только тогда, когда $u = 0$.

Действительно, так как $D_{ax}^{\alpha-1} u \in \mathcal{A}_0^\alpha[a, b]$, то в силу теоремы Тамаркина [11, с. 574] существует и притом единственная функция $v(x) \in L[a, b]$ такая, что $u(x) = D_{ax}^{-\alpha} v$. Поэтому

$$(u, D_{ax}^\alpha u)_0 = (D_{ax}^{-\alpha} v, D_{ax}^\alpha D_{ax}^{-\alpha} v)_0 = (v, D_{ax}^{-\alpha} v)_0.$$

Отсюда и из оценки (46) нетрудно убедиться в положительности оператора D_{ax}^α . Пользуясь теоремой 4, можно доказать, что если $u \in \mathcal{A}_0^t[a, b]$ для всех $t \in [\alpha, \beta] \subset [0, 1]$, то $(u, D_{ax}^{[\alpha, \beta]} u)_0 \geq 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96-01-00-508).

Литература

1. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М., 1995.
2. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М., 1973.
3. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 2. М.–Л., 1951.
4. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, 1987.
5. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10, № 1. С. 100–111.

6. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. М., 1960.
7. Трикоми Ф. О линейных уравнениях смешанного типа. М.–Л., 1947.
8. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М., 1957.
9. Gellerstedt S. Sur un problème aux limites pour une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre de type mixte. Uppsala, 1935.
10. Смирнов В. И. Курс высшей математики. М.–Л., 1951. Т. 4.
11. Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М., 1966.
12. Нахушев А. М. Докл. АН СССР. 1988. Т. 300, № 4. С. 796–799.
13. Нахушев А. М. Об уравнениях состояния непрерывных одномерных систем и их приложения. Нальчик. 1995.
14. Михлин С. Г. Линейные уравнения в частных производных. М., 1977.
15. Вольterra В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. М., 1982.
16. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., 1977.
17. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 2. С. 313–324.

Поступила в редакцию
28 марта 1997 г.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и автоматизации
КБНЦ РАН

Об одной формуле обращения интегрального уравнения Абеля

Уравнение

$$D_{ax}^{[-\alpha, 0]}u = v(x), \quad a < x < \infty, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (1)$$

где $D_{ax}^{[-\alpha, 0]}u$ – оператор непрерывного интегрирования порядка $[-\alpha, 0]$ с началом в конечной точке a и с концом в точке $x \in]a, \infty[$ (см. [1]), назовем *непрерывным интегральным уравнением Абеля*.

Решение уравнения (1) будем искать в классе функций $u(x)$, абсолютно интегрируемых на полуоси $x \geq 0$. В этом классе уравнение (1) эквивалентно уравнению

$$\int_{-\alpha}^0 D_{ax}^t u dt = v(x), \quad a < x < \infty$$

или, что одно и то же, уравнению

$$\int_0^{\alpha} D_{ax}^{-t} u dt = v(x), \quad a < x < \infty.$$

Предполагается, что $v(x)$ непрерывно дифференцируема на всей оси x , кроме отдельных точек, в которых $v(x)$ и $v'(x)$ терпят разрыв

первого рода, причем на каждом конечном интервале оси x таких точек имеется лишь конечное число; $v(x) = 0$ для всех $x < 0$; $v(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ возрастает не быстрее показательной функции, т. е. существуют такие постоянные $k > 0$ и $x_0 \geq 0$, что

$$|v(x)| < k \exp(x_0 x). \quad (2)$$

Другими словами, правая часть $v(x)$ уравнения (1) является функцией-оригиналом преобразования Лапласа

$$\hat{v}(y) = \int_0^{\infty} v(x) \exp(-yx) dx. \quad (3)$$

Решение $u = u(x)$ будем искать как функцию-оригинал изображения

$$\hat{u}(y) = \int_0^{\infty} u(x) \exp(-yx) dx. \quad (4)$$

Хорошо известно, что для всякого оригинала $v(x)$ изображение $\hat{v}(x)$ определено в полуплоскости $\operatorname{Re} y > x_0$, где x_0 – показатель роста (1), и является в этой полуплоскости аналитической функцией комплексного переменного $y = y_1 + iy_2$. Известно также, что если $u(x)$ является оригиналом и $\hat{u}(y)$ служит ее изображением, то в любой точке своей непрерывности функция $u(x)$

$$u(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \hat{u}(y) \exp(yx) dy, \quad (5)$$

где интеграл берется вдоль любой прямой $\operatorname{Re} a > x_0$ и понимается в смысле главного значения [2, с. 402].

Найдем преобразование Лапласа функции-оригинала $D_{0x}^{-t}u$ для всех $t > 0$

$$\widehat{D_{0x}^{-t}u} = \frac{1}{\Gamma(t)} \int_0^{\infty} \int_0^y \frac{u(\tau) d\tau}{(y-\tau)^{1-t}} \exp(-yx) dx,$$

где $\Gamma(t)$ – гамма-функция Эйлера.

Отсюда на основании теоремы свертывания получим

$$\widehat{D_{0x}^{-t}u} = \frac{1}{\Gamma(t)} \hat{u}(y) \frac{\Gamma(t)}{y^t},$$

т. е.

$$\widehat{D_{0x}^{-t}u} = y^{-t} \hat{u}(y). \quad (6)$$

Теорема свертывания или теорема Бореля гласит: $\hat{u}_1 \cdot \hat{u}_2 = \widehat{u_1 * u_2}$, где свертка

$$u_1 * u_2 = \int_0^x u_1(\tau) u_2(x - \tau) d\tau.$$

Из (1), (3), (4) и (6) находим

$$\int_{-\alpha}^0 y^{-t} \hat{u}(y) dt = \hat{v}(y) \Rightarrow \frac{y^\alpha - 1}{\log y} \hat{u}(y) = \hat{v}(y).$$

Стало быть,

$$\hat{u}(y) = \frac{\hat{v}(y)}{y^\alpha - 1} \log y. \quad (7)$$

Подставляя $\hat{u}(y)$ из (7) в (5), приходим к следующей формуле обращения непрерывного интегрального уравнения Абеля

$$u(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\log y}{y^\alpha - 1} \hat{v}(y) \exp(yx) dy.$$

Литература

1. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 1. С. 101–109.
2. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексной переменной. М.–Л.: ГИТТЛ, 1951.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН

К вопросу информационно-математического моделирования межэтнических конфликтов и этногенеза

Математическому моделированию этнических процессов и явлений посвящены работы [1], [2]. Научный прогноз и управление процессом этнических отношений в период солнечной активности с целью предотвращения экстремальных ситуаций и напряжений являются актуальными. Система отношений между этносами, проживающими в одной среде обитания, является синергетической и, следовательно, при ее моделировании могут быть использованы методы синергетики [3] и нелинейного анализа.

Важнейшие характеристики этноса такие, например, как пассионарность [4], среднее время его жизни, умение координировать свои действия, динамика численности, субпассионарность, могут быть описаны на основе обобщенного логистического закона развития популяции. При определенной схематизации за уравнение динамики однородных этносов на стадии подъема можем выбрать широко известное в теории популяции дифференциальное уравнение Бернулли–Ферхюльста [5, с. 104]

$$N_1'(t) = \mu N_1(t) - \lambda N_1^\alpha(t), \quad (1)$$

где α , μ и λ – неотрицательные параметры, $N_1(t)$ – численность этноса E_1 в момент времени t .

Если на этнос E_1 действуют возмущения (со стороны, например, этноса E_2), интенсивность которых мала по сравнению с динамическими факторами, определяющими его эволюцию, то уравнение (1) можно заменить обобщенным уравнением Риккати

$$N_1'(t) = \mu N_1(t) - \lambda N_1^\alpha(t) + \varepsilon \xi(t), \quad (2)$$

где $\varepsilon > 0$ – некоторый малый параметр, характеризующий малость возмущений, $\xi(t)$ некоторые флуктуирующие силы, непрерывно меняющиеся с изменением времени [3, с. 34], [5, с. 104].

При реактивных акциях со стороны этноса E_2 величина ε в уравнении (2) может быть значительной и функцией времени t , и численности N_2 этноса E_2 .

Межэтнический конфликт, как правило, является следствием межпассионарного конфликта. Пусть $n_i = n_i(t)$ численность пассионариев и субпассионариев в этносе E_i , $i = 1, 2$. Тогда в качестве математической модели межэтнического конфликта можно принять систему:

$$n_1'(t) = (\mu_1 - \mu_{11}n_1 - \mu_{12}n_2)n_1, \quad n_2'(t) = (\mu_2 - \mu_{21}n_1 - \mu_{22}n_2)n_2, \quad (3)$$

где μ_i – скорость появления, $\lambda_i = \mu_{11}n_1 + \mu_{22}n_2$ – скорость изолирования пассионариев и субпассионариев в этносе E_i , $\|\mu_{ij}\| = \begin{vmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{21} & \mu_{22} \end{vmatrix}$ – матрица взаимодействия этносов. Когда этносы E_1 и E_2 имеют одинаковые размеры, уравнения входящие в систему (3) принимают вид (1).

Точка $\left(\frac{\mu_1\mu_{22} - \mu_2\mu_{12}}{\det\|\mu_{ij}\|}, \frac{\mu_2\mu_{11} - \mu_1\mu_{21}}{\det\|\mu_{ij}\|} \right)$ с $\det\|\mu_{ij}\| \neq 0$ является точкой равновесия системы [6, с. 196]. Равновесие устойчиво, когда $\det\|\mu_{ij}\| > 0$, и неустойчиво в противном случае.

В модели (3) непосредственно не участвует численность $n_i^i(t)$ гармоничных особей этноса E_i ($i = 1, 2$). Гармоничные особи, т. е. особи, пассионарный импульс которых равен по величине импульсу инстинкта

самосохранения, могут сыграть заметную (центристскую) роль в стабилизации межэтнического конфликта. Роль гармоничных особей в математической модели (3) межэтнического конфликта можно учесть осредненно через ее параметры.

Возрастание и падение солнечной активности происходит по кривой, напоминающей логистическую кривую [2]. Говоря словами Л. Н. Гумилева [4, с. 397], «мы можем классифицировать все этносы по степени возрастания и подъема пассионарного напряжения этнического поля». «Поскольку уровень пассионарности является врожденным признаком, присущим человеку на протяжении его жизни (см. [4, с. 402]), то при системно-историческом моделировании межэтнических конфликтов, всплеск пассионарности, выходящих из-под контроля разумной целесообразности, важную роль должен сыграть *импульс пассионарности* P этноса, как функция времени t . Вполне возможно, что *возрастание и затухание пассионарности этноса происходит, как и его социальная активность, по кривой близкой к логистической*. Тому подтверждение и «идеализированный ход функции P , характеризующий процесс этногенеза» (см. [4, с. 403]).

Пусть $N = N(t)$ – количество персон, составляющих этнос (этническую систему) E в момент времени t ; $\sigma = \sigma(t)$ – *пассионарное напряжение* или уровень пассионарного напряжения в E ; $\varepsilon = \varepsilon(t)$ – *количество имеющейся в E пассионарности*. Тогда в соответствии с определением Л. Н. Гумилева [4, с. 609] можно написать:

$$\varepsilon = N\sigma. \quad (4)$$

Здесь пассионарность как характеристика поведения означает «эффект избытка биохимической энергии живого вещества, порождающий жертвенность часто ради иллюзорной цели», а как энергия – представляет собой «избыток биохимической энергии живого вещества, обратный вектору инстинкта и определяющий способность к сверхнапряжению» [4, с. 608].

Формула (4) выражает линейную зависимость между ε и σ . Она *напоминает закон Гука*, устанавливающий в известных пределах зависимость между напряженным состоянием (σ) и деформацией (ε) упругой среды. Этот закон утверждает, что малая деформация среды пропорциональна приложенной к ней силе, т. е. тензор деформации ε является линейной функцией тензора напряжений σ .

На интуитивном уровне очевидно, что *не лишена здравого смысла интерпретация этноса E с малым ε как упругой биосреды*. При таком подходе *величину ε , характеризующую этнос E с пассионарным напряжением σ , можно назвать пассионарной деформацией* или просто деформацией, а *отношение $\sigma/\varepsilon = 1/N$ – мерой (или модулем) упругости этноса*.

С пассионарным напряжением σ тесно связан пассионарный импульс или пассионарный импульс поведения P , который означает поведенческий импульс, направленный против инстинкта личности и видового самосохранения.

Если следуя Гумилеву «мы примем за эталон импульс врожденного инстинкта самосохранения (1), индивидуального и видимого, то импульс пассионарности (P) будет иметь обратный знак».

Импульс инстинкта самосохранения $P = 1$. Особи этноса E называются соответственно гармоничными, субпассионариями и пассионариями в зависимости от того: $P = 1$, $P < 1$ и $P > 1$. Очевидно, что уровень пассионарного напряжения σ в этносе E определяется соотношением гармоничных, субпассионариев и пассионариев, а также их активным синергетического характера взаимодействием.

Как отмечает Л. Н. Гумилев [4, с. 397], «подавляющее число поступков, совершаемых людьми, диктуется инстинктом самосохранения либо личного, либо видового» и это проявляется в стремлении к размножению и воспитанию потомства.

Как и солнечная активность быстрому подъему пассионарного напряжения этнического поля отвечает, как правило, медленное его падение; действует, говоря словами Л. Н. Гумилева [4, с. 398], «схема – быстрый подъем пассионарности и медленная утрата действительна для всех известных нам этносов».

Следуя Л. Н. Гумилеву, можно считать, что «пусковой момент этногенеза подобен толчку, сообщающему этнической системе инерцию, утрачиваемую при сопротивлении среды».

Пусть μ – начало пускового момента. Тогда за математическую модель динамики пассионарного напряжения в этносе E на стадии подъема можно принять обобщенное логистическое уравнение

$$D_{\mu t}^{\alpha} \sigma^{1-m} = (1-m)[a(t)\sigma^{1-m} - b(t)], \quad (5)$$

где $0 < \alpha \leq 1$, $m = \text{const} \geq 0$, $a(t)$ и $b(t)$ – непрерывные и неотрицательные функции времени $t \geq \mu$, $D_{\mu t}^{\alpha}$ – оператор дробного дифференцирования по t порядка α с началом в момент времени μ [5, с. 28].

При $\alpha = 1$, $m = 2$ уравнение (5) переходит в логистическое уравнение

$$\sigma' = a\sigma - b\sigma^2, \quad t \geq \mu. \quad (6)$$

Пусть a и b не зависят от времени и $a \neq 0$. Тогда любое решение $\sigma = \sigma(t)$ уравнения (6) представимо в виде

$$\frac{1}{\sigma(t)} = \frac{1}{\sigma(\mu)} e^{a(\mu-t)} + \frac{b}{a} [1 - e^{a(\mu-t)}]. \quad (7)$$

Как видно из (7): *пассионарное напряжение σ сначала растет очень быстро, стремясь по S-образной кривой выйти на устойчивое состояние $b/a = \lim_{t \rightarrow +\infty} \sigma(t)$; пассионарное напряжение не может расти бесконечно, оно ограничено сверху величиной b/a .*

Этнос является системой с памятью. Поэтому *реалии* будут более адекватны следующие математические модели динамического взаимодействия пассионарного напряжения $\sigma(t)$ с количеством имеющейся в этносе E пассионарности $\varepsilon(t)$:

$$\sigma(t) + b_\alpha D_{\mu t}^\alpha \sigma = N^0 \varepsilon(t) + N^1 D_{\mu t}^\beta \varepsilon(t), \quad (8)$$

$$\sigma(t) + b_\alpha \int_0^1 D_{\mu t}^\xi \sigma d\xi = N^0 \varepsilon(t) + N^1 \int_0^1 D_{\mu t}^\xi \varepsilon d\xi. \quad (9)$$

Здесь b_α , N^0 , N^1 , α , β – неотрицательные параметры, характеризующие этнос E , $0 < \alpha \leq 1$, $0 < \beta \leq 1$.

Можно воспользоваться и более простыми чем (8) и (9) «реологическими» уравнениями состояния [7, с. 31]:

$$\sigma(t) = N^1 \int_0^1 D_{\mu t}^\xi \varepsilon d\xi, \quad (10)$$

$$\varepsilon(t) = N(t) \int_0^1 D_{\mu t}^{-\xi} \sigma d\xi, \quad (11)$$

$$\sigma(t) + \tau \int_0^1 D_{\mu t}^\xi \varepsilon d\xi = \tau N^1 \int_0^1 D_{\mu t}^\xi \tau d\xi, \quad (12)$$

где τ – «время релаксации» пассионарного напряжения.

Математические модели (10), (11) и (12) в определенном смысле являются континуальными аналогами закона Гука, обобщенного закона высокоэластической деформации и закона Максвелла [7, с. 31]. Модели (10) и (11) являются однопараметрическими и поэтому их идентификация для выбранного этноса (например, адыгского) не вызовет принципиальных затруднений.

Если количество имеющейся в E пассионарности не меняется на временном сегменте $\mu \leq t \leq T$, т. е. если $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 = \text{const}$, то из (11) получим

$$\sigma(t) = N^1 \varepsilon_0 \int_0^1 D_{\mu t}^\xi 1 d\xi. \quad (13)$$

По определению

$$D_{\mu t}^{\xi} 1 = \frac{\partial}{\partial t} D_{\mu t}^{\xi-1} 1 = \frac{1}{\Gamma(1-\xi)} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mu}^t \frac{dz}{(t-z)^{\xi}} = \frac{1}{\Gamma(1-\xi)} (t-\mu)^{-\xi}, \quad (14)$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция Эйлера [5, с. 25].

В соответствии с (14) из (13) получаем:

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 N^1 \int_0^1 \frac{(t-\mu)^{-\xi}}{\Gamma(1-\xi)} d\xi = \frac{\varepsilon_0 N^1}{t-\mu} \int_0^1 \frac{(t-\mu)^{1-\xi}}{\Gamma(1-\xi)} d\xi = \frac{\varepsilon_0 N^1}{t-\mu} \int_0^1 \frac{(t-\mu)^y}{\Gamma(y)} dy.$$

Следовательно

$$(t-\mu)\sigma(t) = \varepsilon_0 N^1 V_i(0, 1, t-\mu), \quad (15)$$

где

$$V_i(\alpha, \beta, x) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{x^y dy}{\Gamma(y)}, \quad 0 \leq \alpha < \beta \quad (16)$$

– специальная функция, введенная А. М. Нахушевым [7, с. 16].

Аналитическая функция $\varphi(x) = 1/\Gamma(x)$ на сегменте $0 \leq x \leq 1$ монотонно возрастает со своего минимального на $[0, 1]$ значения $\varphi(0) = 0$ до максимального $\varphi(1) = 1$. Поэтому на основании второй обобщенной теоремы о среднем значении для интегралов [8, с. 108] существует такое число $\delta > 0$ и < 1 , что

$$\int_0^1 \varphi(x) z^x dx = \int_{\delta}^1 z^x dx = 1 - z^{\delta} / \log z.$$

Отсюда, в силу определения (16) имеем

$$V_i(0, 1, x) = 1 - x^{\delta} / \log x. \quad (17)$$

Из (16) и (17) заключаем: *существует такое число $\delta > 0$ и < 1 , что*

$$\sigma(t) = \frac{\varepsilon_0 N^1}{t-\mu} \left[\frac{1 - (t-\mu)^{\delta}}{\log(t-\mu)} \right]. \quad (18)$$

Как видно из (18)

$$\lim_{t \rightarrow \mu} (t-\mu)\sigma(t) = \varepsilon_0 N^1, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \sigma(t) = 0.$$

А это означает, что в рамках гипотезы (15) *пассионарное напряжение в этносе E , став в начале пускового момента этногенеза значительным по величине, не исчезает за конечное время, хотя по утверждению*

Л. Н. Гумилева [4, с. 238] «этногенез длится от 1100 до 1500 лет, если их не нарушают экзогенные воздействия, например, геноцид при вторжении иноплеменников или эпидемии».

Л. Н. Гумилев [4, с. 403] писал: «Будь у нас возможность измерить величину P и выразить данную величину численно, в этом случае можно было бы просто построить кривую изменения пассионарного напряжения, а затем найти уравнение, описывающее кривую математически».

Чтобы как-то приблизиться к решению этой проблемы можно предположить, что *импульс пассионарности* $P(t)$ является непрерывно дифференцируемой функцией и связан с *пассионарным напряжением* $\sigma(t)$ линейно с коэффициентом пропорциональности k :

$$P(t) = k[\sigma(t) - \sigma(0)]. \quad (19)$$

Из (19) и идеализированного хода функции $P = P(t)$, характеризующего процесс этногенеза по Л. Гумилеву (см. [4, с. 403, рис. 3] и рис. 1), видно, что пассионарный импульс в начальный момент времени $t = 0$ имеет минимальное (нулевое) значение $P(0) = 0$, весьма быстро (поднимаясь по S -образной кривой близкой к логистической) достигает в некоторый момент времени $t = t_*$ максимальное значение $P_* = P(t_*)$, а затем медленно по кривой похожей на логистическую опускается вниз, стремясь выйти на более или менее устойчивое состояние.

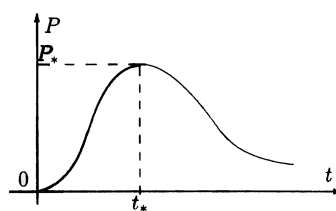


Рис. 1

Поскольку $P'(t_*) = 0$, то в силу (14) и $\sigma'(t_*) = 0$. Описанные на содержательном уровне свойства импульса пассионарности позволяют нам утверждать, что связь (19) вполне возможная, если пассионарное напряжение меняется по кусочно-логистическому закону:

$$\sigma'(t) = \begin{cases} (t_* - t)^m [\lambda_{11} - \lambda_{12}\sigma(t)]\sigma(t), & 0 \leq t \leq t_*, \\ (t - t_*)^m [-\lambda_{21} - \lambda_{22}\sigma(t)]\sigma(t), & t \geq t_*. \end{cases}$$

Здесь $m = \text{const} > 0$, $\lambda_{i,j}$ ($i = 1, 2$) – неотрицательные и независимые от времени параметры, характеризующие в среднем этнос и среду его обитания.

Литература

1. Аниконов Ю. А. ДАН. 1995. Т. 345, № 1. С. 7–9.
2. Нахушев А. М., Кенетова Р. О. Моделирование социально-исторических и этнических процессов. Нальчик: Эль-Фа, 1998. 179 с.
3. Хакен Г. Синергетика. М.: Мир, 1985. 326 с.
4. Гумилев Л. А. Этногенез и биосфера Земли. М.: Танаис ДИ-ДИК, 1994. 544 с.

5. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М.: Высш. шк., 1995. 301 с.
6. Бейли Н. Математика в биологии и медицине. М.: Мир, 1970. 326 с.
7. Нахушев А. М. Об уравнениях состояния непрерывных одномерных систем и их приложениях. Нальчик-Майкоп: Логос, 1995. 50 с.
8. Берс Л. Математический анализ. Т. II. М.: Высш. шк., 1975. 544 с.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН

Дробный интеграл Мегуми Сайго и его связь с законом взвешенной композиции операторов дробного интегрирования в смысле Римана–Лиувилля

Пусть $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера, $F(a, b, c; z)$ – гипергеометрическая функция Гаусса, $\alpha > 0$, β и γ – действительные числа.

Образ $I_{0x}^{\alpha, \beta, \gamma} \varphi$ функции $\varphi(x)$, которая определена в интервале $0 < x < r$, при отображении

$$I_{0x}^{\alpha, \beta, \gamma} \varphi = \frac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} F(\alpha+\beta, -\gamma, \alpha; 1-t/x) \varphi(t) dt. \quad (1)$$

М. Saigo [1] (см. также [2, с. 33], [3], [4]) назвал дробным интегралом порядка α от функции $\varphi(x)$.

Из определения (1) при $\alpha + \beta = 0$ и равенства $F(0, b, c; z) = 1$ для любой функции $\varphi(x) \in L[0, r]$ получаем

$$I_{0x}^{\alpha, -\alpha, \gamma} \varphi = D_{0x}^{-\alpha} \varphi(t) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \varphi(t) dt, \quad (2)$$

где символ $D_{0x}^{-\alpha}$ – означает оператор дробного (в смысле Римана–Лиувилля) интегрирования порядка α с началом в точке 0 и с концом в точке $x > 0$.

Через $L^{\mu, \nu}[0, r]$ обозначим пространство функций $\varphi(x)$ с конечной нормой

$$\|\varphi\|_{\mu, \nu} = \int_0^r x^{\mu} \log^{\nu} \left(\frac{1}{x} \right) |\varphi(x)| dx.$$

Функция $F(\alpha + \beta, -\gamma, \alpha; 1 - t/x)$ при $x > 0$ и $t \rightarrow 0$ ограничена, если $\beta < \gamma$ обращается в бесконечность логарифмического порядка

при $\beta = \gamma$ и в бесконечность порядка $\beta - \gamma$, если $\beta > \gamma$. Поэтому функция $\varphi(x)$ будет принадлежать области определения оператора $I_{0x}^{\alpha, \beta, \gamma}$, если $\varphi(x) \in L^{0,0}[0, r] = L[0, r]$ при $\beta < \gamma$, $\varphi(x) \in L^{0,1}[0, r]$ при $\beta = \gamma$ и $\varphi(x) \in L^{\gamma-\beta, 0}[0, r]$, когда $\beta > \gamma$.

Справедлива следующая

Теорема. Пусть $\alpha + \beta < 1$, $\gamma < 0$, $\alpha > -\gamma$;

$$\varphi(x) \in \begin{cases} L[0, r] & \text{при } \beta < \gamma, \\ L^{0,1}[0, r] & \text{при } \beta = \gamma, \\ L^{\gamma-\beta, 0}[0, r] & \text{при } \beta > \gamma. \end{cases}$$

Тогда

$$I_{0x}^{\alpha, \beta, \gamma} \varphi = D_{0x}^{\gamma} t^{-\alpha-\beta} D_{0t}^{-\alpha-\gamma} \varphi(\xi). \quad (3)$$

Действительно, в силу (2)

$$D_{0x}^{\gamma} t^{-\alpha-\beta} D_{0t}^{-\alpha-\gamma} \varphi(\xi) = \frac{1}{\Gamma(-\gamma)\Gamma(\alpha+\gamma)} \int_0^x \frac{t^{-\alpha-\beta} dt}{(x-t)^{1+\gamma}} \int_0^t \frac{\varphi(\xi) d\xi}{(t-\xi)^{1-\alpha-\gamma}}. \quad (4)$$

Формула Дирихле перестановки порядка интегрирования дает основания записать

$$\begin{aligned} \Phi(x) &\equiv \int_0^x \frac{t^{-\alpha-\beta} dt}{(x-t)^{1+\gamma}} \int_0^t \frac{\varphi(\xi) d\xi}{(t-\xi)^{1-\alpha-\gamma}} = \\ &= \int_0^x \varphi(\xi) d\xi \int_{\xi}^x (x-t)^{-\gamma-1} (t-\xi)^{\alpha+\gamma-1} t^{-\alpha-\beta} dt. \end{aligned} \quad (5)$$

Во внутреннем интеграле произведем замену переменной интегрирования по формуле $t = x - (x - \xi)\eta$. В результате будем иметь

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= x^{-\alpha-\beta} \int_0^x \varphi(\xi) (x-\xi)^{-\alpha-1} d\xi \times \\ &\times \int_0^1 \eta^{-\gamma-1} (1-\eta)^{\alpha+\gamma-1} \left(1 - \frac{x-\xi}{x} \eta\right)^{-\alpha-\beta} d\eta. \end{aligned} \quad (6)$$

Так как $\alpha + \gamma > 0$, то можно воспользоваться формулой Эйлера и придать равенству (6) следующий вид:

$$\Phi(x) = x^{-\alpha-\beta} B(-\gamma, \alpha+\gamma) \int_0^x \varphi(\xi) (x-\xi)^{-\alpha-1} F\left(\alpha+\beta, -\gamma, \alpha; 1 - \frac{\xi}{x}\right) d\xi, \quad (7)$$

где $B(x, y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$ – бета-функция.

Из (4), (6) и (7) заключаем, что

$$D_{0x}^{\gamma} t^{-\alpha-\beta} D_{0t}^{-\alpha-\gamma} \varphi(\xi) = \frac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-\xi)^{\alpha-1} F\left(\alpha+\beta, -\gamma, \alpha; 1-\frac{\xi}{x}\right) \varphi(\xi) d\xi.$$

Отсюда в соответствии с (1) получаем (3).

Рассмотрим уравнение

$$I_{0x}^{\alpha,\beta,\gamma} \varphi = \psi(x), \quad (8)$$

где $\alpha + \beta < 1$, $\gamma < 0$, $\alpha + \gamma > 0$.

В силу теоремы уравнение (8) эквивалентно уравнению

$$D_{0x}^{\gamma} t^{-\alpha-\beta} D_{0t}^{-\alpha-\gamma} \varphi(\xi) = \psi(x). \quad (9)$$

Пусть $n-1 < -\gamma \leq n$, $n = 1, 2, \dots$. Для того, чтобы уравнение (9) с правой частью $\psi(x) \in L[0, r]$ имело решение $\varphi(x)$ такое, что

$$x^{-\alpha-\beta} D_{0x}^{-\alpha-\gamma} \varphi(\xi) \in L[0, r], \quad (10)$$

необходимо и достаточно выполнение следующих двух условий: функция $D_{0x}^{-\gamma-n} \psi(t)$ абсолютно непрерывна на $[0, r]$, т. е.

$$D_{0x}^{-\gamma-n} \psi(t) \in AC[0, r]; \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} D_{0x}^{-\gamma-n} \psi(t) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial^k}{\partial x^k} D_{0x}^{-\gamma-n} \psi(t) = 0 \quad (12)$$

при $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Если выполнены условия (11) и (12), то решение уравнения (9) из класса (10) почти всюду на $[0, r]$ удовлетворяет уравнению

$$D_{0x}^{-\alpha-\gamma} \varphi(t) = x^{\alpha+\beta} D_{0x}^{-\gamma} \psi(t). \quad (13)$$

Пусть $m-1 < \alpha + \gamma \leq m$, $m = 1, 2, \dots$, $x^{\alpha+\beta} D_{0x}^{-\gamma} \psi(t) \in L[0, r]$.

Интегральное уравнение Абеля (13) разрешимо в $L[0, r]$ тогда и только тогда, когда

$$D_{0x}^{\alpha+\gamma-m} t^{\alpha+\beta} D_{0t}^{-\gamma} \psi(\xi) \in AC[0, r], \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} D_{0x}^{\alpha+\gamma-m} t^{\alpha+\beta} D_{0t}^{-\gamma} \psi(\xi) = 0, \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial^k}{\partial x^k} D_{0x}^{\alpha+\gamma-m} t^{\alpha+\beta} D_{0t}^{-\gamma} \psi(\xi) = 0.$$

Если выполнены условия (14) и (15), то решение уравнения (13) единственно и почти всюду на $[0, r]$ представимо в виде

$$\varphi(x) = D_{0x}^{\alpha+\gamma} t^{\alpha+\beta} D_{0t}^{-\gamma} \psi(\xi). \quad (16)$$

Пусть $0 < \alpha + \gamma < 1$, $0 < -\gamma < 1$. Тогда формулу обращения (16) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{\partial}{\partial x} D_{0x}^{\alpha+\gamma-1} t^{\alpha+\beta} \frac{\partial}{\partial t} D_{0t}^{-\gamma-1} \psi(\xi) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha-\gamma)\Gamma(1+\gamma)} \int_0^x \frac{t^{\alpha+\beta} dt}{(x-t)^{\alpha+\gamma}} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{\psi(\xi) d\xi}{(t-\xi)^{-\gamma}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Для любой абсолютно непрерывной на $[0, r]$ функции $\psi(x)$, обращающейся в нуль при $x = 0$, справедлива формула

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^x \frac{\psi(\xi) d\xi}{(x-\xi)^{-\gamma}} = \int_0^x \psi'(\xi) (x-\xi)^{\gamma} d\xi. \quad (18)$$

При выполнении условия (18) из (17) имеем

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha-\gamma)\Gamma(1+\gamma)} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^x \frac{t^{\alpha+\beta} dt}{(x-t)^{\alpha+\gamma}} \int_0^t \frac{\psi'(\xi) d\xi}{(t-\xi)^{-\gamma}}.$$

Отсюда, после перестановки порядка интегрирования и замены $t = x - (x - \xi)\eta$, получаем

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha-\gamma)\Gamma(1+\gamma)} \frac{\partial}{\partial x} x^{\alpha+\beta} \int_0^x \psi'(\xi) (x-\xi)^{1-\alpha} d\xi \times \\ &\quad \times \int_0^1 \eta^{-\alpha-\gamma} (1-\eta)^{\gamma} \left(1 - \frac{x-\xi}{x} \eta\right)^{\alpha+\beta} d\eta = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{x^{\alpha+\beta}}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^x (x-\xi)^{1-\alpha} F\left(-\alpha-\beta, 1-\alpha-\gamma, 2-\alpha; 1-\frac{\xi}{x}\right) \psi'(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (19)$$

Из (19) согласно (1) имеем

$$\varphi(x) = \frac{\partial}{\partial x} I_{0x}^{2-\alpha, -\beta-2, \gamma+\alpha-1} \psi'. \quad (20)$$

Уравнение (8) можно переписать в виде

$$H_{0x}^{\alpha+\beta, -\gamma, \alpha} \varphi = x^{\alpha+\beta} \psi(x),$$

где оператор $H_{0x}^{a,b,c}$ с параметром $c > 0$ действует на $\varphi(x) \in L[0, r]$ по формуле

$$H_{0x}^{a,b,c} \varphi = \frac{1}{\Gamma(c)} \int_0^x (x-t)^{c-1} F\left(a, b, c; 1 - \frac{t}{x}\right) \varphi dt.$$

Это утверждение является тривиальным следствием известной связи [2, с. 33] между оператором $H_{0x}^{a,b,c}$ и обобщенными преобразованиями Эрдейи–Кобе и Сайго.

В заключение отметим, что формулы (3), (16) и (20) играют важную роль при исследовании краевых задач со смещением (по терминологии А. М. Нахушева) для вырождающихся уравнений в частных производных, когда граничные условия задаются операторами дробного интегрирования и дифференцирования в обобщенном смысле, в особенности по М. Сайго. К такого типа задачам относятся задачи с локальным и нелокальным смещением, которые были объектом анализа в работах [1], [3–9].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 00-01-00311).

Литература

1. Saigo M. A remark on integral operators involving the Gauss hypergeometric functions // Math. Rep. of College of General Education. Kyushu Un. 1978. Vol. XI, no. 2. Pp. 135–143.
2. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М.: Высш. шк., 1995. 301 с.
3. Saigo M. A certain boundary value problem for the Euler–Darboux equation II // Math. Japon. 25. 1979. No. 2. Pp. 211–220.
4. Saigo M. A certain boundary value problem for the Euler–Darboux equation III // Math. Japon. 25. 1981. No. 1. Pp. 103–119.
5. Saigo M. Repin O. A., Kilbas A. A. On a non-local boundary value problem for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type // Int. J. Math. Stat. Sci. 1996. Vol. 5, no. 1. Pp. 103–117.
6. Репин О. А. О задаче Гурса для нагруженного уравнения Геллерстедта // Труды второго Международного семинара «Дифференциальные уравнения и их приложения». Самара, 1998. С. 133–139.
7. Kilbas A. A., Repin O. A., Saigo M. Solution in closed form of boundary value problem for degenerate equation of hyperbolic type // Kyungpook Mathematical Journal. 1996. Vol. 36, no. 2. Pp. 261–273.
8. Репин О. А. Нелокальная краевая задача для одного вырождающегося гиперболического уравнения // ДАН. 1994. Т. 335, № 3. С. 295–296.
9. Килбас А. А., Репин О. А. Задача со смещением для парабола-гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 6. С. 799–805.

Видоизмененная задача Коши для оператора дробного дифференцирования с фиксированными началом и концом

Задача со смещением для уравнения Геллерстедта

$$\operatorname{sign} y \cdot |y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad a < x < b$$

с нелокальным краевым условием

$$\frac{d^k}{dx^k} \{ (x-a)^\beta D_{ax}^{1-\beta} u[\Theta_a(x)] - (b-x)^\beta D_{bx}^{1-\beta} u[\Theta_b(x)] \} = \gamma(x),$$

где $\beta = m/(2m+4)$, в силу теоремы 5.4.1 работы [1, с. 225] приводит к уравнению вида

$$I_{ab}^\alpha u[x] \equiv (D_{ax}^\alpha - D_{bx}^\alpha)u[x] = \delta(x).$$

Здесь I_{ab}^α – оператор дробного дифференцирования порядка α с фиксированными началом a и концом b [1, с. 33].

Настоящая работа является продолжением исследования, начатого в [2], и в ней изучается видоизмененная задача Коши для оператора I_{ab}^α .

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} I_{ab}^{\alpha-1} u(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad I_{ab}^\alpha u(x) = 0. \quad (1)$$

Общее решение уравнения (1) имеет вид

$$u(x) = [(x-a)(b-x)]^{(\alpha-1)/2} B_0, \quad (2)$$

где B_0 – произвольная постоянная.

Из (2) видно, что задача Коши в видоизмененной постановке

$$\lim_{x \rightarrow a} (x-a)^{(1-\alpha)/2} u(x) = u_a, \quad (3)$$

или $\lim_{x \rightarrow b} (b-x)^{(1-\alpha)/2} u(x) = u_b$, где u_a и u_b – заданные числа, для уравнения (1) однозначно разрешима.

Решение $u(x)$ видоизмененной задачи Коши (3) для уравнения $I_{ab}^\alpha u(x) = v(x)$ при $0 < \alpha < 1$ в соответствии с (2), если оно существует, представимо в виде

$$\begin{aligned} u(x) = & u_a \left[\frac{(x-a)(b-x)}{b-a} \right]^{(\alpha-1)/2} + \\ & + \frac{1}{2} D_{ax}^{-\alpha} v - \frac{1}{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\alpha\pi}{2} D_{ax}^{1-\alpha} [(t-a)(b-t)]^{(1-\alpha)/2} V_\alpha(t), \end{aligned} \quad (4)$$

$$V_\alpha(t) = \int_a^b [(\tau - a)(b - \tau)]^{(\alpha-1)/2} (\tau - t)^{-1} D_{a\tau}^{-1} v d\tau$$

и предполагается, что $D_{ax}^{-1}v = \varphi(x)[(x - a)(b - x)]^{\delta-\alpha}$, а $\varphi(x)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $h > 1 - \alpha$.

Нетрудно заметить, что

$$V_\alpha(t) = \varphi(t)S_a^b(\mu, \mu; t) + \Phi_a^b(\mu, \mu; t), \quad (5)$$

$$S_a^b(\nu, \mu; x) = \int_a^b (\tau - a)^{\nu-1} (b - \tau)^{\mu-1} (\tau - x)^{-1} d\tau, \quad \mu = \delta + \frac{1-\alpha}{2} > 0, \quad (6)$$

$$\Phi_a^b(\nu, \mu; t) = \int_a^b (\tau - a)^{\nu-1} (b - \tau)^{\mu-1} (\tau - t)^{-1} (\varphi(\tau) - \varphi(t)) d\tau. \quad (7)$$

При $\nu = \mu \neq 1, 2, \dots$ формулу (6) можно переписать в виде равенств

$$\begin{aligned} S_a^b(\mu, \mu; t) &= -\pi \operatorname{ctg}(\mu\pi) [(t - a)(b - t)]^{\mu-1} + \\ &+ B(\mu, \mu - 1)(b - t)^{\mu-1} (b - a)^{\mu-1} F\left(1 - \mu, \mu, 2 - \mu; \frac{t - a}{b - a}\right), \\ S_a^b(\mu, \mu; t) &= \pi \operatorname{ctg}(\mu\pi) [(t - a)(b - t)]^{\mu-1} - \\ &- B(\mu - 1, \mu)(b - a)^{2\mu-2} F\left(2 - 2\mu, 1, 2 - \mu; \frac{b - t}{b - a}\right), \end{aligned}$$

которые дают нам основания утверждать, что

$$\lim_{t \rightarrow a} \{S_a^b(\mu, \mu; t) + \pi \operatorname{ctg}(\mu\pi) [(t - a)(b - t)]^{\mu-1}\} = B(\mu, \mu - 1)(b - a)^{2\mu-2}, \quad (8)$$

$$\lim_{t \rightarrow b} \{S_a^b(\mu, \mu; t) - \pi \operatorname{ctg}(\mu\pi) [(t - a)(b - t)]^{\mu-1}\} = -B(\mu, \mu - 1)(b - a)^{2\mu-2}. \quad (9)$$

Пусть $\mu = 1/2 + k$, $k = 0, 1, \dots$, тогда из (8) и (9) имеем

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow a} S_a^b(\mu, \mu; t) &= B(\mu, \mu - 1)(b - a)^{2\mu-2}, \\ \lim_{t \rightarrow b} S_a^b(\mu, \mu; t) &= -B(\mu, \mu - 1)(b - a)^{2\mu-2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Итак, если $0 < \mu < 1$, то

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow a} (t - a)^{1-\mu} S_a^b(\mu, \mu; t) &= -\pi \operatorname{ctg}(\mu\pi) (b - a)^{\mu-1}, \\ \lim_{t \rightarrow b} (b - t)^{1-\mu} S_a^b(\mu, \mu; t) &= \pi \operatorname{ctg}(\mu\pi) (b - a)^{\mu-1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Если же $1 < \mu \neq 2, 3, \dots$, то

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow a} S_a^b(\mu, \mu; t) &= B(\mu, \mu - 1)(b - a)^{2\mu-2}, \\ \lim_{t \rightarrow b} S_a^b(\mu, \mu; t) &= -B(\mu, \mu - 1)(b - a)^{2\mu-2},\end{aligned}\quad (12)$$

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow a} [S_a^b(1, 1; t) + \ln(t - a)] &= \ln(b - a), \\ \lim_{t \rightarrow b} [S_a^b(1, 1; t) - \ln(b - t)] &= -\ln(b - a).\end{aligned}\quad (13)$$

Как видно из (12),

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow a} S_a^b(2, 2; t) &= (b - a)^2/2, \\ \lim_{t \rightarrow b} S_a^b(2, 2; t) &= \frac{(b - a)^2}{2} + (b - a)^2 F_*(0, 1, 2; 1).\end{aligned}\quad (14)$$

Так как

$$F_*(0, 1, 2; 1) = \int_0^1 \ln(1 - t) dt = -1,$$

то

$$\lim_{t \rightarrow b} S_a^b(2, 2; t) = -\frac{(b - a)^2}{2}.\quad (15)$$

При $\nu = \mu = 3, 4, \dots$ можно записать

$$S_a^b(\mu, \mu; x) = (x - a)^{\mu-1} S_a^b(1, \mu; x) + \sum_{j=0}^{\mu-2} \binom{\mu-1}{j} (x - a)^j R_j^\mu(x),\quad (16)$$

где

$$R_j^\mu(x) = \int_a^b (t - x)^{\mu-2-j} (b - t)^{\mu-1} dt.$$

Поскольку для всех $j \leq \mu - 2$ имеем

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} R_j^\mu(x) &= R_j^\mu(a) = \int_a^b (t - a)^{\mu-2-j} (b - t)^{\mu-1} dt = \\ &= (b - a)^{2\mu-2-j} \int_0^1 \tau^{\mu-2-j} (1 - \tau)^{\mu-1} d\tau, \\ \lim_{x \rightarrow b} R_j^\mu(x) &= R_j^\mu(b) = \int_a^b (-1)^{\mu-2-j} (b - t)^{2\mu-3-j} dt,\end{aligned}$$

то справедливы представления

$$R_j^\mu(a) = (b-a)^{2\mu-2-j} B(\mu-1-j, \mu),$$

$$R_j^\mu(b) = (-1)^{\mu-j} (2\mu-2-j)^{-1} (b-a)^{2\mu-2-j}.$$

Последние формулы и (16) подтверждают, что для всех $\mu = 3, 4, \dots$

$$\lim_{x \rightarrow a} S_a^b(\mu, \mu; x) = B(\mu-1, \mu)(b-a)^{2\mu-2}, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow b} S_a^b(\mu, \mu; x) &= (b-a)^{\mu-1} \lim_{x \rightarrow b} S_a^b(1, \mu; x) + \\ &+ (b-a)^{2\mu-2} \sum_{j=0}^{\mu-2} \binom{\mu-1}{j} \frac{(-1)^{\mu-j}}{2\mu-2-j}. \end{aligned} \quad (18)$$

В силу (6)

$$\lim_{x \rightarrow b} S_a^b(1, \mu; x) = (\mu-1)(b-a)^{\mu-1} F_*(2-\mu, 1, 2; 1),$$

а поскольку, согласно определению,

$$F_*(2-\mu, 1, 2; 1) = \int_0^1 (1-t)^{\mu-2} \ln(1-t) dt = -(\mu-1)^{-2},$$

следовательно, для всех $\mu = 3, 4, \dots$

$$(\mu-1) \lim_{x \rightarrow b} S_a^b(1, \mu; x) = -(b-a)^{\mu-1}. \quad (19)$$

Далее очевидно, что

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\mu-1} - \sum_{j=0}^{\mu-2} \binom{\mu-1}{j} \frac{(-1)^{\mu-j}}{2\mu-2-j} = \\ &= \sum_{j=0}^{\mu-1} \binom{\mu-1}{j} \frac{(-1)^{\mu-1-j}}{2\mu-2-j} = B(\mu-1, \mu), \end{aligned} \quad (20)$$

ибо

$$B(\mu-1, \mu) = \int_0^1 t^{\mu-2} (1-t)^{\mu-1} dt = \sum_{j=0}^{\mu-1} \binom{\mu-1}{j} (-1)^{\mu-1-j} \int_0^1 t^{2\mu-3-j} dt.$$

Поэтому из равенств (18)–(20) заключаем, что

$$\lim_{x \rightarrow b} S_a^b(\mu, \mu; x) = -B(\mu-1, \mu)(b-a)^{2\mu-2}, \quad \mu = 3, 4, \dots$$

Отсюда и из формул (8)–(15), (17) вытекает

Лемма 1. Пусть $\mu > 0$, $a = a_1$, $b = a_2$. Тогда для всех $\mu > 1$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a_i} \{S_a^b(\mu, \mu; x) + (-1)^{i+1} \pi [(x-a)(b-x)]^{\mu-1} \operatorname{ctg}(\mu\pi)\} = \\ = (-1)^{i+1} B(\mu, \mu-1)(b-a)^{2\mu-2}; \\ \lim_{x \rightarrow a_i} [S_a^b(1, 1; x) + (-1)^{i+1} \ln|x-a_i|] = (-1)^{i+1} \ln(b-a) \quad \text{при } \mu = 1; \end{aligned}$$

если $0 < \mu < 1$, то

$$\lim_{x \rightarrow a_i} |x-a_i|^{1-\mu} S_a^b(\mu, \mu; x) = (-1)^i \pi \operatorname{ctg}(\mu\pi)(b-a)^{\mu-1}.$$

Вернемся к (4) и изучим поведение решения $u(x)$ вблизи особых точек a и b . Из формулы (7), поскольку $|\varphi(\tau) - \varphi(x)| \leq C|x-\tau|^h$, где C – постоянная Гельдера, а h – показатель Гельдера, получаем

$$|\Phi_a^b(\mu, \mu; x)| \leq C \int_a^b [(t-a)(b-t)]^{\mu-1} |x-t|^{h-1} dt. \quad (21)$$

Если $\mu \geq 1$, то из (21) видно, что функция Φ_a^b имеет конечные пределы при $x \rightarrow a$ или b . Допустим, что $0 < \mu < 1$, поэтому в силу (6) $\delta < (\alpha+1)/2$. Непосредственным вычислением нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} M_a^b(\mu, h; x) &= \int_a^b [(t-a)(b-t)]^{\mu-1} |x-t|^{h-1} dt = \\ &= \int_a^x [(t-a)(b-t)]^{\mu-1} (x-t)^{h-1} dt + \int_x^b [(t-a)(b-t)]^{\mu-1} (t-x)^{h-1} dt = \\ &= (x-a)^{\mu+h-1} \int_0^1 \tau^{\mu-1} (1-\tau)^{h-1} (b-a)^{\mu-1} \left(1 - \frac{\tau(x-a)}{b-a}\right)^{\mu-1} d\tau + \\ &\quad + (b-x)^{\mu+h-1} \int_0^1 \tau^{\mu-1} (1-\tau)^{h-1} (b-a)^{\mu-1} \left(1 - \frac{\tau(b-x)}{b-a}\right)^{\mu-1} d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что

$$\begin{aligned} M_a^b(\mu, h; x) &= (b-a)^{\mu-1} B(\mu, h) [(x-a)^{\mu+h-1} F\left(1-\mu, \mu, \mu+h; \frac{x-a}{b-a}\right) + \\ &\quad + (b-x)^{\mu+h-1} F\left(1-\mu, \mu, \mu+h; \frac{b-x}{b-a}\right)]. \end{aligned} \quad (22)$$

Далее нам потребуется известная [3, с. 294] формула

$$\lim_{z \rightarrow +1} F(\alpha, \beta, \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)}, \quad \operatorname{Re}(\gamma - \alpha - \beta) > 0. \quad (23)$$

Из (22) и (23) следует, что если $1 - h < \mu < 1$, то

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} M_a^b(\mu, h; x) &= (b - a)^{2\mu+h-2} B(\mu, h) \frac{\Gamma(\mu + h)\Gamma(\mu + h - 1)}{\Gamma(2\mu + h - 1)\Gamma(h)} = \\ &= (b - a)^{2\mu+h-2} B(\mu, h + \mu - 1), \\ \lim_{x \rightarrow b} M_a^b(\mu, h; x) &= (b - a)^{2\mu+h-2} B(\mu, h + \mu - 1). \end{aligned} \quad (24)$$

Если же $0 < \mu < 1 - h$, то, согласно равенству

$$F(1 - \mu, \mu, \mu + h; z) = (1 - z)^{\mu+h-1} F(2\mu + h - 1, h, \mu + h; z),$$

формула (22) принимает вид

$$\begin{aligned} M_a^b(\mu, h; x) &= (b - a)^{-h} B(\mu, h) [(x - a)(b - x)]^{\mu+h-1} \times \\ &\times \left[F\left(2\mu + h - 1, h, \mu + h; \frac{x - a}{b - a}\right) + F\left(2\mu + h - 1, h, \mu + h; \frac{b - x}{b - a}\right) \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

Таким образом, если $0 < \mu < 1 - h$, то из (25) и (23) вытекает соотношение

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (x - a)^{1-\mu-h} M_a^b(\mu, h; x) &= \\ &= B(\mu, h)(b - a)^{\mu-1} \left\{ 1 + \frac{\Gamma(\mu + h)\Gamma(1 - \mu - h)}{\Gamma(1 - \mu)\Gamma(\mu)} \right\}, \end{aligned}$$

из которого, принимая во внимание, что $\Gamma(z)\Gamma(1 - z) = \pi / \sin(\pi z)$, находим

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (x - a)^{1-\mu-h} M_a^b(\mu, h; x) &= \lim_{x \rightarrow b} (b - x)^{1-\mu-h} M_a^b(\mu, h; x) = \\ &= B(\mu, h)(b - a)^{\mu-1} \left[1 + \frac{\sin(\mu\pi)}{\sin((\mu + h)\pi)} \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Пусть теперь $\mu = 1 - h$. Тогда из (22) или (25) имеем

$$\begin{aligned} M_a^b(\mu, 1 - \mu; x) &= (b - a)^{\mu-1} B(\mu, 1 - \mu) \times \\ &\times \left[F\left(1 - \mu, \mu, 1; \frac{x - a}{b - a}\right) + F\left(1 - \mu, \mu, 1; \frac{b - x}{b - a}\right) \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

Из формулы [4, с. 66] (см. также [5])

$$B(\alpha, \beta) F(\alpha, \beta, \alpha + \beta; z) = F(\alpha, \beta, 1; 1 - z) [\psi(1 - \beta) - \psi(\alpha) - \ln(1 - z)] +$$

$$+ F_*(\alpha, \beta, 1 - \varepsilon; 1 - z) - F_*(\alpha, \beta - \varepsilon, 1; 1 - z) + F_*(\alpha + \varepsilon, \beta, 1; 1 - z), \quad (28)$$

где

$$F_*(\alpha, \beta - \varepsilon, \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-zt)^{-\alpha} \ln t \, dt,$$

$$F_*(\alpha + \varepsilon, \beta, \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-zt)^{-\alpha} \ln(1-zt) \, dt,$$

имеем

$$\begin{aligned} & B(1 - \mu, \mu) F(1 - \mu, \mu, 1; z) = \\ & = -\ln(1 - z) F(1 - \mu, \mu, 1; 1 - z) + F_*(1 - \mu, \mu, 1 - \varepsilon; 1 - z) - \\ & - F_*(1 - \mu, \mu - \varepsilon, 1; 1 - z) + F_*(1 - \mu + \varepsilon, \mu, 1; 1 - z). \end{aligned} \quad (29)$$

По определению

$$F_*(1 - \mu, \mu, 1 - \varepsilon; 0) = \frac{1}{\Gamma(\mu)\Gamma(1 - \mu)} \int_0^1 t^{\mu-1} (1-t)^{-\mu} \ln(1-t) \, dt,$$

а так как

$$\begin{aligned} & \int_0^1 t^{\mu-1} (1-t)^{-\mu} \ln(1-t) \, dt = \\ & = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int_0^1 t^{\mu-1} (1-t)^{\varepsilon-\mu} \, dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} B(\mu, \varepsilon - \mu + 1) = \\ & = \Gamma(\mu) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{\Gamma(\varepsilon + 1 - \mu)}{\Gamma(\varepsilon + 1)} = \Gamma(\mu) [\psi(1 - \mu) - \psi(1)] \Gamma(1 - \mu), \end{aligned}$$

то

$$F_*(1 - \mu, \mu, 1 - \varepsilon; 0) = \psi(1 - \mu) - \psi(1). \quad (30)$$

Аналогично находим, что

$$F_*(1 - \mu, \mu - \varepsilon, 1; 0) = \psi(\mu) - \psi(1). \quad (31)$$

Очевидно,

$$\lim_{z \rightarrow 1} F_*(1 - \mu + \varepsilon, \mu, 1; 1 - z) = 0. \quad (32)$$

Известно, что $\psi(1 - z) - \psi(z) = \pi \operatorname{ctg}(\pi z)$, поэтому из (30) и (31) заключаем:

$$F_*(1 - \mu, \mu, 1 - \varepsilon; 0) - F_*(1 - \mu, \mu - \varepsilon, 1; 0) = \pi \operatorname{ctg}(\pi \mu).$$

Отсюда и из (29), (32), поскольку

$$B(1 - \mu, \mu) = \Gamma(1 - \mu)\Gamma(\mu) = \frac{\pi}{\sin(\pi\mu)}, \quad F(1 - \mu, \mu, 1; 0) = 1,$$

получаем соотношение

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(1 - \mu, \mu, 1; (b - x)/(b - a))}{\ln[(b - a)/(x - a)]} = \frac{\sin(\pi\mu)}{\pi},$$

воспользовавшись которым, из (27) получаем

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{M_a^b(\mu, 1 - \mu; x)}{\ln[(b - a)/(x - a)]} = (b - a)^{\mu-1}, \quad \mu = 1 - h. \quad (33)$$

Идентичное рассуждение приводит нас к формуле

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{M_a^b(\mu, 1 - \mu; x)}{\ln[(b - a)/(b - x)]} = (b - a)^{\mu-1}, \quad \mu = 1 - h,$$

из которой, и из (24), (26), (33), следует

Лемма 2. Пусть $\mu > 0$, $h > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} M_a^b(\mu, h; x) &= \lim_{x \rightarrow b} M_a^b(\mu, h; x) = \\ &= (b - a)^{2\mu-h-2} B(\mu, h + \mu - 1), \quad \text{если } 1 - h < \mu < 1; \\ \lim_{x \rightarrow a} (x - a)^{1-\mu-h} M_a^b(\mu, h; x) &= \lim_{x \rightarrow b} (b - x)^{1-\mu-h} M_a^b(\mu, h; x) = \\ &= B(\mu, h) [1 + \sin(\mu\pi) / \sin((\mu + h)\pi)] (b - a)^{\mu-1}, \quad \text{если } 0 < \mu < 1 - h; \\ \lim_{x \rightarrow a} \frac{M_a^b(\mu, 1 - \mu; x)}{\ln[(b - a)/(x - a)]} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow b} \frac{M_a^b(\mu, 1 - \mu; x)}{\ln[(b - a)/(b - x)]} = (b - a)^{\mu-1}, \quad \text{если } \mu = 1 - h. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь функцию

$$\Phi_\alpha(x) = [(x - a)(b - x)]^{(1-\alpha)/2} V_\alpha(x).$$

Отсюда с учетом (5) имеем

$$\Phi_\alpha(x) = [(x - a)(b - x)]^{(1-\alpha)/2} [\varphi(x) S_a^b(\mu, \mu; x) + \Phi_a^b(\mu, \mu, x)].$$

Пусть $\delta > (\alpha + 1)/2$, а тогда в силу (6) $\mu > 1$. Из леммы 1 получаем

$$\lim_{x \rightarrow a_i} S_a^b(\mu, \mu; x) = (-1)^{i+1} (b - a)^{2\mu-2} B(\mu, \mu - 1).$$

Поскольку с учетом формулы (7)

$$\Phi_a^b(\mu, \mu; a_i) = \lim_{x \rightarrow a_i} \Phi_a^b(\mu, \mu; x) < \infty,$$

то ясно, что функция $\Phi_\alpha(x)$ при $x \rightarrow a$ или b обращается в нуль порядка не ниже $(1 - \alpha)/2$. Следовательно,

$$D_{ax}^{1-\alpha} \Phi_\alpha(t) = \frac{d}{dx} D_{ax}^{-\alpha} \Phi_\alpha(t) = D_{ax}^{-\alpha} \frac{d}{dt} \Phi_\alpha(t). \quad (34)$$

Введем обозначение

$$\omega(x) = [(x - a)(b - x)]^{(\alpha-1)/2} D_{ax}^{-1} v.$$

Очевидно, что

$$\omega(x) = \varphi(x) [(x - a)(b - x)]^{\mu-1}. \quad (35)$$

Известно, что если функция $A(x)$ конечна, непрерывна и обладает первой производной или, самое большее, обращается в бесконечность порядка меньшего чем первый, то можно записать

$$\int_a^b \frac{A(t) dt}{t - x} = A(b) \ln(b - x) - A(a) \ln(x - a) - \int_a^b A'(t) \ln |t - x| dt. \quad (36)$$

Из (35) следует, что при $\mu > 0$ $\omega(a) = \omega(b) = 0$. Поэтому если предположить, что $\varphi(x) \in C^1[a, b]$ и в (36) положить $\omega(x) = A(x)$, то будем иметь

$$V_\alpha(x) = \int_a^b \frac{\omega(t) dt}{t - x} = - \int_a^b \omega'(t) \ln |t - x| dt. \quad (37)$$

На основании (35) находим

$$\omega'(x) = \varphi_1(x) [(x - a)(b - x)]^{\mu-2}, \quad (38)$$

где

$$\varphi_1(x) = \varphi'(x)(x - a)(b - x) + (\mu - 1)\varphi(x)(a + b - 2x).$$

Если функция $\nu \in L[a, b]$ и удовлетворяет условию Гельдера в интервале $a < x < b$, то

$$\frac{d}{dx} \int_a^b \nu(t) \ln |t - x| dt = - \int_a^b \frac{\nu(t) dt}{t - x}. \quad (39)$$

Пусть $\varphi'(x)$ удовлетворяет условию Гельдера. Тогда очевидно, что $\varphi_1(x)$ удовлетворяет этому же условию на $[a, b]$.

В силу (38) и (37) из (39) находим

$$\begin{aligned} dV_\alpha(x)/dx &= \int_a^b \varphi_1(t)[(t-a)(b-t)]^{\mu-2}(t-x)^{-1}dt = \\ &= \varphi_1(x)S_a^b(\mu-1, \mu-1; x) + \Phi_{1a}^b(\mu-1, \mu-1; x). \end{aligned} \quad (40)$$

Здесь $\Phi_{1a}^b(\mu-1, \mu-1; x)$ определяется формулой (7), где вместо φ ставится φ_1 .

Так как $\mu > 1$, то из леммы 1 заключаем: функция $S_a^b(\mu-1, \mu-1; x)$ при $x \rightarrow a$ или b обращается в бесконечность порядка $2-\mu$, если $1 < \mu < 2$, в бесконечность логарифмического порядка при $\mu = 2$ и стремится к конечному пределу, если $\mu > 2$.

Пусть h_1 – показатель Гельдера функции $\varphi'(x)$ на $[a, b]$:

$$|\varphi'(\tau) - \varphi'(x)| \leq C|x - \tau|^{h_1};$$

h_0 – наименьшее из чисел h и h_1 . Как видно из обозначения, функция $\varphi_1(x)$ на $[a, b]$ удовлетворяет условию Гельдера с показателями h_0 :

$$|\varphi_1(\tau) - \varphi_1(x)| \leq C|x - \tau|^{h_0}.$$

Отсюда и из определения функции $\Phi_{1a}^b(\mu-1, \mu-1; x)$ следует неравенство

$$\Phi_{1a}^b(\mu-1, \mu-1; x) \leq CM_a^b(\mu-1, h_0; x).$$

Это неравенство и лемма 2 позволяют сделать следующее утверждение: если $2-h_0 < \mu$, то функция $\Phi_{1a}^b(\mu-1, \mu-1; x)$ при $x \rightarrow a$ или b стремится к конечному пределу; при $1 < \mu < 2-h_0$ она не может обращаться в бесконечность порядка $> 2-\mu-h_0$; если же $\mu = 2-h_0$, то

$$|\Phi_{1a}^b(\mu-1, \mu-1; x)| \leq C \ln[(x-a)(b-x)].$$

Из представления (40) теперь можно сделать следующий вывод: функция $dV_\alpha(x)/dx$ при $x \rightarrow a$ или b не может обращаться в бесконечность порядка выше $2-\mu$, если $1 < \mu < 2$, и в бесконечность выше логарифмического порядка при $\mu = 2$ и стремится к конечному пределу, если $\mu > 2$; $\Phi'_\alpha(x)$ при $x \rightarrow a$ или b не может обращаться в бесконечность порядка выше $(\alpha+1)/2$. А тогда из формулы (34) вытекает, что функция $D_{ax}^{1-\alpha}\Phi(t)$ при $x \rightarrow a$ или b не может обращаться в бесконечность порядка выше $(1-\alpha)/2 = \mu - \delta$.

Остается изучить поведение функции $D_{ax}^{-\alpha}v$ вблизи особых точек a и b . Для этого можно записать

$$D_{ax}^{-\alpha}v = \frac{d}{dx}D_{ax}^{-\alpha}D_{ax}^{-1}v = \frac{d}{dx}D_{ax}^{-\alpha}\varphi(t)[(t-a)(b-t)]^{\delta-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{d}{dx}(x-a)^\delta \times$$

$$\times (b-a)^{-\alpha+\delta} \int_0^1 \varphi(a+(x-a)\tau) \tau^{\delta-\alpha} (1-\tau)^{\alpha-1} \left(1 - \frac{x-a}{b-a} \tau\right)^{\delta-a} d\tau, \quad (41)$$

откуда следует, что функция $D_{ax}^{-\alpha}v \in C[a, b]$ при $\delta > 1$.

Пусть $0 < \delta \leq 1$, тогда из (41) получаем

$$\lim_{x \rightarrow a} (x-a)^{1-\delta} D_{ax}^{-\alpha}v = \varphi(a) \Gamma(\delta - \alpha + 1) (b-a)^{\delta-\alpha} / \Gamma(\delta). \quad (42)$$

Из этого же соотношения нетрудно показать, что функция $D_{ax}^{1-\alpha}v$ при $x \rightarrow b$ не может обращаться в бесконечность порядка выше $1 - \delta$, когда $\delta < 1$, и в бесконечность выше логарифмического порядка при $\delta = 1$.

Таким образом, окончательный вывод таков: решение $u(x)$, задаваемое равенством (4), будет удовлетворять условию (3), если выполнено соотношение $\lim_{x \rightarrow a} (x-a)^{(1-\alpha)/2} D_{ax}^{-\alpha}v = 0$. В силу (42) это равенство имеет место, если $\delta > (1 + \alpha)/2$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96-01-9-00508).

Литература

1. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М., 1995.
2. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 1. С. 101–109.
3. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М.: ФИЗМАТЛИТ, 1953.
4. Нахушев А. М. Некоторые краевые задачи для уравнения смешанного типа с двумя линиями параболического вырождения // Дис. ... к.ф.-м.н. Новосибирск, 1966.
5. Волкодав В. Ф., Лернер М. Е., Николаев И. Я., Киселев В. А. Таблицы некоторых функций Римана, интегралов и рядов. Куйбышев, 1982.

Поступила в редакцию
10 ноября 1999 г.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и автоматизации
КБНЦ РАН

Структурные и качественные свойства оператора, обратного оператору дробного интегро-дифференцирования с фиксированными началом и концом

Введение. Решение $u(x, y)$ задачи Трикоми для уравнения Геллерстедта

$$\operatorname{sign} y \cdot |y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad m = \operatorname{const} \geq 0$$

в смешанной области стандартного вида при определенных допущениях

относительно входных данных обладает следующим фундаментальным свойством:

$$u_y(x, 0) = \gamma D_{0x}^\alpha u(t, 0) + f(x),$$

где $\gamma = \text{const} > 0$, D_{0x}^α – оператор дробного дифференцирования порядка $\alpha = 2/(m+2)$, $f(x)$ – однозначно определенная и непрерывная на сегменте $0 \leq x \leq 1$ функция.

К дробному дифференциальному исчислению приходим и при решении смешанных задач для гипербола-параболических уравнений, а также при математическом моделировании биологических явлений [1] или переноса субстанции в средах с фрактальной геометрией.

В частности, если исходить не из лебеговой размерности фракталов, а из хаусдорфовой, то классическое уравнение неразрывности $au_t = -q_x$, в случаях закона Фика или Фурье: $q(x, t) = -bu_x$, целесообразно заменить уравнением вида

$$aD_{0x}^\alpha u(x, t) = -q_x \quad \text{или} \quad b \int_0^1 D_{0x}^\alpha u(x, t) d\alpha = -q_x,$$

где $a, b = \text{const} > 0$.

В теории уравнений математической биологии и в дробном исчислении [1] важную роль играют операторы $I_{ab}^\alpha = D_{ax}^\alpha - \text{sign } \alpha D_{bx}^\alpha$, $D_{ax}^{[\alpha, \beta]}$, введенные в [2].

В настоящей работе, являющейся продолжением работы [2], исследуются структурные и качественные свойства оператора, обратного I_{ab}^α .

1. О структурном свойстве оператора, обратного оператору Карлемана. Рассмотрим уравнение Карлемана

$$I_{ab}^\alpha u = v(x), \quad a < x < b, \quad -1 < \alpha < 0, \quad (1)$$

с правой частью $v(x)$ вида

$$v(x) = \varphi(x) [(x-a)(b-x)]^{\delta-\alpha-1}, \quad (2)$$

где $\varphi(x)$ удовлетворяет условию Гельдера на $[a, b]$, а $\delta = \text{const} > 0$.

Решение уравнения (1) будем искать в классе функций $u(x)$, представимых в виде

$$u(x) = \psi(x) [(x-a)(b-x)]^{\delta-1}, \quad (3)$$

где $\psi(x)$ – непрерывная по Гельдеру функция на $[a, b]$. Пусть

$$Z(x) = (x-a)^{1+\alpha/2} (b-x)^{-\alpha/2} \equiv Z(\alpha; x),$$

тогда, как хорошо известно [3, с. 579], в классе функций, удовлетворяющих условиям (2) и (3), имеем

$$\frac{u(x)}{\Gamma(-\alpha)} = \frac{\sin[(\alpha+1)\pi]}{4\pi \sin^2[(\alpha+1)\pi/2]} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{v(t) dt}{(x-t)^{-\alpha}} - \frac{\sin^2[(\alpha+1)\pi]}{4\pi^2 \sin^2[(\alpha+1)\pi/2]} \times \\ \times \int_a^x \frac{Z(t)}{(x-t)^{-\alpha}} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_a^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1}} \int_\tau^b \frac{v(s) ds}{Z(s)(s-\tau)^{-\alpha}} \right\} dt.$$

Отсюда, принимая во внимание, что

$$\sin(\alpha\pi + \pi) = -\sin(\alpha\pi), \quad \sin[(\alpha+1)\pi/2] = \cos(\alpha\pi/2),$$

$$D_{ax}^{-\alpha-1}v = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^x (x-t)^\alpha v(t) dt,$$

$$\sin(-\pi\alpha) = \frac{\pi}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(\alpha+1)}, \quad \frac{\partial}{\partial x} D_{ax}^{-\alpha-1} = D_{ax}^{-\alpha},$$

получаем

$$4u(x) \cos^2\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) = D_{ax}^{-\alpha}v + D_{ax}^{-\alpha-1}Z(t) \frac{\partial}{\partial t} D_{at}^\alpha D_{b\tau}^{-\alpha-1} \frac{v(s)}{Z(s)}. \quad (4)$$

Согласно теореме о дробной производной от потенциала со степенным ядром [1, с. 50]

$$D_{ax}^\beta I_{ab}^{-\beta}u = 2 \cos^2(\pi\beta/2) u(x) + \sin(\pi\beta) S_{ab}^\beta u(x),$$

$$S_{ab}^\beta u(x) = \frac{1}{\pi} \int_a^b \left| \frac{t-a}{x-a} \right|^\beta \frac{u(t) dt}{t-x}.$$

С учетом этих равенств имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} D_{at}^\alpha D_{b\tau}^{-\alpha-1} \frac{v(s)}{Z(s)} = D_{at}^{\alpha+1} D_{b\tau}^{-\alpha-1} \frac{v(s)}{Z(s)} = \\ = \cos(\pi(\alpha+1)) \frac{v(t)}{Z(t)} + S_{ab}^{\alpha+1} \frac{v(t)}{Z(t)} \sin((\alpha+1)\pi).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial t} D_{at}^\alpha D_{b\tau}^{-\alpha-1} \frac{v(s)}{Z(s)} = -\cos(\pi\alpha) \frac{v(t)}{Z(t)} - \sin(\alpha\pi) S_{ab}^{\alpha+1} \frac{v(t)}{Z(t)}. \quad (5)$$

Тогда соотношение (4) принимает вид

$$4u(x) \cos^2\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) = \\ = D_{ax}^{-\alpha} v - D_{ax}^{-\alpha-1} v \cos(\pi\alpha) - D_{ax}^{-\alpha-1} Z(t) S_{ab}^{\alpha+1} \frac{v(t)}{Z(t)} \sin(\alpha\pi). \quad (6)$$

Полученная формула выражает весьма важное функциональное свойство оператора, обратного оператору I_{ab}^α : если $u(x)$ – решение уравнения Карлемана (1), то [3, с. 579]

$$2D_{ax}^\alpha u = v(x) + \operatorname{tg} \frac{\alpha\pi}{2} \frac{1}{\pi} \int_a^b \left[\frac{(t-a)(b-t)}{(x-a)(b-x)} \right]^{\alpha/2} \frac{v(t) dt}{t-x}, \quad (7)$$

$$2D_{bx}^\alpha u = v(x) - \operatorname{tg} \frac{\alpha\pi}{2} \frac{1}{\pi} \int_a^b \left[\frac{(t-a)(b-t)}{(x-a)(b-x)} \right]^{\alpha/2} \frac{v(t) dt}{t-x}. \quad (8)$$

2. О структурном свойстве оператора, обратного оператору дробного дифференцирования с фиксированными началом и концом. Оператор

$$I_{ab}^\alpha u(x) = (D_{ax}^\alpha - \operatorname{sign} \alpha D_{bx}^\alpha) u(x), \quad a < x < b, \quad (9)$$

назван нами оператором дробного интегро-дифференцирования порядка $|\alpha|$ с фиксированными началом и концом в точках a и b [4].

Как видно из (9), оператор I_{ab}^α определяется следующим образом:

$$I_{ab}^\alpha u(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^b \frac{u(t) dt}{|x-t|^{\alpha+1}}, \quad \alpha < 0;$$

$$I_{ab}^\alpha u = \frac{\partial^{[\alpha]+1}}{\partial x^{[\alpha]+1}} I_{ab}^{\alpha-[\alpha]-1} u(x), \quad \alpha > 0,$$

где $[\alpha]$ – целая часть $\alpha < [\alpha] + 1$.

Предположим, что $\alpha > [\alpha] = m$, и рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m+1}} I_{ab}^{\alpha-m-1} u(x) = v(x), \quad a < x < b, \quad (10)$$

с правой частью $v(x)$, представимой в виде

$$D_{ax}^{-m-1} v(x) = \varphi(x) [(x-a)(b-x)]^{\delta+m-\alpha}, \quad (11)$$

где $\varphi(x)$ на сегменте $[a, b]$ удовлетворяет условию Гельдера, $\delta = \operatorname{const} > 0$. Решение уравнения (10) будем искать в классе функций $u(x)$, представимых в виде (3) и таких, что $I_{ab}^{\alpha-m-1} u(x) \in C^{m+1}[a, b]$.

Любое решение $u(x)$ уравнения (10) представимо в виде

$$I_{ab}^{\alpha-m-1}u(x) = D_{ax}^{-m-1}v + a_k(x-a)^k \quad (12)$$

или

$$I_{ab}^{\alpha-m-1}u(x) = (-1)^{m-1} D_{bx}^{-m-1}v + b_k(b-x)^k, \quad (13)$$

где под (диагонально) повторяющимся индексом k подразумевается суммирование от 0 до m , a_k и b_k – постоянные величины. Имеет место и обратное утверждение: *каковы бы ни были постоянные a_k и b_k , любое решение $u(x)$ уравнения (12) или (13) является решением уравнения (10)*. Чтобы изучить структуру ядра оператора I_{ab}^α при $\alpha > 0$, рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m+1}} I_{ab}^\beta u(x) = 0, \quad \beta = \alpha - m - 1.$$

Как видно из (12), (13) при $v = 0$, любой элемент $u \in \ker I_{ab}^\alpha$ удовлетворяет уравнению $I_{ab}^\beta u(x) = a_k(x-a)^k$, $k = \overline{0, m}$, откуда и из (7) заключаем, что

$$2D_{ax}^\beta u = a_k(x-a)^k + \\ + \pi^{-1} a_k \operatorname{tg}(\beta\pi/2) [(x-a)(b-x)]^{-\beta/2} S_a^b(\beta/2 + k + 1, \beta/2 + 1; x). \quad (14)$$

Здесь

$$S_a^b(\nu, \mu; x) = \int_a^b \frac{(\tau-a)^{\nu-1} (b-\tau)^{\mu-1}}{\tau-x} d\tau. \quad (15)$$

3. Представления интеграла $S_a^b(\nu, \mu; x)$ через гипергеометрические функции. Интеграл в смысле главного значения по Коши от функции $\varphi(x)$ можно определить и следующим образом:

$$\int_a^b \frac{\varphi(t) dt}{t-x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \Gamma(\varepsilon) [D_{bx}^{-\varepsilon} \varphi - D_{ax}^{-\varepsilon} \varphi]. \quad (16)$$

Сингулярный интеграл (15), согласно (16), записывается в виде

$$S_a^b(\nu, \mu; x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\int_x^b (t-a)^{\nu-1} (b-t)^{\mu-1} (t-x)^{\varepsilon-1} dt - \right. \\ \left. - \int_a^x (t-a)^{\nu-1} (b-t)^{\mu-1} (x-t)^{\varepsilon-1} dt \right].$$

Если в первом интеграле произвести замену $t = b - (b - x) \tau$, а во втором положить $t = a + (x - a) \tau$, то в результате получим

$$S_a^b(\nu, \mu; x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (b - a)^{\mu + \nu + \varepsilon - 2} \left[(1 - z)^{\mu + \varepsilon - 1} \int_0^1 \tau^{\mu - 1} (1 - \tau)^{\varepsilon - 1} \times \right. \\ \left. \times (1 - (1 - z) \tau)^{\nu - 1} d\tau - z^{\nu + \varepsilon - 1} \int_0^1 \tau^{\nu - 1} (1 - \tau)^{\varepsilon - 1} (1 - z\tau)^{\mu - 1} d\tau \right], \quad (17)$$

где $z = (x - a) / (b - a)$, $1 - z = (b - x) / (b - a)$.

Пусть $B(x, y) = \Gamma(x) \Gamma(y) / \Gamma(x + y)$ – бета-функция, $z < 1$. Тогда

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = \frac{1}{B(\beta, \gamma - \beta)} \int_0^1 t^{\beta - 1} (1 - t)^{\gamma - \beta - 1} (1 - zt)^{-\alpha} dt. \quad (18)$$

С учетом (18) равенство (17) примет вид

$$S_a^b(\nu, \mu; x) = (b - a)^{\mu + \nu - 2} \times \\ \times \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [B(\mu, \varepsilon) (1 - z)^{\mu + \varepsilon - 1} F(1 - \nu, \mu, \mu + \varepsilon; 1 - z) - \\ - B(\nu, \varepsilon) z^{\nu + \varepsilon - 1} F(1 - \mu, \nu, \nu + \varepsilon; z)]. \quad (19)$$

Далее на основании первой формулы Больца

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = (1 - z)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma; z) \quad (20)$$

имеем

$$F(1 - \mu, \nu, \nu + \varepsilon; z) = (1 - z)^{\mu + \varepsilon - 1} F(\mu + \nu + \varepsilon - 1, \varepsilon, \nu + \varepsilon; z).$$

Если $\alpha + \beta - \gamma \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, то, как известно,

$$F(\alpha, \beta, \gamma; 1 - z) = \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha) \Gamma(\gamma - \beta)} F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1; z) + \\ + z^{\gamma - \alpha - \beta} \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, 1 + \gamma - \alpha - \beta; z). \quad (21)$$

При $\nu \neq 1, 2, \dots$ и достаточно малых значениях ε в силу (21) справедлива формула

$$F(1 - \nu, \mu, \mu + \varepsilon; 1 - z) = \\ = \frac{\Gamma(\mu + \varepsilon) \Gamma(\nu + \varepsilon - 1)}{\Gamma(\mu + \nu + \varepsilon - 1) \Gamma(\varepsilon)} F(1 - \nu, \mu, 2 - \nu - \varepsilon; z) +$$

$$+ z^{\nu+\varepsilon-1} \frac{\Gamma(\mu+\varepsilon) \Gamma(1-\nu-\varepsilon)}{\Gamma(1-\nu) \Gamma(\mu)} F(\mu+\nu+\varepsilon-1, \varepsilon, \varepsilon+\nu; z).$$

Следовательно, после соответствующих преобразований, можно записать

$$\begin{aligned} S_a^b(\nu, \mu; x) &= (b-a)^{\mu+\nu-2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\Gamma(\mu) \Gamma(\nu+\varepsilon-1)}{\Gamma(\mu+\nu+\varepsilon-1)} (1-z)^{\mu+\varepsilon-1} \times \right. \\ &\quad \times F(1-\nu, \mu, 2-\nu-\varepsilon; z) + z^{\nu+\varepsilon-1} (1-z)^{\mu+\varepsilon-1} \times \\ &\quad \times F(\mu+\nu+\varepsilon-1, \varepsilon, \varepsilon+\nu; z) \left[\frac{\Gamma(1-\nu-\varepsilon)}{\Gamma(1-\nu)} - \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu+\varepsilon)} \right] \Gamma(\varepsilon) \left. \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда, принимая во внимание равенства:

$$\begin{aligned} \Gamma(x) \Gamma(1-x) &= \pi / \sin(\pi x), \quad \varepsilon \Gamma(\varepsilon) = \Gamma(\varepsilon+1), \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Gamma(\nu+\varepsilon) \Gamma(1-\nu-\varepsilon) - \Gamma(\nu) \Gamma(1-\nu)}{\varepsilon \Gamma(1-\nu) \Gamma(\nu+\varepsilon)} \Gamma(\varepsilon+1) &= \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi\nu) - \sin((\nu+\varepsilon)\pi)}{\varepsilon \sin((\nu+\varepsilon)\pi)} = -\pi \operatorname{ctg}(\pi\nu), \end{aligned}$$

где $\nu \neq 1, 2, \dots$, $F(\alpha, 0, \gamma; z) = 1$, находим

$$\begin{aligned} S_a^b(\nu, \mu; x) &= -\pi \operatorname{ctg}(\nu\pi) z^{\nu-1} (1-z)^{\mu-1} (b-a)^{\mu+\nu-2} + \\ &+ B(\mu, \nu-1) (1-z)^{\mu-1} (b-a)^{\mu+\nu-2} F(1-\nu, \mu, 2-\nu; z). \end{aligned} \quad (22)$$

Итак, доказано, что если $\nu \neq 1, 2, \dots$, то

$$\begin{aligned} S_a^b(\nu, \mu; x) &= -\pi \operatorname{ctg}(\nu\pi) (x-a)^{\nu-1} (b-x)^{\mu-1} + \\ &+ B(\mu, \nu-1) (b-x)^{\mu-1} (b-a)^{\nu-1} F\left(1-\nu, \mu, 2-\nu; \frac{x-a}{b-a}\right). \end{aligned} \quad (23)$$

Равенство (22) при $\mu \neq 1, 2, \dots$ можно переписать и в следующем виде:

$$\begin{aligned} S_a^b(\nu, \mu; x) &= \pi \operatorname{ctg}(\mu\pi) (x-a)^{\nu-1} (b-x)^{\mu-1} - \\ &- (b-a)^{\mu+\nu-2} B(\mu-1, \nu) F\left(2-\mu-\nu, 1, 2-\mu; \frac{b-x}{b-a}\right). \end{aligned} \quad (24)$$

Действительно, в силу (21) имеем

$$\begin{aligned} F(1-\nu, \mu, 2-\nu; z) &= \frac{\Gamma(2-\nu) \Gamma(1-\mu)}{\Gamma(2-\nu-\mu)} F(1-\nu, \mu, \mu; 1-z) + \\ &+ (1-z)^{1-\mu} \frac{\Gamma(2-\nu) \Gamma(\mu-1)}{\Gamma(1-\nu) \Gamma(\mu)} F(1, 2-\mu-\nu, 2-\mu; 1-z). \end{aligned} \quad (25)$$

Поскольку $F(1 - \nu, \mu, \mu; 1 - z) = z^{\nu-1}$,

$$\begin{aligned} B(\mu, \nu - 1) \frac{\Gamma(2 - \nu) \Gamma(1 - \mu)}{\Gamma(2 - \nu - \mu)} &= \frac{\Gamma(\mu) \Gamma(1 - \mu) \Gamma(\nu - 1) \Gamma(1 - (\nu - 1))}{\Gamma(\mu + \nu - 1) \Gamma(1 - (\mu + \nu - 1))} = \\ &= \frac{\pi \sin[\pi(\mu + \nu - 1)]}{\sin(\mu\pi) \sin[(\nu - 1)\pi]} = \pi(\operatorname{ctg}(\nu\pi) + \operatorname{ctg}(\mu\pi)), \\ B(\mu, \nu - 1) \frac{\Gamma(2 - \nu) \Gamma(\mu - 1)}{\Gamma(1 - \nu) \Gamma(\mu)} &= \frac{\Gamma(\mu - 1) \Gamma(2 - \nu) \Gamma(\nu - 1)}{\Gamma(\mu + \nu - 1) \Gamma(1 - \nu)} = \\ &= \frac{\Gamma(\mu - 1) (1 - \nu) \Gamma(\nu - 1)}{\Gamma(\mu + \nu - 1)} = -\frac{\Gamma(\mu - 1) \Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu + \nu - 1)} = -B(\mu - 1, \nu), \end{aligned}$$

то (24) является следствием (23) и (25). Равенство (24) без доказательства приведено в [5, с. 304] и в [6, с. 164] без предположения, что $\mu \neq 1, 2, \dots$

Очевидно, что

$$S_a^b(1, 1; x) = \int_a^b (\tau - x)^{-1} d\tau = \ln \frac{b - x}{x - a}.$$

Из (19) и равенств $\Gamma(\varepsilon + 1) = \varepsilon \Gamma(\varepsilon)$, $F(0, \mu, \mu + \varepsilon; 1 - z) = 1$ имеем

$$\begin{aligned} (b - a)^{1-\mu} S_a^b(1, \mu; x) &= \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\Gamma(\mu) \Gamma(\varepsilon + 1)}{\Gamma(\mu + \varepsilon)} (1 - z)^{\mu + \varepsilon - 1} - z^\varepsilon F(1 - \mu, 1, 1 + \varepsilon; z) \right] = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[\frac{\Gamma(\mu) \Gamma(\varepsilon + 1)}{\Gamma(\mu + \varepsilon)} (1 - z)^{\mu + \varepsilon - 1} - z^\varepsilon F(1 - \mu, 1, 1 + \varepsilon; z) \right]. \quad (26) \end{aligned}$$

Пусть $\psi(z)$ – логарифмическая производная $\Gamma(z)$:

$$\psi(z) = \Gamma'(z) / \Gamma(z).$$

Тогда из (26) находим:

$$\begin{aligned} (b - a)^{1-\mu} S_a^b(1, \mu; x) &= [\psi(1) - \psi(\mu)] (1 - z)^{\mu-1} + \\ &+ (1 - z)^{\mu-1} \ln(1 - z) - (1 - z)^{\mu-1} \ln z - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial F(1 - \mu, 1, 1 + \varepsilon; z)}{\partial \varepsilon}. \end{aligned}$$

Согласно (18),

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} F(1 - \mu, 1, 1 + \varepsilon; z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \varepsilon \int_0^1 (1 - t)^{\varepsilon-1} (1 - zt)^{\mu-1} dt =$$

$$\begin{aligned}
&= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int_0^1 (1-zt)^{\mu-1} d(1-t)^\varepsilon = \\
&= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[-1 + (\mu-1)z \int_0^1 (1-t)^\varepsilon (1-zt)^{\mu-2} dt \right] = \\
&= (1-\mu)z \int_0^1 (1-zt)^{\mu-2} \ln(1-t) dt = (1-\mu)z F_*(2-\mu, 1, 2; z),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
F_*(\alpha, \beta, \gamma; z) &\equiv F_*(\alpha, \beta, \gamma - \varepsilon; z) = \\
&= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-zt)^{-\alpha} \ln(1-t) dt
\end{aligned}$$

– функция, введенная нами в [7] (см. также [8]). Таким образом, установлено, что

$$\begin{aligned}
(b-a)^{1-\mu} S_a^b(1, \mu; x) &= (1-z)^{\mu-1} \left[\psi(1) - \psi(\mu) + \ln \frac{1-z}{z} \right] + \\
&+ (\mu-1)z F_*(2-\mu, 1, 2; z)
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
S_a^b(1, \mu; x) &= (b-x)^{\mu-1} \left[\psi(1) - \psi(\mu) + \ln \frac{b-x}{x-a} \right] + \\
&+ (\mu-1)(x-a)(b-a)^{\mu-2} F_*\left(2-\mu, 1, 2; \frac{x-a}{b-a}\right).
\end{aligned}$$

Далее, нетрудно заметить, что

$$S_a^b(2, \mu; x) = \frac{1}{\mu} (b-a)^\mu + (x-a) S_a^b(1, \mu; x).$$

Пусть теперь $\nu = 3, 4, 5, \dots$, тогда на основании формулы бинома Ньютона интеграл (15) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
S_a^b(\nu, \mu; x) &= \sum_{j=0}^{\nu-1} \binom{\nu-1}{j} (x-a)^j \int_a^b (t-x)^{\nu-2-j} (b-t)^{\mu-1} dt = \\
&= (x-a)^{\nu-1} S_a^b(1, \mu; x) + \sum_{j=0}^{\nu-2} \binom{\nu-1}{j} (x-a)^j \int_a^b (t-x)^{\nu-2-j} (b-t)^{\mu-1} dt.
\end{aligned}$$

Пусть $m_j = \nu - 2 - j$. Очевидно, что $m_j \geq 0$ для всех $j \leq \nu - 2$ и

$$\int_a^b (t-x)^{m_j} (b-t)^{\mu-1} dt = \left(\int_a^x + \int_x^b \right) (t-x)^{m_j} (b-t)^{\mu-1} dt.$$

Если в первом интеграле правой части этого равенства положить $t = a + (x-a)\tau$, во втором — $t = b - (b-x)\tau$, а затем воспользоваться формулой (18), то получим

$$\begin{aligned} \int_a^b (t-x)^{m_j} (b-t)^{\mu-1} dt &= B(\mu, m_j+1) (b-x)^{\mu+m_j} - \\ &- (b-a)^{\mu-1} (a-x)^{m_j+1} B(1, m_j+1) F\left(1-\mu, 1, \nu-j; \frac{x-a}{b-a}\right). \end{aligned}$$

Поэтому для любого $\nu = 3, 4, 5, \dots$ справедлива формула

$$\begin{aligned} S_a^b(\nu, \mu; x) &= (x-a)^{\nu-1} S_a^b(1, \mu; x) + \\ &+ \sum_{j=0}^{\nu-2} \binom{\nu-1}{j} (x-a)^j [(b-x)^{\mu+m_j} B(\mu, m_j+1) - \\ &- (b-a)^{\mu-1} (a-x)^{m_j+1} B(1, m_j+1) F\left(1-\mu, 1, \nu-j; \frac{x-a}{b-a}\right)]. \end{aligned}$$

4. Об общем представлении всех решений уравнения (10) (продолжение п. 2). Пусть $2\varepsilon = -\beta = m+1-\alpha$. Тогда из (14) имеем

$$\begin{aligned} 2D_{ax}^{-2\varepsilon} u &= a_k (x-a)^k - \\ &- (a_k \operatorname{tg}(\pi\varepsilon)/\pi) [(x-a)(b-x)]^\varepsilon S_a^b(-\varepsilon+k+1, 1-\varepsilon; x), \end{aligned} \quad (27)$$

где $k = \overline{0, m}$.

Поскольку $k+1-\varepsilon \neq 1, 2, \dots$, то из (23) при $\nu = k+1-\varepsilon$, $\mu = 1-\varepsilon$ находим

$$\begin{aligned} S_a^b(k+1-\varepsilon, 1-\varepsilon; x) &= \pi \operatorname{ctg}(\pi\varepsilon) (x-a)^{k-\varepsilon} (b-x)^{-\varepsilon} + B(k-\varepsilon, 1-\varepsilon) \times \\ &\times (b-x)^{-\varepsilon} (b-a)^{k-\varepsilon} F\left(\varepsilon-k, 1-\varepsilon, 1-k+\varepsilon; \frac{x-a}{b-a}\right). \end{aligned} \quad (28)$$

В силу (28) уравнение (27) эквивалентно уравнению Абеля

$$D_{ax}^{-2\varepsilon} u = \sum_{k=0}^m A_k f^k(x), \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} A_k &= -(2\pi)^{-1} \operatorname{tg}(\pi\varepsilon) a_k B(1-\varepsilon, k-\varepsilon)(b-a)^{k-\varepsilon}, \\ f^k(x) &= (x-a)^\varepsilon F\left(\varepsilon-k, 1-\varepsilon, 1+\varepsilon-k; \frac{x-a}{b-a}\right). \end{aligned} \quad (30)$$

Функция $f^k(x)$ обращается в нуль при $x=a$, поэтому

$$D_{ax}^{2\varepsilon} f^k(t) = \frac{\partial}{\partial x} D_{ax}^{2\varepsilon-1} f^k(t) = D_{ax}^{2\varepsilon-1} \frac{d}{dt} f^k(t). \quad (31)$$

Легко видеть, что

$$\frac{df^k(x)}{dx} = (b-a)^{\varepsilon-1} \frac{d}{dz} [z^\varepsilon F(\varepsilon-k, 1-\varepsilon, 1+\varepsilon-k; z)],$$

откуда, поскольку $cF'(a, b, c; z) = abF(a+1, b+1, c+1; z)$, выводим формулу

$$\begin{aligned} \frac{df^k(x)}{dx} &= (b-a)^{\varepsilon-1} [\varepsilon z^{\varepsilon-1} F(\varepsilon-k, 1-\varepsilon, 1+\varepsilon-k; z) + \\ &\quad + \varepsilon_k z^\varepsilon F(\varepsilon-k+1, 2-\varepsilon, 2+\varepsilon-k; z)], \end{aligned} \quad (32)$$

где $\varepsilon^k = (\varepsilon-k)(1-\varepsilon)/(1+\varepsilon-k)$.

Из формул (31), (32) вытекает справедливость равенств

$$\begin{aligned} &\Gamma(1-2\varepsilon) D_{ax}^{2\varepsilon-1} \frac{d}{dt} f^k(t) = \\ &= (b-a)^{\varepsilon-1} \int_a^x (x-t)^{-2\varepsilon} \left[\varepsilon \left(\frac{t-a}{b-a} \right)^{\varepsilon-1} F\left(\varepsilon-k, 1-\varepsilon, 1+\varepsilon-k; \frac{t-a}{b-a}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon_k \left(\frac{t-a}{b-a} \right)^\varepsilon F\left(\varepsilon-k+1, 2-\varepsilon, 2+\varepsilon-k; \frac{t-a}{b-a}\right) \right] dt = \\ &= \varepsilon (x-a)^{-\varepsilon} \int_0^1 \tau^{\varepsilon-1} (1-\tau)^{-2\varepsilon} F(\varepsilon-k, 1-\varepsilon, 1+\varepsilon-k; z\tau) d\tau + \\ &\quad + \frac{\varepsilon_k}{b-a} (x-a)^{1-\varepsilon} \int_0^1 \tau^\varepsilon (1-\tau)^{-2\varepsilon} F(\varepsilon-k+1, 2-\varepsilon, 2+\varepsilon-k; z\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Известно, что

$$F(a, b, c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} z^n, \quad |z| < 1, \quad c \neq 0, -1, \dots$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 & \Gamma(1-2\varepsilon) D_{ax}^{2\varepsilon} f^k(t) = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \left[\frac{\varepsilon(\varepsilon-k)_n(1-\varepsilon)_n}{(x-a)^\varepsilon(1+\varepsilon-k)_n} \int_0^1 \tau^{\varepsilon-1+n} (1-\tau)^{-2\varepsilon} d\tau + \right. \\
 &+ \left. \frac{\varepsilon_k(x-a)^{1-\varepsilon}(\varepsilon-k+1)_n(2-\varepsilon)_n}{(b-a)(2+\varepsilon-k)_n} \int_0^1 \tau^{\varepsilon+n} (1-\tau)^{-2\varepsilon} d\tau \right] = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \left[\frac{\varepsilon(\varepsilon-k)_n(1-\varepsilon)_n \Gamma(\varepsilon+n) \Gamma(1-2\varepsilon)}{(x-a)^\varepsilon(1+\varepsilon-k)_n \Gamma(1-\varepsilon+n)} + \right. \\
 &+ \left. \frac{\varepsilon_k(x-a)^{1-\varepsilon}(\varepsilon-k+1)_n(2-\varepsilon)_n \Gamma(1+\varepsilon+n) \Gamma(1-2\varepsilon)}{(b-a)(2+\varepsilon-k)_n \Gamma(2-\varepsilon+n)} \right].
 \end{aligned}$$

Таким образом, справедливо равенство

$$\begin{aligned}
 D_{ax}^{2\varepsilon} f^k(t) &= \frac{\varepsilon}{(x-a)^\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\varepsilon-k)_n(\varepsilon)_n \Gamma(\varepsilon)}{n!(1+\varepsilon-k)_n \Gamma(1-\varepsilon)} z^n + \\
 &+ \frac{\varepsilon_k(x-a)^{1-\varepsilon}}{(b-a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+\varepsilon-k)_n(1+\varepsilon)_n \Gamma(1+\varepsilon)}{n!(2+\varepsilon-k)_n \Gamma(2-\varepsilon)} z^n, \quad (33)
 \end{aligned}$$

которое эквивалентно формуле

$$\begin{aligned}
 (b-a)^\varepsilon D_{ax}^{2\varepsilon} f^k(t) &= \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\Gamma(1-\varepsilon)} z^{-\varepsilon} F(\varepsilon-k, \varepsilon, \varepsilon+1-k; z) + \\
 &+ \frac{\varepsilon_k \Gamma(1+\varepsilon)}{\Gamma(2-\varepsilon)} z^{1-\varepsilon} F(\varepsilon-k+1, \varepsilon+1, \varepsilon+2-k; z).
 \end{aligned}$$

Воспользуемся в последнем равенстве рекуррентным соотношением [9]

$$(\alpha z/\gamma) F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1; z) = F(\alpha, \beta+1, \gamma; z) - F(\alpha, \beta, \gamma; z),$$

из которого в силу равенства $\Gamma(2-\varepsilon) = (1-\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon)$ следует, что

$$\begin{aligned}
 & \frac{\varepsilon_k \Gamma(1+\varepsilon)}{\Gamma(2-\varepsilon)} z F(\varepsilon-k+1, -\varepsilon+1, \varepsilon-k+2; z) = \\
 &= \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\Gamma(1-\varepsilon)} [F(\varepsilon-k, \varepsilon+1, \varepsilon-k+1; z) - F(\varepsilon-k, \varepsilon, \varepsilon-k+1; z)].
 \end{aligned}$$

В результате будем иметь

$$D_{ax}^{2\varepsilon} f^k(t) = \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\Gamma(1-\varepsilon)} [(b-a)z]^{-\varepsilon} F(\varepsilon-k, \varepsilon+1, \varepsilon-k+1; z).$$

Отсюда на основании формулы Больца (20), получаем

$$D_{ax}^{2\varepsilon} f^k(t) = \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\Gamma(1-\varepsilon)} [(b-a)z(1-z)]^{-\varepsilon} F(1, -k, \varepsilon - k + 1; z). \quad (34)$$

Известно [10, с. 62], что гипергеометрический полином

$$F(1, -k, \varepsilon - k + 1; z) = F(-k, 1, \varepsilon - k + 1; z) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{j!(-z)^j}{(\varepsilon - k + 1)_j}.$$

Легко видеть, что

$$\binom{\varepsilon}{k} F(-k, 1, \varepsilon - k + 1; z) = \mathcal{P}_k^{(\varepsilon-k, -\varepsilon)}(1-2z)$$

и полином Якоби

$$\mathcal{P}_k^{(\varepsilon-k, -\varepsilon)}(1-2z) = \sum_{j=0}^k \binom{\varepsilon}{j} \binom{k-\varepsilon}{k-j} (-z)^{k-j} (1-z)^j.$$

Из (34) заключаем, что любое решение $u(x)$ уравнения Абеля (29) представимо в виде

$$u(x) = [(x-a)(b-x)]^{-\varepsilon} \sum_{k=0}^m B_k F\left(-k, 1, \varepsilon - k + 1; \frac{x-a}{b-a}\right), \quad (35)$$

где $B_k = A_k (b-a)^\varepsilon \Gamma(1+\varepsilon) / \Gamma(1-\varepsilon)$ или, как это видно из (30),

$$B_k = -(2\pi)^{-1} \left[\varepsilon a_k (b-a)^k B(1-\varepsilon, k-\varepsilon) \Gamma(\varepsilon) / \Gamma(1-\varepsilon) \right] \operatorname{tg}(\pi\varepsilon).$$

Таким образом, доказано, что любой элемент $u(x)$ ядра I_{ab}^α при $\alpha > 0$ представим в виде (35).

Из (7) и (11) вытекает, что любое решение $u(x)$ уравнения Карлемана $I_{ab}^\beta u(x) = D_{ax}^{-m-1} v$, $\beta = \alpha - m - 1$, представимое в виде (3), является решением уравнения Абеля

$$2D_{ax}^\beta u = D_{ax}^{-m-1} v + \frac{1}{\pi} \operatorname{tg}\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \int_a^b \left[\frac{(t-a)(b-t)}{(x-a)(b-x)} \right]^{\beta/2} \frac{D_{at}^{-m-1} v}{t-x} dt. \quad (36)$$

Поддействовав на обе части равенства (36) оператором $D_{at}^{-\beta}$, получим

$$2u(x) = D_{ax}^{-\alpha} v + \frac{1}{\pi} \operatorname{tg}\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \times \\ \times D_{ax}^{m+1-\alpha} \int_a^b \left[\frac{(\tau-a)(b-\tau)}{(t-a)(b-t)} \right]^{(\alpha-m-1)/2} \frac{D_{a\tau}^{-m-1} v d\tau}{\tau-t}.$$

Оператор I_{ab}^α является линейным, поэтому любое решение уравнения $I_{ab}^\alpha u(x) = v(x)$ с правой частью $v(x)$, удовлетворяющей условию (11), в классе функций $u(x)$, представимых в виде (3) и таких, что $I_{ab}^{\alpha-[\alpha]-1} u(x) \in C^{[\alpha]+1}[a, b]$, определяется формулой

$$u(x) = [(x-a)(b-x)]^{(\alpha-[\alpha]-1)/2} \times \\ \times \sum_{k=0}^{[\alpha]} B_k F\left(-k, 1, \frac{[\alpha]+3-\alpha}{2} - k; \frac{x-a}{b-a}\right) + \frac{1}{2} D_{ax}^{-\alpha} v + \\ + \frac{1}{2\pi} \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha - [\alpha] - 1}{2} \pi \right) D_{ax}^{[\alpha]+1-\alpha} \int_a^b \left[\frac{(\tau-a)(b-\tau)}{(t-a)(b-t)} \right]^{(\alpha-[\alpha]-1)/2} \frac{D_{a\tau}^{[\alpha]-1} v d\tau}{\tau - t}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96-01-9-00508).

Литература

1. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М., 1995.
2. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 1. С. 101–109.
3. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., 1977.
4. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 2. С. 313–324.
5. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1971.
6. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, 1987.
7. Нахушев А. М. Некоторые краевые задачи для уравнения смешанного типа с двумя линиями параболического вырождения: Дис. ... к.ф.-м.н. Новосибирск, 1966.
8. Волкодавов В. Ф., Лернер М. Е., Николаев Н. Я., Киселев В. А. Таблицы некоторых функций Римана, интегралов и рядов. Куйбышев, 1982.
9. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М.: ФИЗМАТЛИТ, 1953.
10. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М., 1957.

Поступила в редакцию
25 августа 1998 г.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и автоматизации
КБНЦ РАН

Математические модели вязкоупругого тела

В настоящее время дробное (дифференциальное и интегральное) исчисление в теории фракталов и систем с памятью приобретает такое же важное значение, что и классический анализ в физике (механике) сплошных сред.

Стандартная модель линейного вязкоупругого тела имеет вид [1], [2]

$$\sigma + \sum_{i=1}^m b_i \left(\frac{d^i \sigma}{dt^i} \right) = E_0 \varepsilon + \sum_{i=1}^n E_i \left(\frac{d^i \varepsilon}{dt^i} \right), \quad (1)$$

где $\sigma = \sigma(t)$ и $\varepsilon = \varepsilon(t)$ – напряжение и деформация в момент времени t ; b_i , E_0 , E_i – заданные величины.

Частным случаем (1) является известная модель Максвелла

$$\sigma + \tau \frac{d\sigma}{dt} = E \tau \frac{d\varepsilon}{dt}, \quad (2)$$

где τ – время релаксации, а E – модуль упругости (например, полимера [3]).

Г. Л. Слонимский [4] предложил следующий закон деформации высокоэластичных полимерных тел для деформации сегмента, находящегося в вязкой среде:

$$u(t) = D_{0t}^{-1} v / r + v(t) / k + D_{0t}^{-\alpha} v / \chi. \quad (3)$$

Здесь $u = u(t)$ – перемещение конца сегмента; $v = v(t)$ – действующая на сегмент сила; r – коэффициент вязкого сопротивления; k – жесткость сегмента; χ – постоянная величина; $0 < \alpha < 1$;

$$D_{0t}^{\alpha} \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^t \frac{\varphi(x) dx}{(t-x)^{\alpha+1}}, \quad \alpha < 0,$$

$$D_{0t}^{\alpha} \varphi(x) = \varphi(t), \quad \alpha = 0,$$

$$D_{0t}^{\alpha} \varphi(x) = \frac{\partial^{[\alpha]+1}}{\partial t^{[\alpha]+1}} D_{0t}^{\alpha-[\alpha]-1} \varphi(x), \quad \alpha > 0,$$

где $[\alpha]$ – целая часть действительного числа α .

Легко видеть, что закон деформации (3) можно записать в виде

$$D_{0t}^{1-\alpha} v / \chi + v' / k + v / r = u', \quad u(0) = v(0) / k. \quad (4)$$

А. Джемонт впервые в [5], [6] предложил использовать при моделировании механических свойств вязкоупругих материалов, в том числе полимерных, дифференциалы дробного порядка.

В [2] модель вязкоупругого тела записывается в виде

$$\sigma + \sum_{i=1}^m b_i D_{0t}^{\beta_i} \sigma = E_0 \varepsilon + \sum_{i=1}^n E_i D_{0t}^{\alpha_i} \varepsilon. \quad (5)$$

Там же отмечается, что для моделирования многих вязкоупругих материалов, в частности эластомеров и стекловидных эмалей, достаточно ограничиться моделью

$$\sigma + bD_{0t}^{\beta}\sigma = E_0\varepsilon + E_1D_{0t}^{\alpha}\varepsilon, \quad (6)$$

которая содержит всего пять параметров b , β , E_0 , E_1 и α , причем $0 < \alpha, \beta < 1$. Кроме того, во многих случаях вполне удовлетворительный результат получается, если $\alpha = \beta$.

Очевидно, что модели (1), (4) и (6) являются частными вариантами (5). Частным случаем модели (6) является реологическое уравнение состояния, предложенное Скоттом Блэром [7, с. 75], [2, с. 25]:

$$\sigma = E_0D_{0t}^{\alpha}\varepsilon. \quad (7)$$

В [8] определяющее уравнение

$$E\varepsilon = D_{0t}^{-\alpha}\sigma \quad (8)$$

названо обобщенным законом высокоэластичной деформации.

Общее решение уравнения (относительно деформации) (7) при любом напряжении $\sigma \in L[0, T]$ задается формулой

$$E\varepsilon = ct^{\alpha-1} + D_{0t}^{-\alpha}\sigma, \quad (9)$$

где c – произвольная постоянная величина, T – расчетное время. Если к дифференциальному уравнению дробного порядка α (7) присоединить начальное условие

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{1-\alpha}\varepsilon = \varepsilon^0, \quad (10)$$

то $c = \varepsilon^0 E$. Если $\varepsilon^0 = 0$, то модель (7) с условием (10) совпадает с моделью (8).

Континуальный аналог модели (5) можно определить следующим образом:

$$\sigma + \int_0^m b(\beta)D_{0t}^{\beta}\sigma d\beta = E_0\varepsilon + \int_0^n E(\alpha)D_{0t}^{\alpha}\varepsilon, \quad (11)$$

где m и n не обязаны быть целыми числами [9, с. 22], [10].

Из (11), в частности, имеем

$$\sigma + bD_{0t}^{[0,1]}\sigma = E_0\varepsilon + E_1D_{0t}^{[0,1]}\varepsilon, \quad (12)$$

$$\sigma = E_0D_{0t}^{[0,1]}\varepsilon, \quad (13)$$

где $D_{0t}^{[0,1]}\varphi = \int_0^1 D_{0t}^{\alpha}\varphi d\alpha$ – континуальная производная порядка $[0, 1]$ [11].

Трехпараметрическая модель (12) представляет собой континуальный аналог модели (6). Как и законы Гука и Ньютона, модель (13) является однопараметрической. Континуальный аналог уравнения (8) можно задавать формулой

$$\varepsilon E = \int_0^1 D_{0t}^{-\alpha} \sigma d\alpha.$$

Вследствие осредняющего действия операции перехода от между-предельной производной $D_{0t}^\alpha[\cdot]$ к континуальной $D_{0t}^{[0,1]}[\cdot]$ и уменьшения количества подлежащих идентификации параметров модели преимущество определяющих законов (11), (12) и (13) перед соответствующими реологическими уравнениями состояния (5), (6) и (7) является очевидным.

В наследственной теории вязкоупругости важную роль играет дробно-экспоненциальная функция (по терминологии Ю. Н. Работнова [1])

$$\mathfrak{D}_\alpha(\beta, x) = x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n x^{n(\alpha+1)}}{\Gamma((n+1)(1+\alpha))}, \quad (14)$$

$-1 < \alpha = \text{const} \leq 0$, $\beta = \text{const} \neq 0$.

Пусть $\rho = \alpha + 1$. Из (14) легко видеть, что

$$\mathfrak{D}_\alpha(\beta, x) = x^\alpha E_{1/\rho}(\beta x^\rho; \rho), \quad (15)$$

где $E_\rho(z; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k / \Gamma(\mu + k/\rho)$ – функция типа Миттаг-Леффлера.

Ю. Н. Работновым введены еще следующие функции [1, с. 45]:

$$F_1(\alpha, z) = x^{-\alpha} \mathfrak{D}_\alpha(-\beta, x), \quad (16)$$

$$F_2(\alpha, z) = x^{-\rho} \int_0^x \mathfrak{D}_\alpha(-\beta, \tau) d\tau, \quad z = \beta x^\rho.$$

Из (15) следует, что

$$F_1(\alpha, z) = E_{1/\rho}(-z; \rho). \quad (17)$$

Хорошо известно, что [12, с. 120]

$$\int_0^x E_{1/\rho}(\lambda \tau^\rho; \mu) \tau^{\mu-1} d\tau = x^\mu E_{1/\rho}(\lambda x^\rho; \mu + 1). \quad (18)$$

Равенство (16) с учетом (15) и (18) переписывается в виде

$$F_2(\alpha, z) = x^{-\rho} \int_0^x E_{1/\rho}(-\beta \tau^\rho; \rho) \tau^{\rho-1} d\tau. \quad (19)$$

Из (19), согласно (18), имеем

$$F_2(\alpha, z) = E_{1/\rho}(-z, \rho + 1), \quad \rho = \alpha + 1. \quad (20)$$

Определяющее уравнение Ю. Н. Работнова [1, с. 143], позволяющее вычислить напряжение $\sigma(t)$, если известна деформация $\varepsilon(t)$ вязкоупругого тела, имеет вид

$$\sigma(t) = E \left[\varepsilon(t) - \beta \int_0^t \mathfrak{D}_\alpha(-\beta, t - \tau) \varepsilon(\tau) d\tau \right], \quad (21)$$

где $\beta = \text{const} \neq 0$, $-1 < \alpha = \text{const} \leq 0$, $\mathfrak{D}_\alpha(\beta, x)$ – функция (14).

Опираясь на закон композиции оператора дробного интегрирования, нетрудно доказать, что

$$\sigma + \tau D_{0t}^\rho \sigma = \tau E D_{0t}^\rho \varepsilon, \quad \tau = 1/\beta, \quad \rho = \alpha + 1. \quad (22)$$

Следовательно, уравнение Ю. Н. Работнова редуцируется к модели Р. Л. Торвик–П. Дж. Торвик вязкоупругого тела.

Уравнение (21) можно записать и в виде

$$E\varepsilon(t) = \sigma(t) + \beta D_{0t}^{-\alpha-1} \sigma(\tau). \quad (23)$$

Очевидно, что любое решение $\sigma(t)$ уравнения (23) является решением (22), если существует $D_{0t}^{\alpha+1} \varepsilon$. В классе суммируемых на $[0, T]$ функций ε и σ уравнения (21) и (23) являются эквивалентными.

Если в модели (22) положить $\beta = E/E_0$ ($\tau = E_0/E$), а затем предположить, что отношение $1/E$ достаточно мало (материал не имеет мгновенной упругости), то ее можно аппроксимировать уравнением (7).

Вернемся к модели (22) и запишем ее в виде

$$D_{0t}^\rho \sigma + \beta \sigma = E D_{0t}^\rho \varepsilon, \quad 0 < \rho = \alpha + 1 < 1. \quad (24)$$

Справедливо утверждение: если $D_{0t}^\rho \varepsilon \in L[0, T]$, $\sigma_0 = \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\rho-1} \sigma$, то

$$\sigma(t) = \sigma_0 B_\rho(t; -\beta, 1) + E \int_0^t B_\rho(t - \tau; -\beta, 1) D_{0\tau}^\rho \varepsilon d\tau, \quad (25)$$

где $B_\rho(t; -\beta, 1) = \sum_{k=1}^{\infty} (-\beta)^{k-1} t^{\rho k-1} / \Gamma(\rho k)$.

Принимая во внимание, что для всех $\rho \in]0, 1[$ и $k = 1, 2, \dots$

$$D_{0t}^{-\rho k} D_{0\tau}^\rho \varepsilon = D_{0t}^{\rho(1-k)} \varepsilon - \varepsilon_0 t^{\rho k-1} / \Gamma(\rho k),$$

где $\varepsilon_0 = \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\rho-1} \varepsilon$, формулу (25) можно переписать в виде

$$\sigma(t) = (\sigma_0 - E\varepsilon_0)\mathfrak{D}_\alpha(-\beta, t) + E \left[\varepsilon(t) - \beta \int_0^t \mathfrak{D}_\alpha(-\beta, t - \tau) \varepsilon(\tau) d\tau \right]. \quad (26)$$

Как видно из (26), обобщенное уравнение Максвелла (22) совпадает с определяющим законом Ю. Н. Работнова (21) тогда и только тогда, когда

$$\sigma_0 = E\varepsilon_0. \quad (27)$$

Равенство (27) имеет место, например, если за достаточно короткий период времени $0 \leq t \leq t_0$ имеет место закон Гука $\sigma = E\varepsilon$.

Качественно новые подходы к изучению квазилинейной вязкоупругости дают реологические уравнения состояния следующих двух видов:

$$\begin{aligned} b_0(t)\varphi(\sigma) + \sum_{i=1}^m b_i(t)D_{0t}^{\alpha_i}\varphi(\sigma) + b_{m+1}(t) = \\ = E_0(t)\psi(\varepsilon) + \sum_{i=1}^n E_i(t)D_{0t}^{\beta_i}\psi(\varepsilon) + E_{n+1}(t), \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} b_0(t)\varphi(\sigma) + \int_0^\alpha b(\xi, t)D_{0t}^\xi\varphi(\sigma)d\xi + b_{\alpha+1}(t) = \\ = E_0(t)\psi(\varepsilon) + \int_0^\beta E(\xi, t)D_{0t}^\xi\psi(\varepsilon)d\xi + E_{\beta+1}(t), \end{aligned} \quad (29)$$

где $\varphi(\sigma)$ и $\psi(\varepsilon)$ – обратимые для почти всех σ и ε функций.

При заданном $\psi(\xi)$ соотношение (29) представляет собой непрерывное дифференциальное уравнение относительно функции $\varphi(\sigma)$ [13, с. 99].

Простым следствием реологической модели (28) является уравнение

$$D_{0t}^{\alpha+1}\varphi(\sigma) = \lambda\varphi(\sigma), \quad 0 < \alpha < 1, \quad \lambda = \text{const},$$

которое при $\varphi(\sigma) = \log(\sigma/\sigma_*)$ и $\lambda = 0$ принимает вид

$$D_{0t}^{\alpha+1}\log(\sigma/\sigma_*) = 0.$$

Общее решение этого уравнения задается формулой

$$\sigma = \sigma_* \exp[(at - b)(t/\tau)^{\alpha-1}], \quad (30)$$

где a, b – произвольные постоянные, а τ – характерное время.

Из (30) при $a = 0, b > 0$ получаем растянутый экспоненциальный закон Кольрауша [14, с. 568], впервые предложенный Кольраушем в 1864 г. для описания ползучести материалов, а в 1970 г. использован Уильямсом и Уотсом при моделировании диэлектрической релаксации [14, с. 554]. В статистической теории разрушения растянутый экспоненциальный закон известен как распределение Вейбула.

Литература

1. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М., 1977.
2. Бегли Р. Л., Торвик П. Дж. Аэрокосмическая техника. 1984. Т. 2, № 2. С. 84–93.
3. Бартенев Т. М., Бартенева А. Г. Релаксационные свойства полимеров. М., 1992.
4. Слонимский Г. Л. Докл. АН СССР. 1961. Т. 140, № 2. С. 343–346.
5. Gement A. A Method of analysis. Experimental results. Contained from elasto-viscous // Physics. 1936. Vol. 7. Pp. 311–317.
6. Gement A. On Fractional differentiation. Philosophical magazine. 1938. Vol. 25. Pp. 540–549.
7. Бленд Д. Р. Теория линейной вязкоупругости. М., 1965.
8. Deceh W., Grimmer R. Coupled elastic and viscoelastic rods. 1994. Vol. 24, no. 1. Pp. 37–60.
9. Нахушев А. М. Об уравнениях состояния непрерывных одномерных систем и их приложениях. Нальчик, 1995.
10. Нахушев А. М., Тхакахов Р. Б. Докл. Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 1995. Т. 1, № 2. С. 6–11.
11. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 1. С. 101–109.
12. Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М., 1966.
13. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М., 1995.
14. Фракталы в физике: Тр. VI международного симпозиума по фракталам в физике (МЦТФ. Триест. Италия. 9–12 июля 1985): Пер. с англ./ Под ред. Л. Пьетронеро, Э. Тотатти. М., 1988.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН

Еще раз об одном свойстве оператора Римана–Лиувилля

Рассмотрим оператор Римана–Лиувилля D_{ax}^α , порядка $|\alpha| < 1$, область определения $D_\alpha[a, b]$ которого принадлежит пространству $L[a, b]$ функций $\varphi(x)$ интегрируемых по Риману на сегменте $[a, b]$:

$$D_{ax}^\alpha \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{x-\varepsilon} (x-t)^{-\alpha-1} \varphi(t) dt \quad \text{при } \alpha < 0,$$

$$D_{ax}^\alpha \varphi(x) = \frac{\partial}{\partial x} D_{ax}^{\alpha-1} \varphi(x) \quad \text{при } \alpha > 0,$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера.

Выражение $(\varphi, \psi)_{[a,b]}$ отождествим со скалярным произведением в пространстве $L^2[a, b]$:

$$(\varphi, \psi)_{[a,b]} = \int_a^b \varphi(x) \psi(x) dx.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. Пусть функция $\psi = \psi(x)$ является неотрицательной, невозрастающей и непрерывной на сегменте $[a, b]$. Тогда для любой функции $\varphi \in D_\alpha[a, b]$ имеет место неравенство

$$(\varphi, \psi D_{ax}^\alpha \varphi)_{[a, b]} \geq 0 \quad (1)$$

и $(\varphi, \psi D_{ax}^\alpha \varphi)_{[a, b]} = 0$ тогда и только тогда, когда $\varphi = 0$.

Действительно, из второй формулы среднего значения интеграла Римана [1, с. 385] следует, что если функция $f = f(x)$ интегрируема, а функция $g = g(x)$ не возрастает, непрерывна и неотрицательна на сегменте $[a, b]$, то найдется число ξ между a и b такое, что

$$(f, g)_{[a, b]} = g(a) D_{a\xi}^{-1} f(t). \quad (2)$$

В формуле (2) положим $f(x) = \varphi(x) D_{ax}^\alpha \varphi(t)$, $g(x) = \psi(x)$. В результате получим

$$(\varphi D_{ax}^\alpha \varphi, \psi)_{[a, b]} = \psi(a) (\varphi, D_{ax}^\alpha \varphi)_{[a, \xi]}. \quad (3)$$

В работе [2] (см. также [3, с. 55]) обращено внимание на то, что для любого числа $\alpha \in]-1, 0]$ и $c \in]a, b]$ оператор D_{ax}^α является положительно определенным:

$$(\varphi D_{ax}^\alpha \varphi)_{[a, c]} \geq 0, \quad (\varphi D_{ax}^\alpha \varphi)_{[a, c]} = 0 \iff \varphi(x) = 0 \quad \forall x \in [a, c]. \quad (4)$$

Предложение (4) остается истинным и для любого $\alpha \in [0, 1[$.

В самом деле, по предположению функция

$$\Phi(x) = D_{ax}^\alpha \varphi(t), \quad 0 < \alpha < 1, \quad a \leq x \leq c, \quad (5)$$

является ограниченной. Стало быть, к обоим частям равенства (5) можно применить оператор $D_{ax}^{-\alpha}$:

$$D_{ax}^{-\alpha} \Phi(x) = D_{ax}^{-\alpha} D_{at}^\alpha \varphi(\xi) = \varphi(x) - (x - a)^{\alpha-1} D_{aa}^{\alpha-1} \varphi / \Gamma(\alpha),$$

где $D_{aa}^{\alpha-1} \varphi = \lim_{x \rightarrow a} D_{aa}^{\alpha-1} \varphi(t)$. Из ограниченности функции $\varphi(x)$ на сегменте $[a, c]$ вытекает, что $D_{aa}^{\alpha-1} \varphi = 0$.

Поэтому замена (5) является обратимой и

$$\varphi(x) = D_{ax}^{-\alpha} \Phi(t), \quad 0 < \alpha < 1. \quad (6)$$

Далее в силу (5) и (6) для любой функции $\varphi(x) \in D_\alpha[a, c]$, $0 < \alpha < 1$, можно записать:

$$(\varphi, D_{ax}^\alpha \varphi)_{[a, c]} = (D_{ax}^{-\alpha} \Phi, \Phi)_{[a, c]} \geq 0;$$

$$(\Phi, D_{ax}^{-\alpha} \Phi)_{[a, c]} = 0 \iff \Phi = 0 \quad \forall x \in [a, c]; \quad \Phi = 0 \iff \varphi = 0. \quad (7)$$

Поскольку $\psi(a) > 0$, то из (3) и (4) получаем (1).

Пользуясь истинными предложениями (3) и (7) легко доказать и вторую часть теоремы.

Доказанная теорема играет важную роль при математическом моделировании широкого класса процессов и явлений в средах с фрактальной структурой, в основе которых лежат уравнения в частных производных смешанного типа [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 00-01-00311а).

Литература

1. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. М.: Наука, 1979. 720 с.
2. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10, № 1. С. 100–111.
3. Нахушев А. М. Элементы дробного исчисления и их применение. Нальчик: КБНЦ РАН, 2000. 299 с.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН

Дробное исчисление как математическая основа уравнений состояния фрактальных сред

Хорошо известно (см., например. [1], с. 553–582), что самые различные типы релаксации в конденсированных средах имеют на больших временах неэкспоненциальное поведение. К основным типам законов релаксации, весьма часто встречающимся при исследовании неупорядоченных фрактальных систем, относятся закон Кольрауша–Уильямса–Уоттса:

$$\Phi(t) = \Phi_\alpha \exp[-(t/\tau)^\alpha], \quad \Phi_\alpha = \text{const}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad t > \tau; \quad (1)$$

экспоненциально-логарифмический закон затухания (Инокути-Хирайяма):

$$\Phi(t) = \Phi_\beta \exp[-B \log^\beta(t/\tau)], \quad \Phi_\beta = \text{const}, \quad B = \text{const} > 0, \quad \beta \geq 1, \quad t > \tau;$$

алгебраический (степенной) закон релаксации:

$$\Phi(t) = \Phi_\gamma (t/\tau)^{-\gamma}, \quad \Phi_\gamma = \text{const}, \quad \gamma > 0, \quad t > \tau.$$

Здесь $\Phi(t)$ – функция Кольрауша [2, с. 86], τ – характерное время, числа α , β , γ – существенно зависят от фрактальной размерности среды и их идентификация производится, как правило, экспериментальными методами.

Цель настоящей статьи – показать, что общей математической основой различных физических моделей, приводящих к этим и другим законам релаксации и уравнениям состояния фрактальных сред, могут стать дифференциальные уравнения дробного порядка.

Важная роль этих уравнений и связанных с ними функций типа Миттаг-Леффлера во фрактальных моделях вязкоупругого тела, недебавевской релаксации и диффузии, при реализации концепции фрактала в физике конденсированной среды продемонстрирована в работах [3–8].

В дальнейшем, не нарушая общности, будем предполагать, что $\Phi_\alpha = \Phi_\beta = \Phi_\gamma = 1$.

Функция типа Миттаг-Леффлера имеет вид

$$E_\nu[z; \mu] = \sum_{k=0}^{\infty} z^k / \Gamma(\mu + k/\nu), \quad \nu = \text{const} > 0, \quad \mu = \text{const}, \quad (2)$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера.

При $\nu = \mu = 1$ функция (2) совпадает с $\exp[z]$ и формулу (1) можно записать в виде

$$\Phi(t) = E_1[-(t/\tau)^\alpha; 1]. \quad (3)$$

Пусть $y = t/\tau$, $\varphi(y) = \log E_1[-y^\alpha; 1]$. Тогда функция $\varphi(y)$ является решением дифференциального уравнения дробного порядка

$$D_{0y}^{\alpha+1} \varphi(y) = 0, \quad 1 < \alpha + 1 < 2, \quad (4)$$

где D_{0y}^ξ – оператор дробного дифференцирования порядка ξ [3, с. 13].

Уравнение (4) подтверждает фрактальную по времени $t = \tau y$ природу функции Кольрауша $\Phi(t)$.

Естественным обобщением формулы (3) является следующий *обобщенный закон релаксации Кольрауша*:

$$\Phi(t) = E_1[\varphi(t/\tau); 1], \quad (5)$$

где $\varphi(y)$ – решение дифференциального уравнения дробного порядка

$$D_{0y}^{\alpha+1} \varphi(y) = \lambda \varphi(y), \quad \lambda = \text{const} > 0, \quad (6)$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$\lim_{y \rightarrow 0} \varphi(y) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} \varphi(y) = -\infty. \quad (7)$$

Решение задачи (6), (7) задается формулой

$$\varphi(y) = ay^\alpha E_{1/(\alpha+1)}[\lambda y^{\alpha+1}; \alpha + 1], \quad a = \text{const} < 0. \quad (8)$$

Из (5), (8) заменой $t/\tau \in [1, \infty[$ на $\log(t/\tau) \in [0, \infty[$ получаем *обобщенный экспоненциально-логарифмический закон релаксации*

$$\Phi(t) = E_1[\varphi(\log(t/\tau)); 1], \quad 1 < t/\tau < \infty, \quad (9)$$

где $\varphi(y)$, $y = \log(t/\tau)$ – решение задачи (6), (7). Здесь α может быть ≥ 1 .

В случае, когда $\varphi(y) = -by^\beta$, $\beta \geq 1$, $b > 0$, формула (8) совпадает с *экспоненциально-логарифмическим законом затухания* [1, с. 561]. При $\beta = 1$ функция $\Phi(t) = E_1[-b \log(t/\tau); 1] = \exp(-b \log(t/\tau)) = (t/\tau)^{-b}$, и мы получаем *закон алгебраического затухания*.

В уравнении (6) учтем флуктуации в форме $\mu y^{-\beta}$, где $\mu = \text{const}$, $\beta = \text{const} > -1$. Тогда оно примет вид

$$D_{0y}^{\alpha+1} \varphi(y) = \lambda \varphi(y) + \mu y^\beta. \quad (10)$$

Общее решение уравнения (10) определяется формулой

$$\begin{aligned} \varphi(y) = & a_1 y^\alpha E_{1/(\alpha+1)}[\lambda y^{\alpha+1}; \alpha + 1] + a_2 y^\alpha E_{1/(\alpha+1)}[\lambda y^{\alpha+1}; \alpha] + \\ & + \mu \Gamma(\beta + 1) y^{\alpha+\beta+1} E_{1/(\alpha+1)}[\lambda y^{\alpha+1}; \alpha + \beta + 2], \end{aligned} \quad (11)$$

где a_1 и a_2 – параметры, обеспечивающие соблюдение условия (7).

При $\lambda = 0$, $\beta = -\alpha$ из (11) получаем

$$\varphi(y) = ay^\alpha + by^{\alpha-1} + \mu \Gamma(1 - \alpha)y, \quad a = a_1/\Gamma(\alpha + 1), \quad b = a_2/\Gamma(\alpha). \quad (12)$$

Функция (12) будет подчиняться условию (7) тогда и только тогда, когда $b = 0$ и $a < 0$. Функции $\varphi(y) = ay^\alpha + \mu \Gamma(1 - \alpha)y$, где $a = \text{const} < 0$ соответствует комбинированный закон затухания

$$\Phi(t) = \Phi_0 \exp[\mu \Gamma(1 - \alpha)(t/\tau)] \exp[a(t/\tau)^\alpha]. \quad (13)$$

Из (12) при $\Phi_0 = 1$, $a = d/(d + 2)$, где d – размерность пространства, следует *комбинированный закон спада концентрации* $\Phi(t) = C(t)$ химического вещества, частицы которого свободно диффундируют в растворе, в котором случайно расположены практически неподвижные ненасыщенные ловушки [1, с. 582]. В этом случае параметр μ пропорционален коэффициенту диффузии ловушек.

Если изменение концентрации $C(t)$ во времени происходит в субдиффузионном режиме [6], то можно предположить, что функция $C = C(t)$ является решением уравнения стохастического переноса

$$\Gamma(1 - \gamma) D_{0t}^\gamma C(\eta) = C_0 t^{-\gamma}, \quad C_0 = \text{const} \geq 0, \quad 0 < \gamma = \text{const} < 1. \quad (14)$$

Общее решение уравнения (14) имеет вид

$$C(t) = C_0 + C_1(t/\tau)^{\gamma-1}, \quad t > \tau, \quad C_0 + C_1 = C(\tau). \quad (15)$$

Как видно из (15), концентрация $C(t)$ подчиняется закону алгебраического затухания. Дробная (сингулярная) зависимость концентрации от времени характеризует фрактальную во времени природу процесса диффузии ловушек.

Пусть в формуле (13) τ совпадает с временем τ_0 , в течение которого можно считать неподвижным расположение совокупности взаимодействующих в процессе переноса молекул доноров и акцепторов; $a = 1/2$; $\mu = -1/\sqrt{\pi}$, $a = -2\pi R_0^3 N_a$, где R_0 – расстояние, на котором оптические характеристики равны $1/\tau_0$, N_a – число молекул акцептора; $\Phi_0 = N_0$ – число молекул донора в 1 см^3 в начальный момент времени $t = 0$. Тогда эта формула переходит в *комбинированный закон уменьшения числа доноров*

$$\Phi(t) = N(t) = N_0 \exp \left[-t/\tau_0 - 2\pi R_0^3 N_a \sqrt{t/\tau_0} \right].$$

Форстеровская модель прямого переноса возбуждений от доноров к статическим дефектам в конденсированной среде, интерпретируемой как фрактал с размерностью Хаусдорфа α , приводит (см. [1, с. 555]) к *ускоренному степенному закону* вида

$$\Phi(t) = (Bt)^{-A \log^{\alpha-1}(Bt)}. \quad (16)$$

Формула (16) эквивалентна формуле $\Phi(t) = \exp[-A \log^{\alpha}(Bt)]$, и поэтому она является частным случаем обобщенного экспоненциально-логарифмического закона, когда в уравнении (10) число α равно фрактальной размерности.

При решении проблемы корректного выбора уравнения состояния вещества в физике высоких давлений [9], [10] часто используются функции, которые являются вариантами следующей специальной функции:

$$E_{\nu\beta}^{\alpha\lambda}(x; \mu) = \beta_1 + \beta_2 x^{\alpha_1} + \beta_3 x^{\alpha_2} E_{\nu}[\lambda x^{\alpha_3}; \mu], \quad (17)$$

где независимая скалярная переменная $x \in R^+ = \{x : x > 0\}$, λ и $\nu \in R^+$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ – точки пространства Евклида R^3 .

Из (17) при $\nu = \mu = 1$ имеем

$$E_{1\beta}^{\alpha\lambda}(x; 1) = \beta_1 + \beta_2 x^{\alpha_1} + \beta_3 x^{\alpha_2} \exp[\lambda x^{\alpha_3}]. \quad (18)$$

Пусть в формуле (18)

$$\alpha = (1/3, 2/3, 1/3), \quad \beta_1 = -K < 0, \quad \beta_2 = \gamma \rho E_a, \quad b = \lambda, \quad \beta_3 = A \exp[b].$$

Тогда «для большинства металлов (за исключением щелочных) изотерма при нулевой температуре может быть представлена в виде»: $P_x = x^{-4/3} E_{1\beta}^{\alpha\lambda}(x, 1)$, где $x = V/V_0$ – безразмерный объем, P_x – давление, A, b, K – постоянные, подлежащие экспериментальному определению,

γ – коэффициент Грюнайзена, ρ – начальная плотность, E_a – энергия нулевых колебаний атомов (см. [10, с. 30]).

Если $\alpha_1 = \varepsilon - 1$, $\alpha_2 = 2\varepsilon - 1$, $0 < \alpha_3 = \varepsilon < 1$, $\mu = 2\varepsilon$, $\nu = 1/\varepsilon$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = a/\Gamma(\varepsilon)$, $\beta_3 = \lambda a$, a – произвольная постоянная, то функция $u(x) = E_{\nu\beta}^{\alpha\lambda}(x, \mu)$ для любого λ будет решением следующего дифференциального уравнения:

$$D_{0x}^\varepsilon u(\xi) = \lambda u(x). \quad (19)$$

Предложенные в работах [11], [12] модели масштабного уравнения состояния и формулу для давления насыщения можно записать следующим образом:

$$f_s \equiv \frac{\rho_j - \rho_g}{2\rho_c} = \sum_{n=0}^{\infty} B_{sn} t^{\beta+\delta n}, \quad f_d \equiv \frac{\rho_j + \rho_g}{2\rho_c} = \sum_{n=0}^{\infty} B_{dn} t^{1-\alpha+\delta n},$$

$$\log \frac{P}{P_c} = t \sum_{n=0}^{\infty} K_n t^{1-\alpha+\delta n}, \quad (20)$$

где ρ_j и ρ_g – плотности жидкой и газовой фаз, $t = 1 - T/T_c$ – относительная температура, ρ_c , P_c и T_c – критические плотность, давление и температура; «амплитуды» B_{sn} , коэффициенты K_n и параметры β , δ определяются путем идентификации, $0 < \alpha$, β , $\delta < 1$ ($\beta = 0,325$, $\alpha = 0,11$, $\delta = 0,5$).

Пусть

$$B_{\nu n} = \lambda_\nu^n / \Gamma(\mu_\nu + n\delta), \quad \nu = s, d,$$

где λ_ν и $\mu_\nu \in R$. Тогда из (20) имеем

$$f_\nu = t^{\beta_\nu} E_{1/\delta} [\lambda_\nu t^\delta; \mu_\nu], \quad \beta_\nu = 1 - \alpha; \beta. \quad (21)$$

Функция (21) при $\mu_\nu = \beta_\nu + 1$, будет решением дифференциального уравнения порядка δ

$$D_{0t}^\delta f_\nu = \lambda_\nu f_\nu + t^{\beta_\nu - \delta} / \Gamma(\beta_\nu - \delta + 1).$$

Это предложение позволяет утверждать, что уравнение

$$D_{0t}^\delta f_\nu = \lambda_\nu f_\nu + \varepsilon_\nu t^{\beta_\nu - \delta}, \quad (22)$$

содержащее всего лишь четыре параметра β_ν , δ , λ_ν и ε_ν , можно истолковать как модель масштабного уравнения состояния вещества, например, хладона R134a. Аналогично, если $K_n = \lambda^n / \Gamma(3 - \alpha + n\delta)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, то функция $u(t) = \log(P/P_c)$ является решением уравнения

$$D_{0t}^\delta u(\eta) = \lambda u(t) + t^{2-\alpha-\delta} / \Gamma(3 - \alpha - \delta). \quad (23)$$

В уравнении (22) положим

$$f_\nu(t) = u(t), \quad \lambda_\nu = \lambda, \quad \varepsilon_\nu = \varepsilon/\Gamma(\beta + 1 - \delta), \quad \beta_\nu = \beta,$$

где ε не зависит от δ . Полученное равенство заменим его «математическим ожиданием», т. е. *непрерывным дифференциальным уравнением*:

$$D_{0t}^{[0,1]}u = \lambda u(t) + \varepsilon V_i(\beta, \beta + 1, t)/t, \quad (24)$$

где

$$D_{0t}^{[0,1]}u = \int_0^1 D_{0t}^\delta u d\delta, \quad V_i(\beta, \beta + 1, t) = \int \beta^{\beta+1} \frac{t^\xi d\xi}{\Gamma(\xi)}$$

– специальная функция, введенная в работе [5].

Уравнения (6), (10), (19) и (22)–(24) относятся к классу линейных обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка.

Уравнениям состояния дробного порядка для непрерывных одномерных систем типа «вход-выход» посвящена работа [5].

Авторы выражают благодарность академику В. Е. Фортову и профессору А. И. Темрокову за внимание к этой работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 00-01-00311а).

Литература

1. Фракталы в физике: Труды VI Международного симпозиума по фракталам в физике (МЦТФ. Триест. Италия. 9–12 июля 1985): пер. с англ. / Под ред. Л. Пьетронеро, Э. Тозатти. М.: Мир, 1988. 678 с.
2. Бартнев Г. М., Бартнева А. Г. Релаксационные свойства полимеров. М.: Химия, 1992. 334 с.
3. Нахушев А. М. Элементы дробного исчисления и их применение. Нальчик: КБНЦ РАН, 2000. 299 с.
4. Олемский А. И., Флат А. Я. УФН. 1993. Т. 163, № 12. С. 1–49.
5. Нахушев А. М. Об уравнениях состояния непрерывных одномерных систем и их приложениях. Нальчик: Логос, 1995. 59 с.
6. Чукбар К. В. ЖЭТФ. 1995. Т. 108, вып. 5. С. 1875.
7. Кобелев В. Л., Романов Е. П., Кобелев Я. Л., Кобелев Л. Я. ДАН. 1998. Т. 361, № 6. С. 755–758.
8. Нахушев А. М. Изв. вузов Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2000. № 3. С. 107–109.
9. Фортов В. Е. Модели уравнений состояния вещества (препринт). Черногловка. Отделение ордена Ленина института хим. физики РАН, 1979.
10. Канель Г. И., Разоренов С. В., Уткин А. В., Фортов В. Е. Ударно-волновые явления в конденсированных средах. М.: Янус-К, 1996. 408 с.
11. Устюжанин Е. Е., Реутов Б. Ф., Сукач И. А. Тезисы докладов XIV Международной конференции «Воздействие интенсивных потоков энергии на вещество». Терскол: Тип. ИПХФ РАН, 1999. С. 60.
12. Устюжанин Е. Е., Реутов Б. Ф., Кузубов К. А. Тезисы докладов XV Международной конференции «Уравнения состояния вещества». Терскол: ИПХФ РАН, 2000. С. 46–47.

Об априорных оценках для уравнения с обобщенным оператором Трикоми в главной части

Рассмотрим уравнение в частных производных второго порядка

$$K(y)u_{xx} + u_{yy} = f(u), \quad (1)$$

где $K(y) \leq 0$, в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, ограниченной отрезком

$$AB = \{(x, y): 0 \leq x \leq r, y = 0\}$$

и характеристиками

$$AC: dx + \sqrt{-K(y)}dy = 0 \quad \text{и} \quad BC: dx - \sqrt{-K(y)}dy = 0,$$

выходящими из точки $C = (r/2; y_c)$, $y_c < 0$ (см. рис. 1).

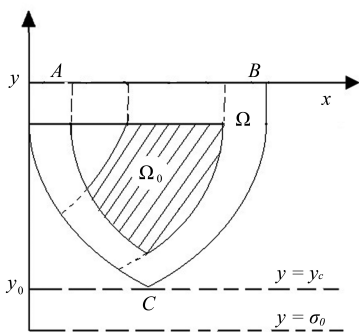


Рис. 1

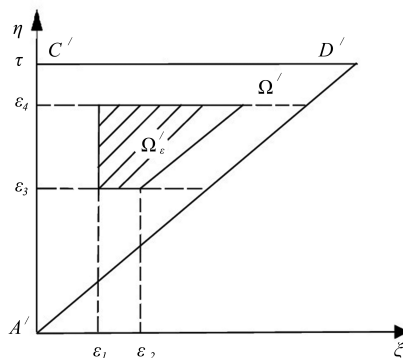


Рис. 2

Уравнение (1) при $K(y) = y$, $f(u) = 0$ совпадает с хорошо известным в газовой динамике смешанных течений уравнением Трикоми.

Предполагается, что $f: u \rightarrow f(u)$ – дифференциальный оператор в частных производных первого порядка с областью определения $D(f) \subset C^2(\Omega)$ и областью значения $R(f) \subset C(\Omega)$;

$$K(y) \in C^2[y_c, 0], \quad K'(y) \neq 0, \quad K(y) < 0 \quad \forall y \in]y_c, 0]; \quad (2)$$

$$|K(y)| \leq K_0|y|^{-2\mu}, \quad K_0 = \text{const} > 0, \quad \mu = \text{const} < 1. \quad (3)$$

Условие (3) позволяет записать характеристические координаты уравнения (1) в виде

$$\xi = x + \int_0^y \sqrt{-K(t)}dt, \quad \eta = x - \int_0^y \sqrt{-K(t)}dt. \quad (4)$$

На характеристике AC $\xi = 0$, а на характеристике BC $\eta = r$.

В силу (2) якобиан преобразования (4)

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \partial\xi/\partial x & \partial\xi/\partial y \\ \partial\eta/\partial x & \partial\eta/\partial y \end{vmatrix} = -2\sqrt{-K(y)}$$

отличен от нуля при $y_c < y < 0$. Преобразование (4) отображает область Ω в область $\Omega' = \{(\xi, \eta) : 0 < \xi < \eta < r\}$ евклидовой плоскости точек (ξ, η) (см. рис. 2).

Для любой функции $u = u(x, y)$ из класса $C^2(\Omega)$ справедливы следующие равенства:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{-K}} \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\sqrt{-K}} \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (5)$$

$$K u_{xx} = K (u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}), \quad (6)$$

$$u_{yy} = -K (u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) - \frac{K'}{2\sqrt{-K}} (u_{\xi} - u_{\eta}). \quad (7)$$

В силу (6) и (7) уравнение (1) записывается в виде

$$\sqrt{-K} K' u_{\xi} = \sqrt{-K} K' u_{\eta} - 8K^2 u_{\xi\eta} + 2K f(u). \quad (8)$$

Следуя Ф. И. Франклю [1, с. 283], введем функцию $M(y)$ по формуле

$$M(y) \frac{d\sqrt{|K|}}{dy} = 4|K|^{3/2}, \quad K \equiv K(y).$$

Очевидно, что при $y_c < y < 0$ функция $M(y) = -8K^2/K'$.

Согласно (5) имеем

$$M(y) u_{\eta} u_{\xi\eta} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} [M(y) u_{\eta}^2] - \frac{1}{2} u_{\eta}^2 \frac{\partial M(y)}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} [M(y) u_{\eta}^2] - \frac{M'(y)}{4\sqrt{-K}} u_{\eta}^2. \quad (9)$$

Обе части уравнения (8) умножим на u_{η}/K' , а затем воспользуемся (9). В результате получим

$$\sqrt{-K} u_{\xi} u_{\eta} = -\sqrt{-K} N(K) u_{\eta}^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} [M(y) u_{\eta}^2] + 2K u_{\eta} f(u)/K', \quad (10)$$

где дифференциальный оператор N действует на K по формуле

$$N(K) = -1 - \frac{M'(y)}{4K(y)}.$$

Поскольку

$$N(K) = -1 + \frac{2}{K} \left[K \left(\frac{K}{K'} \right) \right]' = -1 + 2 \left(\frac{K}{K'} \right)' + 2,$$

то функция

$$N(K) = 1 + 2(K/K')', \quad y_c < 0 < 0 \quad (11)$$

совпадает с известной в теории уравнений смешанного типа функцией $F(y)$ [2, с. 9].

Пусть

$$\Omega'_\varepsilon = \{(\xi, \eta) : \varepsilon_3 < \eta < \varepsilon_4, \varepsilon_1 < \xi < \eta + \varepsilon_2 - \varepsilon_3\},$$

где $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$, $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3 < \varepsilon_4 < r$ — строго внутренней подобласть области Ω' (см. рис. 2); Ω_ε — прообраз области Ω'_ε при отображении (4) (см. рис. 1); $\omega'_0 = A'B' = \{(\xi, \eta) : 0 < \eta = \xi < r\}$; $\omega'_1 = A'C' = \{(\xi, \eta) : \xi = 0, 0 < \eta < r\}$; интеграл $\int_{\Omega'} \varphi d\xi d\eta$ от функции

$\varphi = \varphi(\xi, \eta)$ определен равенством

$$\int_{\Omega'} \varphi d\xi d\eta = \lim_{\varepsilon_4 \rightarrow r} \lim_{\varepsilon_3 \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow \varepsilon_3} \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_{\Omega'_\varepsilon} \varphi d\xi d\eta.$$

Имеет место следующая

Лемма. Пусть $u = u(x, y)$ — регулярное в области Ω решение уравнения (1), обладающее следующими свойствами:

- 1) $K(y)u_\eta^2 \in C(\Omega' \cup \omega'_0 \cup \omega'_1)$;
- 2) существует интеграл от функции $\varphi = \sqrt{-K}N(K)u_\eta^2$ по области Ω' ; справедливо равенство

$$[(Ku_\eta)^2 / K'] (0, \eta) = [(Ku_\eta)^2 / K'] (\eta, \eta), \quad 0 < \eta < r. \quad (12)$$

Тогда

$$\int_{\Omega'} \sqrt{-K} \left[u_\xi + 2\sqrt{-K}f(u)/K' \right] u_\eta d\xi d\eta = - \int_{\Omega'} \sqrt{-K}N(K)u_\eta^2 d\xi d\eta. \quad (13)$$

Действительно, на основании формулы Грина имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} \frac{\partial}{\partial \xi} [M(y)u_\eta^2] d\xi d\eta &= \lim_{\varepsilon_4 \rightarrow r} \lim_{\varepsilon_3 \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow \varepsilon_3} \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_{\partial \Omega'_\varepsilon} M(y)u_\eta^2 d\eta = \\ &= \lim_{\varepsilon_4 \rightarrow r} \lim_{\varepsilon_3 \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow \varepsilon_3} \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_{\varepsilon_3}^{\varepsilon_4} \{ [M(y)u_\eta^2] |_{\xi=\eta+\varepsilon_2-\varepsilon_3} - [M(y)u_\eta^2] |_{\xi=\varepsilon_1} \} d\eta = \\ &= \int_0^r \{ [M(y)u_\eta^2] (\eta, \eta) - [M(y)u_\eta^2] (0, \eta) \} d\eta. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом нелокального краевого условия (12) получаем, что

$$\int_{\Omega'} \frac{\partial}{\partial \xi} [M(y)u_\eta^2] d\xi d\eta = 0. \quad (14)$$

Равенства (10) и (14) говорят об истинности формулы (13).

Так как $d\xi d\eta = 2\sqrt{-K}d\Omega$, то формулу (13) можно переписать в виде

$$\int_{\Omega} \left[u_{\xi} + 2\sqrt{-K}f(u)/K' \right] u_{\eta} K d\Omega = - \int_{\Omega} K N(K) u_{\eta}^2 d\Omega. \quad (15)$$

Из (15) при

$$2\sqrt{-K}f(u)/K' = \lambda u_{\xi} + \mu u_{\eta}, \quad (16)$$

где $\lambda = \text{const}$, $\mu = \mu(x, y) \in C(\bar{\Omega})$, получаем равенство

$$(1 + \lambda) \int_{\Omega} K u_{\xi} u_{\eta} d\Omega = - \int_{\Omega} K [N(K) + \mu] u_{\eta}^2 d\Omega. \quad (17)$$

Условие (16) в силу (1), (6) и (7) означает, что функция u как функция характеристических переменных ξ и η удовлетворяет уравнению

$$8(-K)^{3/2}u_{\xi\eta} + (\lambda + 1)K'u_{\xi} + (\mu - 1)K'u_{\eta} = 0. \quad (18)$$

При $K(y) = y$, $4(-y)^{3/2} = 3(\eta - \xi)$ уравнение (18) переходит в обобщенное уравнение Эйлера–Дарбу–Пуассона

$$(\eta - \xi)u_{\xi\eta} + B'u_{\xi} - Bu_{\eta} = 0, \quad (19)$$

где

$$B' = (\lambda + 1)/6, \quad B = (1 - \mu)/6. \quad (20)$$

Уравнение (19) в силу (20) относится к классу гиперболического типа уравнений первого рода, если в области Ω' $\lambda - \mu < 4$, и второго рода, если $\lambda - \mu > 4$ [3].

Как видно из (5),

$$4Ku_{\xi}u_{\eta} = Ku_x^2 + u_y^2.$$

Теперь ясно, что равенство (17) можно записать в виде

$$(1 + \lambda)F(K; u) = -4 \int_{\Omega} K [N(K) + \mu] u_{\eta}^2 d\Omega, \quad (21)$$

где

$$F(K; u) = \int_{\Omega} (Ku_x^2 + u_y^2) d\Omega. \quad (22)$$

Из (21) вытекают следующие две теоремы.

Теорема 1. Пусть $f(u)$ задается формулой (16) и соблюдены условия леммы. Тогда

$$(1 + \lambda)F(K; u) \geq 0 \quad (\leq 0),$$

если

$$N(K) + \mu \geq 0 \quad (\leq 0) \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

Теорема 2. Пусть $f(u)$ задается формулой (16), соблюдены условия леммы и функции $N(K) \in C[y_c, 0]$. Тогда

$$(1 + \lambda)F(K; u) \geq 4\mu_* \int_{\Omega} |K| u_{\eta}^2 d\Omega,$$

если $\mu_* = \min_{\bar{\Omega}} [N(K) + \mu] \geq 0$;

$$(1 + \lambda)F(K; u) \leq 4\mu^* \int_{\Omega} |K| u_{\eta}^2 d\Omega,$$

если $\mu^* = \max_{\bar{\Omega}} [N(K) + \mu] \leq 0$.

Пусть теперь

$$2\sqrt{-K}f(u)/K' = \lambda \frac{\partial u}{\partial \xi} + \sum_{i=1}^n \mu_i \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^{2i-1}, \quad \mu_1 \equiv \mu,$$

где $\mu_i = \mu_i(x, y) \in C(\bar{\Omega})$ для любого $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда равенство (15) принимает следующий вид:

$$(1 + \lambda)F(K; u) = -4 \int_{\Omega} K \left\{ [N(K) + \mu] \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 + \sum_{i=2}^n \mu_i \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^{2i} \right\} d\Omega. \quad (23)$$

Из (23) следует, что если $N(K) + \mu \geq 0$, $\mu_i(x, y) \geq 0$ в области Ω , то $(1 + \lambda)F(K; u) \geq 0$.

Нелинейное условие (12) при $K'(y) > 0$ (либо $K'(y) < 0$) можно заменить линейным нелокальным краевым условием

$$\left[\left(K/\sqrt{|K'|} \right) u_{\eta} \right] (0, \eta) = G \left[\left(K/\sqrt{|K'|} \right) u_{\eta} \right] (\eta, \eta), \quad 0 < \eta < r, \quad (24)$$

где коэффициент G равен 1 или -1 .

Пусть

$$K(y) = -(-y)^m, \quad -2 < m = \text{const}.$$

Тогда вследствие (4) имеем

$$\xi = x - 2 \frac{(-y)^{\frac{m+2}{2}}}{m+2}, \quad \eta = x + 2 \frac{(-y)^{\frac{m+2}{2}}}{m+2}, \quad \sqrt{-K} = \left[\frac{m+2}{4} (\eta - \xi) \right]^{\frac{m}{m+2}},$$

$$\frac{K}{\sqrt{|K'|}} = -\frac{1}{\sqrt{|m|}} (-y)^{\frac{m+1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{|m|}} \left[\frac{m+2}{4} (\eta - \xi) \right]^{\frac{m+1}{m+2}} \quad (m \neq 0),$$

и, стало быть, условие (24) допускает следующую запись:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\partial u}{\partial \eta} = G \lim_{\xi \rightarrow \eta} (1 - \xi/\eta)^{\frac{m+1}{m+2}} \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad 0 < \xi < \eta < r, \quad (25)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \left[\frac{m+2}{4} (\eta - \xi) \right]^{\frac{-m}{m+2}} \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

При $m = 0$, $f(u) = 0$ уравнение (1) и условие (25) принимают вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right) u = 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega, \quad (26)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\partial u}{\partial \eta} = G \lim_{\xi \rightarrow \eta} \sqrt{1 - \xi/\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad 0 < \eta < r, \quad (27)$$

где $\Omega = \{(x, y) : 0 < \xi < \eta < r\}$, $\xi = x + y$, $\eta = x - y$,

$$2 \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Пусть $u = u(x, y)$ – регулярное в области Ω решение уравнения (26) такое, что

$$u(x, 0) \equiv T(x) \in C^2[0, r[, \quad u_y(x, 0) \equiv N(x) \in C^1[0, r[.$$

Тогда

$$2\partial u/\partial \eta = T'(\eta) + N(\eta) \in C(0 < \eta < r). \quad (28)$$

Из (28) следует, что при $\xi \rightarrow \eta$ выражение $\sqrt{1 - \xi/\eta} \partial u/\partial \eta \rightarrow 0$.

Принимая это во внимание, из (27) получаем локальное краевое условие

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, \quad 0 < \eta < r. \quad (29)$$

Равенство (29) говорит о том, что функция u является решением уравнения

$$u_x - u_y = 0.$$

Она будет решением и уравнения

$$u_x^2 - u_y^2 = (u_x + u_y)(u_x - u_y) = 0.$$

Поэтому ясно, что функционал $F(1, u) = 0$.

Когда $m \neq 0$, выражение $N(-(-y)^m) = 1 + 2/m$ и оно положительно при $m > 0$ и отрицательно при $-2 < m < 0$.

Известное в теории смешанных до- и сверхзвуковых течений уравнение Чаплыгина можно записать в виде (1) с $f(u) = 0$, т. е. в форме

$$K(y)u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (30)$$

где $x = \theta$ – угол наклона скорости течения, $0 \leq x \leq \theta_0$;

$$y = \sigma = \frac{1}{2} \int_{\tau}^{\tau_*} \frac{(1-t)^\beta}{t} dt, \quad K(y) = \frac{\tau_* - \tau}{\tau_*(1-\tau)^{1/\tau_*}},$$

τ – переменная Чаплыгина, $0 < \tau \leq 1$, $\tau_* = 1/(2\beta + 1)$ – критическая скорость; $u = u(x, y) \equiv \Psi(\theta, \sigma)$ – функция тока [1, с. 279].

Непосредственное вычисление показывает, что

$$\frac{dK}{dy} = \frac{dK}{d\tau} \left(\frac{dy}{d\tau} \right)^{-1} = \frac{4\beta\tau^2}{\tau_*(1-\tau)^{3\beta+2}} \geq 0. \quad (31)$$

Итак, функция $K(y)$ при $\tau \rightarrow 0$ ($y \rightarrow +\infty$) стремится к единице и падает при растущем τ (убывающем y).

При переходе через критическую линию $\tau = \tau_*$ ($y = 0$) она меняет знак: $\text{sign } K(y) = \text{sign } y$.

Поскольку (см. [1, с. 283])

$$\sqrt{|K|} - \frac{1}{4\sqrt{|K|}} \frac{dM}{d\sigma} = \sqrt{|K|} \frac{(2+\beta)\tau - 2}{\beta(2\beta+1)\tau^2},$$

то

$$N(K) = \frac{4(\tau_0 - \tau)\tau_*^2}{\tau_0(1 - \tau_*)\tau^2}, \quad (32)$$

где $\tau_0 = 2/(2 + \beta)$ – значение переменной Чаплыгина τ , при котором число Маха $M_0(\tau) = \sqrt{2\beta\tau/(1-\tau)}$ равняется 2: $M_0(\tau_0) = 2$.

Пусть $\sigma_0(\sigma_1)$ равно значению σ при $\tau = \tau_0$ ($\tau = 1$). Равенства (31) и (32) подводят к следующему заключению: $N(K) > 0$ ($N(K) < 0$) тогда и только тогда, когда $\sigma_0 < y < 0$ ($\sigma_2 < y < \sigma_0$).

Если $\Omega \subset \{(x, y) : \sigma_0 < y < 0\}$, функция тока $\Psi = u(x, y)$ – регулярное в области Ω решение уравнения Чаплыгина (30) такое, что

$$\Psi \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega \cup \{(x, y) : 0 < x < \theta_0, y = 0\}),$$

$$\partial\Psi/\partial\eta = O(1/\sqrt{-K}), \quad F(K; \Psi) < \infty, \quad \Psi|_{AC} = 0$$

то функционал $F(K; \Psi) \geq 0$. Этот результат по существу принадлежит Ф. И. Франклю [1, с. 282].

Литература

1. Франкль Ф. И. Избранные труды по газовой динамике. М.: Наука, 1978. 711 с.
2. Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1970. 295 с.
3. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, № 10. С. 1770–1786.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН

О некоторых эффективных параметрах открытых временных систем регионального управления

1. Множество всех сильно нестационарных процессов и явлений, протекающих в атмосфере Солнца, принято называть солнечной активностью. Солнцедетальность и пятнообразовательная деятельность Солнца считаются синонимами одного и того же понятия. За меру солнечной активности в момент времени t принимается число Вольфа $v = v(t)$.

2. Анализ регионального проявления различных процессов, явлений и экстремальных событий текущего цикла солнечной активности очередной раз подтверждает: наличие высокой корреляции между процессами в природе и обществе и числами Вольфа; «состояние предрасположения к поведению организованных масс» является функцией солнечной активности; взаимоотношения правительства и народа подвержены колебаниям в зависимости от периода пятнообразовательной деятельности Солнца; влияние единичных лиц на массы возрастает с усилением этой деятельности; подъемы солнечной активности «превращают потенциальную энергию (энергию накопления) масс в энергию кинетическую (энергию движения)» [1]; социальная активность $u = u(t)$ в момент времени t синхронизируется с функцией Вольфа $v = v(t)$ [2]; фаза подъема солнечной активности характеризуется фазой подъема пассивного напряжения; взаимодействие пассивных и субпассивных весьма часто носит синергетический характер и может быть формализовано в рамках вольтеровской модели «хищник-жертва», причем на фазе подъема в качестве «жертвы» выступают субпассивные, а в роли «хищника» – пассивные; наряду с (глобальными) историометрическими циклами наблюдаются и локальные (региональные) историометрические циклы; теория циклов становится определенным инструментом социально-экономического предвидения [7].

3. Подъем и падение солнечной активности $v = v(t)$ происходят по обобщенному логистическому закону, который задается дифференциальным оператором дробного порядка; график функции $v = v(t)$ на временном сегменте $[t_0, t_0 + \omega]$, где ω – цикл солнечной активности с началом

в момент времени t_0 , хорошо интерпретируется фракталом, погруженным в евклидовую фазовую плоскость точек (t, v) : солнечная активность как закономерное явление имеет строгую периодичность и фрактальную по времени природу, ей присуща дилатационная симметрия, на стадиях подъема и падения хорошо может быть аппроксимирована с помощью функций типа Миттаг-Леффлера. Аналогично ведет себя и функция социальной активности.

4. Если солнечная активность $v(t)$ меняется по обобщенному логистическому закону, то по этому же закону меняется и социальная активность.

5. В настоящее время, когда с помощью спутниковых наблюдений (например, российско-украинского спутника «КОРОНАС-Ф», ориентированного на исследования солнечно-земных связей вблизи максимума текущего цикла солнечной активности) накоплено огромное количество информации, возникла острая необходимость в разработке новых компьютерно реализуемых математических моделей разного уровня прогностической значимости, учитывающих фрактальную природу солнечной деятельности и массовых событий, имеющих более или менее крупное социально-историческое значение.

6. Отдельно взятые объекты, в том числе объекты управления, реагируют на солнечную активность, говоря словами А. Л. Чижевского, «с достоинством», то есть индивидуально. Прогноз регионального проявления солнечной активности – необходимая компонента системы управления поведением масс на региональном уровне и в экстремальных ситуациях. В многоэтническом регионе весьма актуальны научный прогноз и управление процессами этнических отношений в период солнечной активности с целью предотвращения негативных последствий чрезвычайных ситуаций, решения проблемы сохранения порядка в обществе.

7. Важнейшие характеристики любого этноса со средой обитания Ω , такие, например, как пассионарность [3], среднее время его жизни, умение координировать свои действия, динамика численности, субпассионарность, могут стать эффективными параметрами и параметрами порядка (по Г. Хакену) действующей или проектируемой в регионе Ω системы управления S_Ω . Они могут существенно повлиять на выбор управляющих параметров и реализуемость принципа подчинения [4]. Эффективный параметр системы – это такой параметр, изменение которого ведет к изменению поля поведения системы.

8. Фрактальные градиенты солнечной активности, пассионарного напряжения этнического поля, численности людей в регионе Ω могут служить управляющими параметрами системы S_Ω . Аналогичную роль может сыграть и импульс пассионарности $P = P(t)$, или пассионарный

импульс поведения, который означает поведенческий импульс, направленный против инстинкта личного и видового самосохранения. Вполне возможно, что возрастание и затухание пассионарности управляемых масс в среде обитания Ω происходит, как и его социальная активность, по кривой, близкой к логистической. Как и при солнечной активности, быстрому подъему такого управляющего параметра, как пассионарное напряжение этнического поля, отвечает медленное его падение; действует схема «быстрый подъем пассионарности и медленная утрата» [3, с. 398].

9. Система управления S_Ω , наложенная на объект управления Ω , интерпретируется как динамическая система с памятью. Для математического описания эффективных параметров этой системы можно воспользоваться дифференциальными операторами дробного порядка. Например, за математическую модель динамики пассионарного напряжения $\sigma = \sigma(t)$ на стадии подъема можно принять обобщенное логистическое уравнение

$$D_{\mu t}^\alpha \sigma^{1-m} = (1-m)[a(t)\sigma^{1-m} - b(t)], \quad (1)$$

где $0 < \alpha \leq 1$, $m = \text{const} \geq 0$, $a(t)$ и $b(t)$ – непрерывные и неотрицательные функции времени $t \geq \mu$, $D_{\mu t}^\alpha$ – оператор дробного дифференцирования по $t \geq \mu$ с началом в критический момент времени μ [5].

При $\alpha = 1$, $m = 2$ уравнение (1) переходит в логистическое уравнение

$$\sigma' = a\sigma - b\sigma^2, \quad t \geq \mu \geq 0. \quad (2)$$

Можно предположить, что пассионарное напряжение связано с солнечной активностью $v(t)$ обобщенным уравнением Риккати

$$\sigma' = a\sigma - b\sigma^2 + \mu v(t),$$

где μ – параметр, характеризующий значение флуктуирующей силы μv в момент времени t .

10. Математическую модель численности $N(t)$ людей, подверженных системе управления S_Ω , можно задавать непрерывным дифференциальным уравнением следующего вида:

$$\int_0^1 D_{\tau t}^\alpha N^{-1}(t) d\alpha = c(t) - d(t)N^{-1}(t), \quad t > \tau, \quad (3)$$

где τ – характерное время (например, начало или конец фазы подъема солнечной или социальной активностей), $c(t)$ и $d(t)$ – входные данные модели, которые существенно могут зависеть от $v(t)$ и $u(t)$.

Уравнение (3) является естественным и новым обобщением известного в теории популяций уравнения Ферхюльста [4, с. 336], (см. также [5]).

11. Л. Н. Гумилев [3, с. 403] писал: «Будь у нас возможность измерить величину P и отразить данную величину численно, в этом случае можно было бы просто построить кривую изменения пассионарного напряжения, а затем найти уравнения, описывающие кривую математически». Определенным приближением к решению этой проблемы можно считать гипотезу о том, что импульс пассионарности $P(t)$ подчинен пассионарному напряжению $\sigma(t)$ как параметру порядка. В частности, можно допустить наличие самой простой линейной регрессионной зависимости между двумя признаками $P(t)$ и $\sigma(t)$:

$$P(t) = k[\sigma(t) - \sigma(0)], \quad k = \text{const} > 0. \quad (4)$$

Связь (4) вполне возможна, если пассионарное напряжение меняется по кусочно-логистическому закону:

$$\sigma(t) = \begin{cases} (t_* - t)^m [\lambda_{11} - \lambda_{12}\sigma(t)]\sigma(t), & 0 \leq t \leq t_*, \\ (t - t_*)^m [-\lambda_{21} - \lambda_{22}\sigma(t)]\sigma(t), & t \geq t_*. \end{cases}$$

Здесь предполагается, что $m = \text{const} > 0$, λ_{ij} ($i, j = 1, 2$) – неотрицательные и независимые от времени параметры поведения, $t = 0$ – начальный момент времени, когда пассионарный импульс имеет минимальное (нулевое) значение: $P(0) = 0$, t_* – время достижения функцией $P(t)$ положительного экстремума: $P'(t_*) = 0$.

12. В моноэтническом регионе Ω важную роль играет количество $\varepsilon(t)$ имеющейся в момент времени t пассионарности. Известно, что «люди гармоничные (а в еще большей степени – импульсивные), оказавшись в непосредственной близости от пассионариев, начинают вести себя так, как если бы они были пассионарны; но как только достаточное расстояние отделяет их от пассионариев, они обретают свой природный психоэтнический поведенческий облик» [3]. Связь пассионарного напряжения $\sigma = \sigma(t)$ с $\varepsilon = \varepsilon(t)$ можно задавать следующим уравнением состояния этноса:

$$\sigma(t) - b_\alpha D_{\mu t}^\alpha \sigma = N^0 \varepsilon(t) + N^1 D_{\mu t}^\beta \varepsilon, \quad (5)$$

где b_α , N^0 , N^1 , α , β и μ – неотрицательные параметры, характеризующие этнос E_Ω со средой обитания Ω и с системой управления S_Ω .

Из (5) при $b_\alpha = 0$, $N^1 = 0$, $N^0 = 1/N(t)$ следует определение функции $\varepsilon = \varepsilon(t)$ по Гумилеву [3, с. 608]:

$$\varepsilon = \sigma N \quad \Leftrightarrow \quad \sigma = \varepsilon / N, \quad (6)$$

то есть «пассионарное напряжение этноса – это количество имеющейся в этнической системе пассионарности, поделенное на количество персон, составляющих этнос». «Работа, выполняемая этническим коллективом,

прямо пропорциональна уровню пассионарного напряжения», – писал Л. Н. Гумилев [6, с. 283].

Формула (6) выражает линейную зависимость между ε и σ . Она напоминает закон Гука, устанавливающий в известных пределах зависимость между напряженным состоянием σ и деформацией ε упругой среды. Закон Гука утверждает, что малая деформация среды пропорциональна приложенной к ней силе, то есть тензор деформации ε является линейной функцией тензора напряжения σ .

13. В силу (5), (6) этнос E_Ω с малым ε можно интерпретировать как упругую биосреду. Тогда величину ε , характеризующую этнос E_Ω с пассионарным напряжением σ , можно назвать пассионарной деформацией, а отношение $\sigma/\varepsilon = 1/N$ – мерой (или модулем) упругости (эластичности) этноса E_Ω .

Пассионарная деформация ε в определенном смысле может стать мерой устойчивости этноса как биосистемы, как «формы коллективного бытия».

14. Принципиально новым обобщением уравнения (5) и (6) является следующее однопараметрическое уравнение состояния этноса E_Ω :

$$\sigma(t) + b_\alpha \int_0^1 D_{\mu t}^\xi \varepsilon d\xi = N^0 \varepsilon(t) + N^1 \int_0^1 D_{\mu t}^\xi \varepsilon d\xi. \quad (7)$$

Из уравнения (7) при $b_\alpha = 0$, $N^0 = 0$ получаем весьма важное однопараметрическое уравнение состояния этноса E_Ω :

$$\sigma(t) = N^1 \int_0^1 D_{\mu t}^\xi \varepsilon d\xi. \quad (8)$$

Если пассионарная деформация $\varepsilon(t)$ не меняется на временном сегменте $\mu \leq t \leq T$, т. е. $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 = \text{const}$, то из (8) следует, что

$$(t - \mu)\sigma(t) = \varepsilon N^1 V_i(0, 1, t - \mu).$$

Здесь

$$V_i(\alpha, \beta, x) = \int_\alpha^\beta \frac{x^y dy}{\Gamma(y)},$$

где $\Gamma(y)$ – гамма-функция Эйлера.

Данная статья содержит материалы доклада автора на пленарном заседании Международной конференции «Моделирование региональных экономических и медико-экологических процессов», посвященной 60-летию академика Адыгской (Черкесской) Международной академии наук Иванова Петра Мацовича.

Литература

1. Чижевский А. Л. Физические факторы исторических процессов. Калуга, 1924.
2. Нахушев А. М., Кенетова Р. О. Математическое моделирование социальноисторических и этнических процессов. Нальчик: Эль-Фа, 1998.
3. Гумилев Л. Н. Этногенез и биосфера Земли. М.: Танаис ДИ-ДИК, 1994. 544 с.
4. Хакен Г. Синергетика. М.: Мир, 1980, 404 с.
5. Нахушев А. М. Кушхов А. А. Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. Нальчик. 1999. Т. 4, № 1. С. 55–59.
6. Гумилев Л. Н. Этногенез и биосфера земли. Москва: Айрис-Пресс, 2005. 956 с.
7. Атлас временных вариаций природных, антропогенных и социальных процессов. Т. 2. Циклическая динамика в природе и обществе. М.: Научный мир, 1988. 432 с.

Институт прикладной математики
и автоматизации КБНЦ РАН

Прямая задача теории сопла Лавалья

В газовой динамике под прямой задачей теории сопла Лавалья понимается задача определения всех течений с переходом через скорость звука в сопле с заданными стенками.

А. А. Никольский [1] свел прямую задачу теории плоскопараллельного сопла Лавалья со стенками, близкими к стенкам другого сопла, в котором известно некоторое течение с переходом через скорость звука, приближенно к краевой задаче для следующего уравнения в частных производных:

$$\eta^2 \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \eta \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} - \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0, \quad \theta_0 < \theta < \theta_1, \quad (1)$$

где θ – угол наклона скорости, η – функция модуля скорости, $z = z(\theta, \eta)$ – некоторая вариация функции тока плоских адиабатических газовых течений [2, с. 487].

Уравнение (1) является уравнением смешанного типа, оно эллиптического типа в зоне $\eta > 0$ дозвуковых течений и гиперболического типа в зоне $\eta < 0$ сверхзвуковых течений. На линии $\eta = 0$ происходит изменение типа и вырождение порядка, причем при переходе через критическую скорость должно соблюдаться условие

$$\lim_{\eta \rightarrow -0} \frac{1}{\eta} \frac{\partial z}{\partial \eta} = \lim_{\eta \rightarrow +0} \frac{1}{\eta} \frac{\partial z}{\partial \eta}. \quad (2)$$

Введем в (1) и (2) новые переменные:

$$z(\theta, \eta) = u(x, y),$$

$$x = \frac{\theta - \theta_0}{\theta_1 - \theta_0} r, \quad r = \text{const} > 0, \quad y = \left[\frac{r}{2(\theta_1 - \theta_0)} \right]^{4/3} \eta^2 \text{sign } \eta.$$

Тогда они примут вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + |y|^{1/2} \text{sign } y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < r; \quad (3)$$

$$\lim_{y \rightarrow -0} \frac{\partial u}{\partial y} = - \lim_{y \rightarrow +0} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u = u(x, y). \quad (4)$$

При определенной схематизации [2, с. 486] прямая задача теории сопла Лаваля приводит к задаче Трикоми для уравнения (3) с разрывным условием сопряжения (4).

На евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ точек (x, y) уравнение (3) представляет собой частный случай уравнения

$$\text{sign } y \cdot |y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad -1 < m = \text{const} < 0, \quad (5)$$

которое можно записать и в виде

$$u_{xx} + \text{sign } y \cdot |y|^{-m} u_{yy} = 0. \quad (6)$$

Прямая $y = 0$ является особой характеристикой уравнения (6), огибающей семейство его характеристик.

Пусть

$$\xi = x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}, \quad \eta = x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} \quad (7)$$

– характеристические координаты уравнения (5);

$$\Omega = \{(x, y) : 0 < \xi < \eta < r\}$$

– характеристический треугольник с вершинами в точках

$$A = (0, 0), \quad B = (r, 0), \quad C = (r/2, y_c), \quad y_c < 0; \quad AB = \{(x, 0) : 0 \leq x \leq r\},$$

$$AC = \{(x, y) : \xi = 0, 0 \leq x \leq r/2\}, \quad BC = \{(x, y) : \eta = r, r/2 \leq x \leq r\};$$

$\bar{\Omega} = \Omega \cup AB \cup AC \cup BC$ – замыкание Ω ;

$$2\beta = m/(m+2); \quad \alpha = 1 - 2\beta; \quad 2\gamma(m) = (2\alpha)^{2\beta} B(\beta, \alpha)/\Gamma(2\beta).$$

Точка

$$\theta_0(x) = \frac{x}{2} - i \left[\frac{(m+2)x}{4} \right]^{2/(m+2)}$$

для любого $x \in [0, r]$ лежит на характеристике AC . Образом точки $\theta_0(x)$ при отображении (7) является точка $(0, x)$ на плоскости комплексной переменной $\xi + i\eta$.

Обобщенным решением уравнения (5) в области Ω назовем любую функцию $u(x, y)$, представимую в виде

$$u(x, y) = B_1 E_{\xi\eta}^{\beta+1, \beta} \tau(t) - B_2 (\xi - \eta)^2 E_{\xi\eta}^{\beta+2, \beta+1} \tau''(t) - B_3 D_{\xi\eta}^{\beta-1} (t - \xi)^{-\beta} \nu(t), \quad (8)$$

где

$$B_1 = \Gamma(2 + 2\beta)/\Gamma(1 + \beta), \quad 2B_2 = \Gamma(1 + 2\beta)/\Gamma(2 + \beta),$$

$$B_3 = (2 - 4\beta)^{2\beta-1} \Gamma(2 - 2\beta)/\Gamma(1 - \beta),$$

$\tau(x)$ и $\nu(x)$ таковы, что $\tau(x) \in C[0, r] \cap C^2]0, r[, \tau''(x) \in L^{\beta+1, 0}[0, r], \nu(x) \in L^{-\beta, 0}[0, r] \cap C]0, r[, E_{\xi\eta}^{p, q}$ – операторы Эрдейи–Кобера, $L^{p, q}[0, r]$ – пространство функций с ограниченной нормой

$$\|\varphi\|_{p, q} = \int_0^r x^p |\log x|^q |\varphi(x)| dx.$$

Функция (8) непрерывна в замкнутой области $\bar{\Omega}$

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad \lim_{y \rightarrow -0} \partial u / \partial y = \nu(x), \quad 0 < x < r.$$

Если $\nu(x) \in C]0, r[\cap L[0, r], \tau(x) \in C[0, r]$ и

$$\tau(x) = \tau(0) + D_{0x}^{-\alpha} T(t), \quad (9)$$

где $T(x) \in C]0, r[\cap L[0, r]$, то функция (8) представляет собой обобщенное решение класса R_2 задачи Коши, с начальными данными $\tau(x)$ и $\nu(x)$, для уравнения (5) в области Ω . Если $\tau(x) \in C^3[0, 1], \nu(x) \in C^2[0, 1]$, то это решение принадлежит $C^2(\Omega)$ [3, с. 260].

Относительно функции $T(x) \in L[0, r]$ отображение (9) представляет собой интегральное уравнение Абеля [4]. Число $\alpha = 2/(m + 2) \in]1, 2[$. Поэтому оператор $D_{0x}^{-\alpha}$ будет мономорфизмом и $T(x) = D_{0x}^{\alpha} [\tau(t) - \tau(0)]$ тогда и только тогда, когда производная $\partial_{0x}^{\alpha-1} \tau(t) = D_{0x}^{\alpha-1} [\tau(t) - \tau(0)]$ абсолютно непрерывна на $[0, r]$ и $\lim_{x \rightarrow 0} \partial_{0x}^{-2\beta} \tau(t) = 0$.

Следовательно, функцию $\tau(x) \in C[0, r] \cap C^1]0, r[$ можно представить в виде (8) с $T(x) \in L[0, r]$ тогда и только тогда, когда регуляризованная дробная производная $\partial_{0x}^{-2\beta} \tau(t)$ абсолютно непрерывна на $[0, r]$ и обращается в нуль при $x \rightarrow 0$.

Из (8) следует, что для всех $x \in [0, r]$

$$u[\Theta_0(x)] = B_1 E_{0x}^{\beta+1, \beta} \tau(t) - B_2 x^2 E_{0x}^{\beta+2, \beta+1} \tau''(t) - B_3 D_{0x}^{\beta-1} t^{-\beta} \nu(t). \quad (10)$$

Равенство (10) и правила взвешенной композиции операторов дробного дифференцирования и интегрирования с одинаковыми начальными (см. [5, с. 23]) позволяет доказать справедливость следующего утверждения

Лемма 1. Если $u[\Theta_0(x)] = 0$ на сегменте $[0, r]$, то равенство (10) можно записать в виде

$$\tau(x) = \gamma(m)D_{0x}^{-\alpha}\nu(t). \quad (11)$$

Эта лемма по существу принадлежит Ф. И. Франклю [2, с. 495], [6], который показал, что начальные функции $\tau(x)$ и $\nu(x)$ задачи Коши для уравнения (6) в области Ω связаны с функцией $u[\Theta_0(x)] = \varphi(x) = u|_{\substack{\xi=0 \\ \eta=x}}$ следующей формулой

$$\tau(x) = \frac{\sin \pi \beta}{2\pi} \left(\frac{4}{m+2} \right)^{2\beta} \frac{\Gamma^2(\beta)}{\Gamma(2\beta)} \int_0^x \frac{\nu(t)dt}{(x-t)^{2\beta}} + \varphi_1(x), \quad (12)$$

где

$$\varphi_1(x) = \frac{\Gamma^2(\beta)}{\Gamma(2\beta)} \frac{\sin \pi \beta}{\pi} x^{1-\beta} \frac{d}{dx} \int_0^x t^{2\beta-1} (x-t)^{-\beta} \varphi(t) dt.$$

Здесь условие Франкля $\varphi(0) = 0$ понимается в том смысле, что оно гарантирует включение $\varphi(t) \in L^{-\alpha,0}[0, r] \cap C[0, r]$.

Поскольку $\pi/\sin \pi \beta = \Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)$, $-\beta\Gamma(-\beta) = \Gamma(1-\beta)$, то

$$\frac{\sin \pi \beta}{2\pi} \left(\frac{4}{m+2} \right)^{2\beta} \frac{\Gamma^2(\beta)}{\Gamma(2\beta)} \int_0^x \frac{\nu(t)dt}{(x-t)^{2\beta}} = \gamma(m)D_{0x}^{-\alpha}\nu(t).$$

$$\varphi_1(x) = \frac{-\beta\Gamma(\beta)\Gamma(-\beta)x^{1-\beta}}{\Gamma(2\beta)\Gamma(1-\beta)\Gamma(-\beta)} \int_0^x \frac{t^{2\beta-1}\varphi(t)}{(x-t)^{\beta+1}} dt = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)} E_{0x}^{-\beta, 2\beta-1} \varphi(t).$$

Поэтому равенство (12) эквивалентно формуле

$$\tau(x) = \gamma(m)D_{0x}^{-\alpha}\nu(t) + \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)} E_{0x}^{-\beta, -\alpha} u[\Theta_0(t)], \quad (13)$$

где, как и ранее, предполагается, что $u[\Theta_0(t)] \in L^{-\alpha,0}[0, r] \cap C[0, r]$.

При $u[\Theta_0(t)] \equiv 0$ из (13) следует (11).

Обобщенное решение $u(x, y)$ уравнения (5) в области Ω можно ввести и через функции Грина–Адамара $H(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta)$ второй задачи Дарбу. Она определяется следующим образом:

$$H(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta) = \begin{cases} \left(\frac{\eta_1 - \xi_1}{\eta - \xi} \right)^\beta F\left(\beta, 1 - \beta, 1; \frac{\xi - \xi_1}{\eta_1 - \xi_1} \cdot \frac{\eta - \eta_1}{\eta - \xi}\right), & \eta_1 \geq \xi, \\ \frac{\gamma(\eta_1 - \xi_1)^{2\beta}}{[(\xi - \xi_1)(\eta - \eta_1)]^\beta} F\left(\beta, \beta, 2\beta; \frac{\eta_1 - \xi_1}{\xi - \xi_1} \cdot \frac{\eta - \xi}{\eta - \eta_1}\right), & \eta_1 \leq \xi; \end{cases}$$

где $\gamma\beta B(2\beta, 1 - 2\beta) = 1$.

Функцию $u(x, y)$ назовем обобщенным решением уравнения (5) класса $R_\nu(\Omega)$, если она представима в виде

$$u(x, y) = \frac{\gamma}{2} \left(\frac{4}{m+2} \right)^{2\beta} \int_0^\xi \nu(\xi_1) (\xi - \xi_1)^{-\beta} (\eta - \xi_1)^{-\beta} d\xi + \\ + \int_0^\eta \left[\psi'(\eta_1) + \frac{\beta}{\eta_1} \psi(\eta_1) \right] H(0, \eta_1; \xi, \eta) d\eta_1, \quad (14)$$

где $\nu(x) \in L^{-2\beta, 0}[0, r] \cap C]0, r[$, $\psi(x) \in C[0, r] \cap C^1]0, r[\cap L^{2\beta-1, 0}[0, r]$, $\psi'(x) \in L^{2\beta, 0}[0, r]$.

Функция (5) принадлежит классу $C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega \cup J_r)$ и для всех $x \in J_r = \{(x, 0) : 0 < x < r\}$ справедливы равенства $\lim_{y \rightarrow -0} \partial u / \partial y = \nu(x)$, $u[\Theta_0(x)] = \psi(x)$. Истинность этого предложения доказывается точно также, как при $0 < \beta < 1/2$ [7, с. 21].

Из (14) при $y = 0$, $\eta = \xi = x \in]0, r[$ имеем

$$\tau(x) = \gamma(m) D_{0x}^{-\alpha} \nu(t) + \Psi(x). \quad (15)$$

Легко видеть, что

$$\Psi(x) = \gamma x^{-\beta} \int_0^x \left[\psi'(t) + \frac{\beta}{\eta} \psi(t) \right] t^{2\beta} (x-t)^{-\beta} dt.$$

Пусть $\Psi_\beta(x) = x^{2\beta-1} \varphi(x)$. Так как

$$\left[\psi'(x) + \frac{\beta}{x} \psi(x) \right] x^{2\beta} = x \psi'_\beta(x) + (1 - \beta) \psi_\beta(x),$$

то

$$\Psi(x) = \gamma x^{-\beta} \int_0^x [t \psi'_\beta(t) + (1 - \beta) \psi_\beta(t)] (x-t)^{-\beta} dt.$$

Но

$$\int_0^x t (x-t)^{-\beta} \psi'_\beta(t) dt = - \int_0^x \psi_\beta(t) [(x-t)^{-\beta} + \beta t (x-t)^{-\beta-1}] dt = \\ = (\beta - 1) \int_0^x \psi_\beta(t) (x-t)^{-\beta} dt - \beta x \int_0^x \psi_\beta(t) (x-t)^{-\beta-1} dt.$$

Стало быть,

$$\Psi(x) = \beta\gamma x^{1-\beta} \int_0^x \frac{\psi_\beta(t)dt}{(x-t)^{\beta+1}}.$$

Отсюда, принимая во внимание, что $-\beta\gamma\Gamma(-\beta) = \Gamma(\beta)/\Gamma(2\beta)$, получаем

$$\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)}\Psi(x) = \frac{x^{1-\beta}}{\Gamma(-\beta)} \int_0^x (x-t)^{-\beta-1} t^{2\beta-1} \psi(t)dt,$$

а это означает достоверность следующей формулы

$$\Psi(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)} E_{0x}^{-\beta, 2\beta-1} u[\Theta_0(t)]. \quad (16)$$

Равенства (15) и (16) говорят о справедливости формулы (13) и для обобщенного решения уравнения (5) класса $R_\nu(\Omega)$.

Справедливо следующее вспомогательное предположение, которое доказывается с помощью теоремы 1.7.1 автора [5, с. 56].

Лемма 2. Пусть

$$\tau(x) \in S^1[0, r], \partial_{0x}^{\alpha-1} \tau(t) \in AC[0, r], \tau(0) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \partial_{0x}^{\alpha-1} \tau(t) = 0, \lim_{x \rightarrow r} \tau(x) \partial_{0x}^{\alpha-1} \tau(t) = 0.$$

Тогда $(\tau, D_{0x}^\alpha \tau)_0 \leq 0$ для любого $\alpha \in [1, 2]$.

При $\alpha = 1$ и $\alpha = 2$ согласно условиям леммы 2 соответственно имеем $\tau(0) = \tau(r) = 0$ и $\tau(0) = 0, \tau(r)\tau'(r) = 0$. Стало быть $(\tau, \tau')_0 = 0$, $(\tau, \tau'')_0 = -\|\tau'\| \leq 0$, $(\tau, \tau'')_0 = 0$, тогда и только тогда, когда $\tau(x) = 0$.

Пусть $\alpha \in]1, 2[$ и $\tau^{(\alpha)}(x) = D_{0x}^\alpha \tau(t)$. Поскольку $\tau(x) \in S^1[0, r]$ и $\tau(0) = 0$, то из формулы

$$D_{ax}^\alpha \varphi(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)} (x-a)^{k-\alpha} + D_{ax}^{\alpha-n} \varphi^{(n)}(t),$$

$\alpha \in]n-1, n]$, $n = 1, 2, \dots$, получаем $D_{0x}^{\alpha-1} \tau(t) = \partial_{0x}^{\alpha-1} \tau(t)$. Это равенство и включение $\tau^{(\alpha-1)}(x) \in AC[0, r]$ дают основание утверждать, что

$$(\tau, \tau^{(\alpha)})_0 = \int_0^r \tau(x) \frac{d}{dx} \tau^{(\alpha-1)}(x) dx = [\tau(x) \tau^{(\alpha-1)}(x)] \Big|_0^r - (\tau', \tau^{\alpha-1})_0.$$

Так как $\tau(0) = 0$, $\tau(r)\tau^{(\alpha-1)}(r) = 0$, то отсюда вытекает равенство

$$(\tau, \tau_0^{(\alpha)}) = -(\tau', D_{0x}^{\alpha-1} \tau')_0.$$

Условия леммы 2: $\tau^{(\alpha-1)}(0) = 0$, $\tau^{(\alpha-1)}(x) = D_{0x}^{\alpha-2}\tau'(t) \in AC[0, r]$ означают, что функция $\tau'(x)$ удовлетворяет условиям упомянутой теоремы 1.7.1 [5, с. 56]. Поэтому $(\tau', D_{0x}^{\alpha-1}\tau')_0 \geq 0$. И, стало быть, $(\tau, D_{0x}^\alpha\tau)_0 \leq 0$, что и требовалось доказать.

Вернемся теперь к уравнению (5) в области Ω и докажем следующую теорему

Теорема. Пусть $u(x, y)$ – обобщенное решение уравнения (5) класса $R_\nu(\Omega)$, удовлетворяющее условиям: $u[\Theta_0(x)] = 0$ для всех $x \in [0, r]$; $\partial_{0x}^{-2\beta}\tau(t) \in AC[0, r]$; $\lim_{x \rightarrow 0} \partial_{0x}^{-2\beta}\tau(t) = 0$; $\tau(r)\tau^{(-2\beta)}(r) = 0$, где $\tau(x) = u(x, 0)$.

Тогда $(\tau, \nu)_0 \leq 0$.

Условие $u[\Theta_0(x)] = 0$ и равенства (15) и (16) приводят к (11). Функция

$$\omega(x) = d/dx D_{0x}^{\alpha-2}\tau(t) = \tau^{(\alpha-1)}(x)$$

в силу условия $\tau(0) = u(0, 0) = 0$ совпадает с $\partial_{0x}^{-2\beta}\tau(t)$. Следовательно, $\omega(x) \in AC[0, r]$.

Условие $\lim_{x \rightarrow 0} \partial_{0x}^{-2\beta}\tau(t) = 0$ означает, что $\omega(0) = 0$. Другими словами, правая часть $\tau(x)$ интегрального уравнения Абеля (11) удовлетворяет условию теоремы Тамаркина [4, с. 574], гарантирующему существование единственного решения

$$\gamma(m)\nu(x) = D_{0x}^\alpha\tau(t) \in L[0, r].$$

Число $\beta \in] - 1/2, 0[$ и поэтому $\gamma(m) > 0$.

Функция $\tau(x)$ удовлетворяет условиям леммы 2, утверждающей, что

$$\gamma(m)(\tau, \nu)_0 = (\tau, D_{0x}^\alpha\tau)_0 \leq 0$$

для всех $\alpha = 1 - 2\beta \in]1, 2[$.

Пусть D – соответствующая уравнению (5) ограниченная односвязная смешанная область, гиперболическая часть которой совпадает с Ω , а эллиптическая с $D^+ = D \setminus \Omega$. Через σ обозначим эллиптическую часть границы ∂D области D : $\sigma = \partial D^+ \setminus AB$. Предполагается, что σ является кусочно-гладкой кривой.

Важным следствием приведенной теоремы является теорема единственности решения задачи Трикоми для уравнения (5) в области D с граничными данными на $\sigma \cup AC$ и с условием сопряжения

$$\lim_{y \rightarrow -0} u(x, y) = G_\tau \lim_{y \rightarrow +0} u(x, y),$$

$$\lim_{y \rightarrow -0} u_y(x, y) = G_\nu \lim_{y \rightarrow +0} u_y(x, y),$$

где постоянные величины G_τ и G_ν разного знака.

При $G_\tau = 1$, $G_\nu = -1$ это условие переходит в (4).

Теорема говорит и о том, что условие Ф. И. Франкля [2, с. 60]:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (r,0)} (-y)^{m/2} u^2(x,y) = 0$$

является следствием его метода доказательства оценки $(\tau, \nu)_0 \leq 0$, а также знакоопределенность функционала Трикоми [8]

$$F(-|y|^m; u) = \int_{\Omega} (u_y^2 - |y|^m u_x^2) d\Omega,$$

и теорему единственности можно доказать в полном соответствии с методом Трикоми (см. [5, § 5.7]).

В заключение отметим, что аналог критерия второй производной в дробном исчислении (см. [5, § 3.3]) позволяет реализовать для уравнения (5) метод А. В. Бицадзе доказательства единственности решения задачи Трикоми, основанный на его принципе экстремума.

Литература

1. Никольский А. А. Уравнения в вариациях плоских адиабатических газовых течений // Труды ЦАГИ. 1948; см. также Сб. теоретических работ по аэродинамике. ЦАГИ, 1957.
2. Франкль Ф. И. Избранные труды по газовой динамике. М.: Наука, 1973. 771 с.
3. Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа. М.: Высшая школа, 1985. 304 с.
4. Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М., 1966. 672 с.
5. Нахушев А. М. Элементы дробного исчисления и их применение. Нальчик: КБНЦ РАН, 2000. 299 с.
6. Кароль И. Л. Решение первой краевой задачи для уравнения диффузии дробного порядка // ДАН СССР. 1953. Т. LXXXIII, № 2. С. 1286–1289.
7. Нахушев А. М. Об одном классе линейных краевых задач для гиперболического и смешанного типов уравнений второго порядка. Нальчик: Эльбрус, 1992. 155 с.
8. Нахушев А. М. Об априорных оценках для вырождающегося гиперболического уравнения. Сб. научных работ «Неклассические уравнения математической физики». Новосибирск: Изд-во Института математики им. С. Л. Соболева, 2002. 249 с.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН

Fractional calculus – a fundamental basis for boundary value problems with shift and mathematical physics of fractals

The main aim is interpretation of some thoughts and ideas which are partially realized in monograph [1] and occurred during solutions searching of local and nonlocal initial and boundary value problems for differential

equations in partial derivatives of the main and qualitatively new types. First of all we mean equations which change their type and (or) an order in closure $\overline{\Omega}$ of domain Ω and also nonlocal differential equations containing Riemann–Liouville operators of fractional integration differentiation.

The equations of these types are the following model equations, which can become a fundamental basis in Mathematical Physics of Fractals [2].

Laplace generalized (discrete) equation:

$$\Delta_z^\alpha \equiv \sum_{k=1}^n D_{a_k z_k}^{\alpha_k} u = 0, \quad u = u(z), \quad (1)$$

where $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ is a fixed point from $\mathbb{R}^n$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$, $D_{a_k z_k}^{\alpha_k}$ is an operator of fractional differentiation on z_k of order $\alpha_k \in]1, 2[$ with the beginning in $a_k \in \mathbb{R}$:

a generalized continuous Laplace equation:

$$\sum_{k=1}^n D_{a_k z_k}^{[1,2]} u = 0, \quad (2)$$

where

$$D_{a_k z_k}^{[\delta, \gamma]} u = \int_{\delta}^{\gamma} D_{a_k z_k}^{\xi} u d\xi$$

is a fractional derivative of continual order $[\delta, \gamma]$ [1, p. 41];
nonlocal wave equation:

$$D_{0t}^\beta u(z, t) = c_\beta^2 \Delta_z^\alpha u(z, t), \quad c_\beta = \text{const} > 0, \quad t > 0, \quad 1 < \beta < 2; \quad (3)$$

equation of fractal and abnormal diffusion:

$$D_{0t}^\nu u(z, t) = c_\nu^2 \Delta_z^\alpha u(z, t), \quad c_\nu = \text{const} > 0, \quad t > 0, \quad 0 < \nu < 1; \quad (4)$$

$$D_{0t}^\nu u(z, t) = c_\nu^2 \sum_{k=1}^n z_k^{1-\alpha_k} \frac{\partial}{\partial z_k} \left[z_k^{\alpha_k-1} \frac{\partial u(z, t)}{\partial z_k} \right]; \quad (5)$$

$$D_{0t}^{[0,1]} u(z, t) = c^2 \Delta_z^\alpha u(z, t); \quad (6)$$

$$D_{0t}^{[0,1]} u(z, t) = c^2 \sum_{k=1}^n z_k^{1-\alpha_k} \frac{\partial}{\partial z_k} \left[z_k^{\alpha_k-1} \frac{\partial u(z, t)}{\partial z_k} \right]; \quad (7)$$

generated by mixed type equations

$$\text{sign } y \cdot |y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad u = u(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2; \quad (8)$$

nonlocal differential equations

$$\text{sign } y \cdot |y|^m D_{ax}^\mu u(\xi, y) + u_{yy} = 0, \quad (9)$$

$$\operatorname{sign} y \cdot |y|^m u_{xx} + D_{by}^\mu u(x, y) = 0, \quad 1 < \mu < 2; \quad (10)$$

Hadamard generalized equation:

$$(D_{ax}^\mu + \lambda) \Delta u(\xi, y) = 0, \quad 0 < \mu < 2, \quad (11)$$

where $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ is Laplace operator.

In equations (9) and (10) order μ of fractional derivative can be a piecewise constant; as a rule in application $\mu = \mu_1 + \mu_2 + (\mu_1 - \mu_2) \operatorname{sign} y$, $\mu_i = \operatorname{const}$.

Equations (1)–(7) and (9)–(11) belong to class of loaded differential equations with partial derivatives [3, p. 63]. Equations (6) and (7) with their simplest variant

$$D_{0t}^{[0,1]} u(x, y) = c^2 \Delta u(x, y) \quad (12)$$

are important models of continuous differential equations in partial derivatives of second order. Equations (11) if $\mu = 1$, $\mu = 0$ coincident with equation

$$\frac{\partial}{\partial x} \Delta u(x, y) = 0, \quad (13)$$

first offered by Hadamard [4–7] as a model of equation of composite type.

Let D is a convex domain of Euclidean space of points (x, y) , which contains a part of line $x = 0$ on its boundary ∂D or inside. We easily see if a given or subjected to recognition eigen function $f(x, y)$ in domain D is an eigen function of operator $-D_{0x}^\mu$ corresponding to eigen λ , then any solution $u(x, y)$ of Poisson equation $\Delta u(x, y) = f(x, y)$ is a solution for generalized Hadamard equation (11).

Salakhitdinov's and Bitsadze's fundamental works [6], [8] took a grate part in theory of equations in partial derivatives of composite and mixed composite types. Particularly the consequence of these works is the article [9] where author took a notice that a scheme of energy integral method (abc method) for Tricomi homogeneous problem for equation of $Lu = f$ allows simultaneously with a prior estimate for operator L to bring out a wide class of mixed-composite equations of $L^* \ell u = F$ kind, where L^* is an operator conjugated to operator L , ℓ is a linear differential operator of first order for which a corresponding uniform boundary value problem has a weak solution u from Sobolev space $u \in W_2^1(\Omega)$ when any right part F from Lax space $W_2^{-1}(\Omega)$.

From equations (8) and (10) if $b = m = 0$, $y > 0$ we obtain Laplace equation

$$\Delta u(x, y) = 0 \quad (14)$$

and equation

$$u_{xx} + D_{0y}^\mu u(x, y) = 0, \quad 1 < \mu < 2. \quad (15)$$

At present when fractional (differential and integral) calculus in theory of fractals and systems with memory is of the same meaning as classic analysis in physics (mechanics) of continual media the problem of complete description of correct boundary, initial and mixed problems at least for (1)–(7), (9)–(11), and (15) in canonical domains becomes very actual. This problem study leads to essentially new mathematical structures, for example to new boundary value problems for equation

$$u_{xx} + yu_{yy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = 0 \quad (16)$$

in bonded domain Ω , a boundary $\sigma = \partial\Omega$ of which contains a segment σ_0 of the line $y = 0$ of the parabolic degeneration.

It is well-known [8, p. 192] that setting of boundary value problems for equation (16) with sufficiently smooth in closed domain coefficients $a(x, y)$, $b(x, y)$ and $c(x, y)$ depend on behavior of solution of ordinary differential equation

$$yv''(y) + b(x, 0)v'(y) = 0 \quad (17)$$

in singular point $y = 0$. If $b(x, 0) \equiv \varepsilon = \text{const} \neq 1$ this solution is of form

$$v(y) = Ay^{1-\varepsilon} + B, \quad (18)$$

where A and B are arbitrary constants.

If $1 < \varepsilon < 2$ then from (18) we easily obtain

$$D_{0y}^{1-\varepsilon}v(\eta) = A\Gamma(2 - \varepsilon) + [B/\Gamma(\varepsilon)]y^{\varepsilon-1}, \quad (19)$$

where $\Gamma(x)$ is Euler Gamma function.

That's why for equation (16) in domain $\Omega = \Omega^+$ located in half plane $y > 0$ with coefficients $c(x, y) \leq 0$ and $b(x, 0) = \varepsilon \in]1, 2[$ nonlocal boundary value problem can be correctly set, if in area $\sigma_1 = \sigma/\sigma_0$ of σ boundary Poincare condition is given and in other area σ_0 condition

$$\lim_{y \rightarrow +0} D_{0y}^{1-\varepsilon}u(x, \eta) = \varphi_\varepsilon(x) \in C(\sigma_0) \quad (20)$$

is given.

Due to analogue of criteria of the second derivative in fractional calculus [1, p. 135] for equation (15) and (14) in convex domain $\Omega^+ \subset \mathbb{R}^2$ extremum principle holds.

In equation (15) an analogue of (17) is

$$D_{0y}^\mu v(\eta) = 0, \quad 1 < \mu < 2, \quad (21)$$

General solution (21) is presented by formula

$$v(y) = Ay^{\mu-2} + By^{\mu-1}, \quad A, B = \text{const}. \quad (22)$$

From (22) we conclude that

$$D_{0y}^{\mu-2}v(\eta) = A\Gamma(\mu-1) + yB\Gamma(\mu). \quad (23)$$

Equalities (22) and (23) say that analogue of condition (20) for (15) in domain Ω^+ can be nonlocal condition

$$\lim_{y \rightarrow +0} D_{0y}^{\mu-2}u(x, \eta) = \varphi_{3-\mu}(x), \quad (24)$$

and problem E (by Keldysh's terminology [10]) for this and more general equation

$$u_{xx} + D_{0y}^{\mu}u(x, \eta) + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = 0, \quad 1 < \mu < 2 \quad (25)$$

with sufficiently smooth in $\overline{\Omega}^+$ coefficients $a(x, y)$, $b(x, y)$ and $c(x, y) \leq 0$ can be quite uniquely soluble.

Substitution of the derivative $D_{0y}^{\mu}u(x, \eta)$ for corresponding finite-difference equation of fractional order [3, p. 26] in (25) leads to following approximating nonlocal (loaded) equation which is obviously will become a study object in numerical mathematics:

$$y^{\mu} [u_{xx} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u] + \\ + n^{\mu} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{\mu}{k} u\left(x, \frac{n-k}{n}y\right) = 0,$$

where $n = 1, 2, \dots$; $0 < x < 1$, $0 < y < q$.

Let $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < q\}$; $\tau(x)$ is a given function of class $C^2[0, 1]$, which on a segment $[0, 1]$ has a piecewise continuous derivative of third order and satisfies conditions $\tau(0) = \tau(1) = 0$, $\tau''(0) = \tau''(1) = 0$;

$$\lambda_k = (\pi k)^2; \quad \tau_k = 2 \int_0^1 \tau(x) \sin(\pi k x) dx, \quad q_k = q^{1-\mu} / E_{1/\mu}[\lambda_k q^{\mu}; \mu],$$

where $E_{1/\rho}[x; \mu] = \sum_{k=0}^{\infty} x^k / \Gamma(\mu + \rho k)$ is Mittag-Leffler function.

Function

$$v_k(y) = q_k y^{\mu-1} E_{1/\mu}[\lambda_k y^{\mu}; \mu] \quad (26)$$

for any $k = 1, 2, \dots$, presents a unique solution of special problem E:

$$\lim_{y \rightarrow +0} v_k(y) < \infty, \quad \lim_{y \rightarrow q} v_k(y) = 1 \quad (27)$$

for equation

$$D_{0y}^{\mu}v_k(\eta) = \lambda_k v_k(y), \quad 0 < y < q. \quad (28)$$

Let consider problem E for equation (15) in following model setting: to find regular and limited in domain Ω solution $u(x, y)$ of equation (15) of $C(\bar{\Omega} \setminus \sigma_0)$ which satisfies conditions

$$u(0, y) = 0, \quad u(1, y) = 0, \quad 0 < y \leq q, \quad u(x, q) = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

On the ground of (26)–(28) and Fourier it is easy to show that the solution $u(x, y)$ of the problem E is presentable in the form of

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k q_k \sin(\pi k x) v_k(y). \quad (29)$$

As we see from (26) and (29), solutions of (28) and (15) bounded when $y \rightarrow +0$ and vanish null when $y \rightarrow +0$.

In class of bounded equation solution of (25) when $y \rightarrow 0$ in condition (24) we must put $\varphi_{3-\mu}(x) \equiv 0$.

Equation analogue (17) in case of general equation (25) is

$$D_{0y}^{\mu} v(\eta) + b(x, 0) v'(y) = 0. \quad (30)$$

Composition law (including weighted one) of operators of integration and differentiation with similar and different beginnings, analogue of Fermat theorem and of criteria of the second derivative in fractional calculus, operators of fractional integration, generated by Riemann function are first of all required for the theory of mixed type equation, particularly for boundary value problems with shift, i.e. nonlocal boundary value problems with local and nonlocal shifts. From other side appearing of boundary value problems with shift in 1968, which now is associated with author's name, made quite obvious that without fractional calculus it is impossible to realize algebrization of the mixed type equation theory.

The main mixed boundary value problems (Tricomi, Gellerstedt, Frankl with discontinuous condition of conjugation, Frankle–Bitsadze) for equation (8) when $m \neq 0$ lead to boundary value problem with nonlocal shift. In particular, Tricomi problem for equation (8) when $m > -1$ is reduced to boundary value problem for equation

$$y^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad m \neq 0, \quad y > 0, \quad 0 < x < 1 \quad (31)$$

in domain Ω^+ when in boundary elliptic part of σ_1 Dirichlet condition is given and in σ_0 line $y = 0$ part boundary condition with nonlocal shift

$$\nu(x) - \gamma_m D_{0x}^{\alpha_m} \tau(t) = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad (32)$$

is given, where $\nu(x) = u_y(x, 0)$, $\tau(x) = u(x, 0)$, $\gamma_m = \text{const} > 0$, $\alpha_m \in]0, 1[$ if $m > 0$ and $\alpha_m \in]1, 2[$ if $-1 < m < 0$, $f(x)$ is a given function [1, p. 29].

In case of Lavrentev–Bitsadze equation with spectral parameter λ

$$\operatorname{sign} y \cdot u_{xx} + u_{yy} = \lambda^2 u, \quad 0 < x < 1$$

and condition $u(x, -x) = 0$ for all $x \in [0, 1]$ condition (32) is substituted for boundary condition with nonlocal shift (see [11, p. 4])

$$\nu(x) - \tau'(x) = \lambda \int_0^x \frac{J_1(\lambda(x-t))}{x-t} \tau(t) dt,$$

where $J_1(z)$ is Bessel function.

Fundamental equality (32) shows fractal nature of the process which is simulated by solution $u = u(x, y)$ of equation (31) on the line of parabolic degeneration $y = 0$, which simultaneously is its singular characteristic when $m < 0$. In transacoustic gas dynamic $u(x, y)$ is interpreted as current function and in population biology as a density of population in x at time moment y [3, p. 126].

Necessary linear boundary conditions for equation (8) or for Euler–Darboux–Poisson equation

$$(\eta - \xi)u_{\xi\eta} + \beta' u_{\xi} - \beta u_{\eta} = 0$$

in domain $\{(\xi, \eta) : 0 < \xi < \eta < r\}$ are described using operators of fractional integration and differentiation.

Recently it is cleared up that in the base of reality of adequate mathematical models of various hydrologic and hydrogeologic processes of fractal structure are differential equations of fractional order. The same can be related to model memory process of highly active long living radio isotope in geologic formations, processes of biologic kinetics, motion of liquid with weighted particles of high concentration, impurities spreading in shallow pools [12–14]. Fractal nature of the process of liquid motion with weighted particles of high concentration can be taken into account if differential equations of theory of weighted particles of high concentration by Frankle [15, p. 669] time derivative to substitute for Riemann–Liouville regularized fractional derivative.

Fractal concept in physic (for example in physics of condensed media [16]) and biologic processes and phenomena as a rule is realized using operation of fractional integration and differentiation.

This paper comprises material of the author’s report in session of International scientific conference “Modern problems of Mathematical Physics and Informational Technology”, devoted to 70-th anniversary of the associated member of Academy of Sciences of Republic of Uzbekistan Dr., Prof. M. S. Salakhitdinov.

The work is done according to Goscontract №1000-251/OMH-03/026-115/240603-811 (by Institute of Applied Mathematics after M. V. Keldysh

FAS and Institute of Applied Mathematics and Automation of RAS), partially supported by American Fund of civil researches and development (US CRDF, project REC-004) and Russian Fund of Basic Researches (№ 01-07-90211).

References

1. Nakhushev A. M. Elements of fractional calculation and their Application. Nalchik: KBNC RAN, 2000. 299 p. (in Russian).
2. Nakhushev A. M. On some fundamental properties of Rieman–Liouville operator and their application to partial differential equations of fractional order // Book of abstracts international conference “Differential equations and related topics”, dedicated to the centenary anniversary of I. G. Petrovskii. Moscow (May 22–27, 2001). Pp. 288–290. (in Russian).
3. Nakhushev A. M. Equations of mathematical biology. M.: Vysshaya shkola. 1995. 301 p. (in Russian).
4. Hadamard J. Propriétés d’une équation linéaire aux dérivées partielles du quatrième ordre // The Tôhoku math. J. 1933. Vol. 37. Pp. 133–150.
5. Hadamard J. Equations aux dérivées partielles // L’enseignement mathématique. 1936. Vol. 35.
6. Salakhitdinov M. S. Equations of mixed and composite type. Tashkent: Fan, 1974. 155 p.
7. Dzhuraev T. D. Boundary value problems for equations of mixed and mixed-Composite types. Tashkent: Fan, 1979. 120 p. (in Russian).
8. Bitsadze A. V. Some classes of equations in partial derivatives. M.: Nauka, 1981. 448 p. (in Russian).
9. Nakhushev A. M. To a priori estimates for Tricomi and Darboux problems // Differentsial’nye uravneniya. 1972. Vol. 8, no. 1. Pp. 107–117. (in Russian).
10. Keldysh M. V. On some cases of degeneration of equations of elliptic type domains boundary // Dokl. AN SSSR. 1951. Vol. 77. Pp. 181–183. (in Russian).
11. Moiseev E. I. Mixed type equations with spectral parameter. M.: Izd-vo MGU, 1988. 150 p. (in Russian).
12. Serbina L. I. Transference model of substance in fractal media // Matematicheskoe modelirovanie. 2003. Vol. 15, no. 9. Pp. 17–28. (in Russian).
13. Benson D. A. The fractional advection-dispersion equation: development and application // A dissertation submitted in partial fulfilment of the requirements for the degree of doctor of philosophy in hydrogeology, 1998.
14. Vasilev V. S., Sukhinov A. I. Twomeasured models of shallow pools // Matematicheskoe modelirovanie. 2003. Vol. 15, no. 10. Pp. 17–34. (in Russian).
15. Frankle F. I. Selected proceedings on gas dynamic. M.: Nauka, 1973. 711 p. (in Russian).
16. Olemskii A. I., Flat A. Ya. Fractal concept usage in physics of condensed media // Uspehi fizicheskikh nauk. 1993. Vol. 163, no. 12. Pp. 3–49. (in Russian).
17. Nakhushev A. M. Fractional calculus is a fundamental basis of boundary value problems with shift and mathematical physics of fractals // In the book “Modern problems of mathematical physics and informational technology”. Trudy mezhdunar. nauch. konf. Tashkent–2003. Vol. 1. Pp. 207–213. (in Russian).

О некоторых базовых элементах математических моделей системы мониторинга экологии горной и предгорной территорий

1. Бассейны рек Кабардино-Балкарской Республики (КБР), которая в географическом отношении находится на северном склоне Большого Кавказа в наиболее приподнятой горной его части, являются зонами природных катаклизмов и чрезвычайных ситуаций природного характера. Анализ потенциальных источников экстремальных природных явлений и процессов (лавины, сели, оползни, ливневые паводки, град, водная эрозия, подтопления, землетрясения и т. д.) показывает, что территория КБР представляет собой ярко выраженный объект информационно-тематического моделирования с целью создания системы мониторинга экологии горных и предгорных территорий, в особенности бассейнов горных рек, как реки Баксан (см. рис. 1 [1]).



Рис. 1. Местоположение участков селевых катастроф на Центральном Кавказе. Космический снимок Landsat ETM от 18 августа 1999 г. Участки, где произошли катастрофы: I – Джаловчатская 1940 г., II – Башкаринская 1959 г., III – Куллумкольская 1983 г., IV – Герхожанская 2000 г., V – Геналдонская 2002 г.; $\bigcirc$ – населенные пункты.

Достаточно отметить, что в типичном для Центрального Кавказа высокогорном густонаселенном бассейне р. Баксан за последние 50 лет сошло более 180 селей, и текущий (начало – 1997 г.) цикл солнечной активности говорит об активизации селепроявления и деятельности крупных лавин на Северном Кавказе.

2. Система мониторинга экологии горной и предгорной территории (СМЭГПТ) очевидно требует активного участия человека и является большой как с точки зрения ее многомерности и многопозиционности, так и с точки зрения количества и разнообразия ее элементов и подсистем, предполагает взаимодействия с геоинформационными (географическими) системами разных уровней назначения.

Она неоднородна по входным воздействиям (например, климатическим, экологоэкономическим факторам), непостоянным по времени и в пространстве. СМЭГПТ как большая природно-техническая и информационная система расчленяется на конечное число подсистем, проблемно ориентированных на прогноз в первую очередь экстремальных природных ситуаций, явлений и процессов, в допустимых для лица, принимающего решение, масштабах времени; представляет собой высшей сложности систему с распределенными параметрами, содержащую несколько эффективных параметров, изменение которых ведет к изменению поля поведения всей системы в целом. В частности, роль эффективных параметров могут сыграть параметры, характеризующие солнечную активность, формирование склонов, речной сток, количество атмосферных осадков, ливневых паводков, площадей оледенения, приводящих к усилению селевой деятельности. Одним из базовых элементов СМЭГПТ является функциональная подсистема, реализующая геоэкологический и аэрокосмический мониторинг селевой опасности. Необходимость включения в СМЭГПТ этой подсистемы стала очевидной после Тырныаузской катастрофы в июле 2000 года в эпоху максимума пятнообразовательной деятельности Солнца.

3. Все возрастающее количество фактов свидетельствует о сильной корреляции между региональным проявлением функций солнечной активности

$$w(t) = k[u(t) + 10v(t)],$$

где k – коэффициент пропорциональности, $u(t)$ – общее число пятен на Солнце, $v(t)$ – число групп пятен, а $w(t)$ – число Вольфа в момент времени t , и параметрами потенциальных источников чрезвычайных ситуаций не только социально-экономического [2], но и природного характера.

Тому подтверждение и чрезвычайные ситуации в 1999, 2000 и 2001 годах на территории КБР. Эти годы попадают в годы подъема солнечной активности.

4. 1997 г. – начало 23-го цикла солнечной активности. В течение этого года количество пятен на Солнце не превышало 93.

В 1999 г. в г. Нальчике 20–21 февраля прошел грозовой дождь с градом, а 22 февраля в Черекском ущелье произошел сход снежной лавины. В этом месяце функция $u = u(t)$ достигла своего максимума ($=144$) 15 числа, а затем, падая по кривой, близкой к логистической, 19 февраля приняла значение 85; на второй день она достигла локального максимума ($=86$) и начала снова падать, достигнув через два дня (23 февраля) локального минимума ($=42$).

В Урванском, Терском, Чегемском, Черекском районах и г. Нальчике 6 июля прошел ливневый дождь с градом и шквальным ветром. Функция $u(t)$ второго июля приняла свой локальный максимум ($=146$), а затем, строго убывая, достигла 8 июля минимума ($=113$). Двенадцатого августа на второй день начала подъема числа пятен на Солнце в г. Нальчике, Чегемском и Баксанском районах прошел ливневый дождь с градом и ураганным ветром. Семнадцатое число этого месяца, когда в г. Измит (Турция) произошло землетрясение, характеризуется локальным минимумом функции $u(t)$ ($=36$) и началом ее длительного периода подъема, продолжавшегося до 29 августа, пока она не приняла значение, равное 136. Двадцатого августа сошел селевой поток на р. Герхожан-Су – правом притоке р. Баксан. Утром 22 декабря, в день локального максимума функции $u(t)$, в селении Былым Эльбрусского района произошло землетрясение в 4 балла.

Селеопасный период начался 24 июня, за день до достижения функцией $u(t)$ своего локального минимума ($=111$) и продолжался до 15 сентября – т. е. до второго дня после достижения ее локального минимума ($=60$): $u(15) = 77$. Этот период был периодом высокого температурного режима в горных районах КБР. Динамику солнечной активности в 1999 г. можно проследить по рис. 2 и рис. 3.

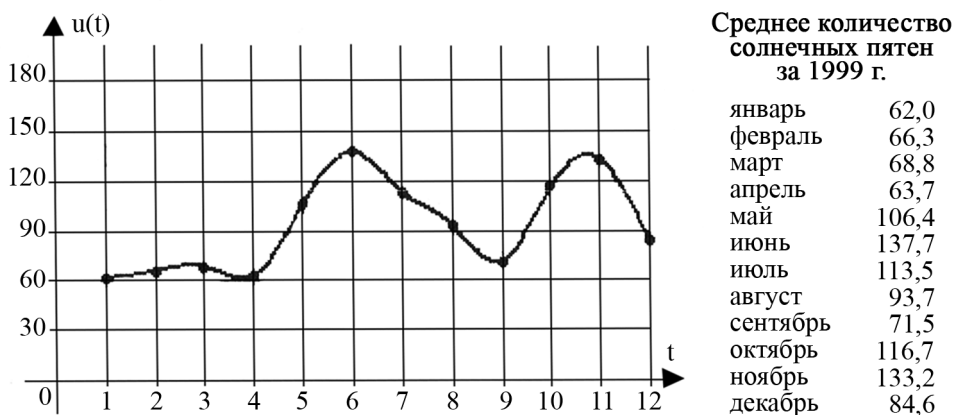


Рис. 2. Изменение количества солнечных пятен (по месяцам), 1999 г.

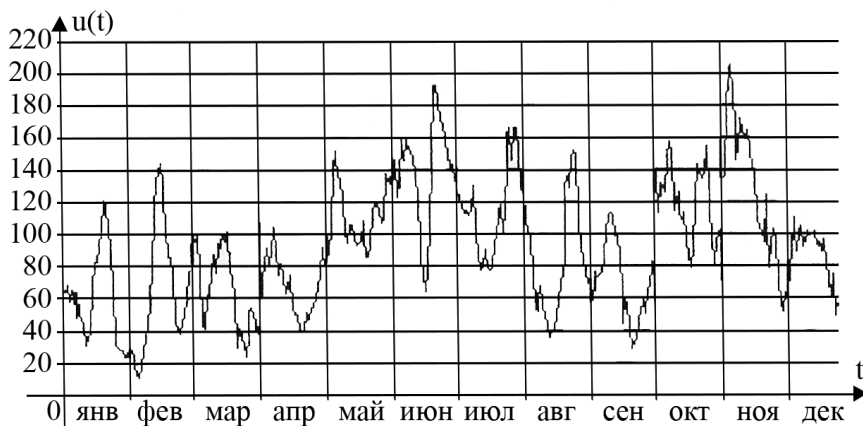


Рис. 3. Изменение количества солнечных пятен (по дням), 1999 г.

В 2000 году среднемесячная температура воздуха по КБР была на 2–3, а иногда и на 4 градуса выше средних многолетних значений. Год характеризовался множеством аномальных явлений. Так, 18 января в г. Тырныаузе и в предгорьях наблюдались фены, а в г. Нальчике атмосферное давление достигло 706 мм. рт. ст. Функция $u(t)$ максимальное значение за январь месяц, равное 164, достигла 15 числа, а 16 – локальный минимум ($=157$). На временном сегменте $[16, 24]$ января функция $u(t)$, строго убывая, достигла своего минимума ($=80$) 24 числа. Количество пятен на Солнце 18 января равнялось 120. Апрель был аномально теплым и месяцем сильной солнечной активности. В апреле

$$\min_{[1,30]} u(t) = 94 = u(7) = u(18), \quad \max_{[1,30]} u(t) = 170 = u(23).$$

23 апреля, в день максимума солнечной активности, в г. Прохладный КБР отмечался сильный ливень: за 1 час 15 мин. выпало 70 мм осадков. В этом районе повторяемость осадков с количеством более 30 мм в апреле отмечается 1 раз в 20 лет. Июль – месяц чрезвычайной солнечной активности:

$$\min_{[1,31]} u(t) = 112 = u(30), \quad \max_{[1,31]} u(t) = 246 = u(19).$$

С 18 по 21 июля функция $u(t)$ не опускалась ниже 228. В этот же период по руслу реки Герхожан-Су (Центральный Кавказ) в районе г. Тырныауз впервые за 65 лет наблюдался селевой процесс мощной разрушительной силы. Самая трагическая для г. Тырныауза селевая волна сошла 19 июля, когда функция $u(t)$ достигла своего максимума ($=248$) за 2000 г.:

$$\max_{[1,12]} u(t) = u(19) = 248, \quad \min_{[17,25]} u(t) = u(25) = 167.$$

7 июля на подъеме солнечной активности в г. Баксане и в с. Каменомостское Баксанского и Зольского районов КБР наблюдался крупный град диаметром более 20 мм, нанесший ущерб в размере 280 млн. руб. Сильные ливни с локальным выпадением града прошли по территории КБР третьего августа, когда функция $u(t)$ достигла локального минимума: $u(2) = 110$, $u(3) = 107$, $u(4) = 110$. На временном сегменте $[1, 20]$ августа месяца функция $u(t)$ своего минимума, равного 106, достигла дважды – 1-го и 20-го, а максимума, равного 204 – 14-го:

$$\min_{[1,20]} u(t) = u(1) = u(20) = 106, \quad \max_{[1,20]} u(t) = u(14) = 204.$$

Повторяемость града в первой декаде августа составила 1 раз в 20–25 лет. По данным Министерства КБР по делам гражданской обороны и чрезвычайным ситуациям в республике зарегистрировано 7 чрезвычайных ситуаций природного характера.

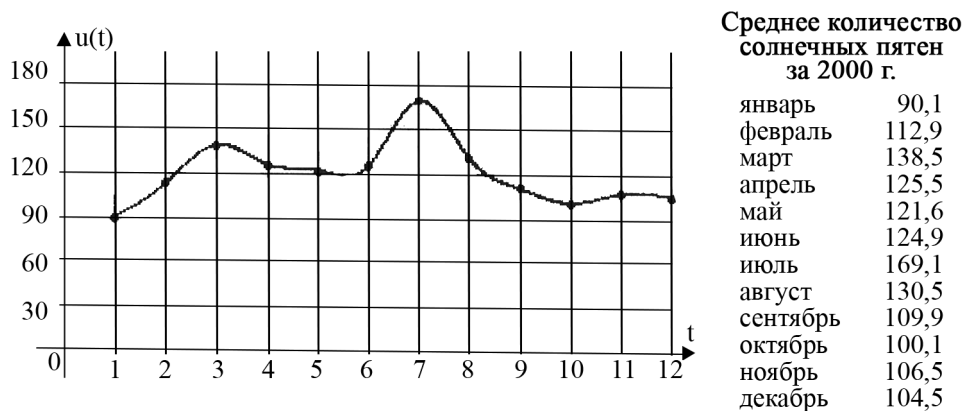


Рис. 4. Изменение количества солнечных пятен (по месяцам), 2000 г.

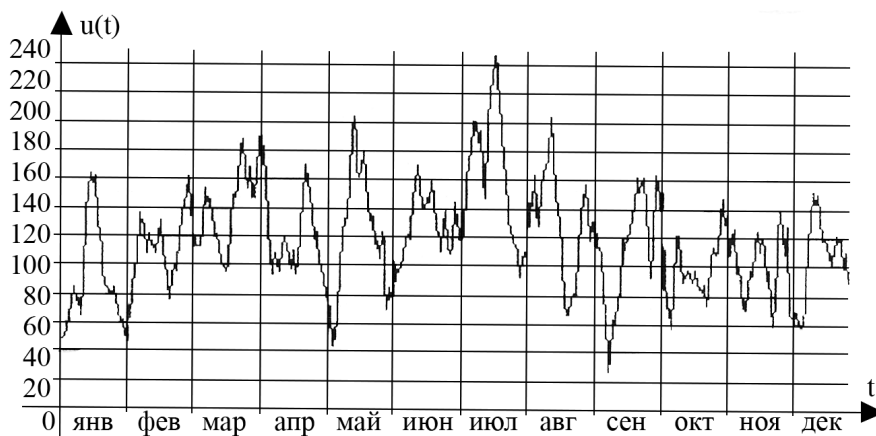


Рис. 5. Изменение количества солнечных пятен (по дням), 2000 г.

Изменение функции $u(t)$ в 2000 г. отражено на рис. 4 (ежемесячно) и на рис. 5 (ежедневно).

Пусть $u_k(t)$ – значение функции $u(t)$ в k -ом месяце в момент времени t . К эпохе максимума солнечной активности относится и 2001 год, который характеризуется следующей таблицей:

$u_1(17)$	$= 59$	$\leq u_1(t)$	$\leq 131 = u_1(7)$
$u_2(27)$	$= 50$	$\leq u_2(t)$	$\leq 114 = u_2(9)$
$u_3(17)$	$= 51$	$\leq u_3(t)$	$\leq 241 = u_3(27)$
$u_4(17)$	$= 28$	$\leq u_4(t)$	$\leq 169 = u_4(3)$
$u_5(8)$	$= 55$	$\leq u_5(t)$	$\leq 134 = u_5(23)$
$u_6(1)$	$= 58$	$\leq u_6(t)$	$\leq 191 = u_6(16)$
$u_7(23)$	$= 46$	$\leq u_7(t)$	$\leq 127 = u_7(18)$
$u_8(1)$	$= 62$	$\leq u_8(t)$	$\leq 128 = u_8(28)$
$u_9(1)$	$= 103$	$\leq u_9(t)$	$\leq 200 = u_9(24)$
$u_{10}(8)$	$= 72$	$\leq u_{10}(t)$	$\leq 168 = u_{10}(1)$
$u_{11}(24)$	$= 67$	$\leq u_{11}(t)$	$\leq 152 = u_{11}(8)$
$u_{12}(19)$	$= 99$	$\leq u_{12}(t)$	$\leq 167 = u_{12}(26)$

Как следует из этой таблицы, в 2001 году

$$\min_{[1,12]} u(t) = u_4(17) = 28, \quad \max_{[1,12]} u(t) = u_9(24) = 200.$$

8 мая в день локального минимума функции $u_5(t)$ на территории Урванского района КБР прошли интенсивные ливневые дожди с грозами, сопровождавшиеся шквалистым ветром силой 20 м/с и выпадением мелкого града. Атмосферные явления превысили критерии опасных гидрометеорологических явлений. Резко повысился уровень р. Малка, имело место селепроявление с объемом селевых выносов в несколько тысяч кубических метров.

Функция $u(t)$ 27 мая достигла локального максимума ($= 124$), а затем начала строго убывать до своего минимума $u_6(1) = 58$. 31 мая за день до выхода на этот минимум в Баксанском, Майском, Прохладненском районах КБР прошли ливневые дожди с грозами, сопровождавшиеся шквалистым ветром и выпадением града.

13 июня функция $u_6(t)$ достигла своего локального минимума $u_6(13) = 160$, а 14-го в районе п. Нейтрино (Баксанское ущелье) произошел сход микроселей гляциального генезиса, носивших характер водно-каменного потока: $u_6(14) = 180$.

В день, когда $u_6(t)$ достигла своего максимума $u_6(16) = 191$ за июнь месяц, а также 17 числа в пригородах г. Нальчика, Урванском и Чегемском районах КБР отмечались сильные ливневые дожди, местами с градом и шквальным усилением ветра до 25 м/с; количество выпавших осадков за 16–17 июля составило месячную норму.

8 июля, когда $u_7(8) = 54$, спустя день после достижения функцией $u_7(t)$ локального минимума $u_7(6) = 45$ в районе п. Эльбрус по руслу ручья Сачаевский произошел сход микроселей дождевого генезиса, носивших характер водно-каменного потока.

31 июля функция $u(t)$ приняла свой локальный минимум $u_7(31) = 52$; через два дня, когда $u_8(3) = 93$, на степной зоне КБР отмечались сильные ливни с локальным выпадением града.

Графики функции $u(t)$ за 2001 год представлены на рис. 6 и на рис. 7.

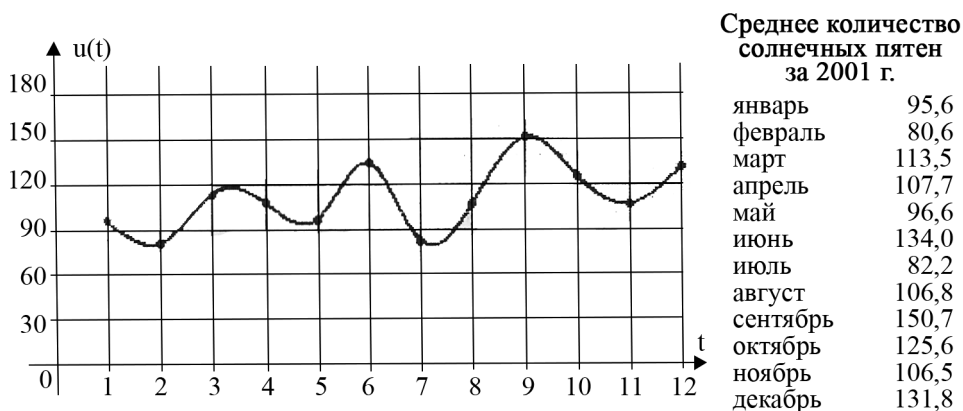


Рис. 6. Изменение количества солнечных пятен (по месяцам), 2001 г.

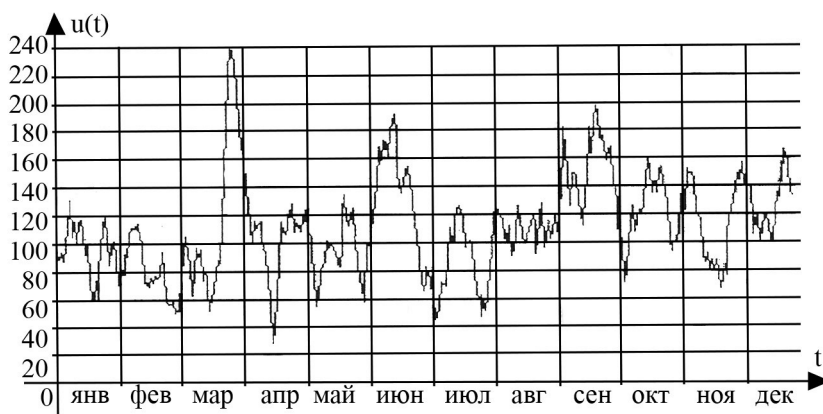


Рис. 7. Изменение количества солнечных пятен (по дням), 2001 г.

Как видно из анализа данных и графиков 1–7, *чрезвычайные ситуации природного характера с большой вероятностью можно ожидать в дни локальных и глобальных экстремумов функции $u(t)$* . Время достижения функцией $u(t)$ своего экстремума с допустимой для лица, принимающего решения, точностью совпадает с началом проявления экстремальных, в том числе и чрезвычайных, ситуаций природного характера.

Другими словами, *выход количества солнечных пятен на экстремальные значения является одним из основных признаков появления природной опасности в ближайшие и последующие сутки.*

Прогноз точек экстремума функции $u(t)$ в сочетании с целенаправленной обработкой данных ежесуточных метеорологических наблюдений и временных рядов значений показателя аномальности среднесуточных температур воздуха по сценарию, предложенному Д. Г. Гонсировским, М. М. Хаджиевым [3, 4], может сыграть знаковую роль при определении временных границ селеопасных периодов в решении важнейшей задачи оперативного прогноза прохождения селей.

5. Согласно закону Шваба–Вольфа изменения солнечной активности происходят периодически, со средним периодом 11,1 года [2]. Однако интервалы между годами максимальных (минимальных) значений функции солнечной активности $w(t)$ довольно сильно разнятся. Известно, что с 1749 года до наших дней их продолжительность колебалась от 7 до 17 лет между годами максимумов и от 9 до 14 лет между годами минимумов [5]. В связи с этим долгосрочный и эффективный прогноз динамики солнечной активности все еще остается не решенной проблемой. Выявлению спектра ритмов в среднегодовой динамике чисел Вольфа с 1749 по 1992 годы и прогнозированию динамики солнечной активности в 21 веке посвящены весьма важные работы Э. Н. Чирковой и В. В. Немова [6]. Согласно их прогнозу среднегодовые числа Вольфа в 1997 году достигли минимума, а в 2003 г. должны были достигать максимума. Однако, исходя из реальных данных по количеству солнечных пятен за 1996–2003 годы (рис. 8), видно, что минимум солнечной активности приходится на 1996 год, а максимум – на 2000 год, далее наблюдается спад.

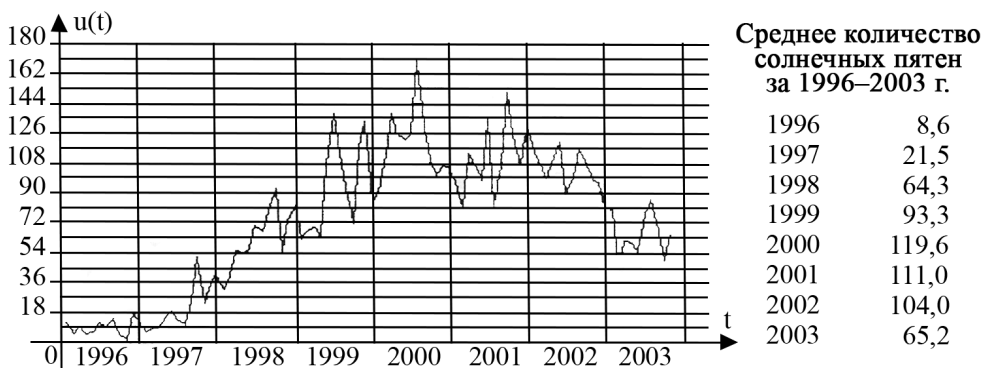


Рис. 8. Изменение количества солнечных пятен за 1996–2003 гг.

Анализ матричных и графических данных о динамике солнечной активности подтверждает гипотезу о том, что *подъем и падение солнечной активности происходят по кривой, очень близкой к обобщенной*

логистической кривой [2], и этот процесс нелинеен и фрактален.

Принимая это во внимание, функцию $u = u(t)$ на стадии подъема, которая протекает на временном сегменте $[\tau, \tau_m]$, можно интерпретировать как решение одного из следующих дифференциальных уравнений дробного порядка:

$$\partial_{\tau t}^{\alpha} \frac{1}{u(\eta)} + \frac{p}{u(t)} = q, \quad \tau < t \leq \tau_m; \quad n-1 < \alpha \leq n = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

$$\int_{n-1}^n \partial_{\tau t}^{\alpha} \frac{1}{u(\eta)} d\alpha + \frac{p}{u(t)} = q, \quad \tau < t \leq \tau_m. \quad (2)$$

Здесь p и q – положительные величины; $\partial_{\tau t}^{\alpha}$ – оператор дробного дифференцирования порядка α в смысле М. Саруто, который действует на функцию $\varphi(t)$, $(n-1)$ -ая производная $\varphi^{(n-1)}(t)$ которой абсолютно непрерывна на временном сегменте $[\tau, \tau_m]$, по формуле

$$\partial_{\tau t}^{\alpha} \varphi(\eta) = D_{\tau t}^{\alpha-n} \frac{d^n \varphi(n)}{dt^n},$$

где $D_{\tau t}^{\alpha-n}$ – оператор дробного интегро-дифференцирования порядка $|\mu|$ в смысле Римана–Лиувилля [7].

Уравнение (1) при $\alpha = 1$ совпадает с логистическим уравнением Бернулли–Ферхюльста [8]:

$$u'(t) = [p - qu(t)] u(t). \quad (3)$$

Если существует такое число $\varepsilon > 0$, что

$$u(t) \leq u(\tau_m) \quad \forall \in [\tau_m - \varepsilon, \tau_m + \varepsilon],$$

то в уравнении (3) можно положить $q = p/u(\tau_m)$ и переписать его в виде

$$u'(t) = p - \left[1 - \frac{u(t)}{u(\tau_m)} \right] u(t), \quad \tau \leq t \leq \tau_m. \quad (4)$$

Любое неособое решение $u(t)$ нагруженного дифференциального уравнения (4) представимо в виде

$$u(t) = \frac{u(\tau) u(\tau_m)}{u(\tau) + [u(\tau_m) - u(\tau)] \exp[p(\tau - t)]}, \quad (5)$$

а особое решение – в виде

$$u(t) = u(\tau_m) = p/q.$$

На стадии падения $\tau_m \leq t \leq \tau_{\min}$ функцию (5) следует заменить следующей функцией

$$u(t) = \frac{u(\tau_m) u(\tau_{\min})}{u(\tau_m) + [u(\tau_{\min}) - u(\tau_m)] \exp[c(t - \tau_m)]}, \quad (6)$$

где $c = \text{const} > 0$; $u(\tau_{\min}) = c/d$, $d = \text{const} > 0$; время $\tau_{\min}$ таково, что существует число $\varepsilon > 0$ такое, что

$$u(\tau_{\min}) \leq u(t) \quad \forall t \in [\tau_{\min} - \varepsilon, \tau_{\min} + \varepsilon].$$

Функция (6) является неособым решением уравнения

$$u'(t) = -c \left[1 - \frac{u(t)}{u(\tau_{\min})} \right] u(t). \quad (7)$$

Особое решение уравнения (7) определяется формулой $u(t) = u(\tau_{\min})$.

Уравнения (1) и (2) относительно функции $y(t) = 1/u(t)$ являются линейными:

$$\partial_{\tau t}^{\alpha} y(\eta) + p y(t) = q, \quad \tau < t \leq \tau_m; \quad n-1 < \alpha \leq n; \quad (8)$$

$$\int_{n-1}^n \partial_{\tau t}^{\alpha} y(\eta) d\alpha + p y(t) = q, \quad \tau < t \leq \tau_m. \quad (9)$$

Уравнение (9) относится к классу непрерывных дифференциальных уравнений дробного порядка [8, с. 99].

При $n = 1$ ($0 < \alpha < 1$) уравнение (8) можно заменить уравнением

$$y'(t) + p D_{\tau t}^{1-\alpha} y(\eta) = \frac{q}{\Gamma(\alpha)} (t - \tau)^{\alpha-1}, \quad (10)$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция Эйлера.

Уравнение (10) допускает следующую запись:

$$y'(t) = [q - p y(\tau)] (t - \tau)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}[-p(t - \tau)^{\alpha}; \alpha], \quad (11)$$

где $E_{1/\rho}[z; \mu] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + k\rho)}$ – функция типа Миттаг-Леффлера.

Действительно, из (10) имеем

$$y'(t) + p D_{\tau t}^{1-\alpha} [y(\eta) - y(\tau)] = \frac{q}{\Gamma(\alpha)} (t - \tau)^{\alpha-1} - p y(\tau) D_{\tau t}^{1-\alpha} 1.$$

Отсюда нетрудно видеть, что

$$y'(t) + p D_{\tau t}^{-\alpha} y'(\eta) = \frac{q - p y(\tau)}{\Gamma(\alpha)} (t - \tau)^{\alpha-1}. \quad (12)$$

Относительно $y'(t)$ соотношение (12) представляет собой интегральное уравнение Вольтерра второго рода. Его решение определяется однозначно по формуле Хилле–Тамаркина (см. [7, с. 109]):

$$y'(t) = \frac{q - py(\tau)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau}^t (\eta - \tau)^{\alpha-1} E_{\alpha}[-p(t - \eta)^{\alpha}] d\eta. \quad (13)$$

где

$$E_{\alpha}[z] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1 + \alpha k)}$$

– функция типа Миттаг-Леффлера.

Очевидно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau}^t (\eta - \tau)^{\alpha-1} E_{\alpha}[-p(t - \eta)^{\alpha}] d\eta &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-p)^k}{\Gamma(1 + \alpha k)} \times \\ &\times \int_{\tau}^t (\eta - \tau)^{\alpha-1} (t - \eta)^{\alpha k} d\eta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-p)^k (t - \tau)^{\alpha + \alpha k}}{\Gamma(1 + \alpha k)} \times \\ &\times \int_0^1 s^{\alpha-1} (1 - s)^{\alpha k} ds = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha + \alpha k) (-p)^k (t - \tau)^{\alpha + \alpha k - 1}}{\Gamma(1 + \alpha + \alpha k)} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-p)^k (t - \tau)^{\alpha k}}{\Gamma(1 + \alpha k)} (t - \tau)^{\alpha-1} = (t - \tau)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}[-p(t - \tau)^{\alpha}; \alpha]. \end{aligned} \quad (14)$$

Из (13) с учетом (14) получаем (11). Поскольку

$$\int_{\tau}^t (\eta - \tau)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}[-p(\eta - \tau)^{\alpha}; \alpha] d\eta = (t - \tau)^{\alpha} E_{1/\alpha}[-p(t - \tau)^{\alpha}; \alpha + 1],$$

то решение уравнения (11), удовлетворяющее условию Коши

$$y(\tau) = \frac{1}{u(\tau)}, \quad (15)$$

задается формулой

$$y(t) = y(\tau) + [q - py(\tau)] (t - \tau)^{\alpha} E_{1/\alpha}[-p(t - \tau)^{\alpha}; \alpha + 1]. \quad (16)$$

Алгоритм (15)–(16) может быть эффективным при оперативном и долгосрочном прогнозах динамики солнечной активности на стадии ее подъема.

6. Мониторинг чрезвычайных ситуаций выдвигает проблему математического моделирования формирования склона водной эрозии и, в первую очередь, склоновых селевых процессов. В периоды солнечной активности обостряются эрозионно-селевые процессы в горных и предгорных ландшафтах КБР. Эти процессы имеют фрактальную природу и весьма активно проявляют себя в бассейнах рек селевого характера.

Универсальным объектом математического моделирования являются селевые процессы в бассейне р. Герхожан-Су с конусом выноса на территорию г. Тырнауза. В бассейне этой горной реки по частоте схода преобладают сели смешанного ледниково-дождевого происхождения, имеют место и сели чисто ледникового генезиса.

В настоящее время р. Герхожан-Су – самый активный селевой бассейн Северного Кавказа [9]. Годы, месяцы и даже дни схода крупных селей, как правило, с удивительной точностью совпадают с экстремальными (критическими) временами для функции солнечной активности. Образно говоря, имеет место синхронизация солнечной и селевой активностей, их циклов (хронологию солнечной и селевой активности см. в таблицах 1, 2).

Действительно, рассмотрим хронологию селей в этом бассейне [10] и хронологию экстремумов функции $u(t)$. Пусть $u_i^j(t)$ – значение функции $u(t)$ в i -м месяце j -го года. Известно, что $j \in G = \{1937, 1960, 1961, 1962, 1963, 1965, 1975, 1977, 1983, 1995, 1999, 2000\}$, $i \in \{7, 8, 9\}$, причем 9-й месяц встречается только в 1965 году, элементы множества G нумеруются в порядке их следования: 1 г. – это 1937, 2 г. – 1960, ..., 12 г. – 2000.

Таблица 1

Год	Среднегодовое значение $u(t)$	Среднемесячные значения функции $u(t)$		
		7	8	9
1937	114,4	145,1	137,7	100,7
1960	112,3	121,7	134,1	127,2
1961	53,9	70,2	55,8	63,6
1962	37,6	21,8	21,8	51,3
1963	27,9	19,6	33,2	38,8
1965	15,0	11,9	8,9	16,8
1975	15,5	28,2	39,7	13,9
1977	27,5	21,4	30,1	44,0
1983	66,6	82,2	71,8	50,3
1995	17,5	14,5	14,3	11,8
1999	93,3	113,5	93,7	71,5
2000	119,6	169,1	130,5	109,9

Таблица 2

Дата	Значение функции $u(t)$	Критические значения функции $u(t)$
02.08.1937	188	$\max_{[1,31]} u_8^1(t) = u_8^1(3) = 207$
01.08.1960	75	$\max_{[1,8]} u_8^2(t) = u_8^2(1) = 75$
14.08.1961	104	$\max_{[1,31]} u_8^3(t) = u_8^3(11) = 109$
31.07.1962	0	$\min_{[1,31]} u_7^4(t) = u_7^4(31) = 0$
23.07.1963	25	$\max_{[1,31]} u_7^5(t) = u_7^5(23) = 25$
07.09.1965	23	$\max_{[1,26]} u_9^6(t) = u_9^6(7) = 23$
05.07.1975	23	$u_7^7(4) = 16, u_7^7(5) = 23,$ $u_7^7(6) = 33, u_7^7(7) = 23$
11.08.1977	23	$\min_{[5,22]} u_8^8(t) = u_8^8(11) = 23$
19.07.1983	96	$u_7^9(18) = 98, u_7^9(19) = 96, u_7^9(20) = 101$
15.07.1995	19	$u_7^{10}(14) = 13, u_7^{10}(15) = 19,$ $u_7^{10}(16) = 17$
15.08.1995	12	$u_8^{11}(13) = 9, u_8^{11}(14) = 0, u_8^{11}(15) = 12$
20.08.1999	48	$\max_{[17,20]} u_8^{12}(t) = u_8^{12}(20) = 48$

Концепция фрактала может сыграть важную роль при математическом моделировании экологической ситуации рек. В частности, коэффициент эрозии $E = E(\eta)$ можно интерпретировать как решение дифференциального уравнения дробного порядка

$$D_{0\eta}^{\alpha+1} E(\xi) = \lambda E(\eta), \quad (17)$$

где $0 < \alpha = \text{const} < 1$, λ – постоянный коэффициент пропорциональности, $\eta = t/T$ – безразмерное время, $0 \leq t \leq T$.

При $\lambda = 0$ общее решение уравнения (17) имеет вид

$$E(\eta) = (a\eta + b)\eta^{\alpha-1}, \quad \eta = t/T, \quad (18)$$

где a и b – произвольные постоянные.

Если в формуле (18) положить $\alpha = 0,21$, $b = 0$, $a = 0,58 + 1.4F_1/F_0$, где F_1 – эрозионная площадь (км^2) в бассейне реки Дуруджи (Грузия), а F_0 – общая площадь, t – время (год), T – период наблюдения: 2001–2002 гг., то получим эмпирическую формулу, найденную в работе [11]. Как видно из этой работы (см. формулу (2)), расход турбулентных селевых потоков 1 %-й обеспеченности Q , формирующихся в селевых водотоках с заданным уклоном селевого русла, как функции $x = F_0$, удовлетворяет уравнению

$$D_{0x}^{\alpha+1} Q = 0, \quad \alpha = 0,61.$$

Следуя [12, с. 119], допустим, что склон

$$S_t = \left\{ (x, y) : y = \varphi(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial x} > 0 \quad \forall x > 0, \quad \varphi(0, t) > 0 \right\}$$

в момент времени $t \geq 0$ состоит из тех же пород, частицы которых переносит текущая по нему несжимаемая вода с определенной мутностью; поток воздействует на первоначальную плоскую поверхность в точке $x = 0$ со скоростью v_0 ; вода несет некоторый материал с на единицу объема со скоростью $v \sim c$; скорость воды пропорциональна крутизне склона, по которому она стекает (см. рис. 11):

$$v \sim \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (19)$$

Условие (19) означает, что слой воды, несущий наносы, невелик.

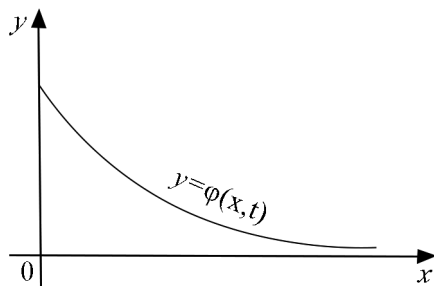


Рис 11. Общая схема склона в момент времени t .

Поскольку $v \sim c$, то в силу (19) можно положить, что

$$\frac{\partial}{\partial x} (vc) \sim \frac{\partial v^2}{\partial x} \sim \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \sim -D_{0t}^\alpha \varphi(x, \eta), \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Стало быть,

$$D_{0t}^\alpha \varphi(x, \eta) = a \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2, \quad a = \text{const} > 0. \quad (20)$$

Из (20) после дифференцирования по x получаем

$$D_{0t}^\alpha z(x, \eta) = a \frac{\partial^2 z^2(x, t)}{\partial x^2}, \quad (21)$$

где

$$z(x, t) = \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x}. \quad (22)$$

При $\alpha = 1$ уравнение (21) совпадает с уравнением Буссинеска [13, с. 134], которое имеет важное значение в теории гидрогеологического прогнозирования.

В настоящее время существуют различные алгоритмы компьютерной реализации тех или иных начально-краевых задач для системы уравнений (21), (22) [13].

Пусть r – мера проекции склона водной эрозии S_t , а

$$\delta(t) = \frac{1}{r} \int_0^r \varphi(x, t) dx.$$

Тогда, если известна разность

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \Big|_{x=r} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \Big|_{x=0} = t^{-\alpha} f(t), \quad (23)$$

где $f(t)$ – ограниченная, отличная от нуля, заданная функция, то из (20) получаем

$$D_{0t}^{\alpha} \delta(\eta) = a f(t) t^{-\alpha}. \quad (24)$$

Любое решение $\delta(t)$ уравнения (24) представимо в виде

$$\delta(t) = A t^{\alpha-1} + a D_{0t}^{-\alpha} f(\eta) \eta^{-\alpha}. \quad (25)$$

Как видно из (25), существует отличный от нуля предел $\delta(t)$ при $t \rightarrow 0$ тогда и только тогда, когда $A = 0$. Поэтому единственное ограниченное решение уравнения (24) определяется формулой

$$\delta(t) = D_{0t}^{-\alpha} \eta^{-\alpha} f(\eta). \quad (26)$$

Для ряда склонов типа S_t (например, для русла р. Герхожан-Су), несущих селевые потоки ливневого генезиса, более реалистично не уравнение (20), а уравнение

$$\partial_{0t}^{\alpha} \varphi(x, \eta) = a \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \quad (27)$$

с нелокальным и нелинейным краевым условием

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \Big|_{x=r} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \Big|_{x=0} = \psi(t), \quad (28)$$

где $\psi(t)$ – заданная непрерывная при $t \geq 0$ функция, имеющая производную порядка $1 - \alpha$ с началом в начальный момент времени $t = 0$ и концом $t > 0$.

Если функция $\varphi(x, t)$ удовлетворяет уравнению (27) и условию (28), то

$$\delta(t) = \delta(0) + a D_{0t}^{-\alpha} \psi(\eta). \quad (29)$$

Граничные условия (23) и (28) являются существенными для справедливости формул (25) и (29) соответственно.

7. Важными элементами СМЭГПТ являются математические модели, проблемно-ориентированные на прогнозирование стока горных рек, селевых, лавинных и паводковых явлений. Концепция фрактала и теория движения взвешенных наносов, неравномерного бурного течения на быстротеке, развитые в работах Ф. И. Франкля [14], могут сыграть ключевую роль при модернизации существующих моделей и разработке хорошо идентифицируемых и компьютерно реализуемых системных моделей, базирующихся на фрактальных реактивно-диффузионных дифференциальных уравнениях в частных производных основных и смешанных типов.

8. Проблеме связи солнечной активности с метеорологическими процессами, в том числе с градовыми облаками, градом и грозой, посвящено большое количество исследований. Среди работ, посвященных численному моделированию градовых облаков, отметим [15]. Корреляционный анализ данных наблюдений с 1970 по 2002 г. по КБР показывает устойчивую зависимость (коэффициент корреляции = 0,8) между интенсивностью града и гроз и наличие определенной связи этих явлений с солнечной активностью [16].

На современном этапе исследований многолетних колебаний числа дней с грозой выделены циклы: 2–3, 3–5, 5–6, 8–10, 11, около 20 лет, а также обнаружены тенденции к вековым и сверхвековым циклам. Причем 11-летний и половинный, 5-6-летний цикл связывают с циклом солнечной активности [17].

Составной частью СМЭГПТ должна стать открытая система математических моделей принятия решений на базе телекоммуникационных и иных специальных управленческих систем по предотвращению (или уменьшению) в реальном масштабе времени катастрофических последствий градо-ливневых, паводковых, селевых и оползневых процессов [18].

В заключение авторы выражают благодарность Х. Х. Калажокову за информационную поддержку и внимание к этой работе.

Литература

1. Черноморец С. С. Особенности морфолитодинамики селевых очагов Центрального Кавказа после катастрофических селей: дис. ... канд. геогр. наук: 25.00.25. Москва, 2003. 228 с.
2. Нахушев А. М., Кенетова Р. О. Моделирование социально-исторических и этнических процессов. Нальчик: Эль-Фа, 1997. 170 с.
3. Гонсировский Д. Г., Хаджиев М. М. Прогнозное ежесуточное прослеживание хода аномальности температуры воздуха в условиях селеопасности // Защита народохозяйственных объектов от воздействия селевых потоков: материалы международной конференции по селям, 17–21 ноября 2003 г. Пятигорск, 2004. С. 32–35.

4. Гонсировский Д. Г., Хаджиев М. М. Методические приемы посезонного анализа аномальности метеорологических факторов для прогнозных решений по селям методом аналогий // Защита народохозяйственных объектов от воздействия селевых потоков: материалы международной конференции по селям, 17–21 ноября 2003 г. Пятигорск, 2004. С. 35–39.
5. Витимский Ю. И. Солнечная активность. М.: Наука, 1993. 192 с.
6. Чиркова Э. Н., Немов В. В. Спектр многолетних ритмов чисел Вольфа с 1749 года и прогноз динамики солнечной активности в XXI веке // Сознание и физическая реальность. 1997. Т. 2, № 4. С. 64–69.
7. Нахушев А. М. Элементы дробного исчисления и их применение. Нальчик: КБНЦ РАН, 2000. 299 с.
8. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. 301 с.
9. Разумов В. В. Потенциальные источники чрезвычайных ситуаций на территории Северного Кавказа. Нальчик: КБНЦ РАН, 2003. 245 с.
10. Сейнова И. Б. Селевые процессы бассейна реки Баксан в последнем тысячелетии (Центральный Кавказ). М. Деп. ВИНТИ, № 97-63-B97, 1997. 295 с.
11. Гавардашвили Г. В., Чихая Г. Г., Цулукидзе Л. Н. Оценка эрозионно-селевых явлений в бассейнах рек Терек, Белая Арагви и Дуруджи // Защита народохозяйственных объектов от воздействия селевых потоков: материалы международной конференции по селям, 17–21 ноября 2003 г. Пятигорск, 2004. С. 22–23.
12. Шайдегер А. Е. Теоретическая геоморфология. М.: Прогресс, 1964. 450 с.
13. Сербина Л. Н. Нелокальные математические модели процессов переноса в системах с фрактальной структурой. Нальчик: КБНЦ РАН, 2002. 145 с.
14. Франкль Ф. И. Избранные труды по газовой динамике. М.: Наука, 1973. 711 с.
15. Ашабоков Б. А., Калажоков Х. Х. Численное моделирование градовых облаков. М.: Гидрометеиздат, 1992. 134 с.
16. Бураев А. В. О влиянии солнечной активности на атмосферные процессы // Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики: материалы Международного Российско-Узбекского симпозиума, 18–25 мая 2003 г. Нальчик, 2003. С. 113–115.
17. Горбатенко В. П., Решетко М. В. Методика прогнозирования землетрясения в Турции 17 августа 1999 г. // Циклы: материалы Второй международной конференции. Ставрополь, 2000. Ч. 2. С. 32–33.
18. Борисов В. Н. Математические модели телекоммуникационной системы мониторинга экосистем горных и предгорных территорий // Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики: материалы Международного Российско-Узбекского симпозиума, 18–25 мая 2003 г. Нальчик, 2003. С. 112–113.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН

О локальных историометрических циклах Кавказской войны

Кошехабльский форум «История – достояние народа», который состоялся 24–25 апреля 1990 года в ауле Кошехабль Кошехабльского района Республики Адыгея, как никогда ранее выдвинул проблему качественно нового неидеологизированного подхода к исследованию социально-исторических и иных процессов периода Кавказской войны.

Исследователи осознали необходимость привлечения методов точных наук, в особенности методов исторической информатики и математического моделирования, для открытия законов, по которым протекали и протекают те или иные социально-исторические явления или события.

В нартском эпосе можно найти подтверждение тому, как адыги для прогнозирования различных событий, в особенности военных и общественных, использовали ареалы вокруг Солнца или Луны и другие оптические эффекты, имеющие место во время прохождения больших пятен через центральный солнечный меридиан.

Адыги, как и многие другие народы, знали, что в полнолуние целебные соки растений из подземных их частей поднимаются в стебель и к вершинам трав, а в новолуние совершают обратное движение и уходят в корень.

Известно, что адыги испокон веков верили, что на поверхности бараньей лопатки «закодирована» информация о возможных необычайных природных и солнечных явлениях. Они по структуре и прочности бараньей лопатки, цветным рисункам и чертам на ее поверхности прогнозировали массовые движения, военные действия – их усиления и затухания, наступление мира, появление лидера, голод, засуху, урожай, стужу и т.д. Вполне возможно, что баранья лопатка изменением структуры своей поверхности отвечает на резкие, нелинейные изменения солнечной активности.

Под солнечной активностью понимается множество всех сильно нестационарных процессов и явлений, протекающих в атмосфере Солнца. Солнцедетельность и пятнообразовательная деятельность Солнца – синонимы одного и того же понятия. За меру солнечной активности принимается число Вольфа.

Год 1764 – начало Кавказской войны – является концом шестого в 18 веке историометрического цикла Чижевского, который начался в 1756 году.

1999–2002 – годы периода повышенной солнечной активности, а 2003–2004 годы являются годами пониженной солнечной активности. События этого периода свидетельствуют о сильной корреляции между региональным проявлением функции солнечной активности и параметрами потенциальных источников чрезвычайных ситуаций природного и социально-исторического характера.

Крупные восстания в Кабарде, имевшие место в 1779, 1794, 1804, 1809 и 1810 годах, попадают, за исключением последнего, в эпохи максимума солнцедетельности.

В 1810 году функция солнечной активности достигла своего минимума; 1779 год – второй год предпоследнего, а 1794 год – конец последнего историометрического цикла XVIII века.

Вспышки революционной деятельности масс в России в период 1905–1906 годов полностью совпадают с эпизодическими скачками активности Солнца. Февральское солнечное пятно 1917 года достигло колоссального линейного размера, равного около 250 тыс. км, а высота протуберанца 7 июля этого же года составила 235 тыс. км.

Распад СССР произошел в исключительные в солнцедетельности год и месяц: в августе 1991 года числа Вольфа достигли максимального значения, равного 176,3. На временном сегменте [1749, 1997] таких годов всего лишь 16.

Примечателен и ноябрь 1956 года, когда числа Вольфа превысили 200. Массовые общественные движения в Венгрии с участием советских войск, интенсивные бои в Будапеште имели место в конце октября и в ноябре 1956 года.

Среди природных катаклизмов достаточно вспомнить, что самая трагическая для города Тырныауза селевая волна по руслу реки Герхожан-Су на Центральном Кавказе сошла 19 июля 2000 года, когда общее количество пятен на Солнце достигло своего максимума, равного 248.

Июньское наводнение 2002 года на Северном Кавказе и трагедию, связанную со сходом ледника Колки 20 сентября в Кармадонском ущелье Республики Северная Осетия–Алания в тот же день, когда общее число пятен на Солнце достигло свой локальный максимум.

В настоящее время, когда с помощью спутниковых наблюдений (например, российско-украинского спутника «КОРОНАС-Ф», ориентированного на исследования солнечно-земных связей вблизи максимума текущего цикла солнечной активности) накоплено огромное количество информации, возникла острая необходимость в разработке новых компьютерно реализуемых математических моделей разного уровня прогностической значимости, учитывающих фрактальную природу солнцедетельности и массовых событий, имеющих более или менее крупное социально-историческое значение.

Историко-сравнительный метод в сочетании с методами математического моделирования и вычислительного эксперимента очередной раз подтвердили: «состояние предрасположения к поведению организованных масс» является функцией солнечной активности; взаимоотношения правительства и народа подвержены колебаниям в зависимости от периода пятнообразовательной деятельности Солнца; влияние единичных лиц на массы возрастает с усилением этой деятельности; подъемы солнечной активности «превращают потенциальную энергию (энергию накопления) масс в энергию кинетическую (энергию движения)»; социальная активность $u = u(t)$ в момент времени t синхронизируется с функцией Вольфа $v = v(t)$; фаза подъема солнечной активности характеризуется фазой подъема пассионарного напряжения; взаимодей-

ствие пассионариев и субпассионариев весьма часто носит синергетический характер и может быть формализовано в рамках вольтерровской модели «хищник-жертва», причем на фазе подъема в качестве «жертвы» выступают субпассионарии, а в роли «хищника» – пассионарии; наряду с (глобальными) историометрическими циклами наблюдаются и локальные (региональные) историометрические циклы; теория циклов становится определенным инструментом социально-экономического предвидения.

Подъем и падение солнечной активности происходит по обобщенному логистическому закону, который задается дифференциальным оператором дробного порядка.

График функции солнечной активности хорошо интерпретируется фракталом, погруженным в евклидовую фазовую плоскость: солнечная активность как закономерное явление имеет строгую периодичность и фрактальную по времени природу, ей присуща дилатационная симметрия, на стадиях подъема и падения хорошо может быть аппроксимирована с помощью функций типа Миттаг-Леффлера. Аналогично ведет себя и функция социальной активности.

Если солнечная активность меняется по обобщенному логистическому закону, то по этому же закону меняется и социальная активность. Отдельно взятые объекты, в том числе объекты управления, реагируют на солнечную активность, говоря словами А. Л. Чижевского, «с достоинством», то есть индивидуально.

А. Л. Чижевский считал возможным выдвинуть гипотезу о том, «что сила внушения – влияние единичных лиц на массы – возрастает с усилением пятнообразовательной деятельности солнца». Он же считал разумным предположение о том, что «подъемы солнцедетельности превращают потенциальную энергию (энергию накопления) масс в энергию кинетическую (энергию движения)».

Наиболее характерными (экстремальными) в смысле поведения для функции солнечной активности $\omega(t)$ во временном сегменте [1764, 1864] являются следующие годы (табл. 1):

Таблица 1

1769	$64, 2 \leq \omega(t) \leq 158, 2$	1809	$0, 0 \leq \omega(t) \leq 9, 2$	1838	$73, 6 \leq \omega(t) \leq 144, 9$
1770	$51, 0 \leq \omega(t) \leq 142, 5$	1810	$\omega(t) \equiv 0, 0$	1839	$53, 8 \leq \omega(t) \leq 132, 7$
1778	$105, 0 \leq \omega(t) \leq 238, 9$	1811	$0, 0 \leq \omega(t) \leq 6, 6$	1847	$44, 7 \leq \omega(t) \leq 180, 4$
1779	$110, 0 \leq \omega(t) \leq 165, 7$	1829	$43, 0 \leq \omega(t) \leq 95, 0$	1848	$100, 3 \leq \omega(t) \leq 159, 5$
1787	$87, 4 \leq \omega(t) \leq 157, 3$	1830	$43, 9 \leq \omega(t) \leq 93, 4$	1849	$67, 7 \leq \omega(t) \leq 157, 0$
1788	$94, 7 \leq \omega(t) \leq 154, 2$	1836	$88, 6 \leq \omega(t) \leq 206, 2$	1860	$71, 4 \leq \omega(t) \leq 116, 7$
1798	$0, 0 \leq \omega(t) \leq 12, 5$	1837	$96, 3 \leq \omega(t) \leq 188, 0$	1870	$77, 3 \leq \omega(t) \leq 176, 0$

Анализ социально-исторических событий и экстремальных явлений природы временного сегмента [1764, 1864] приводит к следующему заключению:

1. Количества экстремумов функций социальной и солнечной активностей совпадают с достаточно высокой степенью точности.

2. Наиболее напряженными годами Кавказской войны являются 1829–1835 годы. Эти же годы одновременно были напряженными годами солнцедетельности: функция солнечной активности в сентябре 1829 года достигает своего максимума, а затем монотонно убывает до своего минимума в сентябре 1833 года.

3. Ход кривой социальной активности адыгов имеет волнообразный характер с постепенным чередованием точек максимумов и минимумов, причем подъем от минимума до максимума происходит по кривой, очень близкой к логистической, процесс падения от максимума до минимума протекает аналогично по логистической кривой. Концентрация исторических событий достигает экстремальных значений ориентировочно при экстремуме функции солнечной активности.

4. График функции социальной активности адыгов $u = u(t)$, заключенный между двумя соседними минимумами функции $u(t)$, напоминает колоколообразную кривую, близкую к эпидемической кривой или к одной из наиболее достопримечательной в науке кривой, известной как нормальная гауссова кривая.

Расстояние во времени между двумя соседними минимумами (максимумами) функции $u(t)$ равно ориентировочно 10 и 11 годам, исключение составляет расстояние между двумя минимумами, достигнутыми в 1785 и 1798 годах, равное приблизительно 14 годам. За столетний период завоевания Россией Северного Кавказа наблюдается 9 периодов солнцедетельности.

5. С 1764 по 1864 годы адыго-русские отношения прошли через все периоды историометрического цикла А. Л. Чижевского период минимальной возбудимости: период нарастания возбудимости; период максимальной возбудимости и, наконец, период падения возбудимости.

Начало завоевания Россией Северного Кавказа совпадает с годом шестого историометрического цикла XVIII века с полупериодом, равным 8 годам.

6. Если учесть менталитет адыгского (черкесского) народа, то характерной чертой периода его минимальной возбудимости, как и у многих этносов, может выступать разрозненность масс и их миролюбивое настроение, терпимость, уступчивость. Однако, в силу адыгского этикета (адыгэ хабзэ) «проявление этих психологических признаков у исторически действующих» адыгских масс не могло сопровождаться «отсутствием желаний какой-бы то ни было борьбы» за идею свободы или права.

Адыги не могли быть адыгами (носителями адыгагъэ), если бы они пошли на «легкую капитуляцию, сдачу в плен, бросание оружия, бегство с поля боя».

Справедливость этого утверждения можно увидеть, в частности, из следующего высказывания венгерского ученого, этнографа Ж. Ш. Бесса: «Черкесы представляют собой многочисленный, храбрый, сдержанный, отважный, но малоизвестный в Европе народ...». Нужно заметить, что «чер» в персидском языке означает «воитель», «мужественный», а «кес» означает «личность», «индивидуум», «один из них».

7. Все периоды историометрического цикла А. Л. Чижевского, за исключением периода нарастания возбудимости, равного 2 годам, равны 3 годам.

Это заключение является общеизвестным утверждением того, что пятнообразования на поверхности Солнца возрастают быстрее, чем угасают, и согласуется с точностью до одного года с открытием, сделанным в 1851 г. Швабе, которое гласит: «изменения в числе солнечных пятен наступает периодически» и период равен 10 годам.

Период нарастания возбудимости исторического цикла примерно совпадает с циклом развития «Эль-Ниньо» – «разрушительного феномена природы».

Десять локальных историометрических циклов выпадают на временной сегмент [1762, 1864] длиной в 102 года.

8. Локальные историометрические циклы и циклы Чижевского временного сегмента [1762, 1864] задаются следующими таблицами 2 и 3.

Таблица 2

№	Локальные историометрические циклы		Солнцедетельность		
	начало–конец	продолжительность цикла	max	min	период: 4
1	1762–1767	5	1761,5	1766,5	5,0
2	1769–1775	6	1769,7	1775,5	5,8
3	1778–1784	6	1778,4	1784,7	6,3
4	1787–1794	7	1788,1	1798,3	10,2
5	1799–1810	11	1805,2	1810,6	5,4
6	1816–1825	9	1816,4	1823,3	6,9
7	1828–1835	7	1829,9	1833,9	4,0
8	1837–1842	5	1837,2	1843,5	6,3
9	1844–1856	12	1848,1	1856,0	7,9
10	1859–1864	5	1860,1	1867,2	7,1
Среднее арифметическое продолжительности цикла		7,3	Среднее арифметическое		6,49
			период: 4		

Таблица 3

№	Историометрические циклы		Солнцедетельность		
	начало–конец	продолжительность цикла	max	min	период: 4
1	1756–1764	8	1761,5	1766,5	5,0
2	1768–1775	7	1769,7	1775,5	5,8
3	1778–1781	3	1778,4	1784,7	6,3
4	1787–1794	7	1788,1	1798,3	10,2
5	1797–1809	12	1805,2	1810,6	5,4
6	1812–1822	10	1816,4	1823,3	6,9
7	1824–1833	9	1829,9	1833,9	4,0
8	1835–1843	8	1837,2	1843,5	6,3
9	1845–1856	11	1848,1	1856,0	7,9
10	1857–1868	11	1860,1	1867,2	7,1
Среднее арифметическое продолжительности цикла		8,6	Среднее арифметическое период: 4		6,49

9. 1778 г. и 1836 г. были исключительными годами временного сегмента [1763, 1864] и в солнцедетельности и в социальной активности адыгов.

Литература

1. Черкесия в XIX веке. Материалы 1-го Кошехабльского форума «История – достояние народа». Майкоп, 1991. 264 с.
2. Нахушев А. М., Кенетова Р. О. Моделирование социально-исторических и этнических процессов. Нальчик: Эль-Фа, 1998. 171 с.

Институт прикладной математики
и автоматизации КБНЦ РАН

Селевая активность в сопоставлении с вариациями солнечной активности

Основной целью статьи является доказательство существования сильной временной корреляции между солнечной и селевой активностями и разработка математических моделей этих процессов.

Бассейны рек Кабардино-Балкарской республики (КБР), которая в географическом отношении находится на северном склоне Большого Кавказа в наиболее приподнятой горной его части, являются зонами чрезвычайных ситуаций природного характера. Анализ потенциальных

источников экстремальных природных явлений и процессов показывает, что территория КБР представляет собой ярко выраженный объект информационно-математического моделирования с целью создания системы мониторинга экологии бассейнов горных рек. Достаточно отметить, что в типичном для Центрального Кавказа высокогорном густонаселенном бассейне р. Баксан за последние 50 лет сошло более 180 селей.

Все возрастающее количество фактов свидетельствует о сильной корреляции между региональным проявлением функции солнечной активности $w(t) = k[u(t) + 10v(t)]$, где k – коэффициент пропорциональности, $u(t)$ – общее число пятен на Солнце, $v(t)$ – число групп пятен, $w(t)$ – число Вольфа в момент времени t , и параметрами потенциальных источников чрезвычайных ситуаций природного характера. Тому подтверждение и чрезвычайные ситуации в 1999–2002 годах на территории КБР и в целом Северного Кавказа. Эти годы попадают в годы подъема солнечной активности и являются годами с повышенным температурным режимом. 2000 год характеризуется множеством аномальных явлений: среднегодовая температура воздуха по КБР была на 2–3, а иногда и на 4 градуса выше средних многолетних значений; с 18 по 21 июля значения функции не опускались ниже 228; в этот же период по руслу реки Герхожан-Су (Центральный Кавказ) в районе г. Тырныауз впервые за 65 лет наблюдался селевой процесс мощной разрушительной силы; самая трагическая для г. Тырныауза селевая волна сошла 19 июля, когда функция $u(t)$ достигла своего максимума, равного 248, за 2000 год; по данным Министерства КБР по делам гражданской обороны и чрезвычайным ситуациям в республике зарегистрировано 7 чрезвычайных ситуаций природного характера.

Среди природных катаклизмов 2002 года достаточно вспомнить июньское наводнение на Северном Кавказе и трагедию, связанную со сходом ледника Колка 20 сентября в Кармадонском ущелье Республики Северная Осетия–Алания в тот же день, когда функция $u(t)$ достигла своего локального максимума, равного 114: $u(19) = 112$, $u(20) = 114$, $u(21) = 106$.

Как показывает анализ реальных данных в многолетнем разрезе, *выход количества солнечных пятен на экстремальные значения является одним из основных признаков появления природной опасности в ближайшие и последующие сутки.*

Прогноз точек экстремума функции $u(t)$ в сочетании с целенаправленной обработкой данных ежесуточных метеорологических наблюдений и временных рядов значений показателя аномальности среднесуточных температур воздуха по сценарию, предложенному Д. Г. Гонсировским, М. М. Хаджиевым [1], может сыграть знаковую роль при определении временных границ селеопасных периодов.

Согласно закона Шваба–Вольфа изменения солнечной активности происходят периодически, со средним периодом 11,1 года [2]. Однако интервалы между годами максимальных (минимальных) значений функции солнечной активности $w(t)$ довольно сильно разнятся. Известно, что с 1749 года до наших дней их продолжительность колебалась от 7 до 17 лет между годами максимумов и от 9 до 14 лет между годами минимумов [2]. В связи с этим эффективный прогноз динамики солнечной активности все еще остается нерешенной проблемой. Выявлению спектра ритмов в среднегодовой динамике чисел Вольфа с 1749 по 1992 года и прогнозированию динамики солнечной активности в 21 веке посвящена работа [3].

Пусть стадия подъема функции $u = u(t)$ совпадает с временным сегментом $[\tau, \tau_m]$. Тогда $u(t)$ можно интерпретировать как решение обобщенного логистического уравнения:

$$\partial_{\tau t}^{\alpha} \frac{1}{u(\eta)} + \frac{p}{u(t)} = q, \quad \tau < t \leq \tau_m; \quad n-1 < \alpha \leq n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Здесь $\partial_{\tau t}^{\alpha}$ – оператор дробного дифференцирования порядка α ; p и q – положительные величины, характеризующие динамику солнечной активности. Оператор $\partial_{\tau t}^{\alpha}$ действует на функцию $u(t)$, $(n-1)$ -ая производная $u^{(n-1)}(t)$ которой абсолютно непрерывна на временном сегменте $[\tau, \tau_m]$, по формуле $\partial_{\tau t}^{\alpha} u(\eta) = D_{\tau t}^{\alpha-n} u^{(n)}(\eta)$, где $D_{\tau t}^{\mu}$ – оператор Римана–Лиувилля [4].

Уравнение (1) при $\alpha = 1$ совпадает с логистическим уравнением Бернулли–Ферхюльста [5]:

$$u'(t) = [p - qu(t)] u(t). \quad (2)$$

Если существует такое число $\varepsilon > 0$, что $u(t) \leq u(\tau_m)$ для всех $t \in [\tau_m - \varepsilon, \tau_m + \varepsilon]$, то в уравнении (2) можно положить $q = p/u(\tau_m)$ и переписать его в виде

$$u'(t) = p \left[1 - \frac{u(t)}{u(\tau_m)} \right] u(t), \quad \tau \leq t \leq \tau_m. \quad (3)$$

Любое неособое решение $u(t)$ уравнения (3) представимо в виде

$$u(t) = \frac{u(\tau) u(\tau_m)}{u(\tau) + [u(\tau_m) - u(\tau)] \exp[p(\tau - t)]}, \quad (4)$$

а особое – в виде $u(t) = u(\tau_m) = p/q$.

На стадии падения $\tau_m \leq t \leq \tau_{\min}$ солнечной активности функцию (4) следует заменить следующей функцией:

$$u(t) = \frac{u(\tau_m) u(\tau_{\min})}{u(\tau_m) + [u(\tau_{\min}) - u(\tau_m)] \exp[c(t - \tau_m)]},$$

$u(\tau_{\min}) = c/d$, $c, d = \text{const} > 0$; время $\tau_{\min}$ таково, что существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $u(\tau_{\min}) \leq u(t)$ для всех $t \in [\tau_{\min} - \varepsilon, \tau_{\min} + \varepsilon]$.

При $n = 1$ ($0 < \alpha < 1$) решение $u(t)$ уравнения (1), удовлетворяющее условию Коши: $u(\tau) = 1/y(\tau)$, задается формулой

$$1/u(t) = y(\tau) + [q - py(\tau)](t - \tau)^\alpha E_{1/\alpha}[-p(t - \tau)^\alpha; \alpha + 1]. \quad (5)$$

Алгоритм (5) может быть эффективным при оперативном и долгосрочном прогнозах динамики солнечной активности на стадии ее подъема.

Мониторинг чрезвычайных ситуаций выдвигает проблему математического моделирования формирования склона водной эрозии и, в первую очередь, склоновых селевых процессов. В периоды солнечной активности обостряются эрозионно-селевые процессы в горных и предгорных ландшафтах КБР. Эти процессы имеют фрактальную природу и весьма активно проявляют себя в бассейнах рек селевого характера. Универсальным объектом математического моделирования являются селевые процессы в бассейне р. Герхожан-Су с конусом выноса на территорию г. Тырнауза. В бассейне этой реки по частоте схода преобладают сели смешанного ледниково-дождевого происхождения, имеют место и сели чисто ледникового генезиса. В настоящее время р. Герхожан-Су – самый активный селевой бассейн Северного Кавказа [6]. Годы, месяцы и даже дни схода крупных селей, как правило, с удивительной точностью совпадают с экстремальными (критическими) временами для функции солнечной активности; имеет место синхронизация солнечной и селевой активностей, их циклов (хронологию солнечной и селевой активности см. в табл. 1, 2).

Таблица 1

Год	Среднегодовое значение $u(t)$	Среднемесячные значения функции $u(t)$		
		7	8	9
1937	114,4	145,1	137,7	100,7
1960	112,3	121,7	134,1	127,2
1961	53,9	70,2	55,8	63,6
1962	37,6	21,8	21,8	51,3
1963	27,9	19,6	33,2	38,8
1965	15,0	11,9	8,9	16,8
1975	15,5	28,2	39,7	13,9
1977	27,5	21,4	30,1	44,0
1983	66,6	82,2	71,8	50,3
1995	17,5	14,5	14,3	11,8
1999	93,3	113,5	93,7	71,5
2000	119,6	169,1	130,5	109,9

Таблица 2

Дата	Значение функции $u(t)$	Критические значения функции $u(t)$
02.08.1937	188	$\max_{[1,31]} u_8^1(t) = u_8^1(3) = 207$
01.08.1960	75	$\max_{[1,8]} u_8^2(t) = u_8^2(1) = 75$
14.08.1961	104	$\max_{[1,31]} u_8^3(t) = u_8^3(11) = 109$
31.07.1962	0	$\min_{[1,31]} u_7^4(t) = u_7^4(31) = 0$
23.07.1963	25	$\max_{[1,31]} u_7^5(t) = u_7^5(23) = 25$
07.09.1965	23	$\max_{[1,26]} u_9^6(t) = u_9^6(7) = 23$
05.07.1975	23	$u_7^7(4) = 16, u_7^7(5) = 23,$ $u_7^7(6) = 33, u_7^7(7) = 23$
11.08.1977	23	$\min_{[5,22]} u_8^8(t) = u_8^8(11) = 23$
19.07.1983	96	$u_7^9(18) = 98, u_7^9(19) = 96, u_7^9(20) = 101$
15.07.1995	19	$u_7^{10}(14) = 13, u_7^{10}(15) = 19,$ $u_7^{10}(16) = 17$
15.08.1995	12	$u_8^{11}(13) = 9, u_8^{11}(14) = 0, u_8^{11}(15) = 12$
20.08.1999	48	$\max_{[17,20]} u_8^{12}(t) = u_8^{12}(20) = 48$

Действительно, рассмотрим хронологию селей в этом бассейне [7] и хронологию экстремумов функции $u(t)$. Пусть $u_i^j(t)$ – значение функции $u(t)$ в i -м месяце j -го года. Известно, что $j \in G = \{1937, 1960, 1961, 1962, 1963, 1965, 1975, 1977, 1983, 1995, 1999, 2000\}$, $i \in \{7, 8, 9\}$, причем 9-й месяц встречается только в 1965 году, элементы множества G нумеруются в порядке их следования: 1 г. – это 1937, 2 г. – 1960, ..., 12 г. – 2000.

Концепция фрактала играет важную роль при математическом моделировании экологической ситуации рек. В частности, коэффициент эрозии $E = E(\eta)$ можно интерпретировать как решение дифференциального уравнения дробного порядка

$$D_{0\eta}^{\alpha+1} E(\xi) = \lambda E(\eta), \quad (6)$$

где $0 < \alpha = \text{const} < 1$, λ – постоянный коэффициент пропорциональности, $\eta = t/T$ – безразмерное время, $0 \leq t \leq T$.

При $\lambda = 0$ общее решение уравнения (6) имеет вид

$$E(\eta) = (a\eta + b)\eta^{\alpha-1}, \quad \eta = t/T, \quad (7)$$

где a и b – произвольные постоянные.

Если в формуле (7) положить $\alpha = 0,21$, $b = 0$, $a = 0,58 + 1,4F_1/F_0$, где F_1 – эрозионная площадь (км^2) в бассейне реки Дуруджи (Грузия),

F_0 – общая площадь, t – время (год), T – период наблюдения: 2001–2002 гг., то получим эмпирическую формулу, найденную в работе [8]. Как видно из этой работы (см. формулу (2), расход турбулентных селевых потоков 1%-ой обеспеченности Q , формирующихся в селеносных водотоках с заданным уклоном селевого русла как функции $x = F_0$, удовлетворяет уравнению $D_{0x}^{\alpha+1}Q = 0$, $\alpha = 0,61$.

Следуя [9, с. 119], допустим, что склон

$$S_t = \{(x, y) : y = \varphi(x, t) \partial\varphi/\partial x > 0 \forall x > 0, \varphi(0, t) > 0\}$$

в момент времени $t > 0$ состоит из тех же пород, частицы которых переносит текущая по нему несжимаемая вода с определенной мутностью; поток воздействует на первоначальную плоскую поверхность в точке $x = 0$ со скоростью v_0 ; вода несет некоторый материал на единицу объема со скоростью $v \sim c$; скорость воды пропорциональна крутизне склона, по которому она стекает $v \sim \partial\varphi/\partial x$. Тогда можно положить, что

$$\frac{\partial}{\partial x}(vc) \sim \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \sim \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 \sim -D_{0t}^{\alpha}\varphi(x, \eta), \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Стало быть,

$$D_{0t}^{\alpha}\varphi(x, \eta) = a \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2, \quad a = \text{const} > 0. \quad (8)$$

Из (8), после дифференцирования по x , получаем

$$D_{0t}^{\alpha}z(x, \eta) = a \frac{\partial^2 z^2(x, t)}{\partial x^2}, \quad z(x, t) = \frac{\partial\varphi(x, t)}{\partial x}. \quad (9)$$

При $\alpha = 1$ уравнение (9) совпадает с уравнением Буссинеска [5], которое имеет важное значение в теории гидрогеологического прогнозирования.

Пусть r – мера проекции склона водной эрозии S_t , а

$$\delta(t) = \frac{1}{r} \int_0^r \varphi(x, t) dx.$$

Тогда, если известна разность

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 \Big|_{x=r} - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 \Big|_{x=0} = t^{-\alpha} f(t), \quad (10)$$

где $f(t)$ – ограниченная, отличная от нуля заданная функция, то из (8) получаем

$$D_{0t}^{\alpha}\delta(\eta) = a f(t) t^{-\alpha}. \quad (11)$$

Любое решение $\delta(t)$ уравнения (10) представимо в виде

$$\delta(t) = At^{\alpha-1} + aD_{0t}^{-\alpha}f(\eta)\eta^{-\alpha}. \quad (12)$$

Поэтому единственное ограниченное решение уравнения (11) определяется формулой

$$\delta(t) = D_{0t}^{-\alpha}\eta^{-\alpha}f(\eta). \quad (13)$$

Для ряда склонов типа S_t (например, для русла р. Герхожан-Су), несущих селевые потоки ливневого генезиса, более реалистично не уравнение (8), а уравнение

$$\partial_{0t}^{\alpha}\varphi(x, \eta) = a\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 \quad (14)$$

с нелокальным и нелинейным краевым условием

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\Big|_{x=r} - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\Big|_{x=0} = \psi(t), \quad (15)$$

где $\psi(t)$ – заданная непрерывная при $t \geq 0$ функция, имеющая производную порядка $1 - \alpha$ с началом в начальный момент времени $t = 0$ и концом $t > 0$.

Если функция $\varphi(x, t)$ удовлетворяет уравнению (14) и условию (15), то

$$\delta(t) = \delta(0) + aD_{0t}^{-\alpha}\psi(\eta). \quad (16)$$

Граничные условия (10) и (15) являются существенными для справедливости формул (12) и (16) соответственно.

Важными элементами системы мониторинга экологии бассейнов горных рек являются математические модели, проблемно-ориентированные на прогнозирование стока горных рек, селевых, лавинных и паводковых явлений. Концепция фрактала и теория движения взвешенных наносов, неравномерного бурного течения на быстротеке, развитые в работах Ф. И. Франкля [10], могут сыграть ключевую роль при модернизации существующих моделей и разработке хорошо идентифицируемых и компьютерно реализуемых системных моделей, базирующихся на фрактальных реактивно-диффузионных дифференциальных уравнений в частных производных основных и смешанных типов.

Литература

1. Гонсировский Д. Г., Хаджиев М. М. В кн. «Защита народохозяйственных объектов от воздействия селевых потоков». Материалы Международной конференции по селям. Пятигорск, 17–21 ноября 2003 г. С. 32–39.
2. Витинский Ю. И. Солнечная активность. М.: Наука, 1993.

3. Чиркова Э. Н., Немов В. В. Спектр многолетних ритмов чисел Вольфа с 1749 года и прогноз динамики солнечной активности в XXI веке // Сознание и физическая реальность. 1997. Т. 2, № 4. С. 64–69.
4. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 272 с.
5. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М.: Высш. шк., 1995. 301 с.
6. Разумов В. В. Потенциальные источники чрезвычайных ситуаций на территории Северного Кавказа. Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2003. 245 с.
7. Сейнова И. Б. Селевые процессы бассейна реки Баксан в последнем тысячелетии (Центральный Кавказ). М.: ВИНТИ, 1997. 295 с.
8. Гавардашвили Г. В., Чахая Г. Г., Цулукидзе Л. Н. Оценка эрозионно-селевых явлений в бассейнах рек Терек, Белая Арагви и Дуруджи. В кн. «Защита народохозяйственных объектов от воздействия селевых потоков». Материалы Международной конференции по селям. Пятигорск. 17–21 ноября 2003 г. С. 22–23.
9. Шайдегер А. Е. Теоретическая геоморфология. М.: Прогресс, 1964. 450 с.
10. Франклъ Ф. И. Избранные труды по газовой динамике. М.: Наука, 1973. 711 с.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН

Некоторые факты из теории краевых задач со смещением

1. Истоки понятия краевых задач со смещением. Проблема поиска корректных краевых задач для уравнений смешанного типа в многомерных областях, когда поверхность параболического вырождения является пространственно ориентированной, приводит к краевым задачам со смещением. Метод Трикоми решения локальных краевых задач для уравнений с оператором Чаплыгина в главной части приводит также к краевым задачам для эллиптических (гиперболических) уравнений с нелокальным условием на части границы области их задания [1].

В работах [1–3] вводятся понятия: краевых задач со смещением; нелокального оператора; нелокальных внутренних, краевых и внутреннекраевых задач; краевых, внутреннекраевых условий и задач с локальным (нелокальным) смещением (или сдвигом) для дифференциальных уравнений и систем основных типов.

К краевым задачам с локальным (нелокальным) смещением сводятся многие проблемы биологической синергетики [4, с. 136].

Пусть Ω^+ – конечная односвязная область плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная одним простым контуром Ляпунова σ , а Ω^- – бесконечная область, дополняющая $\Omega^+ \cup \sigma$ до полной плоскости. Пусть далее $\alpha(t)$ обозначает некоторый заданный гомеоморфизм контура σ на себя. Н. И. Мусхелишвили [5, с. 571] граничной задачей сопряжения со смещением (или сдвигом) назвал задачу отыскания

кусочно-голоморфной функции $\Phi(z)$ с линией скачков σ , имеющую конечный порядок на бесконечности, по граничному условию

$$\Phi^+[\alpha(z)] = G(z)\Phi^-(z) + g(z) \quad \forall z \in \sigma, \quad (1)$$

где $G(z)$ и $g(z)$ – заданные на σ функции, удовлетворяющие условию Гельдера, причем $G(z) \neq 0$ всюду на σ ; $\Phi^+(z) = \Phi(z)$ при $z \in \Omega^+$ и $\Phi^-(z) = \Phi(z)$ при $z \in \Omega^-$.

Задача сопряжения со смещением побудила автора к необходимости введения понятия краевых задач со смещением [1].

К краевым задачам со смещением для голоморфных (аналитических) в области Ω^+ с границей σ функций $\Phi^+(z) = u + iv$ можно отнести задачу, сформулированную еще Риманом в следующих его предложениях: «Разделим, например, границу на n частей и каждой точке на одной части сопоставим $n - 1$ точек из других частей – по одной из каждой части, а затем свяжем значения u и v в этих n точках n уравнениями, изменяющимися непрерывно при изменении положения n выбранных точек. Эти условия, совокупность которых образует непрерывное множество и которые выражаются посредством уравнений, связывающих произвольные функции, являются, вообще говоря, необходимыми и достаточными для определения функции, всюду непрерывной в данной области, только при дальнейшем ограничении, именно, при добавлении равенств, связывающих входящие произвольные постоянные».

Т. Carleman [6] (см. также [5, с. 578]), предполагая, что $\alpha[\alpha(z)] = z$ всюду на σ , в области Ω^+ рассмотрел однородную задачу, соответствующую следующей граничной задаче:

Найти функцию $\Phi(z)$, голоморфную в области Ω^+ , за исключением конечного числа полюсов, и непрерывно продолжаемую на σ , по граничному условию

$$\Phi[\alpha(z)] = G(z)\Phi(z) + g(z) \quad \forall z \in \sigma. \quad (2)$$

Для записанной в комплексной форме системы Коши–Римана

$$\Phi_{\bar{z}} = 0, \quad (3)$$

заданной в объединении Ω областей Ω^+ и Ω^- , условие (1) является условием сопряжения со смещением на линии скачков σ . Условие (2) для уравнения (3) в области Ω^+ представляет собой граничное (или краевое) условие со смещением. Условие (1) сопрягает граничные значения $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ в точках z и $\alpha(z)$, смещенных друг относительно друга. Краевое условие (2) связывает значения искомого решения уравнения (3) в сдвинутых (смещенных) друг относительно друга точках z и $\alpha(z)$ границы σ области Ω^+ . Поэтому задача (2) для системы (3) в области Ω^+ является задачей с локальным смещением.

Регулярное в области Ω решение $\Phi(z)$ системы (3), непрерывное в $\bar{\Omega} = \Omega \cup \sigma$ и удовлетворяющее условию Гельдера на σ , удовлетворяет следующему краевому условию с нелокальным (интегральным) смещением

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\sigma} \frac{\Phi(\xi) d\xi}{\xi - z} \quad \forall z \in \sigma,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Задачу Франкля (см. [7, с. 339]) можно отнести к классу краевых задач с локальным смещением на части границы.

Задача, предложенная А. В. Бицадзе и А. А. Самарским [7–9] для эллиптического уравнения второго порядка, является внутреннекраевой задачей с локальным смещением. Своеобразие этой задачи состоит в том, что искомое решение должно удовлетворять условию, связывающему его значения в гомеоморфных точках, одна из которых лежит на части границы, а другая – внутри области задания уравнения.

2. Задачи Фурье и Стеклова. В. А. Стеклов [10] в 1896 г. (см. также [11, с. 66]) обратил внимание, что «различные задачи об охлаждении тел линейных размеров, переведенные на язык анализа, сводятся к интегрированию дифференциального уравнения» в частных производных вида

$$p(x)u_t = u_{xx} - q(x)u, \quad a < x < b, \quad 0 < t < T \quad (4)$$

при начальном условии

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad a \leq x \leq b \quad (5)$$

и предельных условиях

$$a_1 u(a, t) + a_2 u_x(a, t) + a_3 u(b, t) + a_4 u_x(b, t) = 0, \quad (6)$$

$$b_1 u(a, t) + b_2 u_x(a, t) + b_3 u(b, t) + b_4 u_x(b, t) = 0. \quad (7)$$

Здесь $u = u(x, t)$ – искомая в области $\Omega = \{(x, t) : a < x < b, 0 < t < T\}$ функция; T – расчетное время; $p(x)$, $q(x)$, $\tau(x)$ – заданные функции из класса $C[a, b]$; a_j и b_j ($j = 1, 2, 3, 4$) суть некоторые заданные постоянные; $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$ для всех $x \in [a, b]$; линейные формы в левых частях (6), (7) линейно независимы между собой, т. е. по крайней мере одна из разностей $a_i b_j - a_j b_i$ ($i, j = 1, 2, 3, 4; i \neq j$), например, $a_2 b_4 - a_4 b_2 \neq 0$. Условия (6), (7), имеющие, по словам А. А. Самарского [9], *нестандартный вид*, являются краевыми условиями со смещением; они устанавливают связь значений искомого решения u и его производной u_x в точках (a, t) и (b, t) , лежащих на частях σ_{at} и σ_{bt} границы $\sigma_{xt} = \sigma_{at} \cup \sigma_{bt} \cup \sigma_{x0} \cup \sigma_{xT}$.

Преобразования

$$x = \int_0^\xi \frac{ds}{k(s)} + a, \quad a = \text{const} < b = \int_0^l \frac{ds}{k(s)} + a, \quad U = u \left(\int_0^\xi \frac{ds}{k(s)} + a, t \right),$$

$p(x) = c\rho(\xi)k(\xi)$, $q(x) = m(\xi)k(\xi)$ связывают уравнение (4) с уравнением

$$g U_t = [k(\xi) U_\xi]_\xi - mU, \quad g = c\rho, \quad (8)$$

которому должна удовлетворять температура $U = U(\xi, t)$ в каждый момент времени $t > 0$ и для всякой точки ξ тонкого твердого стержня $0 \leq \xi \leq l$ конечной длины l с удельной теплотой c , плотностью ρ , внутренней теплопроводностью $k(\xi)$ и лучеиспускательной способностью m .

Из краевых условий (6), (7) в случае, когда $a_2 = a_4 = 0$, $b_1 = b_3 = 0$, получаем

$$a_1 u(a, t) + a_3 u(b, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (9)$$

$$b_2 u_x(a, t) + b_4 u_x(b, t) = 0, \quad 0 < t < T. \quad (10)$$

Задача об охлаждении сплошного кольца при определенной ее схематизации редуцируется к задаче отыскания решения $u(x, y)$ уравнения (4), удовлетворяющего начальному условию (5) и краевым условиям

$$u(a, t) = u(b, t), \quad (11)$$

$$u_x(a, t) = u_x(b, t), \quad (12)$$

которые следуют из (9) и (10) при $a_1 = -a_3 \neq 0$ и $b_2 = -b_4 \neq 0$. Эта задача была поставлена еще Фурье [11, с. 64].

Задача Фурье (11), (12) для параболического уравнения с сосредоточенным запаздыванием является математической моделью процесса размножения отдельной популяции в одномерном биологическом реакторе, имеющем форму достаточно длинной трубки, замкнутой в кольцо [4, с. 137].

Пусть $a_4 \neq 0$, $a_2 = 0$, $b_2 \neq 0$, $b_4 = 0$. Тогда (6) и (7) соответственно можно переписать следующим образом:

$$u_x(b, t) = \alpha_{11} u(a, t) + \alpha_{12} u(b, t), \quad (13)$$

$$u_x(a, t) = \alpha_{21} u(a, t) + \alpha_{22} u(b, t). \quad (14)$$

Если $a_2 = a_4 = 0$, $a_3 \neq 0$ и $b_3 = 0$, $b_4 \neq 0$, то

$$u(b, t) = \beta_{11} u(a, t), \quad (15)$$

$$u_x(b, t) = \beta_{21} u(a, t) + \beta_{22} u_x(a, t). \quad (16)$$

В. А. Стеклов [11, с. 67] различал два класса задач: к первому классу он относил те, которые требуют найти решения уравнения (4), удовлетворяющие условиям (13), (14), ко второму – те, когда ищется решение уравнения (4) по краевым условиям (15), (16).

Условия (13), (14) заключают в себе задачи об охлаждении незамкнутых твердых тел линейных размеров (прямой стержень; стержень, изогнутый в незамкнутую кривую), условия же (15), (16) соответствуют задачам об охлаждении замкнутых твердых тел линейных размеров (сплошное кольцо, стержень, изогнутый в замкнутую кривую).

3. Внутреннекраевые задачи с локальным и нелокальным смещением. Пусть в любой момент времени t от начального $t = 0$ до расчетного $t = T$ заданы уравнение (8) и следующий закон изменения общего количества температуры в стержне за счет удельной теплоты:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^l g(\xi) U(\xi, t) d\xi = 0. \quad (17)$$

В случае уравнения (4) условие (17) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_a^b p(x) u(x, t) dx = 0. \quad (18)$$

Равенство (18) для уравнения (4) в области Ω задает внутреннекраевое условие с нелокальным сдвигом.

Решение $u(x, t)$ уравнения (4) удовлетворяет условию (18) только тогда, когда

$$u_x(b, t) - u_x(a, t) - \int_a^b q(x) u(x, t) dx = 0. \quad (19)$$

Условие (19) – следствие следующего необходимого нелокального внутреннекраевого условия разрешимости задачи (5)–(7) для уравнения (4):

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_\alpha^\beta p(x) u(x, t) dx = u_x(\beta, t) - u_x(\alpha, t) - \int_\alpha^\beta q(x) u(x, t) dx, \quad [\alpha, \beta] \subset [a, b].$$

Если $q(x) \equiv 0$, то любое решение уравнения (4), удовлетворяющее условию (12), будет удовлетворять «интегральному» условию (18), и наоборот. Другими словами, для уравнения

$$p(x) u_t = u_{xx} \quad (20)$$

условия (12) и (18) являются эквивалентными.

Для функций $u(x, t) \in C(\bar{\Omega})$, $q(x) \in C[a, b]$ согласно теореме о среднем значении интеграла существует такое число $x_* \in]a, b[$, что условие (19) можно записать в виде

$$u_x(a, t) = u_x(b, t) - (b - a)q(x_*)u(x_*, t). \quad (21)$$

Пусть h – шаг по пространственной координате x , $h < b - a$,

$$u_x(a, t) \approx [u(a + h, t) - u(a, t)]/h, \quad u_x(b, t) \approx [u(b - h, t) - u(b, t)]/h.$$

Тогда условия (6), (7) приближенно можно заменить условиями

$$(a_1 h - a_2)u(a, t) + a_2 u(a + h, t) + (a_3 h - a_4)u(b, t) + a_4 u(b - h, t) = 0, \quad (22)$$

$$(b_1 h - b_2)u(a, t) + b_2 u(a + h, t) + (b_3 h - b_4)u(b, t) + b_4 u(b - h, t) = 0. \quad (23)$$

Уравнения (22), (23) связывают значения искомого решения уравнения (4) в четырех точках (a, t) , (b, t) , $(a + h, t)$, $(b - h, t)$, последние две из которых – внутренние точки области Ω . Поэтому задача с условиями (5), (22), (23) для уравнения (4) в области Ω является внутреннекраевой задачей со смещением.

Из (22), (23) при $a_1 = a_2 = a_4 = 0$, $a_3 \neq 0$, $b_3 = b_4 = 0$, $b_2 \neq b_1 h$ получаем условия

$$u(b, t) = 0, \quad u(a, t) = G(t)u(a + h, t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (24)$$

Здесь $G(t) = b_2/(b_2 - b_1 h)$.

Задачу (5), (24) для параболического уравнения (4) при $G = 1$ можно интерпретировать как прямой аналог задачи Бицадзе–Самарского для уравнений эллиптического типа [8].

Из (6) и (7) при $a_1 = a_3 = 0$, $a_2 = -a_4 \neq 0$, $b_1 \neq 0$, $b_2 = b_3 = b_4 = 0$ следует условие Фурье (12), названное в работах [12, 13] неклассическим краевым условием, и условие

$$u(a, t) = 0. \quad (25)$$

Если $p(x) = p(\xi)$, $q(x) = q(\xi)$ при $\xi = a + b - x$, то задача (5), (12), (25) для уравнения (4) сводится к двум локальным краевым задачам для этого же уравнения.

В самом деле, пусть $u = u(x, t)$ – любое решение уравнения (4) из класса $C(\bar{\Omega}) \cap C^1([a, b] \times]0, T[)$. Очевидно, $u = u^+(x, t) + u^-(x, t)$, где $2u^+(x, t) = u + u(\xi, t)$, $2u^-(x, t) = u - u(\xi, t)$. Функции u^+ и u^- являются решениями уравнения (4), удовлетворяющими краевым и начальным условиям

$$2 \frac{\partial u^+}{\partial x} \Big|_{x=b} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=b} - \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=a} = 0, \quad (26)$$

$$2 \frac{\partial u^+}{\partial x} \Big|_{x=a} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=a} - \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=b} = 0, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} u^+(x, 0) &= \frac{1}{2}\tau(x) + \frac{1}{2}\tau(a+b-x) \equiv \tau^+(x), \\ u^-(a, t) &= -u^+(a, t), \quad u^-(b, t) = u^+(b, t) \end{aligned} \quad (28)$$

и

$$u^-(x, 0) = \frac{1}{2}\tau(x) - \frac{1}{2}\tau(a+b-x) \equiv \tau^-(x). \quad (29)$$

Условия (26), (27) – следствие условия Фурье (12), а условия (28) вытекают из (25): $2u^-(b, t) = u(b, t) - u(a, t) = u(b, t) = u^+(b, t) + u^-(b, t) \Rightarrow u^-(b, t) = u^+(b, t)$.

На связь нелокальных краевых задач для локальных дифференциальных уравнений с локальными краевыми задачами для нагруженных уравнений обращено внимание в работах автора [14], [15].

Очевидно, что и краевая задача

$$u_x(a, t) = \psi_a(t), \quad u(a, t) = u(b, t) \quad (30)$$

для уравнения

$$u_t = Du_{xx} - qu \quad (D > 0) \quad (31)$$

с постоянными коэффициентами и начальным условием (5) заменой $2u^+ = u + u(\xi, t)$, $2u^- = u - u(\xi, t)$ сводится к последовательному решению двух локальных краевых задач.

Задача (5), (30) для уравнения (31) была предложена автором в 1986 г. в качестве математической модели спирального филлотаксиса [16, с. 161]. Позже она была названа им задачей Торнли [4, с. 270]. В 2001 г. эта задача (при $D = 1$, $q = 0$, $a = 0$, $b = 1$, $\psi_a = 0$) была объектом внимания авторов заметки [17, с. 31].

4. Нелокальные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Функция

$$u(x, t) = \tau(x)\exp(-\lambda t), \quad (32)$$

где $\tau(x)$ – произвольная функция из класса $C^1[a, b] \cap C^2[a, b]$, λ – произвольная постоянная, будет решением задачи (4), (6), (7) тогда и только тогда, когда

$$\tau''(x) + [\lambda p(x) - q(x)]\tau(x) = 0, \quad (33)$$

$$a_1\tau(a) + a_2\tau'(a) + a_3\tau(b) + a_4\tau'(b) = 0, \quad (34)$$

$$b_1\tau(a) + b_2\tau'(a) + b_3\tau(b) + b_4\tau'(b) = 0. \quad (35)$$

Задачу (34), (35) для уравнения (33) иногда называют задачей Штурма–Лиувилля [18] или задачей типа Штурма–Лиувилля.

Условиям Фурье (11), (12) соответствуют периодические граничные условия

$$\tau'(a) = \tau'(b), \quad (36)$$

$$\tau(a) = \tau(b), \quad (37)$$

а условиям (13), (14) и (15), (16) – условия

$$\tau'(b) = \alpha_{11}\tau(a) + \alpha_{12}\tau(b), \quad (38)$$

$$\tau'(a) = \alpha_{21}\tau(a) + \alpha_{22}\tau(b) \quad (39)$$

и

$$\tau(b) = \beta_{11}\tau(a), \quad (40)$$

$$\tau'(b) = \beta_{21}\tau(a) + \beta_{22}\tau'(a). \quad (41)$$

Систему (38), (39) В. А. Стеклов назвал предельными условиями первого класса, а условия (40), (41) – предельными условиями второго класса для уравнения (33).

Задача с распределенными граничными условиями (38), (39) для уравнения (33) при $\alpha_{11} = \alpha_{22} = 0$, $\alpha_{12} \leq 0$, $\alpha_{21} \geq 0$ называется задачей Штурма–Лиувилля.

Условия (40) и (41) при $\beta_{21} = 0$ принято называть смешанными граничными условиями. В случае, когда $\beta_{11} = \beta_{22} = -1$, смешанные граничные условия называются антипериодическими.

Условие (18) порождает для уравнения (33) условие

$$\int_a^b p(x)\tau(x)dx = 0. \quad (42)$$

Функция $\tau(x) \in C^1[a, b]$ будет решением уравнения (33), удовлетворяющим условию (42) в том и только в том случае, когда

$$\tau'(b) - \tau'(a) - \int_a^b q(x)\tau(x)dx = 0. \quad (43)$$

Я. Д. Тамаркин [19] для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений рассматривал граничные условия, которые получаются из (38), (39) добавлением некоторых интегральных операторов.

В силу (21) условие (43) можно записать и в виде

$$\tau'(b) - \tau'(a) - (b - a)q(x_*)\tau(x_*) = 0. \quad (44)$$

Если интеграл в левой части равенства (43) заменить конечной суммой, положив

$$\int_a^b q(x)\tau(x)dx \approx \sum_{j=1}^m \beta^j q(x_j)\tau(x_j), \quad x_j \in [a, b],$$

где x_j — узлы, а β_j — коэффициенты квадратурной формулы, то для уравнения (33) получим следующее внутреннекраевое условие со смещением:

$$\tau'(a) = \tau'(b) - \sum_{j=1}^m \beta^j q(x_j)\tau(x_j). \quad (45)$$

Это условие безусловно должно быть согласовано с нелокальным краевым условием

$$\sum_{j=1}^m \beta^j p(x_j)\tau(x_j) = 0, \quad (46)$$

которое следует из (42) после процедуры замены интеграла конечной суммой.

В соответствии с определением регулярных краевых условий для обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [20], [73]) условия (34), (35) можно назвать регулярными краевыми условиями для уравнения (33) в следующих случаях:

$$a_2b_4 - a_4b_2 \neq 0; \quad (47)$$

$$a_2b_4 - a_4b_2 = 0, \quad |a_2| + |a_4| > 0, \quad a_4b_1 + a_2b_3 \neq 0; \quad (48)$$

$$a_2 = a_4 = b_2 = b_4 = 0, \quad a_1b_3 - a_3b_1 \neq 0. \quad (49)$$

В случае (47) условия (34), (35) переписываются в виде (38), (39), т. е. в виде условий первого класса по терминологии В. А. Стеклова.

Регулярные краевые условия будут усиленно регулярными, если к условиям (48) добавить условие $|a_2b_1 + a_4b_3| \neq |a_4b_1 + a_2b_3|$ (см. [21]).

Условия Фурье (36), (37) являются регулярными, а условия первого класса (38), (39) представляют собой усиленно регулярные краевые условия для уравнения (33) [20, с. 67], [22].

Из (34), (35) при $b_2 = b_4 = 0$ получаем краевые условия

$$a_2\tau'(a) + a_4\tau'(b) + a_1\tau(a) + a_3\tau(b) = 0, \quad (50)$$

$$b_1\tau(a) + b_3\tau(b) = 0, \quad (51)$$

которые являются условиями типа предельных условий второго класса (40), (41).

При $a_1 = a_3 = 0$, $a_2 = -a_4 \neq 0$, $b_3 = 0$, $b_1 \neq 0$ из (50), (51) следуют условия

$$\tau'(b) - \tau'(a) = 0, \quad (52)$$

$$\tau(a) = 0. \quad (53)$$

Граничные условия (52), (53) удовлетворяют случаю (48), но не являются усиленно регулярными, они вытекают и из (9), (10) при $a_1 \neq 0$, $a_3 = 0$, $b_2 = -b_4 \neq 0$. Нелокальное условие (52) следует и из (43) при $q(x) \equiv 0$. Если же $b_4 = 0$, $b_2 \neq 0$, $a_1 = -a_3 \neq 0$, то из (9), (10) для $\tau(x)$ будем иметь:

$$\tau'(a) = 0, \quad (54)$$

$$\tau(a) = \tau(b). \quad (55)$$

Регулярные краевые условия (54), (55) не являются усиленно регулярными. Если на $[a, b]$ $q(x) > \lambda p(x)$, то эта задача для уравнения (33) не имеет решений, отличных от тривиального. Она эквивалентна нагруженному интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$\tau(x) = \int_a^x (x-t)[q(t) - \lambda p(t)]\tau(t)dt + \tau(b).$$

Очевидно, что любая функция $\tau(x) \in C[a, b]$ представима в виде $\tau(x) = \tau^+(x) + \tau^-(x)$, где $2\tau^+(x) = \tau(x) + \tau(\xi)$, $2\tau^-(x) = \tau(x) - \tau(\xi)$, $\xi = a + b - x$. Пусть $p(x) = p(\xi)$, $q(x) = q(\xi)$, $\tau(x)$ – решение уравнения (33) из класса $C[a, b]$. Тогда функции $\tau^+(x)$ и $\tau^-(x)$ будут решениями уравнения (33), удовлетворяющим условиям

$$\tau^-(a) = 0, \quad \tau^-(b) = 0, \quad (56)$$

$$\left. \frac{d\tau^+}{dx} \right|_{x=a} = - \left. \frac{d\tau^-}{dx} \right|_{x=a}, \quad \left. \frac{d\tau^+}{dx} \right|_{x=b} = \left. \frac{d\tau^-}{dx} \right|_{x=b} \quad (57)$$

в случае краевых условий (52), (53); и условиям

$$\left. \frac{d\tau^+}{dx} \right|_{x=a} = 0, \quad \left. \frac{d\tau^+}{dx} \right|_{x=b} = 0, \quad (58)$$

$$\tau^-(a) = -\tau^+(a), \quad \tau^-(b) = \tau^+(b), \quad (59)$$

когда соблюдены (54), (55).

Усиленно регулярные краевые условия (56) следуют из (52) и равенства

$$2d\tau^+/dx = \tau'(x) - \tau'(\xi),$$

а условия (57) – из (53) и равенств

$$\tau(a) = \tau^+(a) + \tau^-(a) = 0,$$

$$2\tau^-(b) = \tau(b) - \tau(a) = \tau(b) = \tau^+(b) + \tau^-(b) \Rightarrow 2\tau^-(b) = \tau^-(b) + \tau^+(b).$$

Двухточечное краевое условие (58) вытекает из (55) и равенств

$$2\tau^-(a) = \tau(a) - \tau(b), \quad 2\tau^-(b) = \tau(b) - \tau(a),$$

а условие Неймана (59) – из (54) и равенств

$$\tau'(a) = \tau^{+'}(a) + \tau^{-'}(a),$$

$$2\tau^{+'}(b) = \tau'(b) - \tau'(a) = \tau^+(b) + \tau^-(a) \Rightarrow 2\tau^{+'}(b) = \tau^{-'}(b).$$

Задача (56) для уравнения (33):

$$\frac{d^2\tau^+}{dx^2} = [q(x) - \lambda p(x)]\tau^+(x)$$

при $q(x) > \lambda p(x)$, $x \in [a, b]$, не имеет решений, отличных от тривиального.

5. Задача с нелокальным (интегральным) смещением для уравнения Аллера. Задача расчета нестационарного движения влаги в слое почвы толщины r сводится к проблеме отыскания решения уравнения Аллера [23]

$$u_t = [D(u)u_x + Au_{tx}]_x, \quad (60)$$

удовлетворяющее следующим условиям

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^r u(x, t) dx = f(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (61)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq r, \quad (62)$$

$$u_x|_{x=r} = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (63)$$

где x – координата по глубине почвы, $u = u(x, t)$ – влажность в точке x в момент времени t , $D(u)$ – коэффициент диффузивности, $A = \text{const}$, $f(t)$ – заданная скорость изменения влагосодержания

$$B(t) = \int_0^r u(x, t) dx$$

в почвенном слое $0 \leq x \leq r$, $\varphi(x)$ – заданная начальная функция.

Условие (63) характеризует отсутствие перетока влаги из нижнего слоя в глубину и вместе с (61) позволяют найти граничное условие на поверхности почвы. Действительно, интегрирование обеих частей равенства (60) по x в пределах от $x=0$ до $x=r$ приводит к равенству

$$B'(t) = [D(u)u_x + Au_{xt}]|_{x=0}^{x=r}.$$

Отсюда в силу (63) получаем искомое граничное условие (см. [24, 25]):

$$D(u(0, t))u_x(0, t) + Au_{xt}(0, t) = -f(t). \quad (64)$$

Начальное условие (62) дает основание записать условие (61) в виде

$$\int_0^r u(x, t) dx = F(t), \quad \text{где} \quad F(t) = \int_0^t f(\xi) d\xi + \int_0^r \varphi(x) dx$$

Численному и аналитическому методам решения задачи (62), (63) и (64) для уравнения (60) посвящены работы [26, 27].

6. Нелокальные краевые условия по терминологии А. А. Дезина. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k} + \Delta_x u - \Delta_y u = f, \quad k = 1, 2, \quad (65)$$

где $u = u(x, y, t)$ – искомая, а $f = f(x, y, t)$ – заданная функции точек $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ и $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, а также времени $t \in [0, 1]$; Δ_x и Δ_y – операторы Лапласа по x и y соответственно.

А. А. Дезин [28] описал разрешимые расширения псевдопараболического и ультрагиперболического операторов $T_1 = \partial/\partial t + \Delta_x - \Delta_y$ при $m \geq 1$, $n \geq 1$ и $T_2 = \partial^2/\partial t^2 + \Delta_x - \Delta_y$ при $m \geq 1$, $n \geq 2$ в классе бесконечно дифференцируемых в параллелепипеде $\Theta: 0 < t < 1$, $0 < x_i < 2\pi$, $0 \leq y_j \leq 2\pi$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$ функций от $n + m + 1$ переменных, периодических с периодом 2π . Им впервые замечено, что отличительной чертой соответствующих разрешимых расширений является граничное условие вида

$$u(x, y, 0) + \lambda u(x, y, 1) = 0 \quad (66)$$

в случае оператора T_1 , и условие

$$u(x, y, 0) = 0, \quad u_t(x, y, t)|_{t=0} + \lambda u(x, y, 1) = 0 \quad (67)$$

в случае оператора T_2 , и что «есть основание подозревать, что использование «нелокальных» условий вида

$$\gamma_1[u(s_1)] + \gamma_2[u(s_2)] = 0, \quad (68)$$

где γ_1 и γ_2 – некоторые линейные операторы, а s_1 и s_2 – различные точки границы, по крайней мере по одному из переменных, неизбежно при описании разрешимых расширений для некоторых классов операторов».

В работе [29] А. А. Дезин исследовал уравнение

$$\frac{du}{dt} - Au = f, \quad 0 \leq t \leq a,$$

при граничном условии

$$\mu u|_{t=0} - u|_{t=a} = g. \quad (69)$$

Здесь предполагается, что для $t \in [0, a]$ функция $u(t)$ принимает значения в комплексном банаховом пространстве B , $A: B \rightarrow B$ – коммутирующий с d/dt неограниченный линейный оператор с плотной областью определения и μ – комплексное число, а также поясняется, что условия (68) «нелокальные» в том смысле, что задают связь между значениями неизвестной функции в различных точках границы.

Условие (69) является частным случаем (68).

7. Задачи с интегральным смещением для уравнения Фурье.

В 1963 г. J. R. Cannon [30] для уравнения теплопроводности

$$u_y = u_{xx} \quad (70)$$

в области $D = \{(x, y): 0 < x < 1, 0 < y < T\}$ исследовал задачу нахождения решения $u = u(x, y)$ из класса $C(\overline{D})$, удовлетворяющего условиям

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq 1; \quad u(1, y) = \varphi_1(y), \quad 0 \leq y \leq T, \quad (71)$$

$$\int_0^{x(y)} u(x, y) dx = E(y), \quad 0 \leq y \leq T, \quad (72)$$

где $\tau(x)$, $\varphi_1(y)$, $x(y)$ и $E(y)$ – заданные функции:

$$\tau(x) \in C[0, 1], \quad \varphi_1(y), \quad x(y), \quad E(y) \in C^1[0, T], \quad 0 < x(y) \leq 1,$$

$$\tau(1) = \varphi_1(0), \quad E(0) = \int_0^{x(0)} \tau(x) dx.$$

Равенство (72) после почленного дифференцирования принимает следующий вид:

$$E'(y) = u[x(y), y]x'(y) + \int_0^{x(y)} \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} dx.$$

Так как $u(x, y)$ – решение уравнения (70), то условие (72) порождает условия

$$u_x(0, y) = u_x[x(y), y] + x'(y)u[x(y), y] - E'(y). \quad (73)$$

Пусть $x(y) = x_0 = \text{const}$, $0 < x_0 \leq 1$. Тогда из (73) получаем

$$u_x(0, y) = u_x(x_0, y) - E'(y), \quad 0 < y < T. \quad (74)$$

Если $x_0 = 1$, то в силу (71) и (74) для уравнения (70) получаем краевую задачу:

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq 1;$$

$$u(1, y) = \varphi_1(y), \quad u_x(0, y) = u_x(1, y) - E'(y), \quad 0 \leq y \leq T.$$

Замена $\xi = 1 - x$, $\eta = y$, $v(\xi, \eta) = u(1 - \xi, \eta)$ сводит эту задачу к следующей краевой задаче: $v(\xi, 0) = \tau(1 - \xi)$, $0 \leq \xi \leq 1$; $v(0, \eta) = \varphi_1(\eta)$, $0 \leq \eta \leq T$; $v_\xi(0, \eta) = v_\xi(1, \eta) - E'(\eta)$ для уравнения $v_\eta = v_{\xi\xi}$.

Л. И. Камынин [31–33] для уравнения второго порядка параболического типа с двумя независимыми переменными рассмотрел различные обобщения задачи (71), (72) с интегральным условием вида

$$\int_{x_1(y)}^{x_3(y)} g(x, y)u(x, y)dx = E(y), \quad 0 \leq y \leq T.$$

8. Новые классы краевых задач со смещением. В 1978 г. автор [34], на примере уравнения Фурье (70), которое в области $\Omega = \{(x, t): 0 < x < r, 0 < t < T\}$ является моделью уравнения второго порядка параболического типа с двумя независимыми переменными x и t предложил следующую задачу со смещением.

Задача 1. Найти регулярное в области Ω решение уравнения (70), непрерывное в $\bar{\Omega}$ и удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq r; \quad u(r, t) = \psi_r(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (75)$$

$$u(0, t) = \alpha^j(t)u(x_j, t) + \delta(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (76)$$

где $\tau(x)$, $\psi_r(t)$, $\alpha^j(t)$, $\delta(t)$ – заданные непрерывные функции своих аргументов; $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m < r$, x_j – заданные точки; под (диагонально) повторяющимся индексом j подразумевается суммирование от 1 до m .

Пусть $\alpha^j(t) \geq 0$ либо $\alpha^j(t) \leq 0$ для любого $j = 1, 2, \dots, m$ и $t \in [0, T]$; $G(t) = \alpha_1(t) + \alpha_2(t) + \dots + \alpha_m(t)$ и $G(t) \neq 0$. Тогда, в силу непрерывности искомого решения задачи 1 на компакте $\bar{\Omega}$, существует такая точка $h \in [x_1, x_m]$, что условие (76) эквивалентно условию вида (24), а именно условию

$$u(r, t) = \psi_r(t), \quad u(0, t) = G(t)u(h, t) + \delta(t).$$

Если $\psi_r(t) = \tau_r \exp(-\lambda t)$, где τ_r и λ – произвольные числа, то функция (32) будет решением уравнения (4), удовлетворяющим условиям (75) и (76), только тогда, когда начальная функция $\tau(x)$ будет решением заданного в интервале $0 < x < r$ уравнения (33) с краевым

$$\tau(r) = \tau_r = \psi_r(0) \quad (77)$$

и внутреннекраевым

$$\tau(0) = \alpha^j(0)\tau(x_j) + \delta(0), \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (78)$$

условиями.

Система (77), (78) представляет собой необходимое условие разрешимости задачи 1. Систему (33), (77), (78) иногда называют многоточечной $((m+2)$ -точечной) краевой задачей.

Задача (77), (78) для уравнения (33) заменой $\xi = 1 - x/r$, $\tau(x) = v(\xi)$ редуцируется к нелокальной задаче

$$v(0) = \tau_r, \quad v(1) = \alpha^j v(\xi_j) + \delta \quad (79)$$

для уравнения

$$v'' + q^*(\xi)v = 0, \quad 0 < \xi < 1, \quad (80)$$

где $1 > \xi_1 > \dots > \xi_j = 1 - x_j/r > \dots > \xi_m$, $q^*(\xi) = r^2[\lambda p(r - r\xi) - q(r - r\xi)]$.

Если $\alpha^j \xi_j^2 \neq 1$ либо $\alpha^j \xi_j \neq 1$, то замена $w(\xi) = v(\xi) - A\xi^2 - B\xi - \tau_r$ сводит неоднородную задачу (79) для однородного уравнения (80) к однородной задаче

$$w(0) = 0, \quad w(1) = \alpha^j w(\xi_j) \quad (81)$$

для неоднородного уравнения

$$w'' + q^*(\xi)w = -f(\xi), \quad (82)$$

где $A, B = \text{const}$, $f(\xi) = (A\xi^2 + B\xi + \tau_r)q^*(\xi) + 2A$.

Задача (81) для уравнения (82) в случае, когда все $\alpha^j < 0$ (либо $\alpha^j > 0$), исследована в работах [35, с. 113], [36].

К задаче 1 примыкает следующая

Задача 2. Найти регулярное в области Ω решение $u = u(x, t)$ уравнения (4), непрерывное в $\bar{\Omega}$ вместе с производной первого порядка по x и удовлетворяющее начальному, краевому и внутреннекраевому условиям:

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq r; \quad u(0, t) = \psi_0(t), \quad 0 \leq t \leq T; \quad (83)$$

$$u_x(r, t) = \alpha^j(t)u_x(x_j, t) + \delta(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (84)$$

Если $\psi_0(t) = \tau_0 \exp(-\lambda t)$, где $\tau_0 = \psi_0(0)$, λ – произвольная постоянная, то функция (32) будет решением задачи 2 только тогда, когда начальная функция $\tau(x)$ в интервале $0 < x < r$ удовлетворяет уравнению (33) и условиям

$$\tau(0) = \tau_0, \quad \tau'(r) = \alpha^j(0)\tau'(x_j) + \delta(0). \quad (85)$$

Задача (85) для уравнения (33) представляет собой вариант краевой задачи

$$U(0) = 0, \quad \Pi(1) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \Pi(\xi_i) \quad (86)$$

для уравнения

$$\Pi'(\xi) - q(\xi)U(\xi) = -f(\xi), \quad 0 < \xi < 1, \quad (87)$$

где $\Pi(\xi) = k(\xi)U'(\xi)$ – поток, $0 \leq \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_m < 1$, исследованной В. А. Ильиным и Е. И. Моисеевым [37] в случае, когда числа $\alpha_i \leq 0$ либо $\alpha_i \geq 0$ и $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m < 1$ при $q(\xi) \geq 0$ и $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m \leq 1$ при $q(\xi) \geq \text{const} > 0$; $k(\xi) \in C^3[0, 1]$; $q(\xi)$ и $f(\xi) \in C^2[0, 1]$; $q(\xi) \geq 0$, $k(\xi) \geq \text{const} > 0$.

В работе [37] задача (86) названа нелокальной краевой задачей второго рода для оператора Штурма–Лиувилля (87), и замечено, что краевые условия (86) можно заменить эквивалентными условиями

$$U(0) = 0, \quad \Pi(1) = \alpha \Pi(\varepsilon),$$

где $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m$, ε – точка на сегменте $[\xi_1, \xi_m]$.

Пусть коэффициенты уравнения (80) не зависят от x , $\tau(x) \in C^1[0, r]$ и в (83) локальное условие $u(0, t) = \psi_0(t)$ заменено условием $u_x(0, t) = \varphi_0(t)$. Тогда производную u_x от решения u полученной задачи можно искать как решение нелокальной задачи

$$v(x, 0) = \tau'(x), \quad v(0, t) = \varphi_0(t), \quad v(r, t) = \alpha^j(t)v(x_j, t) + \delta(t)$$

для уравнения $pv_t = v_{xx} - qv$ в области Ω .

Непосредственным обобщением задачи 1 является нелокальная внутреннекраевая задача, в которую она переходит, если условие $u(r, t) = \varphi_r(t)$ заменить условием

$$u(r, t) = \beta^j(t)u(\xi_j, t) + \psi_r(t), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (88)$$

где $\beta^j(t)$ – заданные функции из $C[0, T]$; $0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n < r$.

При определенных ограничениях на входные данные задача с внутреннекраевыми условиями (76), (88) и начальным условием

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq r \quad (89)$$

для уравнения

$$u_t = u_{xx} + p(x, t)u_x + q(x, t)u + f(x, t) \quad (90)$$

однозначно разрешима.

Задача с локальным краевым условием

$$u_x(0, t) = \varphi_0(t), \quad 0 < t < T \quad (91)$$

и условиями (88), (89) для уравнения (90) при $n = 1$ была объектом исследования А. Ф. Напса [38].

Очевидно, имеют право на исследование для уравнения (90) задачи с начальным условием (89) и следующими нелокальными условиями с наперед заданными коэффициентами:

$$\alpha_0(t)u(0, t) + \beta_0(t)u_x(0, t) = \alpha_0^j(t)u(x_j, t) + \beta_0^j(t)u_x(x_j, t) + \delta_0(t), \quad (92)$$

$$\alpha_r(t)u(r, t) + \beta_r(t)u_x(r, t) = \alpha_r^j(t)u(\xi_j, t) + \beta_r^j u_x(\xi_j, t) + \delta_r(t). \quad (93)$$

Задачи типа (89), (92), (93) для уравнения вида (90) весьма часто выступают в качестве математических моделей различных физических процессов. К таким задачам относится, например, следующая задача со смещением [34], [39].

Задача 3. *Определить распределение влаги $u(x, t)$, интерпретируемой как решение уравнения (60) в почвенном слое $0 \leq x \leq r$, если известны:*

1) *поток $\Pi(x, t) = Du_x + Au_{xt}$ влаги на поверхность почвы*

$$\Pi(0, t) = \Phi_0(t), \quad 0 \leq t \leq T; \quad (94)$$

2) *глубинный ход влажности в начальный момент (89);*

3) *скорость расхода влаги в слое $x_0 \leq x \leq r$*

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_0}^r u(x, t) dx = f_0(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (95)$$

где x_0 – фиксированная точка полуsegments $[0; r]$.

Поскольку $u_t = \Pi_x$, то (94) можно заменить условием

$$\Pi(r, t) = \Pi(x_0, t) + f_0(t). \quad (96)$$

При $D(u) \equiv 1$, $A = 0$, условие (94) совпадает с (91), а (96) принимает вид:

$$u_x(r, t) = u_x(x_0, t) + f_0(t).$$

Условия (76) и (88), названные в ряде работ (см., например, [40], [41]) нелокальными условиями А. М. Нахушева, непосредственно связаны с условием вида

$$u(a, t) = \int_{x_0}^r k(x, t)u(x, t)dx + \delta(t),$$

где $a = 0$ в случае (76) и $a = r$ в случае (88), и получаются из него, если интеграл заменить конечной суммой.

Пусть коэффициенты p , q уравнения (90) и нелокальных условий (92), (93) не зависят от t , $f(x, t) = f_0(x)\exp(-\lambda t)$, $\delta_0(t) = \delta_0\exp(-\lambda t)$, $\delta_r(t) = \delta_r\exp(-\lambda t)$, $\lambda = \text{const}$. Тогда функция (32) будет решением уравнения (90), удовлетворяющим условиям (92) и (93) только тогда, когда

$$\tau''(x) + p\tau' + (q + \lambda)\tau = -f_0(x), \quad 0 < x < r, \quad (97)$$

$$\alpha_0\tau(0) + \beta_0\tau'(0) = \alpha_0^j\tau(x_j) + \beta_0^j\tau'(x_j) + \delta_0, \quad (98)$$

$$a_r \tau(r) + \beta_r \tau'(r) = \alpha_r^j \tau(\xi_j) + \beta_r^j \tau'(\xi_j) + \delta_r. \quad (99)$$

Вариант: $\tau(0) = \alpha_0^1 \tau(x_1) - \delta_0$, $\tau(r) = \alpha_r^1 \tau(\xi_1) + \delta_r$ задачи (98), (99) для уравнения (97) был объектом внимания Д. Г. Гордезиани [42, с. 112].

В 1985 г. З. А. Нахушева [43], [44, с. 176] для уравнения (90) анонсировала следующую задачу.

Задача 4. Найти регулярное в области Ω решение $u = u(x, t)$ уравнения (90), непрерывное в замыкании $\bar{\Omega}$, удовлетворяющее начальному условию (89) и условиям

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{x_1} u(x, t) dx = \varphi(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (100)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_2}^r u(x, t) dx = \psi(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (101)$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ – заданные функции из класса $C[0, T]$, x_1 и x_2 – заданные числа, причем $0 < x_1 \leq r$, $0 \leq x_2 < r$, $(x_1 - r)^2 + x_2^2 \neq 0$.

Эта задача в работе [45] названа первой краевой задачей в интегральной постановке для параболических уравнений второго порядка.

Разностной трактовке системы (97), (99) в случае, когда $\beta_0 = \beta_r = 0$, $\beta_0^j = \beta_r^j = 0$ для всех j посвящена работа М. Х. Шханукова [46]. Этот случай возникает после замены интегралов в (100), (101) соответствующими конечными суммами.

Когда $p(x, t)$, $q(x, t)$ и $f(x, t)$ тождественно равны нулю, условия (100) и (101) соответственно переписываются в виде

$$u_x(x_1, t) - u_x(0, t) = \varphi(t), \quad (102)$$

$$u_x(r, t) - u_x(x_2, t) = \psi(t). \quad (103)$$

В сформулированных для уравнения (90) задачах со смещением начальное условие может быть заменено условиями следующих видов:

$$u(x, 0) = \int_0^T k(x, t) u(x, t) dt + \tau(x), \quad 0 \leq x \leq r, \quad (104)$$

$$u(x, 0) = a^j(x) u(x, t_j) + \tau(x), \quad 0 \leq x \leq r, \quad (105)$$

$k(x, t)$, $a^j(x)$, $j = 1, 2, \dots, m$, $0 < t_1 < \dots < t_m \leq T$, $\tau(x)$ – заданные функции.

Условия (104) и (105), очевидно, можно объединить в виде одного условия со смещением

$$u(x, 0) = a^j(x) u(x, t_j) + \int_0^T k(x, t) u(x, t) dt + \tau(x), \quad 0 \leq x \leq r. \quad (106)$$

Различным частным случаям задачи (92), (93), (106) для уравнения (90) и более общих уравнений параболического типа посвящен ряд работ, среди которых следует отметить работы [47–52]. Отметим и работу Н. И. Юрчука [53], где методом априорных оценок исследовалась смешанная задача с интегральным условием:

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad u(0, t) = 0, \quad \int_0^r u(x, t) dx = 0$$

для уравнения

$$u_t - [a(x, t)u_x]_x = f(x, t).$$

Задача фильтрации из канала в сухой грунт при определенной ее схематизации сводится к следующей принципиально новой нелокальной задаче для уравнения Буссинеска:

$$2\sigma_0 u_t = k_0(u^2)_{xx}, \quad (107)$$

где σ_0 – водоотдача, k_0 – коэффициент фильтрации, $u = u(x, t)$ – уровень грунтовой воды в точке $x \in [0, r(t)]$ в момент времени $t \in [0, T]$ [54, с. 179].

Задача 5. В области $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < r(t), 0 < t < T\}$ найти решение $u(x, t)$ уравнения (107) и функцию $r = r(t)$, удовлетворяющие условиям $u(0, t) = \psi_0(t)$, $u(r, t) = 0$,

$$\sigma_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_0^r u(\xi, t) d\xi = -k_0 \psi_0(t) u_x(0, t). \quad (108)$$

Для уравнения типа (90) сформулированы и исследованы задачи с нелокальным условием (100) и условием вида

$$A(t)D_{0t}^\alpha u(0, t) + B(t)D_{0t}^\beta u(r, t) = C(t), \quad 0 < t \leq T,$$

где $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$ – заданные функции [55]. Рядом авторов рассматривались для уравнения теплопроводности задачи с нелокальными условиями, которые охватываются следующей записью:

$$\int_0^1 A(t, \alpha) D_{0t}^\alpha u(0, t) d\alpha + \sum_{j=0}^m A_j(t) D_{0t}^{\alpha_j} u(0, t) + B(t) u_x(0, t) = C(t).$$

Здесь $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m < 1$; A , B и C – заданные достаточно гладкие функции [56–58].

В монографиях В. А. Нахушевой [59], А. В. Псху [60] и Л. И. Сербинной [61] даны исследования новых нелокальных задач для нагруженных уравнений параболического типа.

В математической биологии [4] и физике встречаются и нелокальные условия вида

$$A(t)u(\xi, t) = \int_0^r B(x, t)u(x, t)dx + C(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

для уравнения (90), где A, B, C – заданные функции, $\xi = 0$ или r .

Л. А. Муравей и А. В. Филиновский [62] для уравнения

$$u_t = k(t)u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \quad (109)$$

рассмотрели следующую нелокальную краевую задачу, которая возникает при математическом моделировании процессов внешнего геттерирования:

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq 1; \quad u_x(0, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (110)$$

$$p(t)u(1, t) + \int_0^1 u(x, t)dx = p(0)\tau(1) + \int_0^1 \tau(x)dx, \quad t \in [0, T], \quad (111)$$

где $k(t), \tau(x), p(t)$ – заданные функции, $k(t) > 0, p(t) > 0$.

Система (109)–(111) после замены

$$u(x, t) = U(x, y), \quad y = \int_0^t k(\eta)d\eta$$

становится частным случаем следующей системы:

$$U_y = U_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < Y, \quad (112)$$

$$U(x, 0) = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (113)$$

$$U_x(0, y) = \psi_0(y), \quad 0 < y < Y, \quad (114)$$

$$P(y)U(1, y) + \int_0^1 U(x, y)dx = P(0)\tau(1) + \int_0^1 \tau(x)dx, \quad (115)$$

где

$$\tau(x) \in C[0, 1], \quad \psi_0(y) \in C[0, Y], \quad Y = \int_0^T k(t)dt, \quad P(y) = p(t).$$

Пусть $U = U(x, y)$ – регулярное в области

$$\Omega = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < Y\}$$

решение уравнения (112), $U \in C(\bar{\Omega})$, $U_{xx} \in L[0, 1]$ для любого $y \in]0, Y[$.

Тогда из (112) имеем

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_0^1 U(x, y) dx = U_x(1, y) - \psi_0(y).$$

Поэтому нелокальное условие (115) дает основание записать

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{p}} \Big|_{x=1} + p'(y)U(1, y) = \psi_0(y), \quad 0 < y < Y, \quad (116)$$

где производная от U берется по направлению вектора $\vec{p} = (1, P)$. Стало быть, условия (114) и (115) позволяют решить однозначно задачу поиска локального краевого условия (116) и тем самым редуцировать нелокальную задачу (109)–(111) к локальной краевой задаче (113), (114), (116) для уравнения (112) в области Ω .

Н. И. Ионкин [13] исследовал вопрос устойчивости решения $U(x, y)$ задачи: $U(x, 0) = \tau(x)$, $U(0, y) = 0$, $U_x(0, y) = U_x(1, y)$ для соответствующего уравнению (112) неоднородного уравнения теплопроводности. Указанный в разделе 3 прием редукции задачи (5), (10), (25) для уравнения (4) к локальной задаче дает другой подход к этой проблеме.

В работе [63, с. 147] исследована нелокальная краевая задача с континуальной производной по времени для нагруженного уравнения теплопроводности

$$u_t = u_{xx} + \sum_{i=1}^n \lambda_i u(x_i, t) + f(x, t).$$

Многомерным аналогам краевых и внутреннекраевых задач со смещением для уравнений параболического типа посвящены работы [9], [64–67].

9. Краевые и внутреннекраевые задачи со смещением для гиперболического и смешанного типов уравнений. Интенсивное и плодотворное исследование краевых задач со смещением для гиперболического и смешанного типов уравнений началось в 1969 г. с работ автора [1, 2].

Первая краевая задача со смещением была сформулирована автором для модельного гиперболического уравнения второго порядка

$$u_{yy} = |y|^m u_{xx}, \quad m = \text{const} \geq 0, \quad y < 0, \quad (117)$$

в области Ω^- , ограниченной его характеристиками, выходящими из точек $z = 0$, $z = 1$ и отрезком $\bar{J} = \{x : 0 \leq x \leq 1\}$ прямой $\text{Im } z = 0$. Задаваемое на характеристических частях AC и BC границы $\partial\Omega$ области Ω нелокальное условие имело следующий вид:

$$\alpha(x)D_{0x}^p u[\theta_0(x)] + \beta(x)D_{1x}^p u[\theta_1(x)] = \gamma(x), \quad x \in J, \quad (118)$$

где D_{cx}^p – оператор дробного интегро-дифференцирования порядка $p = p(m)$ в смысле Римана–Лиувилля; $z = \theta_0(x)$ и $z = \theta_1(x)$ – точки пересечения характеристик уравнения (117), выходящих из точек $z = x \in J$, с характеристиками AC и BC соответственно; $u[\theta_k(x)] = u(\operatorname{Re} \theta_k, \operatorname{Im} \theta_k)$, $k = 0, 1$; $\alpha(x)$, $\beta(x)$ и $\gamma(x)$ – заданные функции из класса $C(\bar{J})$.

При $m = 0$ и $p = 0$ уравнение (117) переходит в одномерное волновое уравнение

$$u_{yy} = u_{xx}, \quad (119)$$

а условие (118) – в краевое условие с локальным смещением

$$\alpha(x)u[\theta_0(x)] + \beta(x)u[\theta_1(x)] = \gamma(x), \quad x \in \bar{J}, \quad (120)$$

где $2\theta_0(x) = (1 - i)x$, $2\theta_1(x) = 1 + x - (1 - x)i$.

Условие (120) связывает значения решения $u[z]$ уравнения (119) в противоположных вершинах $\theta_0(x)$, $\theta_1(x)$ характеристического четырехугольника с вершинами в точках x , $\theta_0(x)$, $C = (1 - i)/2$ и $\theta_1(x)$.

Непосредственным обобщением условия (120) является условие

$$\alpha(z)u(z) + \beta(z)u[\theta(z)] = \delta(z). \quad (121)$$

Здесь (см. [1]) $\alpha(z)$, $\beta(z)$, $\gamma(z)$ – заданные на $AC \cup BC$ действительные непрерывные функции комплексной переменной z , а $\theta(z)$ – некоторый гомеоморфизм из AC на BC . В работе [2] условие (121) записано в несколько ином виде:

$$u\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right) + \beta(x)u\left(\frac{1 + \theta(x)}{2}, \frac{\theta(x) - 1}{2}\right) = \gamma(x), \quad x \in \bar{J},$$

где $y = \theta(x)$ осуществляет топологическое отображение сегмента $\bar{J}$ в самого себя, оставляя неподвижными точки $x = 0, 1$.

Пусть $\Omega = \Omega^- \cup \Omega^+ \cup J$ – смешанная область, соответствующая задаче Трикоми для уравнения Лаврентьева–Бицадзе

$$\operatorname{sign} y \cdot u_{xx} + u_{yy} = 0. \quad (122)$$

В 1979 г. Ю.М. Крикунов в г. Куйбышеве (Самара), а также В.И. Жегалов своим любезным письмом из Казани сообщили мне о работе [68], где рассматривается «краевая задача для уравнения смешанного типа с граничным условием на обеих характеристиках и с разрывом на переходной линии». «Граничные условия на обеих характеристиках» и «условия склеивания» этой задачи для уравнения (122) задаются следующим образом:

$$a(x)u(x, -x) + b(x)u\left(x + \frac{1}{2}, x - \frac{1}{2}\right) = c(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \quad (123)$$

$$\alpha_0(x)u^+ + \beta_0(x)u^- = \gamma_0(x), \quad 0 < x < 1; \quad (124)$$

$$\alpha_1(x)u_y^+ + \beta_1(x)u_y^- = \gamma_1(x), \quad 0 < x < 1; \quad (125)$$

где u^+ , u^- и u_y^+ , u_y^- – предельные на J значения функций $u(x, y)$ и $u_y(x, y)$ соответственно из областей Ω^+ и Ω^- ; $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $\alpha_j(x)$, $\beta_j(x)$, $\gamma_j(x)$, $j = 0, 1$ – заданные достаточно гладкие функции.

Очевидно, что задача (123)–(125) с данными Дирихле на эллиптической части σ границы $\partial\Omega$ области Ω для уравнения (122), как и ранее упомянутая задача Франкля [7, с. 339], относятся к классу краевых задач с локальным смещением на части границы. Очевидно также, что условие (123) можно записать в виде (120), а задача Дирихле для уравнения (122) в области Ω с условиями сопряжения (124), (125) также является «краевой задачей с граничными условиями на обеих характеристиках и с разрывами на переходной линии».

Краевые задачи как с локальным, так и нелокальным смещением для гиперболического и смешанного типов уравнений были объектом исследования многих авторов. Достаточно полная библиография работ в этом направлении содержится в книгах [69–81].

В работе [82] автором впервые была предложена методика постановки нелокальных краевых задач с интегральными условиями для линейных гиперболических уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными. Здесь следует отметить и статьи [83, 84].

В 1975 г. У. Энгельман [85] исследовал уравнение

$$u_{xy} + \text{sign}[(1 - |\mu_1|^2)(1 - |\mu_2|^2)]Au = f(z)$$

с нелокальным условием

$$u(0, y) - \mu_1 u(a, y) = \varphi(y), \quad 0 \leq y \leq b;$$

$$u(x, 0) - \mu_2 u(x, b) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq a.$$

Здесь: $u = u(x, y)$ и $f(z) = f(x, y)$ – функции, определенные в области $D = \{z : 0 < x < a, 0 < y < b\}$ и принимающие значения в пространстве Гильберта H ; A – линейный самосопряженный и положительно определенный оператор, действующий в H ; μ_1 и μ_2 – комплексные числа; φ и ψ определены на $[0, a]$ и $[0, b]$ соответственно, принимают значения в H .

В 1978 г. автор [86, 87] для широкого класса нагруженных уравнений гиперболического типа с дифференциальным выражением

$$u_{xy} + A(z)u_x + B(z)u_y + C(z)u = Lu, \quad u = u(x, y) \quad (126)$$

в главной части в прямоугольной области $\Omega = \{z : 0 < x < r, 0 < y < T\}$ предложил и исследовал следующую нелокальную задачу с интеграль-

ным смещением:

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq r, \quad (127)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_0^{x_0} u(x, y) dx = \varphi(y), \quad 0 \leq y \leq T, \quad (128)$$

где x_0 – заданная точка из $]0, r]$, $\tau(x)$ и $\varphi(y)$ – заданные достаточно гладкие функции.

Задача (127), (128) для уравнения (126) очевидно относится к классу внутреннекраевых задач с нелокальным смещением.

Р. Кхан [88] в 1981 г. для уравнения $Lu = f(z)$, где L – дифференциальный оператор (126), а $f(z)$ – заданная действительная функция точки z в треугольной области $D = \{z : 0 < x < y < 1\}$ исследовал внутреннекраевую задачу с локальным смещением

$$u(x, 1) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(0, y) = \sum_{k=1}^{n-j} \alpha_{n-j}^k(y) u(x_k, y) + \beta_{n-j}(y), \quad (129)$$

$x_{n-j-1} \leq y \leq x_{n-j}$, $j = 0, 1, \dots, n-1$; $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq 1$.

В работе [89] этого же автора для уравнения (122) рассмотрена нелокальная задача с локальным краевым условием на эллиптической части σ границы $\partial\Omega$ смешанной области Ω , а на гиперболической части Ω^- – условие вида

$$u[\theta_0(x)] = \sum_{k=1}^{n-j} \alpha_{n-j}^k u[\theta_{x_k}(x)] + F_{n-j}(x), \quad (130)$$

$$x_{n-j-1} \leq x \leq x_{n-j}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1,$$

где $2\theta_{x_k}(\xi) = x_k + \xi + i(x_k - \xi)$ – точка пересечения характеристики $x - y = \xi$ с характеристикой $x + y = x_k$.

Условия (129), (130) являются аналогами условия (76).

З. А. Нахушева [43] для уравнения $Lu = f(z)$ в характеристическом четырехугольнике $D = \{z : 0 < x < a, 0 < y < b\}$ предложила «задачу Гурса в интегральной постановке»:

$$\int_0^\alpha u(x, y) dx = \psi(y), \quad 0 \leq y \leq b; \quad \int_0^\beta u(x, y) dy = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq a,$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ – заданные функции, α и β – заданные числа, причем $0 < \alpha \leq a$, $0 < \beta \leq b$.

З. О. Мельник [90, с. 281] в 1983 г. для строго гиперболического уравнения

$$u_{yy} + A(z)u_{xx} + B(z)u_{xy} + A_1(z)u_x + B_1(z)u_y + C(z)u = f(z) \quad (131)$$

с характеристическими корнями разных знаков в области D анонсировал задачу:

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad u_y(x, 0) = \nu(x), \quad 0 \leq x \leq a, \quad (132)$$

$$\int_0^a \alpha_j(x, y)u(x, y)dx = \beta_j(y), \quad 0 \leq y \leq b, \quad j = 1, 2. \quad (133)$$

Л. С. Пулькина [91] методом априорных оценок доказала теорему единственности и существования решения задачи (132), (133) для уравнения (131) в случае, когда $A(z) \equiv -1$, $B(z) = A_1(z) = B_1(z) \equiv 0$, $\beta_j(y) > 0$, и на входные данные $\tau(x)$, $\nu(x)$, $\alpha_j(x, y)$ и $\beta_j(x, y)$ наложены определенные ограничения.

В 1990 г. автором [92] были изучены на корректность следующие нелокальные задачи.

Задача 6. Найти регулярное в области

$$\Omega = \{z: 0 < x < r, 0 < y < T\}$$

решение $w(x, y) = (u, v)$ системы

$$\begin{aligned} u_x + u_y + c_1(z)u &= A_1u_{xx} - f_1(z), \\ v_x + v_y + c_2(z)v &= A_2v_{xx} - f_2(z), \end{aligned} \quad (134)$$

непрерывное в $\bar{\Omega}$ и удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad v(x, 0) = \varphi_2(x), \quad 0 \leq x \leq r; \quad (135)$$

$$u(r, y) = \psi_1(y), \quad v(r, y) = \psi_2(y), \quad 0 \leq y \leq T; \quad (136)$$

$$u(0, y) = \int_{\alpha}^{\beta} k_1(x, y)u(x, y)dx; \quad (137)$$

$$v(0, y) = \int_{\alpha}^{\beta} k_2(x, y)u(x, y)dx. \quad (138)$$

Здесь $c_j(z)$, $A_j(z)$, $f_j(z)$, $\varphi_j(x)$, $\psi_j(y)$ – заданные функции, $0 < \alpha < \beta \leq r$.

Задача 7. Найти регулярное в области Ω решение $w(x, y)$ системы (134), удовлетворяющее локальным условиям (135), (136) и нелокальным условиям

$$u(0, y) = \sum_{j=1}^m \alpha^j(y) u(x_j, y), \quad v(0, y) = \sum_{j=1}^m \beta^j(y) u(x_j, y),$$

где $\alpha \leq x_1 < x_2 < \dots < x_m \leq \beta$; $\alpha^j(y)$, $\beta^j(y)$ – заданные непрерывные на $[0, T]$ функции.

Р. М. Бисчоков [93] исследовал задачу 7 в случае, когда f_1 и f_2 линейно зависят от v и u соответственно.

Условия вида (137), (138) в математической биологии известны как уравнения рождаемости [4, с. 118].

В работе [94] для телеграфного уравнения

$$u_{yy} = u_{xx} + c^2 u, \quad 0 < x < r, \quad 0 < y < T$$

рассмотрена задача Коши (132) с ограничениями вида (137), а именно с нелокальными условиями:

$$u(0, y) = p(y) \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} u(x, y) dx + f(y), \quad 0 \leq y \leq T,$$

$$u(r, y) = q(y) \int_{x_3(y)}^{x_4(y)} u(x, y) dx + g(y), \quad 0 \leq y \leq T,$$

где $x_j(y) \leq x_{j+1}(y)$ – точки сегмента $[0, r]$, $j = 1, 2, 3$; c – заданная постоянная; $p(y)$, $f(y)$, $q(y)$, $g(y)$ – заданные достаточно гладкие функции.

Среди многочисленных работ, посвященных нелокальным краевым задачам для гиперболических уравнений и систем, не попавших в список литературы монографии [81], отметим в хронологическом порядке работы Р. Кхана [95, с. 138], С. Ю. Назарова [96, с. 164], О. А. Репина [97], Н. А. Жура и А. П. Солдатова [98, с. 124], Л. С. Пулькиной [98, с. 194], О. А. Репина и М. В. Селиной [98, с. 204]. Обратим внимание и на работу Х. М. Наджафова [99], посвященную краевым задачам со смещением для уравнений (119) и (122) с нелокальным условием вида

$$\sum_{j=0}^m \left[\alpha_j(x) \frac{d^j u[\theta_0(x)]}{dx^j} + \beta_j(x) \frac{d^j u[\theta_1(x)]}{dx^j} \right] = \delta(x). \quad (139)$$

Условие (139) при $m = 0$ совпадает с (120), а при $m = 1$ – с условием, рассмотренным в [99].

В. Н. Полищук [100, с. 292] для гиперболического по И. Г. Петровскому уравнения

$$\sum_{|\alpha|=n} a_\alpha D^\alpha u(x, x_0) = f(x, x_0), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_m),$$

где a_α – действительные числа, $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ – мультииндекс длины $n = \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_m$, в области $\{(x, x_0): 0 < x_j < 2\pi, j = 1, 2, \dots, m\}$ исследовал следующую краевую задачу со смещением по временной переменной $x_0 \equiv t \in [0, T]$:

$$\left. \frac{\partial^j u(x, t)}{\partial t^j} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial^j u(x, t)}{\partial t^j} \right|_{t=T}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Нагруженным уравнениям в частных производных с периодически граничными условиями посвящена работа М. Т. Дженалиева [101].

Краевые задачи как с локальным, так и нелокальным смещениями рассмотрены в работах [102–107]. В [104] и [106] исследованы нелокальные аналоги задач Дарбу для класса систем уравнений типа Бицадзе–Лыкова с инволютной матрицей, рассмотрен «нелокальный вариант задачи Коши с условием Бицадзе–Нахушева» для системы

$$y^2 u_{xx} - u_{yy} + v_x = 0, \quad y^2 v_{xx} - v_{yy} + u_x = 0.$$

В [107] для матричного уравнения (126), то есть для системы $Lu = f(z)$, в области $\Omega = \{z: 0 < x < r, 0 < y < T\}$ изучается на корректность следующая краевая задача с локальным смещением по «временной» переменной y :

$$u(0, y) = \psi(y), \quad 0 \leq y \leq T;$$

$$\begin{aligned} a_1(x)u_x(x, 0) + a_2(x)u_y(x, 0) + a_3(x)u(x, 0) + a_4(x)u_x(x, T) + \\ + a_5(x)u_y(x, T) + a_6(x)u(x, T) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq r. \end{aligned}$$

Здесь: $u = \text{col}(u_1, u_2, \dots, u_n)$; $n \times n$ матрицы $A(z)$, $B(z)$, $C(z)$, $a_j(x)$, n -вектор-функции $f(z)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в $\bar{\Omega}$ и $[0, r]$ соответственно, а n -вектор-функция $\psi(y) \in C^1[0, r]$.

Задачи с интегральным смещением для гиперболических уравнений в многомерных областях являются объектом исследования работы [108].

10. О некоторых краевых и внутреннекраевых задачах со смещением для эллиптических уравнений. Пусть Ω – область плоскости комплексного переменного z с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$; $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$, где σ_1 и σ_2 – гладкие части $\partial\Omega$; $\Theta(t)$ – комплекснозначная функция точки t , осуществляющая гомеоморфное отображение σ_1 на σ_2 ; $\sigma_0 = \partial\Omega \setminus \sigma$.

В области Ω рассмотрим уравнение второго порядка эллиптического типа

$$Lu[z] = f(z). \quad (140)$$

В 1968 г. автором была сформулирована следующая

Задача 8. Найти регулярное в области Ω решение $u = u[z]$ уравнения (140) из класса $C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega \cup \sigma)$, удовлетворяющее на σ_0 локальному краевому условию (например, условию Дирихле), а на σ – нелокальному условию вида

$$u(t) = G_0(t)u[\Theta(t)] + g_0(t), \quad u_{\vec{v}}(t) = G_1(t)u_{\vec{v}}[\Theta(t)] + g_1(t), \quad t \in \sigma_1, \quad (141)$$

где $G_j(t)$, $g_j(t)$ – заданные функции, $u_{\vec{v}}$ означает производную по некасательному к σ направлению $\vec{v}$.

К вариантам задачи 8 сводятся краевые задачи для уравнения смешанного типа с нелокальным условием на гиперболической части смешанной области [1], [69, с. 113].

Пусть

$$z = \rho e^{i\varphi}, \quad t = e^{i\varphi}; \quad \Omega = \{z: |z| < 1, y > 0\}; \quad \sigma = \{t: 0 < \varphi < \pi\},$$

$$\sigma_0 = \{z: -1 < z = x < 1\}, \quad \sigma_1 = \sigma \cap \{x > 0\}, \quad \sigma_2 = \sigma \setminus \sigma_1.$$

Очевидно, функция $\Theta(t) = -\bar{t}$ осуществляет гомеоморфное отображение σ_1 на σ_2 и точка $t_0 = i$ – неподвижная точка $\Theta(t)$.

Т. Е. Моисеев [109] для уравнения Лапласа

$$\Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (142)$$

в области Ω исследовал задачу отыскания решения $u(z) = u(x, y)$, удовлетворяющего условиям

$$u[\Theta(t)] = u(t), \quad u_n(t) = \mu(t) \quad \forall t \in \sigma_1,$$

$$u_x(z) + \operatorname{sign} x u_y(z) = 0 \quad \forall z = x \in \sigma_0.$$

Он показал, что заменой

$$u(z) = u^+(z) + u^-(z),$$

где

$$2u^+(z) = u(z) + u(-\bar{z}), \quad 2u^-(z) = u(z) - u(-\bar{z}),$$

нелокальная краевая задача сводится к двум локальным краевым задачам для уравнения Лапласа.

З. А. Нахушева [43] для уравнения (142) в области

$$\Omega = \{z: 0 < x < a, 0 < y < b\}$$

изучила нелокальную внутреннекраевую задачу:

$$u(x) = \tau_0(x), \quad u(x + ib) = \tau_1(x), \quad 0 \leq x \leq a; \quad (143)$$

$$u(iy) = u(\alpha + iy) + \varphi(y), \quad u(a + iy) = u(\beta + iy) + \psi(y), \quad 0 \leq y \leq b, \quad (144)$$

где $0 < \alpha \leq a$, $0 \leq \beta < a$, $(\alpha - a)^2 + \beta^2 \neq 0$, $\tau_0(x)$, $\tau_1(x)$, $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ – заданные достаточно гладкие функции.

К задаче типа 8 сводится и смешанная задача, рассмотренная в работе [110] для модельного уравнения первого порядка

$$u_x(z) + \sqrt{\operatorname{sign} y} u_y(z) = 0.$$

В качестве уравнения (140) рассмотрим уравнение

$$y^m u_{xx} + u_{yy} + a(z)u_x + b(z)u_y + c(z)u = f(z) \quad (145)$$

в области Ω , ограниченной простой кривой Жордана σ_0 с концами в точках $z = 0$ и $z = 1$, расположенной в полуплоскости $\operatorname{Im} z = y > 0$, и отрезком $\sigma = \{z: 0 \leq x \leq 1, y = 0\}$ действительной оси $\operatorname{Im} z = 0$.

В 1975 г. автором [111] была поставлена и исследована на корректность следующая задача для уравнения (145) с непрерывными в $\bar{\Omega}$ коэффициентами $a(z)$, $b(z)$, $c(z)$ и правой частью $f(z)$, $m = \operatorname{const} > 0$.

Задача 9. Найти регулярное в области Ω решение $u = u[z]$ уравнения (145) из класса $C(\bar{\Omega})$, удовлетворяющее на σ_0 локальному краевому условию (Дирихле или Пуанкаре), а на σ – условию с нелокальным смещением

$$a_0(x)u_y[x] + \sum_{j=1}^m a_j(x)D_{0x}^{\alpha_j}u[x] + a_{m+1}(x)u[x] = \varphi(x), \quad x \in \sigma, \quad (146)$$

где $\varphi(x)$, $a_k(x)$, $k = 0, 1, \dots, m+1$ – заданные функции из класса $C[0, 1]$, $f(z) \in C(\bar{\Omega})$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ – заданные действительные числа, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m < 1$.

К различным частным случаям задачи 9 эквивалентно (в смысле однозначной разрешимости) редуцируются многие краевые и внутренне-краевые задачи для двумерных линейных уравнений второго порядка, в частности, сформулированный автором в 1972 г. и впервые исследованный М. Х. Абруговым [112] аналог задачи Бицадзе–Самарского для уравнения Трикоми

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Ряд работ [113–115] М. А. Усанеташвили посвящен краевым задачам для эллиптических уравнений с условиями вида (146).

А. Б. Антонец [116, с. 249] для линейных эллиптических уравнений второго порядка в многомерной области анонсировал аналог условия Лопатинского для случая краевой задачи с локальным сдвигом, исследовал вопрос об индексе и нормальной разрешимости краевой задачи с локальным смещением для широкого класса эллиптических уравнений

высокого порядка [117]. Разрешимости эллиптических задач с нелокальными внутреннекраевыми условиями типа условия Бицадзе–Самарского посвящена и работа А. Л. Скубачевского [118].

А. П. Солдатов [119] для канонической эллиптической системы первого порядка, решения которой называются аналитическими по Дугласу функциями, исследовал внутреннекраевую задачу со смещением и при довольно общих предположениях относительно сдвига внутри области получил критерий ее фредгольмовости.

Стационарный вариант задачи теплообмена излучением [120] инициирует необходимость изучения краевых задач с нелокальным смещением для эллиптических уравнений второго порядка. Например, для уравнения Пуассона $u_{xx} + u_{yy} = f(z)$, заданного в круге $|z| < 1$, краевое условие с нелокальным смещением на границе $\sigma = \{z: |z| = 1\}$ может иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left[A(z) \frac{\partial u(z)}{\partial \bar{z}} \right] + a(z)u(z) = \\ & = \int_{|\xi|=1} \left\{ \operatorname{Re} \left[B(z, \xi) \frac{\partial u(\xi)}{\partial \bar{\xi}} \right] + b(z, \xi)u(\xi) \right\} d\sigma_{\xi}, \quad z \in \sigma. \end{aligned}$$

Здесь A , B , a и b – заданные функции; $a(z)$ и $b(z, \xi)$ – действительные функции комплексных аргументов; σ_{ξ} – естественная мера на σ .

В работе [121] для уравнения $\Delta u = \lambda u$ со спектральным параметром λ в области $\Omega = \{z: 0 < x, y < 1\}$ исследована структура спектра задачи с краевыми условиями $u(0, y) = u(x, 0) = u(x, 1) = 0$, $u(1, y) = \gamma u(\xi, y)$, где γ и ξ – заданные числа, причем $0 < \xi < 1$.

В заметке [66] для уравнения теплопроводности

$$v_t = v_{xx} + v_{yy} + F(z, t), \quad v = v(z, t) \equiv v(x, y, t)$$

в области $\{(z, t): 0 < x < 2, 0 < y < 1, 0 < t < T\}$ анонсирована теорема о сильной разрешимости «смешанной» задачи:

$$v(z, 0) = u(z), \quad z \in \Omega = \{z: 0 < x < 2, 0 < y < 1\};$$

$$v(x, 0, t) = v(x, 1, t) = 0, \quad v(0, y, t) = \gamma_1 v(1, y, t), \quad v(2, y, t) = \gamma_2 v(1, y, t).$$

Очевидно, что если

$$F(z, t) = f(z)\exp(\lambda t), \quad \lambda = \text{const},$$

то функция $v(z, t) = u(z)\exp(\lambda t)$ будет решением этой задачи только тогда, когда $u(z)$ – решение уравнения $\Delta u + f(z) = \lambda u$, удовлетворяющее условиям (143) и (144), где $\tau_0(x) = \tau_1(x) \equiv 0$, $\varphi(y) = \psi(y) \equiv 0$, $a = 2$, $b = 1$, $\alpha = \beta = 1$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$.

Л. А. Самойлова [123, с. 54] для уравнения Лапласа в прямоугольной области приводит пример нелокальной внутреннекраевой задачи типа задачи Бицадзе–Самарского, которая сводится к задаче Дирихле для уравнения, аналогичного этому уравнению на стратифицированном множестве. В работе [124, с. 62] методом конечных разностей решена специальная задача со смещением типа (118) для уравнения (122) в смешанной области стандартного вида.

Литература

1. Нахушев А. М. О некоторых новых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5, № 1.
2. Нахушев А. М. Новая краевая задача для одного вырождающегося гиперболического уравнения // ДАН СССР. 1969. Т. 187, № 4.
3. Нахушев А. М. О нелокальных краевых задачах со смещением и их связи с нагруженными уравнениями // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 1.
4. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. 301 с.
5. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике. М.: ФМ, 1962. 599 с.
6. Carleman T. Sur la theorie des equations integrales et ses applications // Verhandl. des internat. Math. Congr., Zurich, Bd.1, 1932.
7. Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.
8. Бицадзе А. В., Самарский А. А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // ДАН СССР. 1969. Т. 185, № 4. С. 739–740.
9. Самарский А. А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16, № 11. С. 1925–1935.
10. Стеклов В. А. Задача об охлаждении неоднородного твердого тела // СМО, серия 2. 1896. Т. 5, № 3–4. С. 136–181.
11. Стеклов В. А. Основные задачи математической физики. М.: Наука, 1983. 432 с.
12. Ионкин Н. И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 2. С. 294–304.
13. Ионкин Н. И. Об устойчивости одной задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 7. С. 1280–1283.
14. Нахушев А. М. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 1. С. 72–81.
15. Нахушев А. М. Нагруженные дифференциальные уравнения и их приложения. В кн.: Труды Всесоюзного симпозиума. Тбилиси, 1982.
16. Нахушев А. М. Анализ одной математической модели спирального филлотаксиса // Сб. научных трудов «Нелокальные задачи и их приложения к автоматизированным системам». Нальчик, 1989. С. 161–167.
17. Борухов В. Т., Чеб Е. С. О начально-краевой задаче для уравнения теплопроводности с неклассическими краевыми условиями // Международ. конф. «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений»: Тезисы докл. Минск, 2001.
18. Виленкин Н. Я. Штурма–Лиувилля задача // Математическая физика. Энциклопедия. М.: Большая Российская энциклопедия, 1998. 691 с.
19. Тамаркин Я. Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Петроград, 1917.
20. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 528 с.

21. Ионкин Н. И., Моисеев Е. И. О задаче теплопроводности с двухточечными краевыми условиями // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 7. С. 1284–1295.
22. Михайлов В. П. О базисах Рисса в $L_2(0, 1)$ // ДАН СССР. 1963. Т. 144, № 5. С. 981–984.
23. Haillaire. L'eau et la production vegetale // Institute National de la Recherche Agronomique. 1964.
24. Нерпин С. В., Юзefович Т. А., Янгaрбер В. А. О расчете нестационарного движения влаги в почве // Доклады академии сельскохозяйственных наук. 1966. № 6.
25. Чудновский А. Ф. Теплофизика почвы. М.: Наука, 1976. 352 с.
26. Янгaрбер В. А. Сеточная схема для решения модифицированного уравнения влагопереноса // Доклады академии сельскохозяйственных наук. 1966. № 8.
27. Янгaрбер В. А. О смешанной задаче для модифицированного уравнения влагопереноса // Журнал прикладной математики и технической физики. 1967. № 1. С. 91–96.
28. Дезин А. А. Простейшие разрешимые расширения для ультрагиперболического и псевдопараболического операторов // ДАН СССР. 1963. Т. 148, № 5. С. 1013–1016.
29. Дезин А. А. Операторы с первой производной по времени и нелокальные граничные условия // Известия АН СССР, серия матем. 1967. № 21. С. 61–67.
30. Cannon J. R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy // Quart. Appl. Math. 1963. Vol. 21. Pp. 155–160.
31. Камынин Л. И. Журнал вычисл. мат. и мат. физики. 1964. Т. 4, № 6.
32. Камынин Л. И. Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8, № 5.
33. Камынин Л. И. Дифференц. уравнения. 1976. Т. 16, № 6.
34. Нахушев А. М. Краевые задачи для нагруженных интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа и некоторые их приложения к прогнозу почвенной влаги // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 1. С. 96–105.
35. Ильин В. А., Моисеев Е. И. Нелокальная краевая задача в дифференциальной и разностной постановках // Сб. научных трудов «Нелокальные задачи для уравнений в частных производных и их приложения к моделированию и автоматизации проектирования сложных систем». Нальчик: КБГУ, 1986. 225 с.
36. Ильин В. А., Моисеев Е. И. Нелокальная краевая задача для оператора Штурма–Лиувилля // Доклады АН СССР. 1986. Т. 291, № 6. С. 534–538.
37. Ильин В. А., Моисеев Е. И. Нелокальная краевая задача второго рода для оператора Штурма–Лиувилля // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 8. С. 1422–1431.
38. Напсо А. Ф. О задаче Бицадзе–Самарского для уравнения параболического типа // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 4.
39. Нахушев А. М. Нелокальная задача и задача Гурса для нагруженного уравнения гиперболического типа и их приложения к прогнозу почвенной влаги // ДАН СССР. 1978. Т. 242, № 5. С. 1008–1011.
40. Напсо А. Ф. Нелокальные краевые задачи для параболических и смешанных гиперболическо-параболических уравнений второго рода. Диссер. на соискание уч. степени к.ф.-м.н. Нальчик: КБГУ, 1981. 73 с.
41. Водахова В. А. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка с нелокальным условием А. М. Нахушева // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 1. С. 163–166.
42. Гордезиани Д. Г. Разностные методы решения одного класса нелокальных краевых задач // Сб. научных трудов «Нелокальные задачи для уравнений в частных производных и их приложения к моделированию и автоматизации проектирования сложных систем». Нальчик: КБГУ, 1986. 225 с.
43. Нахушева З. А. Об одной нелокальной задаче для уравнения в частных производных // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 1. С. 171–174.
44. Нахушева З. А. Обобщенная задача Самарского для параболического уравнения второго порядка // Сб. научных трудов «Нелокальные задачи для уравнений в частных производных и их приложения к моделированию и автоматизации проектирования сложных систем». Нальчик: КБГУ, 1986. 225 с.

45. Нахушева З. А. Первая и вторая краевые задачи в интегральной постановке для параболического уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 1. С. 1982.
46. Шхануков М. Х. Об устойчивости разностных схем, аппроксимирующих нелокальное условие типа Бицадзе–Самарского // Доклады Адыгской (Черкесской) международной академии наук. 1994.
47. Кереев А. А. К нелокальным задачам для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Труды Международ. науч. конф. «Дифференциальные уравнения и их приложения». Самара, 2002. С. 179–182.
48. Кереев А. А. Нелокальные краевые задачи для параболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 1. С. 74–78.
49. Кожанов А. И. Об одном нелинейном нагруженном параболическом уравнении и о связанной с ним обратной задаче // Матем. заметки. 2004. Т. 76, № 6. С. 840–853.
50. Кожанов А. И. Краевая задача с нелокальным по времени условием для одномерного уравнения с кратными характеристиками // Математические заметки ЯГУ. 2004. Т. 11, № 11. С. 41–56.
51. Илькив В. С., Пташник Б. И. Некорректная нелокальная двухточечная задача для систем уравнений с частными производными // Сиб. мат. журнал. 2005. Т. 46, № 1. С. 119–129.
52. Илькив В. С. Нелокальная краевая задача для систем уравнений в частных производных бесконечного порядка // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 2. С. 250–257.
53. Юрчук Н. И. Смешанная задача с интегральным условием для некоторых параболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 12. С. 2117–2126.
54. Нахушев А. М. О некоторых способах линеаризации уравнений движения грунтовых вод и почвенной влаги // Межвузовский сб. «Краевые задачи для уравнений смешанного типа и родственные проблемы функционального анализа и прикладной математики». Нальчик: КБГУ, 1979. Вып. 2. 192 с.
55. Нахушева З. А. Об одной нелокальной краевой задаче для уравнения теплопроводности // Доклады Адыгской (Черкесской) международной академии наук. 2002. Т. 6, № 1. С. 28–34.
56. Нахушева Ф. М. Об одном классе нелокальных краевых задач для уравнения теплопроводности // Доклады Адыгской (Черкесской) международной академии наук. 1995. Т. 1, № 2.
57. Кереев А. А. О нелокальных краевых задачах для вырождающихся уравнений с континуальной производной в условиях // Доклады Адыгской (Черкесской) международной академии наук. 1995. Т. 1, № 2.
58. Кереев А. А., Кумышев Р. М. О краевых задачах для нагруженного уравнения теплопроводности // Доклады Адыгской (Черкесской) международной академии наук. 1996. Т. 2, № 1.
59. Нахушева В. А. Некоторые классы дифференциальных уравнений математических моделей нелокальных процессов. Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2002. 102 с.
60. Псху А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.
61. Сербина Л. И. Нелокальные математические модели процессов переноса в системах с фрактальной структурой. Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2002. 144 с.
62. Муравей Л. А., Филиновский А. В. Об одной задаче с нелокальным граничным условием для параболического уравнения // Математический сборник. 1991. Т. 182, № 10.
63. Кереев А. А., Кумышев Р. М. Нелокальная краевая задача с континуальной производной по времени для нагруженного уравнения теплопроводности // Труды междунаро. научной конф. «Спектральная теория дифференциальных операторов и родственные проблемы». Т. 1. Уфа, 2003.

64. Bouziani A. On the solvability of nonlocal pluriparabolic problems // Electronic Journal of Differential Equations. 2001. Vol. 2001, no. 21. Pp. 1–16.
65. Митропольский Ю. А., Шхануков М. Х., Березовский А. А. Об одной нелокальной задаче для параболического уравнения // Украинский математический журнал. 1995. Т. 47, № 6. С. 790–800.
66. Шамин Р. В. О сильной разрешимости первой смешанной задачи для параболического дифференциально-разностного уравнения // Тезисы докладов Воронежской зимней математической школы «Современный анализ и его приложения», 28 января – 4 февраля 2000 г.
67. Кожанов А. И. О разрешимости краевой задачи с нелокальным граничным условием для линейных параболических уравнений // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. 2004. Т. 30. С. 63–69.
68. Жегалов В. И. Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничными условиями на обеих характеристиках и с разрывами на переходной линии // Ученые записки Казанского госуниверситета. 1962. Т. 122, кн. 3. С. 3–16.
69. Нахушев А. М. Об одном классе линейных краевых задач для гиперболического и смешанного типов уравнений второго порядка. Нальчик: Эльбрус, 1992. 155 с.
70. Смирнов М. М. Вырождающиеся гиперболические уравнения. Минск: Высш. школа, 1977. 158 с.
71. Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа. М.: Высш. школа, 1985. 304 с.
72. Джураев Т. Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений параболического типа. Ташкент: ФАН, 1986. 220 с.
73. Кальменов Т. Ш. Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа. Шымкент: Гылая, 1993. 328 с.
74. Пташник Б. И. Некоторые граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. Киев: Наукова Думка, 1984. 264 с.
75. Салахитдинов М. С., Уринов А. К. Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром. Ташкент: ФАН, 1997. 165 с.
76. Волкодав В. Ф., Николаев Н. Я. Краевые задачи для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу. Учебное пособие. Куйбышев, 1984. 80 с.
77. Репин О. А. Краевые задачи со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типов. Самара: Саратовский университет, Самарский филиал, 1992. 161 с.
78. Жегалов В. И., Миронов А. Н. Дифференциальные уравнения со старшими частными производными. Казань: Казанское матем. общество, 2001. 226 с.
79. Лернер М. Е. Принцип максимума для уравнений гиперболического типа и новые свойства функции Римана. Самара: Самарский гос. техн. университет, 2001. 113 с.
80. Лернер М. Е. Принцип максимума и краевые задачи для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа в неклассических областях. Самара: Самарский гос. техн. университет, 2001. 194 с.
81. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 272 с.
82. Нахушев А. М. Методика постановки корректных задач для линейных гиперболических уравнений на плоскости // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6, № 1. С. 191–195.
83. Кумыкова С. К. О некоторых краевых задачах со смещением для уравнения Лаврентьева–Бицадзе // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9, № 1. С. 106–114.
84. Ланина Т. И. О некоторых задачах для уравнений гиперболического и смешанного типов // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9, № 1. С. 115–122.
85. Энгельман У. М. Задача с нелокальными граничными условиями для гиперболических дифференциально-операторных уравнений с частными производными второго порядка // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11, № 9. С. 1687–1693.
86. Нахушев А. М. Нелокальная задача и задача Гурса для нагруженного уравнения гиперболического типа и их приложения к прогнозу почвенной влаги // ДАН СССР. Т. 242, № 5. С. 1008–1011.

87. Нахушев А. М. Краевые задачи для нагруженных интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа и некоторые их приложения к прогнозу почвенной влаги // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 1. С. 96–105.
88. Кхан Р. Краевые задачи со смещением для гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 6. С. 1082–1085.
89. Кхан Р. Об одной нелокальной задаче для уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20, № 4. С. 710–711.
90. Мельник З. О. Задача с интегральными ограничениями для гиперболического уравнения второго порядка. В кн.: «Общая теория граничных задач». Киев: Наукова думка, 1983. 327 с.
91. Пулькина Л. С. Нелокальная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 7. С. 837–892.
92. Нахушев А. М. Об одной внутреннекраевой задаче с нелокальным смещением для системы уравнений половозрастной структуры популяции. Тезисы докладов Всесоюзной конференции «Дифференциальные уравнения», 4–6 октября 1990 г., Ашхабад, 1990.
93. Бисочков Р. М. // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30, № 3. С. 419–424.
94. Гордезиани Д. Г., Авалишвили Г. А. Решение нелокальных задач для одномерных колебаний среды // Математическое моделирование. 2000. Т. 12, № 1. С. 94–103.
95. Кхан Р. Об одной нелокальной задаче для одного вырождающегося уравнения гиперболического типа // Сб. научных трудов «Нелокальные краевые задачи для нагруженных уравнений смешанного типа и родственные проблемы непрерывного анализа». Нальчик: КБГУ, 1982. 253 с.
96. Назаров С. Ю. О разрешимости одной нелокальной краевой задачи со смещением для уравнения Эйлера-Дарбу-Пуассона. Сб. научных трудов «Нелокальные краевые задачи для нагруженных уравнений смешанного типа и родственные проблемы непрерывного анализа». Нальчик: КБГУ, 1982. 253 с.
97. Репин О. А. Аналог задачи Нахушева для уравнения Бицадзе-Лыкова // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38, № 10. С. 1412–1417.
98. Спектральная теория дифференциальных операторов и родственные проблемы / под ред. К. Б. Сабитова. Труды международной научной конференции, 24–28 июня 2003 г., Стерлитамак. Уфа: Гилим, 2003. 266 с.
99. Наджафов Х. М. Об одной общей краевой задаче со смещением для уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Известия КБНЦ РАН. 2002. № 1(8). С. 63–71.
100. Полищук В. Н. Периодическая краевая задача для гиперболических уравнений. В кн. «Общая теория граничных задач». Киев: Наукова думка. 1983. 397 с.
101. Дженалиев М. Т. О нагруженных уравнениях с периодическими граничными условиями // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 1. С. 48–54.
102. Елеев В. А. О некоторых задачах типа задачи Коши и задач со смещением для одного вырождающегося гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 1. С. 44–58.
103. Репин О. А. Нелокальные задачи А. М. Нахушева для уравнения смешанного типа // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2001. Вып. 12, № 12. С. 5–9.
104. Андреев А. А., Огородников Е. Н. Применение матричных интегродифференциальных операторов в постановке и решении нелокальных краевых задач для систем уравнений гиперболического типа // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2001. Вып. 12, № 12. С. 5–9.
105. Лернер М. Е. Существенно нелокальная краевая задача для обобщенного телеграфного уравнения // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Математическая». 2004. Вып. 31. С. 164.
106. Огородников Е. Н., Арланова Е. Ю. Некоторые нелокальные аналоги задачи Коши-Гаусса и существенно нелокальные краевые задачи для системы уравнений Бицадзе-

- Лыкова // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2005. Вып. 34, № 34.
107. Асанова А. Т., Джубанов Д. С. Корректная разрешимость нелокальных краевых задач для систем гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 3. С. 337–346.
108. Кожанов А. И., Пулькина Л. С. Краевые задачи с интегральным граничным условием для многомерных гиперболических уравнений // ДАН. 2005. Т. 404, № 5. С. 584–592.
109. Моисеев Т. Е. О теоремах единственности решений нелокальных краевых задач для уравнения Лаврентьева–Бицадзе // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 5. С. 710–712.
110. Алиев Н. А., Мамедов Ф. О. Задачи смешанного типа для одного модельного уравнения первого порядка // Известия АН АзССР, серия физико-математических и матем. наук. 1983. № 6. С. 110–113.
111. Нахушев А. М. Об одной смешанной задаче для вырождающихся эллиптических уравнений // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11, № 1. С. 192–195.
112. Абрегов М. Х. Об одной задаче для уравнения Трикоми // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9, № 1. С. 5–17.
113. Усанеташвили М. А. Об одной краевой задаче для эллиптических уравнений с нехарактеристическим вырождением на части границы // Сообщения АН Гр. ССР. 1977. Т. 86, № 1.
114. Усанеташвили М. А. Об одной краевой задаче для уравнения Хольмгрена в неограниченной области // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20, № 1. С. 142–146.
115. Усанеташвили М. А. Краевые задачи для некоторых классов вырождающихся уравнений в частных производных второго порядка. Диссертация на соискание уч. ст. д.ф.-м.н. Тбилиси: ИПМ им. И. Н. Векуа, 1996. 217 с.
116. Антоневиц А. Б. Некоторые нелокальные граничные задачи для эллиптических уравнений. В кн. «Общая теория граничных задач». Киев: Наукова думка, 1983. 327 с.
117. Антоневиц А. Б. Об индексе и нормальной разрешимости общей эллиптической краевой задачи с конечной группой сдвигов на границе // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8, № 2. С. 309–317.
118. Скубачевский А. Л. Разрешимость эллиптических задач с нелокальными краевыми условиями // Доклады АН СССР. 1986. Т. 291, № 3. С. 351–355.
119. Солдатов А. П. Задача Бицадзе–Самарского для функций, аналитических по Дугласу // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 3. С. 396–407.
120. Амосов А. А. Глобальная разрешимость одной нелинейной нестационарной задачи с нелокальным краевым условием типа теплообмена с излучением // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 1. С. 93–94.
121. Сапаговас М. П., Штиконас А. Д. О структуре спектра дифференциального оператора с нелокальным условием // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 7. С. 961–969.
122. Исмаев М. О некоторых несамосопряженных смешанных задачах теории теплопроводности // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 3. С. 382–395.
123. Самойлова Л. А. О сведении одной нелокальной краевой задачи к локальной // Материалы III Школы молодых ученых «Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики». Нальчик: КБНЦ РАН, 2005. 87 с.
124. Кязимов Т. Г., Тагиев Ф. А. Решение задачи А. М. Нахушева для уравнения смешанного типа методом конечных разностей. В сб.: «Вопросы прикладной математики и кибернетики», № 1 (Уч. зап. Азерб. университета), Баку: Азерб. госуниверситет, 1977.

О задаче Дирихле для уравнений смешанного типа

1. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа в цилиндрической области. Пусть: D – ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ с кусочно-гладкой границей $\sigma = \partial D$; I_{ab} – интервал $a < y < b$; $\Omega_{ab} = D \times I_{ab}$ – цилиндрическая область в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ точек x, y ; σ_{ab} – граница Ω_{ab} ; $\Sigma_{ab} = \sigma \times I_{ab}$ – боковая поверхность цилиндра Ω_{ab} ; D_a – нижнее, а D_b – верхнее основания цилиндра Ω_{ab} (рис. 1).

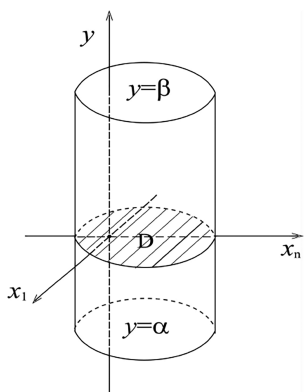


Рис. 1

В области $\Omega_{\alpha\beta}$ с индексами $\alpha < 0$ и $\beta > 0$ рассмотрим уравнение

$$k(y) \left[\frac{\partial}{\partial x_j} a^{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u \right] - u_{yy} = 0, \quad (1)$$

где $yk(y) > 0$ при $y \neq 0$ и по индексам i и j подразумевается суммирование от 1 до n .

Предполагается, что $c(x) \in C(\overline{D})$; $a^{ij}(x) = a^{ji}(x) \in C(\overline{D})$, функция $k(y)$ непрерывна всюду на сегменте $[\alpha, \beta] = \overline{I}_{\alpha\beta}$, за исключением, быть может, точки $y = 0$; для всех $x \in D$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$ форма $Q(x, \xi) = a^{ij}(x)\xi_i\xi_j$ удовлетворяет неравенству

$$Q(x, \xi) \geq c_0|\xi|^2, \quad c_0 = \text{const} > 0. \quad (2)$$

Через Lu обозначим дифференциальное выражение в левой части уравнения (1). Оператор L является самосопряженным по Лагранжу.

Легко показать, что функция $u = \omega(y)v(x)$ при $y \neq 0$ будет решением уравнения (1) в области $\Omega_{\alpha\beta}$ только тогда, когда

$$L_x v \equiv [a^{ij}(x)v_{x_i}]_{x_j} + [c(x) + \lambda]v = 0, \quad (3)$$

$$l_\lambda \omega \equiv \omega'' + \lambda k(y)\omega = 0, \quad \alpha < y < \beta, \quad (4)$$

где λ – спектральный параметр.

Оператор L_x в силу (2) является равномерно эллиптическим.

Решение $u = u(x, y)$ уравнения (1) назовем регулярным в области $\Omega_{\alpha\beta}$, если $u \in C(\overline{\Omega}_{\alpha\beta}) \cap C^1(\Omega_{\alpha\beta})$, функции $u_{x_j x_j}$, $j = 1, 2, \dots, n$, u_{yy} являются непрерывными всюду в $\Omega_{\alpha\beta}$ за исключением, быть может, точек $(x, 0)$, $x \in D$.

Допустим, что u – регулярное решение уравнения (1) в области $\Omega_{\alpha\beta}$, а $w = \omega v$, где $v = v(x)$ и $\omega = \omega(y)$ – решения уравнений (3) и (4) из классов $C(\overline{D}) \cap C^2(D)$ и $C(\overline{I}_{\alpha\beta}) \cap C^1(I_{\alpha\beta})$ соответственно.

Непосредственным вычислением можно показать, что

$$\begin{aligned} wLu - uLw &= w(kL_xu - u_{yy}) - u(kL_xw - w_{yy}) = k(wL_xu - uL_xw) - \\ &- wu_{yy} + uw_{yy} = \omega k(vL_xu - uL_xv) - v(\omega u_{yy} - u\omega'') = \\ &= \omega k[a^{ij}(vu_{x_i} - uv_{x_i})]_{x_j} - v[\omega u_y - u\omega']_y. \end{aligned}$$

Поскольку $Lu = 0$ и $Lw = 0$ при $y \neq 0$, то отсюда получаем равенство

$$\omega k \frac{\partial}{\partial x_j} [a^{ij}(vu_{x_i} - uv_{x_i})] = v \frac{\partial}{\partial y} [\omega u_y - u\omega']. \quad (5)$$

Пусть D_ε — строго внутренняя подобласть D с кусочно-гладкой границей σ_ε , $\nu_\varepsilon = (\nu_\varepsilon^1, \nu_\varepsilon^2, \dots, \nu_\varepsilon^n)$ — кономаль в точке $x \in \sigma_\varepsilon$. Тогда из (5) на основании формулы Грина будем иметь

$$P'_\varepsilon(y) = \omega k \int_{\sigma_\varepsilon} \left(v \frac{\partial u}{\partial \nu_\varepsilon} - u \frac{\partial v}{\partial \nu_\varepsilon} \right) d\sigma_\varepsilon, \quad (6)$$

где

$$P_\varepsilon(y) = \int_{D_\varepsilon} v(\omega u_y - u\omega') dx,$$

$d\sigma_\varepsilon$ — элемент σ_ε ; $dx = dx_1 dx_2 \dots dx_n$; при $0 < \varepsilon \rightarrow 0$ $\sigma_\varepsilon \rightarrow \sigma$, $D_\varepsilon \rightarrow D$, $\nu_\varepsilon \rightarrow \nu^* = (\nu^1, \nu^2, \dots, \nu^n)$, $\nu^i = a^{ij}(x)\nu_j$, $\nu_j = \cos(\nu, x_j)$ — направляющие косинусы внешней нормали $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$ к σ в точке x .

Лемма 1. Пусть области определения $D(L)$ и $D(L_x)$ операторов L и L_x таковы, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\sigma_\varepsilon} (vu_{\nu_\varepsilon} - uv_{\nu_\varepsilon}) d\sigma_\varepsilon = 0. \quad (7)$$

Тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P'_\varepsilon(y) = 0. \quad (8)$$

Очевидно, что условие (7) соблюдено, когда $u \in C^1(\Omega_{\alpha\beta} \cup D_\alpha \cup D_\beta)$, $v \in C^1(\overline{D})$,

$$u = 0, \quad \forall (x, y) \in \Sigma_{\alpha\beta}, \quad (9)$$

$$v = 0, \quad \forall x \in \sigma, \quad (10)$$

или $\partial u / \partial \nu^*$ и $\partial v / \partial \nu^*$ обращаются в нуль на $\Sigma_{\alpha\beta}$ и σ соответственно.

Лемма 2. Пусть соблюдено условие (7) леммы 1, функция u_y непрерывна в $\Omega_{\alpha\beta}$ вплоть до $D_\alpha \cup D_\beta$, причем $u_y(x, \alpha)$ и $u_y(x, \beta) \in L(D)$. Тогда

$$\begin{aligned} &\int_D [\omega(\beta)u_y(x, \beta) - \omega(\alpha)u_y(x, \alpha) + \\ &+ u(x, \alpha)\omega'(\alpha) - u(x, \beta)\omega'(\beta)]v(x)dx = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Эта лемма прямо следует из равенства (8) после его почленного интегрирования по y от $\alpha_\varepsilon \rightarrow \alpha$ до $\beta_\varepsilon \rightarrow \beta$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Нелокальное внутреннекраевое условие (11) связывает значения решения $u(x, y)$ уравнения (1) и его частной производной $u_y(x, y)$ на нижнем D_α и верхнем D_β основаниях цилиндра $\Omega_{\alpha\beta}$. В частности, если

$$u(x, \alpha) = 0, \quad u(x, \beta) = 0, \quad \forall x \in D; \quad (12)$$

$$\omega(\alpha) = 0, \quad \omega(\beta) \neq 0; \quad (13)$$

то из (11) получаем нелокальное условие

$$\int_D u_y(x, \beta) v(x) dx = 0. \quad (14)$$

Теорема 1. Пусть коэффициенты уравнения (3) и граница σ области D обладают тем свойством, что система $\{v_m\}$ собственных функций $v_m = v_m(x) \in C^1(\bar{D})$, соответствующих собственным значениям λ_m однородной задачи Дирихле (10) для уравнения (3), полна в пространстве $L^2(D)$; $\omega_m = \omega_m(y)$ – решение уравнения (4) при $\lambda = \lambda_m$ из класса $C^1[\alpha, \beta]$, удовлетворяющее условию (13); $u(x, y)$ – регулярное в области $\Omega_{\alpha\beta}$ решение однородной задачи Дирихле (9), (12) для уравнения (1), частная производная u_y которого непрерывна в $\Omega_{\alpha\beta}$ вплоть до $D_\alpha \cup D_\beta$, причем $u_y(x, \alpha)$ и $u_y(x, \beta) \in L(D)$. Тогда $u(x, y) \equiv 0$.

В частности, система $\{v_m\}$ будет удовлетворять условиям теоремы, если $a^{ij} \in C^3(\bar{D})$, $c(x) \in C^2(\bar{D})$ и граница $\sigma = \partial D$ является четырежды непрерывно дифференцируемой.

Доказательство теоремы 1 по существу приведено в работе [1] (см. также [2, с. 284]). Оно проводится по следующей схеме. Поскольку равенство (14) имеет место для любой функции v из системы $\{v_m\}$, которая полна в $L^2(D)$, то на основании леммы Лагранжа получаем

$$u_y(x, \beta) = 0 \quad \forall x \in D. \quad (15)$$

Согласно (9), (12) и равенству (15), функция $u(x, y)$ должна быть решением однородной смешанной задачи с носителем граничных данных на $D_\beta \cup \Sigma_{0\beta}$ для уравнения (1) в области $\Omega_{0\beta}$ из класса $C(\bar{\Omega}_{0\beta})$. Но это возможно только тогда, когда $u(x, y) = 0$ в $\bar{\Omega}_{0\beta}$ и, стало быть,

$$u(x, 0) = 0 \quad \forall x \in \bar{D}. \quad (16)$$

Условия (9), (12) и равенство (16) говорят о том, что функция $u(x, y)$ в области $\Omega_{\alpha 0}$ должна совпадать с решением однородной задачи Дирихле: $u|_{\partial\Omega_{\alpha 0}} = 0$ для уравнения (1) в области $\Omega_{\alpha 0}$. Известно, что эта задача не имеет решений, отличных от тривиального. Следовательно, $u(x, y) = 0$ во всей смешанной области $\Omega_{\alpha\beta}$.

Вытекающее из (13) условие о том, что для любого собственного значения λ_m ($m = 1, 2, \dots$) однородной задачи Дирихле для уравнения (3) в области $\Omega_{\alpha\beta}$ должна существовать функция $\omega_m = \omega_m(y) \in C^1[\alpha, \beta]$, удовлетворяющая при $y \neq 0$, $\alpha < y < \beta$ условиям

$$\omega_m'' + \lambda_m k(y) \omega_m = 0, \quad \omega_m(\alpha) = 0, \quad \omega_m(\beta) \neq 0 \quad (17)$$

является существенным. Если для какого-то j $\omega_j(\beta) = 0$, то функция $u(x, y) = v_j(x) \omega_j(y)$ представляет собой решение однородной задачи Дирихле для уравнения (1) в области $\Omega_{\alpha\beta}$.

При $\alpha = 0$, $k(y) \equiv 1$, $Q(x, \xi) > 0$ для всех $x \in \overline{\Omega}_{0\beta}$ и $\xi \neq 0$ условие (17) можно свести к эквивалентному условию $\beta \sqrt{\lambda_m} \neq j\pi$; $m, j = 1, 2, \dots$ единственности решения задачи Дирихле (первой краевой задачи) для гиперболического уравнения, полученному в работе [1].

2. Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в специальных областях. Рассмотрим уравнение (1) в смешанной области Ω , гиперболическая часть Ω^- которой совпадает с $\Omega_{0\beta}$, а эллиптическая – с областью Ω^+ , ограниченной кусочно-гладкой поверхностью σ^+ , расположенной в полупространстве $y \leq 0$, и частью $\overline{D}$ плоскости $y = 0$.

Как и ранее, считаем, что $a^{ij}(x)$, $c(x) \leq 0$ и поверхность σ удовлетворяют условиям, гарантирующим полноту в $L^2(D)$ системы $\{v_m\}$, $m = 1, 2, \dots$ собственных функций $v_m = v_m(x) \in C^1(\overline{D})$, соответствующих собственным значениям λ_m однородной задачи Дирихле для уравнения (3) в области $D \subset \mathbb{R}^n$. Относительно же $k = k(y)$ при $y > 0$ и высоты β цилиндра $\Omega_{0\beta}$ предполагается, что числу λ_m для любого натурального m соответствует решение $\omega_m = \omega_m(y) \in C^1[0, \beta]$ уравнения $-\omega_m''/k = \lambda_m \omega_m$, удовлетворяющее условиям

$$\omega_m(0) = 0, \quad \omega_m'(0) \neq 0, \quad \omega_m(\beta) = 0; \quad m = 1, 2, \dots \quad (18)$$

При этих допущениях можно доказать следующую теорему единственности решения задачи Дирихле для уравнения (1) в области Ω .

Теорема 2. Пусть $u = u(x, y)$ – регулярное в области Ω решение однородной задачи Дирихле:

$$u|_{\sigma^+} = 0, \quad (19)$$

$$u(x, \beta) = 0, \quad x \in D, \quad (20)$$

$$u|_{\Sigma_{0\beta}} = 0, \quad (21)$$

для уравнения (1), частная производная u_y которого непрерывна в $\Omega_{0\beta} \cup D_\beta$, причем $u_y(x, 0)$ и $u_y(x, \beta) \in L(D)$. Тогда $u \equiv 0$.

Действительно, из (11) при $\alpha = 0$, $\omega = \omega_m(y)$, $v = v_m$ на основании (18), (20) и (21) получаем

$$\omega'_m(0) \int_D u(x, 0) v_m(x) dx = 0, \quad m = 1, 2, \dots \quad (22)$$

Так как $\omega'_m(0) = 0$, то скалярное произведение $(u(x, 0), v_m)_0 = 0$. Отсюда в силу полноты системы $\{v_m\}$ в $L^2(D)$ следует, что

$$u(x, 0) = 0, \quad \forall x \in D. \quad (23)$$

Видим, что функция $u(x, y)$ должна быть решением однородной задачи Дирихле (19), (23) для уравнения (1) в области Ω^+ его эллиптичности. Стало быть, $u \equiv 0$ в Ω^+ . Поскольку $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, то

$$\lim_{y \rightarrow -0} u(x, y) = u(x, 0) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow -0} u_y(x, y) = u_y(x, 0) = 0 \quad \forall x \in D. \quad (24)$$

Тот факт, что $u \equiv 0$ в $\Omega_{0\beta}$, является прямым следствием тривиальности решения однородной смешанной задачи (21), (24) для уравнения (1) в области $\Omega_{0\beta}$, где оно гиперболично.

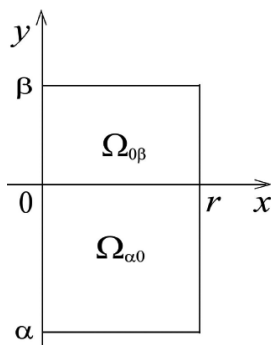


Рис. 2

Рассмотрим теперь случай, когда: $n = 1$, $x_1 = x$, $a^{11}(x) = 1$ и, стало быть, $u = u(x, y)$ – регулярное решение уравнения

$$k(y)u_{xx} - u_{yy} + c(x)u = 0 \quad (25)$$

в прямоугольной области $\Omega_{\alpha\beta} = \{(x, y) : 0 < x < r, \alpha < y < \beta\}$ (см. рис. 2), удовлетворяющее условию

$$u(0, y) = 0, \quad u(r, y) = 0, \quad \alpha \leq y \leq \beta; \quad (26)$$

$v = v(x)$ – решение задачи Дирихле

$$-v'' = (c + \lambda)v, \quad v(0) = 0, \quad v(r) = 0 \quad (27)$$

в области $D = \{x : 0 < x < r\}$ с границей $\sigma = \{0, r\}$; равенство (5) принимает вид

$$\omega k \frac{\partial}{\partial x} (vu_x - uv') = v \frac{\partial}{\partial y} (\omega u_y - \omega' u). \quad (28)$$

Пусть $v \in C^1[0, r]$, функции u_x и u_y принадлежат классу $C(0 \leq x \leq r, y \neq 0)$. Тогда из (28) с учетом краевых условий (26) и (27) для функций u и v получаем

$$P'(y) = 0, \quad \alpha < y < \beta, \quad y \neq 0, \quad (29)$$

где

$$P(y) = \int_0^r (\omega u_y - \omega' u) v(x) dx.$$

Уравнение (29) дает основание записать равенство

$$\left(\int_{\alpha_1}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\beta_1} \right) P'(y) dy = P(-\varepsilon) - P(\varepsilon) + P(\beta_1) - P(\alpha_1) = 0,$$

которое верно для любых $\alpha < \alpha_1 < -\varepsilon$, $0 < \varepsilon < \beta_1 < \beta$. Поскольку $P(y) \in C[\alpha, \beta]$, то отсюда при $\varepsilon \rightarrow 0$ следует, что $P(\beta_1) = P(\alpha_1)$.

Условия $u_y \in C(0 < x < r, \alpha \leq y \leq \beta)$, $u_y(x, \alpha)$ и $u_y(x, \beta) \in L[0, r]$, гарантируют, что при $\alpha_1 \rightarrow \alpha$, $\beta_1 \rightarrow \beta$ будет законным равенство $P(\alpha) = P(\beta)$, которое можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \int_0^r [\omega(\beta)u_y(x, \beta) - \omega(\alpha)u_y(x, \alpha) + \\ & + u(x, \alpha)\omega'(\alpha) - u(x, \beta)\omega'(\beta)]v(x)dx = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Когда $c = \text{const} \leq 0$, собственные значения задачи (27) определяются по формуле $\lambda_m = (\pi m/r)^2 - c$, $m = 1, 2, \dots$

Если $k(y) = \text{sign } y$, то (4) при $\lambda = \lambda_m$, $\omega = \omega_m$ принимает вид

$$-\text{sign } y \cdot \omega_m'' = \lambda_m \omega_m, \quad \alpha < y < \beta. \quad (31)$$

Общее решение уравнения (31) в классе $C[\alpha, \beta] \cap C^1[\alpha, \beta]$ задается формулой

$$\omega_m(y) = \begin{cases} c_1 \cos \mu_m y + c_2 \sin \mu_m y, & y > 0, \\ c_1 \text{ch } \mu_m y + c_2 \text{sh } \mu_m y, & y < 0, \end{cases} \quad (32)$$

где c_1 и c_2 – произвольные постоянные, $\mu_m = \sqrt{\lambda_m}$.

Функция (32) удовлетворяет условию (13) тогда и только тогда, когда $c_1 = -c_2 \text{th}(\alpha \mu_m)$, $c_2 \neq 0$,

$$\sin \beta \mu_m \neq \text{th}(\alpha \mu_m) \cos \beta \mu_m, \quad m = 1, 2, \dots \quad (33)$$

Верна следующая

Теорема 3. Пусть $\lambda_m = (\pi m/r)^2 - c$, $\mu_m = \sqrt{\lambda_m}$, $k(y) = \text{sign } y$, $c = c(x) = \text{const} \leq 0$, $u(x, y)$ – регулярное решение однородной задачи Дирихле (14), (15), (26) для уравнения (25), обладающее тем свойством, что u_x и u_y принадлежат $C(0 \leq x \leq r, y \neq 0)$, а $u_y(x, \alpha)$ и $u_y(x, \beta)$ – элементы $L[0, r]$. Тогда $u \equiv 0$, если соблюдено условие (33).

При $c = 0$ условие (33) эквивалентно условию

$$\text{ch}(\pi m \alpha / r) \sin(\pi m \beta / r) \neq \text{sh}(\pi m \alpha / r) \cos(\pi m \beta / r), \quad m = 1, 2, \dots \quad (34)$$

Если $r = 1$, $\sin \pi m \beta \neq 0$, то условие (34) совпадает с условием, полученным другим способом в работах [3] и [4] и его можно записать в виде

$$\operatorname{th}(\pi m \alpha) \operatorname{ctg}(\pi m \beta) \neq 1.$$

При $\alpha \rightarrow 0$ из (34) получаем известное условие

$$\sin(\pi m \beta / r) \neq 0 \Leftrightarrow \beta / r \neq j / m, \quad m = 1, 2, \dots \quad (35)$$

единственности решения задачи Дирихле для одномерного волнового уравнения

$$u_{yy} = u_{xx}, \quad (36)$$

в прямоугольнике $\bar{\Omega}_{0\beta} = [0, r] \times [0, \beta]$, означающее иррациональность отношения β / r длин его сторон.

Для уравнения Лаврентьева–Бицадзе

$$\operatorname{sign} y \cdot u_{xx} - u_{yy} = 0 \quad (37)$$

условие (18) означает, что $\omega_m(y)$ является нетривиальным решением задачи Дирихле: $\omega_m(0), \omega_m(\beta) = 0$ для уравнения $\omega_m'' + \lambda_m \omega = 0$ в интервале $0 < y < \beta$, где $\lambda_m = (\pi m / r)^2$ – собственное значение задачи

$$v_m''(x) + \lambda_m v_m(x) = 0, \quad v_m(0) = 0, \quad v_m(r) = 0, \quad m = 1, 2, \dots;$$

другими словами, отношение β / r должно быть рациональным числом:

$$\beta / r = j / m, \quad m = 1, 2, \dots \quad (38)$$

Пусть соблюдено (38). Тогда положим в (22) $D = \{x: 0 < x < r\}$, $v_m(x) = \sin(\pi m x / r)$, $\omega_m(y) = \sin(\pi m y / r)$ и принимая во внимание, что $\omega_m'(0) \neq 0$, получаем

$$\int_0^r u(x, 0) \sin(\pi m x / r) dx = 0, \quad m = 1, 2, \dots$$

Отсюда заключаем, что $u(x, 0) = 0$ при $0 \leq x \leq r$.

Теперь можно считать доказанным следующее вспомогательное утверждение

Лемма 3. Пусть: соблюдено (38); функция $u(x, y)$ – регулярное решение уравнения (37) в прямоугольной области $\Omega_{0\beta}$, удовлетворяющее условиям

$$u(x, \beta) = 0, \quad 0 \leq x \leq r, \quad u(0, y) = u(r, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq \beta \quad (39)$$

и обладающее тем свойством, что $u_y(x, 0)$ и $u_y(x, \beta)$ непрерывны при $0 < x < r$ и принадлежат $L[0, \beta]$. Тогда

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq r. \quad (40)$$

Пользуясь процедурой замыкания или непосредственно теоремой о среднем значении для уравнения (36), нетрудно доказать, что если отношение β/r – рациональное число, то след обобщенного решения

$$u[z] = \varphi(x + cy) + \psi(x - cy), \quad z \in \Omega,$$

на одной стороне прямоугольника $\bar{\Omega}_{0\beta}$ однозначно определяется его следами на трех остальных сторонах.

Далее рассмотрим задачу Дирихле для уравнения (37) в случае, когда эллиптическая часть σ^+ границы $\partial\Omega$ смешанной области Ω удовлетворяет условию Ляпунова, область Ω^+ является ограниченной и односвязной, а область $\Omega^- = \Omega_{0r}$ (см. рис. 3).

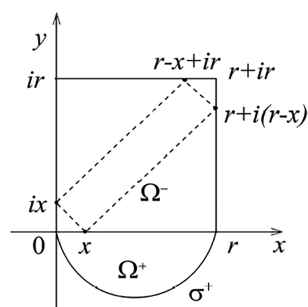


Рис. 3

Для простоты и сокращения записи ограничимся следующим вариантом условий Дирихле для решения $u[z] = u(x, y)$ уравнения (37):

$$u[z] = 0 \quad \forall z \in \sigma^+; \quad (41)$$

$$u[iy] = u[r + iy] = 0, \quad 0 \leq y \leq r; \quad (42)$$

$$u[x + ir] = \tau_r(x), \quad 0 \leq x \leq r, \quad (43)$$

где $\tau_r(x)$ – заданная функция из класса $C^1[0, r]$.

Искомое решение $u[z]$ задачи Дирихле (41)–(43) для уравнения (37) должно быть непрерывным в $\bar{\Omega}$. Поэтому из (42) и (43) получаем, что

$$u[x] = \tau(x) - \tau_r(r - x), \quad 0 \leq x \leq r \quad (44)$$

и необходимое условие $\tau(0) = \tau(r) = 0$ согласования граничных данных.

В области Ω^+ функция $u[z]$ находится как решение задачи Дирихле (41), (44) для уравнения Лапласа, а в области Ω^- – как решение смешанной задачи: $u[x] = \tau(x)$, $u_y[x] = \nu(x)$, $u[ix] = u[r + ix] = 0$, $0 \leq x \leq r$ для уравнения (36). Продемонстрируем это в случае, когда $r = 1$, $\sigma^+ = \{z: |2z - 1| = 1, \operatorname{Im} z \leq 0\}$.

Нетрудно получить, что любое регулярное решение $u[z]$ уравнения Лапласа с граничным условием (41) удовлетворяет необходимому нелокальному условию (см. также [5, с. 304])

$$\frac{1}{\pi} \int_0^1 [\log |t - x| - \log (t + x - 2tx)] \nu(t) dt = -\tau(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (45)$$

Если $\tau(x) \in C^1]0, 1[$, то из (45) имеем

$$\frac{1}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{1}{t - x} + \frac{1 - 2t}{t + x - 2tx} \right) \nu(t) dt = \tau'(x), \quad 0 < x < 1, \quad (46)$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Пусть $\text{sp } x = (1 - x)/x$, $1/y = 1 + \text{sp}^2 x$, $1/x = 1 + \sqrt{\text{sp } y}$, $N(y) = \nu(x)/(1 + 2y\sqrt{\text{sp } y})$, $T_1(y) = -\tau'(x)/(1 + 2y\sqrt{\text{sp } y})$, тогда уравнение (46) сводится к уравнению с ядром Коши [6], [7]

$$\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{N(\eta) d\eta}{\eta - y} = T_1(y), \quad 0 < y < 1. \quad (47)$$

В дальнейшем дополнительно будем предполагать, что $\tau'(x)$ на сегменте $[0, 1]$ удовлетворяет условию Гельдера.

Единственное решение $\nu(x)$ уравнения (46) в классе функций, удовлетворяющих условию Гельдера и не обращающихся при $x = 0, 1$ в бесконечность порядка ≥ 1 , задается, как это следует из работы А. В. Бицадзе [8], формулой

$$\nu(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{1}{t - x} - \frac{1 - 2t}{t + x - 2tx} \right) \tau'(t) dt. \quad (48)$$

Известно (см. [9, с. 446]), что решение уравнения (47), ограниченное на обоих концах сегмента $[0, 1]$, представимо в виде

$$N(y) = -\frac{1}{\pi} \int_0^1 \sqrt{\frac{y(1-y)}{\eta(1-\eta)}} \frac{T_1(\eta) d\eta}{\eta - y}, \quad (49)$$

при условии

$$\int_0^1 \frac{T_1(\eta) d\eta}{\sqrt{\eta(1-\eta)}} = 0. \quad (50)$$

В формулах (49) и (50) вернемся к исходным зависимым и независимым переменным, опираясь на следующие равенства:

$$t = \frac{1}{1 + \sqrt{\text{sp } \eta}}, \quad \eta = \frac{1}{1 + \text{sp}^2 t}, \quad d\eta = \frac{2\text{sp } t dt}{t^2(1 + \text{sp}^2 t)^2}, \quad \sqrt{\eta(1-\eta)} = \frac{\text{sp } t}{1 + \text{sp}^2 t},$$

$$\sqrt{\text{sp } \eta} = \text{sp } t, \quad \eta - y = \frac{\text{sp}^2 x - \text{sp}^2 t}{(1 + \text{sp}^2 t)(1 + \text{sp}^2 x)},$$

$$T_1(\eta) = (1 + \text{sp}^2 t)t^2 \tau'(t), \quad N(y) = (1 + \text{sp}^2 x)x^2 \nu(x).$$

В результате формула (49) примет вид

$$(1 + \text{sp}^2 x)x^2 \nu(x) = -\frac{2\text{sp } x}{\pi} \int_0^1 \frac{1 + \text{sp}^2 t}{\text{sp}^2 x - \text{sp}^2 t} \tau'(t) dt$$

или

$$\nu(x) = \frac{2x(x-1)}{\pi[x^2 + (1-x)^2]} \int_0^1 \frac{t^2 + (1-t)^2}{t+x-2xt} \frac{\tau'(t)dt}{t-x}, \quad (51)$$

а условие (50) преобразуется в условие

$$\int_0^1 \tau'(t)dt = \tau(1) - \tau(0) = 0.$$

После того как по формулам (44), (48) или (51) найдены функции $\tau(x) = -\tau_1(1-x)$ и $\nu(x)$, решение $u = u[z]$ смешанной задачи

$$u[x] = \tau(x), \quad u_y[x] = \nu(x), \quad 0 < x < 1, \quad (52)$$

$$u[ix] = 0, \quad u[1+ix] = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (53)$$

для уравнения (36) с помощью теоремы о среднем значении для одномерного волнового уравнения определяется следующим образом:

$$2u = \begin{cases} \tau(\eta) + \tau(\xi) + \int_{\xi}^{\eta} \nu(t)dt, & y < x < 1-y; \\ \tau(\eta) - \tau(-\xi) + \int_{-\xi}^{\eta} \nu(t)dt, & x < y < 1-x; \\ \tau(\xi) - \tau(2-\eta) + \int_{\xi}^{2-\eta} \nu(t)dt, & 1-x < y < x; \\ -\tau(2-\eta) - \tau(-\xi) + \int_{-\xi}^{2-\eta} \nu(t)dt, & 1-y < x < y, \end{cases} \quad (54)$$

где $\eta = x+y$, $\xi = x-y$.

Из (54) получаем равенства

$$2u_x = \begin{cases} \tau'(\eta) + \tau'(\xi) + \nu(\eta) + \nu(\xi), & y < x < 1-y; \\ \tau'(\eta) + \tau'(-\xi) + \nu(\eta) + \nu(-\xi), & x < y < 1-x; \\ \tau'(\xi) + \tau'(2-\eta) - \nu(2-\eta) - \nu(\xi), & 1-x < y < x; \\ \tau'(2-\eta) + \tau'(-\xi) - \nu(2-\eta) + \nu(-\xi), & 1-y < x < y; \end{cases}$$

$$2u_y = \begin{cases} \tau'(\eta) - \tau'(\xi) + \nu(\eta) + \nu(\xi), & y < x < 1 - y; \\ \tau'(\eta) - \tau'(-\xi) + \nu(\eta) - \nu(-\xi), & x < y < 1 - x; \\ \tau'(2 - \eta) - \tau'(\xi) + \nu(\xi) - \nu(2 - \eta), & 1 - x < y < x; \\ \tau'(2 - \eta) - \tau'(-\xi) - \nu(2 - \eta) - \nu(-\xi), & 1 - y < x < y, \end{cases}$$

которые дают основание утверждать: $u_x[z]$ и $u_y[z]$ будут непрерывными в $\bar{\Omega}_{01}$, если

$$\nu(0) = \nu(1) = 0; \quad (55)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} u_y(z) = \lim_{x \rightarrow 1} u_y(z) = 0, \quad 0 < y < 1; \quad (56)$$

при нарушении (55) функции $u_x[z]$ и $u_y[z]$ терпят разрыв при переходе через диагонали квадрата $\bar{\Omega}_{01}$, являющиеся частями характеристик $y = x$ и $y = 1 - x$; равенства (56) являются следствием (53) и непрерывности $u_y[z]$ вплоть до $x = 0$ и $x = 1$, когда $0 < y < 1$.

Из (50) следует, что

$$\lim_{x \rightarrow 0,1} \nu(x) = \frac{2}{\pi} \lim_{x \rightarrow 0,1} x(x-1) \int_0^1 \frac{[t^2 + (1-t)^2]\tau'(t) - [x^2 + (1-x)^2]\tau'(x)}{(t+x-2xt)(t-x)} dt = 0.$$

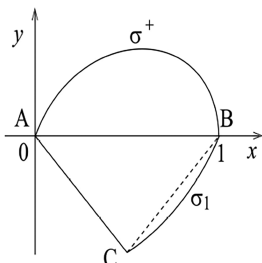


Рис. 4

А. В. Бицадзе [10, с. 140] впервые обратил внимание, что некорректность задачи Дирихле для уравнения

$$\text{sign } y \cdot u_{xx} + u_{yy} = 0. \quad (57)$$

в смешанной области D , ограниченной при $y > 0$ и $y < 0$ соответственно гладкими кривыми σ^+ и σ^- с общими концами в точках $z = 0$ и $z = 1$, когда σ^- лежит внутри треугольника $0 \leq x + y \leq 1$ с основанием $[0, 1]$ и не касается характеристик $x \pm y = \text{const}$, не означает отсутствия смешанной области, для которой эта задача все же возможна в классе $C(\bar{D}) \cap C^1(D)$.

Он же в качестве примера привел область D_3 с $\sigma^- = AC \cup \sigma_1$ (см. рис. 4), где

$$AC = \{z: x + y = 0, -1/2 \leq y \leq 0\},$$

$$\sigma_1 = \{z: y = 1 - x - \sqrt{2(1-x)}, \quad 1/2 \leq x \leq 1\}.$$

Пусть: Ω – часть области D_3 , ограниченная кривой σ^+ и характеристиками AC и $BC: x - y = 1, 1/2 \leq x \leq 1$; $u[z]$ – решение задачи

Дирихле для уравнения Лаврентьева–Бицадзе (57) в области D_3 в случае, когда

$$u[z] = 0 \quad \forall z \in \sigma^+ \cup AC. \quad (58)$$

Легко видеть, что эта задача в классе $C(\overline{D}_3) \cap C^1(\Omega)$ не имеет более одного решения, но является переопределенной. Последнее стало известно автору и А. В. Бицадзе в 1969 году.

В самом деле, из единственности решения задачи Трикоми (58) для уравнения (57) в области Ω следует, что $u[z] = 0$ в $\overline{\Omega}$. Стало быть, степень переопределенности задачи Дирихле в смешанной области D_3 зависит от степени переопределенности задачи Дирихле

$$u[z] = 0 \quad \forall z \in BC; \quad u[z] = \psi(x) \quad \forall z \in \sigma_1, \quad (59)$$

для одномерного волнового уравнения (36) в области $D_3 \setminus \Omega$.

Пусть: $v(\xi, \eta) = u[\Theta_\xi^0(\eta)]$, где

$$2\Theta_\xi^0(\eta) = \xi + \eta + i(\xi - \eta); \quad \psi_0(\xi) = \psi(1/2 + \xi - \xi^2/2);$$

$$D_0 = \{(\xi, \eta): 1 < \eta < 1 + \xi - \xi^2\}, \quad \sigma_0 = \{(\xi, \eta): \eta = 1 + \xi - \xi^2, 0 \leq \xi \leq 1\}$$

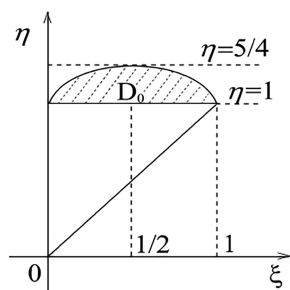


Рис. 5

– образы области $D_3 \setminus \Omega$ и кривой σ_1 при переходе от декартовой прямоугольной системы координат (x, y) на плоскости к системе координат (ξ, η) с $\xi = x + y$, $\eta = x - y$ (см. рис. 5); σ_0^+ – часть σ_0 , расположенная в полосе $0 \leq \xi \leq 1/2$; $\sigma_0^- = \sigma_0 \setminus \sigma_0^+$; D^+ – часть D_0 , ограниченная кривой σ_0^+ и отрезками $0 \leq \xi \leq 1/2$ и $1 \leq \eta \leq 5/4$ характеристик $\eta = 1$ и $\xi = 1/2$ соответственно.

Нетрудно проверить, что задача Дирихле (59) для уравнения (36) в области $D_3 \setminus \Omega$ эквивалентно редуцируется к задаче Дирихле

$$v(\xi, 1) = 0, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad (60)$$

$$v(\xi, 1 + \xi - \xi^2) = \psi_0(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (61)$$

для уравнения

$$v_{\xi\eta} = 0 \quad (62)$$

в области D_0 .

Из теоремы о среднем значении для одномерного волнового уравнения (62), записанного в характеристических координатах, следует, что обобщенное решение $v = v(\xi, \eta)$ этого уравнения, непрерывное в $\overline{D}_0$, однозначно определяется условием (60) и условием $v|_{\sigma_0^+} = \psi_0$ или же условием $u|_{\sigma_0^-} = \psi_0$.

Другими словами, достаточно задать условие (61) не на всей кривой σ_0 , а на ее частях σ_0^+ или σ_0^- . Например, достаточно заменить условие (61) условием

$$v(\xi, 1 + \xi - \xi^2) = \psi_0(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq 1/2. \quad (63)$$

Условие (63) можно переписать в виде

$$v\left(\frac{1 - \sqrt{5 - 4\eta}}{2}, \eta\right) = \psi_0\left(\frac{1 - \sqrt{5 - 4\eta}}{2}\right), \quad 0 \leq \eta \leq 5/4. \quad (64)$$

Единственное и непрерывное в $\bar{D}_0^+$ обобщенное решение задачи Дарбу (60), (64) для уравнения (62) задается формулой

$$v(\xi, \eta) = \psi_0\left(\frac{1 - \sqrt{5 - 4\eta}}{2}\right), \quad \psi_0(0) = 0.$$

Задачам типа Дирихле для уравнений смешанного типа посвящены весьма важные работы А. П. Солдатова [11], [12] и монография М. М. Хачева [13].

В заключение отметим, что выдвинутая в 50-х годах прошлого века гипотеза о корректности задачи Дирихле для уравнения смешанного типа в специальных областях Ω_s в классе функций $C(\bar{\Omega}_s) \cap C^1(\Omega_s)$ была объектом дискуссии многих авторов (см., например, работу Б. В. Шабата [14], где, как замечено А. П. Солдатовым [11], допущена ошибка).

Работа выполнена по Программе ОМН РАН № 3 «Современные вычисления и информационные технологии решения больших задач», проект «Исследование математических и инфологических моделей селективных потоков с целью создания САПР противоселективных мероприятий и сооружений» и при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Кабардино-Балкарской республики (проект № 06-01-96627).

Литература

1. *Нахушев А. М.* Критерий единственности решения задачи Дирихле для уравнений смешанного типа в цилиндрической области // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6, № 1. С. 190–191.
2. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 272 с.
3. *Вахания Н. Н.* Об одной особой задаче для уравнения смешанного типа (резюме) // Тр. выч. центра АН Груз. ССР. 1963. № 3. С. 69–80.
4. *Cannon J. R.* A Dirichlet problem for an equation of mixed type with a discontinuous coefficient // Annali Mathematica pura ed Applicata, LXII. 1963. Pp. 371–377.
5. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.

6. Нахушева З. А. Задача Трикоми для уравнения Лаврентьева–Бицадзе с нелокальным условием сопряжения // Доклады АМАН. 2004. Т. 7, № 1. С. 66–74.
7. Нахушева З. А. Задача Трикоми для уравнения Лаврентьева–Бицадзе с нелокальным условием сопряжения // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 10. С. 1426–1428.
8. Бицадзе А. В. Об одном элементарном способе решения некоторых граничных задач теории голоморфных функций и связанных с ними особых интегральных уравнений // Успехи матем. наук. 1957. Т. 12, вып. 5(77). С. 185–190.
9. Гихов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
10. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М.: Из-во АН СССР, 1959 164 с.
11. Солдатов А. П. Задачи типа Дирихле для уравнения Лаврентьева–Бицадзе // Доклады РАН. 1993. Т. 332, № 6. С. 696–698; Т. 333, № 1. С. 16–18.
12. Солдатов А. П. Задачи типа Дирихле для уравнения Лаврентьева–Бицадзе // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30, № 11. С. 2001–2009.
13. Хачев М. М. Первая краевая задача для линейных уравнений смешанного типа. Нальчик: Эльбрус, 1998. 168 с.
14. Шабат Б. В. Примеры решения задачи Дирихле для уравнения смешанного типа // ДАН СССР. Т. 112, № 3. С. 386–389.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН

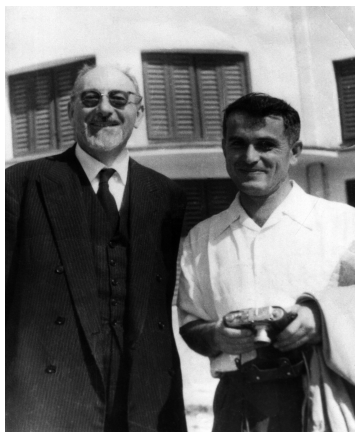
Вклад академика И. Н. Векуа в развитие теории уравнений смешанного типа



И. Н. Векуа (1897–1978)

Выдающийся математик и механик 20-го века Илья Несторович Векуа – основатель теории обобщенных аналитических функций [1] внес фундаментальный вклад в безмоментную (мембранную) теорию оболочек и теорию бесконечно малых изгибаний поверхностей. Хорошо известный в этой теории метод Векуа заключается в том, что существенные параметры, характеризующие изгибание поверхностей положительной гауссовой кривизны K , в сопряженно-изотермической параметризации являются обобщенными аналитическими функциями одной комплексной переменной.

Илья Несторович впервые обратил внимание, что уравнения мембранной теории более тесно связаны с геометрической формой оболочки и это проявляется в изменении типа этих уравнений в зависимости от главной кривизны K срединной поверхности [2].



Ф. Трикоми (1897–1978),
А.В. Бицадзе (1916–1994)

Андрей Васильевич Бицадзе в своей работе [3], посвященной 60-летию со дня рождения Илья Несторович Векуа, писал: «...Илья Несторович показал, что теория уравнений с частными производными смешанного типа может служить математической моделью безмоментной теории оболочек с кривизной переменного знака. Этот факт вызвал большой интерес среди специалистов (как математиков, так и механиков), поскольку прикладная важность теории уравнений смешанного типа раньше наблюдалась лишь в задачах трансзвукового движения сжимаемой жидкости».

Уравнение $dr/dU = 0$ бесконечно малых изгибов поверхности

$$S: z = f(x, y) \quad (1)$$

класса C^2 можно записать в виде

$$z_{xx}\zeta_{yy} - 2z_{xy}\zeta_{xy} + z_{yy}\zeta_{xx} = 0, \quad (2)$$

где x, y, z и ξ, η, ζ – декартовы координаты радиуса-вектора $r = (x, y, f)$ и вектора смещения $U = U(x, y)$ [1, с. 308].

Гауссова кривизна поверхности (1) в области задания Ω уравнения (2) определяется формулой

$$K = \frac{z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2}{(1 + z_x^2 + z_y^2)^2} = \frac{MA(z)}{(1 + |\nabla z|^2)^2}. \quad (3)$$

В записи (3) $MA(z)$ означает простейший оператор Монжа–Ампера, а $\nabla z = (\partial z/\partial x, \partial z/\partial y)$ – набла-оператор.

Дискриминант, соответствующий уравнению (2) квадратичной формы

$$z_{yy}\xi_1^2 - 2z_{xy}\xi_1\xi_2 + z_{xx}\xi_2^2, \quad (4)$$

равен $-MA(z)$. Поэтому уравнение (2) будучи эллиптическим или гиперболическим на частях области Ω , где $MA(z) \neq 0$, вырождается в параболическое уравнение на решениях $z = f(x, y)$ уравнения Монжа–Ампера

$$MA(z) = 0, \quad (x, y) \in \Omega. \quad (5)$$

Уравнение (2) относительно вертикальной компоненты ζ вектора смещения при бесконечно малых изгибах представляет собой линейное уравнение в частных производных второго порядка. Оно относится

к классу уравнений эллиптического, гиперболического или параболического типа в зависимости от того, главная кривизна $K > 0$, $K < 0$ или $K = 0$ соответственно, и является следствием следующей системы уравнений в частных производных первого порядка:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi}{\partial x} + z_x \frac{\partial \zeta}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial \eta}{\partial y} + z_y \frac{\partial \zeta}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} + z_x \frac{\partial \zeta}{\partial y} + z_y \frac{\partial \zeta}{\partial x} &= 0.\end{aligned}\tag{6}$$

Пусть поверхность (1) является поверхностью вращения S , заданной уравнениями

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad z = \varphi(\rho),\tag{7}$$

где $\varphi(\rho)$ – непрерывная функция, имеющая кусочно непрерывные производные порядка $m \geq 3$ на сегменте $0 \leq \rho \leq a = \text{const} \leq \infty$.

Предполагается, что функции

$$\varphi'(\rho) = \frac{d\varphi}{d\rho}, \quad \varphi''(\rho) = \frac{d^2\varphi}{d\rho^2}$$

могут обращаться в нуль только в изолированных точках сегмента $[0, a]$ и функция

$$\chi(\rho) = \frac{\varphi''(\rho)}{\rho\varphi'(\rho)}$$

такова, что $\sqrt{|\chi(\rho)|} \in L[\rho_0, a]$ для какого-то $\rho_0 \in L[0, a]$.

Поверхность S получается вращением вокруг оси Oz плоской кривой, пересекающейся с каждой прямой, параллельной оси Oz , не более чем в одной точке.

Гауссова K и средняя H кривизны поверхности (7) выражаются формулами

$$K = \frac{\varphi'\varphi''}{\rho(1 + \varphi'^2)^2}, \quad 2H = \frac{\rho\varphi'' + \varphi'(1 + \varphi'^2)}{\rho(1 + \varphi'^2)^{3/2}}.\tag{8}$$

Относительно независимых переменных

$$\xi = \theta, \quad \eta = \int_{\rho_0}^{\rho} \sqrt{|\chi(t)|} dt, \quad \rho \geq \rho_0,\tag{9}$$

первая основная квадратичная форма этой поверхности имеет вид

$$ds^2 = A^2 d\xi^2 + B^2 d\eta^2,\tag{10}$$

где

$$A = \rho, \quad B = \frac{|\varphi'|}{\sqrt{|K|(1 + \varphi'^2)}}.\tag{11}$$

Символы Кристоффеля 1-го и 2-го рода таковы, что

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{12}^2 = 0, \quad \Gamma_{12} = \frac{d}{d\eta} \log \rho, \quad (12)$$

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{\rho}{B^2} \frac{d\rho}{d\eta}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{d}{d\eta} \log B. \quad (13)$$

Функция $\eta = \eta(\rho)$, заданная формулой (9), монотонно возрастает от $\eta_0 = \eta(0)$ до $\eta_a = \eta(a)$, при этом η_0 и η_a могут обращаться в $-\infty$ и $+\infty$ соответственно (см. рис. 1).

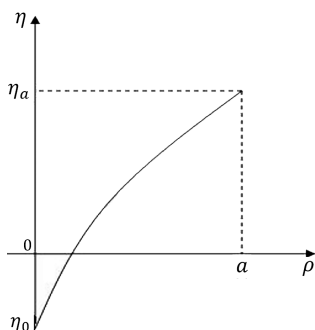


Рис. 1

На линиях (параллелях), где $K=0$, функции B , Γ_{12}^1 и Γ_{22}^2 терпят разрывы, а Γ_{11}^2 обращается в нуль [2, с. 407].

Пусть: $u_{(1)}$ и $u_{(2)}$ – физические компоненты вектора смещения по меридиану и параллели; $\bar{u} = \frac{A}{B} u_{(1)}$, $\bar{v} = u_{(2)}$, $b = -\Gamma_{11}^2$; $\varepsilon(\eta) = \text{sign } K(\eta)$,

$$c = \frac{d}{d\eta} \log \frac{|\varphi'|}{\rho^2 \sqrt{|K|(1 + \varphi'^2)}}.$$

Тогда системы уравнений для поля смещений и поля изгибов соответственно имеют вид

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} - \varepsilon(\eta) \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} + b \bar{v} = 0, \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi} + c \bar{u} = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \bar{u}'}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{v}'}{\partial \eta} + c \bar{v}' = 0, \quad \varepsilon(\eta) \frac{\partial \bar{u}'}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{v}'}{\partial \xi} + b \bar{u}' = 0. \quad (15)$$

Характеристическое уравнение поля вращений при бесконечно малых изгибах поверхности (уравнение Вейнгартена) И. Н. Векуа представил в виде

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \varepsilon(\eta) \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + M(\eta) \omega = 0, \quad (16)$$

где

$$\omega = |K|^{-1/4} v,$$

$$M = -\frac{1}{\lambda} \frac{d^2 \lambda}{d\eta^2}, \quad \lambda = |K|^{-1/4} (1 + \varphi'^2)^{-1/2} = |K|^{-1/4} \cos \theta_n, \quad (17)$$

причем θ_n – угол между нормалью поверхности и осью вращения, $|\theta_n| \leq \frac{\pi}{2}$.

Для систем (14), (15) и уравнения (16) на параллелях, где $K = 0$, возникают локальные условия сопряжения, вытекающие из непрерывности деформации и поля вращений.

Пусть $K = 0$ на параллели $\eta = \eta_*$. Тогда, как это показано впервые И. Н. Векуа, условия сопряжения задаются следующим образом:

$$(\bar{u}, \bar{v})|_{\eta_*-0} = (\bar{u}, \bar{v})|_{\eta_*+0}, \quad (18)$$

$$\bar{u}'|_{\eta_*-0} = -\bar{u}'|_{\eta_*+0}, \quad \frac{\bar{v}'}{B}|_{\eta_*-0} = \frac{\bar{v}'}{B}|_{\eta_*+0}, \quad (19)$$

$$\omega|K|^{1/4}|_{\eta_*-0} = \omega|K|^{1/4}|_{\eta_*+0}, \quad (20)$$

$$\sqrt{|K|} \frac{d}{d\eta} (|K|^{1/4} \omega)|_{\eta_*-0} = \sqrt{|K|} \frac{d}{d\eta} (|K|^{1/4} \omega)|_{\eta_*+0}. \quad (21)$$

Если поверхность кусочно гладкая и незамкнутая, то наряду с условиями сопряжения (18)–(21), «следует учесть условия сопряжения на линиях склеивания, а также краевые условия, выражающие наличие связи» [1, с. 408].

В случае системы (14) локальные краевые условия на эллиптической части границы смешанной области охватываются условием Римана–Гильберта вида $A^+ \bar{u} + B^+ \bar{v} = \bar{c}$, и их «можно толковать как некоторые кинематические связи, наложенные на контур поверхности».

И. Н. Векуа показал, что если $K(\eta_*) = 0$, $K'(\eta_*) \neq 0$, то в окрестности точки η_* функция M представима в виде

$$M(\eta) = M_*(\eta)(\eta - \eta_*)^{-2}, \quad (22)$$

где $M_*(\eta)$ – непрерывная функция, причем $M_*(\eta_*) = -7/36$; равенству $M(\eta) = 0$ удовлетворяют следующие поверхности вращения:

$$\varphi_j(\rho) = \gamma_j + \alpha_j \{ \rho \mu_j - (-1)^j \beta_j^2 \log [\rho + \mu_j] \}, \quad j = 1, 2, \quad (23)$$

$$\varphi_j(\rho) = \gamma_j + \alpha_j \left[\rho \mu_j + \beta_j^2 \arcsin \frac{\rho}{\beta_j} \right], \quad j = 3, \quad (24)$$

где $\mu_j = \sqrt{\rho^2 - (-1)^j \beta_j^2}$, $j = 1, 2$; $\mu_3 = \sqrt{\beta_3^2 - \rho^2}$, α_j , β_j , γ_j – действительные числа, $\beta_3 \neq 0$, функции $\varphi_2(\rho)$ и $\varphi_3(\rho)$ определены при $\rho \geq \beta_2$ и $\rho \leq \beta_3$ соответственно [1, с. 409].

И. Н. Векуа писал [1, с. 409]: «Представляет значительный интерес провести дальнейшее изучение смешанных задач... для уравнения (16) или для систем уравнений (14) и (15) ...».

Равенство (22) свидетельствует о том, что уравнение (16) относится к классу уравнений в частных производных, порядок которых выражается на линии $\eta = \eta_*$ изменения их типа. К уравнениям с такой характеристикой приводят весьма важные проблемы газовой динамики, в частности, прямая задача теории сопла Лаваля, существенно развитая в работах Феликса Исидоровича Франкля [4, с. 487], [5, с. 251], теории тонкого крыла с учетом сжимаемости жидкости [6, с. 96].



Ф. И. Франкль (1905–1961)

При определенной схематизации основное уравнение аэродинамики тонких крыльев для потенциала скорости $u = u(x, y)$ имеет следующий вид [6, с. 98]:

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

где $M < 1$ ($M > 1$), когда крыло движется с дозвуковой (сверхзвуковой) скоростью.

Как заметил И. Н. Векуа [1, с. 409], «нетрудно указать также геометрические задачи, которые приводятся к проблеме Трикоми».

При $M(\eta) = 0$ уравнение (16) переходит в уравнение Лаврентьева–Бицадзе

$$\text{sign } \eta \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} = 0. \quad (25)$$

Из (23) и (24) нетрудно увидеть, что

$$\begin{aligned} \varphi'_j(\rho) &= 2\alpha_j\mu_j, \quad \varphi''_j(\rho) = \frac{2\alpha_j\rho}{\mu_j}, \quad \chi_j(\rho) = \frac{1}{\mu_j^2}, \quad j = 1, 2; \\ \varphi'_3(\rho) &= 2\alpha_3\mu_3, \quad \varphi''_3(\rho) = -\frac{2\alpha_3\rho}{\mu_3}, \quad \chi_3(\rho) = -\frac{1}{\mu_3^2}. \end{aligned} \quad (26)$$

Из (8), (9) в силу (26) имеем

$$K = K_j = \left(\frac{2\alpha_j}{1 + 4\alpha_j^2\mu_j^2} \right)^2, \quad \eta = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{dt}{\sqrt{t^2 - (-1)^j\beta_j^2}}, \quad j = 1, 2; \quad (27)$$

$$K_j = - \left(\frac{2\alpha_j}{1 + 4\alpha_j^2\mu_j^2} \right)^2, \quad \eta = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{dt}{\sqrt{\beta_j^2 - t^2}}, \quad j = 3. \quad (28)$$

Для поверхности вращения (7), где

$$\varphi(\rho) = \begin{cases} \varphi_2(\rho), & \beta < \rho, \\ \varphi_3(\rho), & 0 < \rho < \beta, \end{cases}$$

$\varphi_2(\rho)$ и $\varphi_3(\rho)$ заданы равенствами (23) и (24), $\beta = \beta_2 = \beta_3 > 0$, а параметры $\alpha_j > 0$ и γ_j связаны соотношением

$$\gamma_2 - \alpha_2\beta^2 \ln \beta = \gamma_3 + \alpha_3\beta^2\pi/2,$$

условия сопряжения (20), (21) имеют вид

$$\sqrt{\alpha_2} \lim_{\eta \rightarrow \eta_*+0} \omega = \sqrt{\alpha_3} \lim_{\eta \rightarrow \eta_*-0} \omega, \quad \alpha_2^{5/2} \lim_{\eta \rightarrow \eta_*+0} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} = \alpha_3^{5/2} \lim_{\eta \rightarrow \eta_*-0} \frac{\partial \omega}{\partial \eta}. \quad (29)$$

Рассмотрим теперь поверхность (7) (рис. 2),

где

$$\varphi(\rho) = \begin{cases} \rho \sqrt{\rho^2 - 1} - \log(\rho + \sqrt{\rho^2 - 1}), & 1 < \rho < a, \\ -\frac{\pi}{2} + \rho \sqrt{1 - \rho^2} + \arcsin \rho, & 0 < \rho < 1. \end{cases} \quad (30)$$

В этом случае: $\gamma_2 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = 1$, $\gamma_3 = -\frac{\pi}{2}$, $\alpha_3 = 1$, $\beta_3 = 1$, $\rho_0 = 1$, $\mu_2 = \sqrt{\rho^2 - 1}$, $\mu_3 = \sqrt{1 - \rho^2}$,

$$K_2 = \left(\frac{2}{4\rho^2 - 3} \right)^2, \quad K_3 = - \left(\frac{2}{5 - 4\rho^2} \right)^2,$$

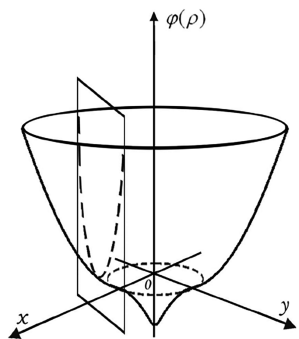


Рис. 2

$$\eta = \begin{cases} \int_1^\rho \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}} = \log(\rho + \sqrt{\rho^2 - 1}), & 1 < \rho < a, \\ \int_1^\rho \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \arcsin \rho - \frac{\pi}{2}, & 0 < \rho < 1 \end{cases} \quad (31)$$

и, стало быть, $\eta_0 = -\frac{\pi}{2}$, $\eta_a = \log(a + \sqrt{a^2 - 1})$ (см. рис. 1). Как следует из (29), условия сопряжения (20), (19) в этом случае имеют вид

$$\lim_{\eta \rightarrow 0+} \omega = \lim_{\eta \rightarrow 0-} \omega, \quad \lim_{\eta \rightarrow 0+} \omega_\eta = \lim_{\eta \rightarrow 0-} \omega_\eta. \quad (32)$$

Из (31) следует, что

$$\rho = \begin{cases} \operatorname{ch} \eta, & 0 < \eta < \eta_a, \\ \cos \eta, & -\pi/2 < \eta < 0. \end{cases} \quad (33)$$

Обозначим через S^* часть поверхности S , отсекаемую плоскостью, параллельной оси Oz и отстоящей от нее на расстоянии r , $0 \leq r \leq a$ (см. рис. 2).

На евклидовой плоскости независимых переменных ξ и η поверхности S^* в силу (31) сопоставляется область D_r , ограниченная линиями $\eta = \eta_a$ и

$$r = \begin{cases} \cos \xi \operatorname{ch} \eta, & \eta > 0, \\ \cos \xi \cos \eta, & \eta < 0. \end{cases} \quad (34)$$

Области D_0 и $D_{\frac{1}{2}}$ изображены на рис. 3 и 4.

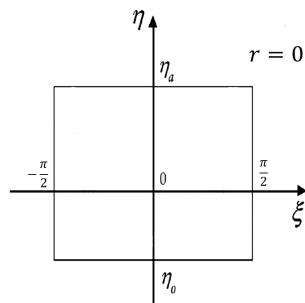


Рис. 3

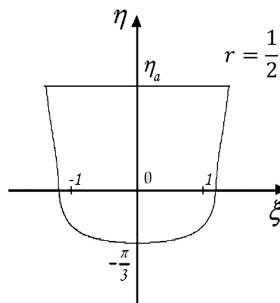


Рис. 4

В случае поверхности вращения, ограниченной параллелями $\eta = \text{const}$ (поверхностями $\rho = \text{const}$), как отметил И. Н. Векуа, «представляет интерес отыскание периодических относительно ξ (с периодом 2π) решений уравнения»

$$\text{sign } \eta \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + M(\eta)\omega = 0. \quad (35)$$

Эта задача делает актуальной проблему изучения спектральных свойств дифференциальных уравнений вида

$$\eta^2 \left(\frac{d^2 w}{d\eta^2} + \lambda \text{sign } \eta w \right) = c(\eta)w, \quad c(\eta) > 0,$$

со спектральным параметром λ .

В случае поверхности (30) приходим к нелокальной краевой задаче

$$\omega(\xi, \eta_0) = \tau_0(\xi), \quad \omega(\xi, \eta_a) = \tau_a(\xi), \quad -\pi \leq \xi \leq \pi, \quad (36)$$

$$\omega(-\pi, \eta) = \omega(\pi, \eta), \quad \omega_\xi(-\pi, \eta) = \omega_\xi(\pi, \eta), \quad \eta_0 < \eta < \eta_a, \quad (37)$$

для уравнения Лаврентьева–Бицадзе в прямоугольной смешанной области $\{(\xi, \eta) : |\xi| < \pi, \eta_0 < \eta < \eta_a\}$.

К задаче Трикоми для уравнения

$$\eta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \quad (38)$$

со взвешенным условием сопряжения вида

$$\lim_{\eta \rightarrow -0} \frac{1}{\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} = \lim_{\eta \rightarrow +0} \frac{1}{\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

на линии $\eta = 0$ изменения типа и вырождения порядка приводится прямая задача теории сопла Лаваля [7].

По-видимому, Илья Несторович впервые обратил внимание (см. [8, с. 508]) на важность исследования краевых задач для уравнения смешанного типа с разрывным условием сопряжения искомого решения и ее производной на линии параболического вырождения. Важные результаты в этом направлении получены в работах [9–11] и хорошо известных монографиях Т. Д. Джураева, М. С. Салахитдинова, М. М. Смирнова.

Уравнение (38) является частным случаем следующего уравнения с вырождением типа и порядка:

$$y^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^n \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = 0, \quad m > 0, \quad n > 0,$$

которое было объектом исследования А. В. Бицадзе [12] и многих его учеников и последователей.

В настоящее время благодаря известной работе Т. Ш. Кальменова [14] достигнут значительный успех в теории краевых задач со спектральным параметром [17], [18] и теории уравнений смешанного гипербола-параболического типа, которые соответствуют гиперболическим, параболическим и смешанным гипербола-параболическим оболочкам [13], [19–24].

Литература

1. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Наука, 1988. 512 с.
2. Векуа И. Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. М.: Наука, 1982. 288 с.
3. Бицадзе А. В. Илья Несторович Векуа (к 60-летию со дня рождения) // Дифференц. уравнения. 1968. Т. IV, № 8. С. 180–187.
4. Франкль Ф. И. Избранные труды по газовой динамике. М.: Наука, 1973. 771 с.
5. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 272 с.
6. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966. 448 с.
7. Франкль Ф. И. Обобщенная задача Трикоми и ее применение к решению прямой задачи теории сопла Лаваля // Ученые записки КБГУ. 1959. Вып. 3.
8. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. М.: ФИЗМАТЛИТ, 1959. 628 с.
9. Жегалов В. И. Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничными условиями на обеих характеристиках и с разрывами на переходной линии // Ученые записки Казанского государственного университета. 1962. Т. 122, кн. 3.
10. Каратопраклиев Г. Д. Об одном обобщении задачи Т для уравнения $u_{xx} + \operatorname{sgn} y u_{yy} = 0$ // ДАН СССР. 1963. Т. 151, № 6. С. 1271–1273.
11. Каратопраклиев Г. Д. Об одном обобщении задачи Трикоми // ДАН СССР. 1964. Т. 158, № 2. С. 271–273.
12. Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.
13. Нахушев А. М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006. 267 с.
14. Кальменов Т. Ш. О спектре задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева–Бицадзе // Дифференц. уравнения. 1967. Т. 13, № 8. С. 1418–1425.
15. Кальменов Т. Ш. Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа. Шымкент: Гылая, 1993. 328 с.

16. Кальменов Т. Ш., Кошанов Б. Д. К спектральной теории регулярных краевых задач для дифференциальных уравнений // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2005. Т. 7, № 2. С. 21–31.
17. Моисеев Е. И. Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М.: МГУ, 1988. 150 с.
18. Салахитдинов М. С., Уринов А. К. Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром. Ташкент: ФАН, 1997. 165 с.
19. Врагов В. Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: НГУ, 1983. 84 с.
20. Терсенов С. А. Об одном уравнении эллиптического типа, вырождающемся на границе области // ДАН СССР. 1957. Т. 115, № 4. С. 670–673.
21. Терсенов С. А. Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Наука, 1985. 104 с.
22. Джураев Т. Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений парабола-гиперболического типа. Ташкент: ФАН, 1986. 220 с.
23. Псху А. В. Задача Франкля для гипербола-параболического уравнения // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 1. С. 105–112.
24. Хачев М. М. Первая краевая задача для линейных уравнений смешанного типа. Нальчик: Эльбрус, 1998. 168 с.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН

К проблеме математического моделирования региональных социально-экономических систем

1. Об устойчивости и уравнениях состояния региональной социально-экономической системы. Очевидна актуальность разработки математических и информационных технологий поиска модели устойчивого развития региона Ω и соответствующей системы управления S_Ω как *экономической системы, являющейся функциональной подсистемой общества.*

Эффективным параметрам открытых временных систем регионального управления посвящена работа [18], где *управление рассматривается как функция системы, ориентированная либо на сохранение ее основного качества в условиях изменения среды, либо на реализацию определенной программы, обеспечивающей устойчивость функционирования, гомеостаз, достижение намеченной цели.*

Экономические и социальные, тем более *социально-экономические, системы* при их моделировании рассматриваются как *большие, сложные и открытые системы, элементы которых представляют собой самоорганизующиеся системы, целенаправленно оптимизирующие свое развитие* в соответствии с имманентными интересами.

В настоящее время для построения модели систем управления процессами регионального развития широко используется принцип системного подхода и в особенности метод системной динамики Дж. Форрестера, который позволил выявить фундаментальные закономерности развития социальных систем [23]. Этот метод, представляющий собой метод исследования сложных динамических систем с нелинейными обратными связями, предполагает, что для основных фазовых переменных системы выписываются квазилинейные обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка одной и той же структуры.

В основе системной динамики регионального развития лежат ментальные модели, отражающие на содержательном, интуитивном и обобщенном уровне миропонимание конкретного человека, согласно которому он строит свое поведение. Существуют многочисленные определения термина «устойчивое развитие» для социально-экономической, эколого-экономической или социо-эколого-экономической систем.

Как отмечается в монографии [23], с точки зрения мировой эколого-экономической системы, термин «устойчивое развитие» означает выбор стратегии, которая поддерживает баланс между сохранением окружающей среды и экономическим развитием, таким образом, чтобы, обеспечивая потребности настоящего поколения, не подрывать возможности будущим поколениям обеспечивать их собственные потребности. Этот термин интерпретируется и как «модель движения вперед, при которой достигается удовлетворение жизненных потребностей нынешнего поколения людей без лишения будущих поколений такой возможности» [26], [3]. И. Муссу [15] считает, что если модель устойчивого (регионального или глобального) развития связывать с экологическими проблемами, то развитие (по определению) будет устойчивым, когда природный капитал – невозобновляемые природные ресурсы – не уменьшается с течением времени.

Поиску концепции устойчивого регионального развития посвящены и работы [8], [13]. В [8] предлагается «концепцию устойчивого регионального развития» основывать «на принципе Ле Шателье», хотя в качестве основы наиболее естественно использовать общую теорию систем, теорию самоорганизации, или синергетику. Устойчивость регионального развития (принцип гомеостаза) в этой работе определяется как «способность региона сохранять и развивать значения необходимых параметров качества жизни в пределах (выше) порога безопасности при широких колебаниях внешних и внутренних возмущений (общественно-политического, социально-экономического, технического, природно-климатического и т. д. характера), грозящих падением качества жизни». Принцип Ле Шателье–Брауна, являясь чисто физическим, а не социо-эколого-экономическим, устанавливает, что внешнее воздей-

ствие, выводящее физическую систему из состояния термодинамического равновесия, вызывает в системе процессы, стремящиеся ослабить эффект воздействия. Термодинамическая устойчивость означает равновесие системы относительно малых (а не любых) вариаций ее термодинамических параметров (объема, давления, температуры), а не любых переменных системы. Это надо учесть при адаптации принципа Ле Шателье–Брауна к реальным системам, содержащим социальную компоненту, например, к социально-экономической системе региона. В работе [13] предлагается ряд модификаций модели Форрестера устойчивого развития социально-экономической системы.

Анализ существующих интерпретаций и формализаций [23] термина «устойчивое развитие» показывает отсутствие единого четкого его определения. В ряде работ термин «устойчивое развитие» определяют через другие неопределенные понятия. Так, например, пишут: «под региональным развитием мы понимаем *непрерывный процесс перехода региона из одного состояния в другое*, соответствующее более высокому качеству жизни населения; региональное развитие устойчиво, если указанный процесс обладает *свойством длительного протекания*» [7]. Это высказывание в работе [7] считается более компактным «с точки зрения формализации процессов регионального развития», чем следующее определение В. Н. Лексина и А. Н. Швецова: «Под территориальным развитием понимается такой режим функционирования региональной системы (территории), который ориентирован на позитивную динамику параметров уровня и качества жизни населения, обеспеченную устойчивым, сбалансированным и взаимонеразрушающим воспроизводством социального, хозяйственного, ресурсного и экологического потенциалов территории ...».

Важнейший признак территориального развития – устойчивость – предполагает длительность сохранения условий для воспроизводства потенциала территории (его социальной, природно-ресурсной, экологической, хозяйственной и т. п. составляющих) в режиме сбалансированности и социальной ориентации».

Очевидно, ни с какой точки зрения нельзя сделать определение того или иного понятия более компактным путем внесения новых, ранее не определенных понятий типа «непрерывный процесс перехода из одного состояния в другое», «длительность сохранения...» или «свойство длительного протекания».

Главной является проблема разработки технологий (в том числе математической) построения модели развития региона, при которой достигается удовлетворение необходимых и достаточных жизненных потребностей людей, живущих в среде (регионе, территории) своего обитания без лишения будущих поколений такой возможности.

Цель устойчивого развития – достижение стабильной экономики, социальной справедливости и сохранения окружающей среды. *Проблема устойчивости* (стабильности) общества как подсистемы экологической системы уделяется значительное внимание в социологии. *Устойчивость – неотъемлемая часть понятия социума*. По определению, социум – это «большая устойчивая социальная общность, характеризующаяся единством условий жизнедеятельности людей и общностью культуры, культурного наследия и традиций». По Т. Парсонсу [22], «система стабильна или находится в относительном равновесии, если отношение между ее структурой и процессами, протекающими внутри нее, и между ней и окружением таково, что свойства и отношения... оказываются неизменными».

В теории экономического равновесия различают локально и глобально устойчивые процессы регулирования цен. *Устойчивость – одно из основных понятий кибернетики – характеризует свойство, которое принадлежит всей системе в целом*. Глубокий теоретико-методологический анализ термина «устойчивое развитие» проведен в работе [5]. В. И. Данилов-Данильян считает более приемлемым (в случае социальных систем) следующее определение: «устойчивое развитие – это такое общественное развитие, при котором не разрушается его природная основа, создаваемые условия жизни не влекут деградации человека и социально-деструктивные процессы не развиваются до масштабов, угрожающих безопасности общества».

Пусть регион Ω интерпретируется как система S_ω , т.е. как некоторое собственное подмножество S_ω топологического произведения $\times \{V_i : i \in J\}$ заданного семейства $\{V_i : i \in J\}$ множеств V_i , где J – индексное множество. С точки зрения общей теории систем, термин «устойчивое развитие» региона Ω как системы раскрывается следующим предложением. Регион Ω развивается устойчиво или в регионе Ω реализуется модель устойчивого развития в том и только в том случае, когда система S_ω устойчива (относительно понятия окрестностей) [14].

В случае, когда система S_ω является системой «вход-выход» с входным и выходным объектами $D(u)$ и $R(u)$ и с уравнением состояния [16]

$$u = (\varphi, u), \quad \varphi \in D(u), \quad u \in R(u), \quad (1)$$

менее общим, но более рабочим определением устойчивости S_ω может стать следующее определение.

Определение. Система S_ω устойчива относительно пары (E_φ, E_u) метрических пространств E_φ и E_u с метриками $\rho_\varphi = \rho_\varphi(\varphi_1, \varphi_2)$, $\rho_u = \rho_u(u_1, u_2)$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что из неравенства $\rho_\varphi(\varphi_1, \varphi_2) \leq \delta(\varepsilon)$ следует оценка $\varepsilon \geq \rho_u(u_1, u_2)$, где $\varphi_j \in D(u) \subset E_\varphi$, $u_j \in R(u) \subset E_u$: $E_\varphi \supset D(u) \supset \varphi \rightarrow \rightarrow (\varphi, u) \rightarrow u \in R(u) \subset E_u$.

Пусть D_u и R_u – заданные семейства подмножеств множеств $D(u)$ и $R(u)$ соответственно. Тогда входящую в уравнение (1) пару $(\varphi, u) \in D(u) \times R(u)$ принято называть устойчивой относительно D_u и R_u , если малые отклонения входа φ не могут существенно изменить выход и системы S_ω в терминах системы окрестностей φ и u .

Устойчивость той или иной системы можно определить и в терминах устойчивости и корректности задачи поиска решения уравнения состояния. Понятия «устойчивая задача», «корректная задача» были введены Ж. Адамаром еще в 1923 г.

2. Пространство качества жизни и принципы моделирования регионального развития. Для социально-экономической системы S_ω уравнение состояния (1), как правило, является нелокальным, и причинно-следственная пара (φ, u) хорошо интерпретируется как синергетический вектор [16].

Уравнение состояния (1) системы S_ω в случае, когда $E_\varphi = R^n$, будет эффективным, если оно отражает состояние экономики региона в соответствии с моделью общего равновесия В. Л. Макарова [11], [2].

В монографии [23] вводятся понятия «пространство качества жизни» или «качественное пространство» и «вектор качества».

Методологии измерения синтетических категорий качества жизни населения и анализу понятий «качество населения», «уровень благосостояния», «качество социальной сферы» посвящена работа С. А. Айвазяна [1].

Метрическое пространство E_u , участвующее в определении 1, можно интерпретировать как *качественное пространство*, элементами которого являются точки (u, t) , где t – время; $u = (\lambda_1 u_1, \lambda_2 u_2, \dots, \lambda_n u_n)$, $\lambda_i u_i \in R \forall i = 1, 2, \dots, n$, $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ – вектор качества жизни, u_j для любого $j = 1, 2, \dots, n$ принадлежит базовому набору показателей, характеризующих качество жизни в регионе; $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ – весовой вектор, учитывающий вклад различных показателей u_j .

Норму $\|u\|$ любого элемента (u, t) пространства E_u в момент t можно определить формулой

$$\|u\| = \left(\sum_{j=1}^n (\lambda_j u_j)^2 \right)^{1/2}. \quad (2)$$

Предлагаемый в работе [23, с. 12] базовый набор показателей качества жизни, начиная от качества питьевой воды до детской преступности, составляет 25 ингредиентов: $n = 25$.

В качественном пространстве E_u с евклидовой нормой (2) можно выделить «области процветания» или, наоборот, «области деградации» [23], а затем исследовать их динамику.

В работе [8] регион рассматривается как социо-эколого-экономическая система, в которой взаимодействие трех ее подсистем: «природной», «экономической», «общественной» организовано в виде «технологической цепочки»

$$\boxed{\Pi} \xrightarrow{R_i} \boxed{\Xi} \xrightarrow{P_i} \boxed{O} \xrightarrow{S_i}, \quad \begin{matrix} V \\ \uparrow \end{matrix} \quad (3)$$

где выход R_i , подсистемы Π (первичные ресурсы и окружающая среда) является входом в подсистему Ξ (производственная система и система инфраструктуры), а ее выход P_i – входом в подсистему O (социальная система, система политического управления и индивидуального развития), «выходы которой представляют собой: S_i – все, что идет на обеспечение высоких показателей качества жизни, V – на расширенное воспроизводство».

Концептуальная социо-эколого-экономическая модель устойчивого развития региона как открытой системы, условно разделенной на три взаимодействующие подсистемы: «Природа», «Экономика», «Социум», была объектом исследования В. И. Гурмана и других авторов (Гурман, Кульбака, Рюмина, 1999).

Хорошо известно, что термин «гомеостаз» в 1929 г. предложил физиолог У. Кеннон для характеристики состояний и процессов, обеспечивающих устойчивость организма. Гомеостатическое функционирование экономической системы, относящейся к числу больших и сложных образований, очевидно, невозможно без надлежащего множества обратных связей. В технологической цепочке (3) не изображены положительные и отрицательные обратные связи [23, с. 22], которые характеризовали бы синергетический характер взаимодействия подсистем социо-эколого-экономической системы. *Задачи управления региональной социально-экономической системой с элементами обратной связи являются существенно нелинейными, и разным ее состояниям соответствуют разные аттракторы – разные устойчивые состояния. Поэтому их в принципе нельзя сформулировать «как задачи линейного программирования». Методы линейного программирования эффективны в случае линейных целевых функций, например, во внутрифирменном планировании. Очевиден и тот факт, что никакая модель управления «технологической цепочкой» (3) не будет эффективной и соответствующей действительности, если она не сохраняет эмерджентные свойства (свойства целостности) социально-экономической системы, если не сформулирована единая для (3) целевая функция, содержащая эффективные параметры, обеспечивающие защиту окружающей среды как неотъемлемой части процесса устойчивого развития.*

В социально-экономических системах лаг запаздывания, т. е. промежуток времени, отделяющий эффект $E = E(t)$ от предшествующего стимула $x = x(t)$, играет существенную роль не только в планировании, но и в управлении. В частности, лаговую модель через оператор сдвига во времени $L^i: x(t) \rightarrow x(t - i)$ можно записать в виде

$$E(t) = \sum_{i=0}^n \lambda_i L^i x(t) + u(t) \equiv (\lambda, L)x(t) + u(t), \quad (4)$$

где $E(t)$ и $x(t)$ – значения эффекта и стимула в момент времени t ; $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ – структура или спектр лага; $L = (L^0, L^1, \dots, L^n)$ – вектор сдвига; $(\lambda, L) = \sum_{i=0}^n \lambda_i L^i$ – производящая функция, $u = u(t)$ – значение случайной ошибки модели (уравнения) в момент t , которое в системах с памятью бывает связанным со значением стимула $x(t)$ формулой $u(t) = \mu_0 D_{\tau t}^\alpha x(\eta)$. Здесь μ_0 – постоянная величина, D_{0t}^α – оператор Римана–Лиувилля порядка α с началом в момент времени $t = \tau$, который действует на функцию $x(t)$ по формуле

$$D_{\tau t}^\alpha x(\eta) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_{\tau}^t \frac{x(\eta) d\eta}{(t - \eta)^{\alpha+1}}, & \alpha < 0, \\ x(t), & \alpha = 0, \\ \frac{\partial^{[\alpha]+1}}{\partial t^{[\alpha]+1}} D_{\tau t}^{\alpha - [\alpha] - 1} x(\eta), & \alpha > 0, \end{cases}$$

где $[\alpha]$ – целая часть α , $\Gamma(-\alpha)$ – гамма-функция Эйлера [17].

В связи с этим модель управления «технологической цепочкой» (3) должна иметь непустое пересечение с лаговой нелокальной моделью управления.

Глобальная или региональная социально-экономическая система и наложенная на нее система управления, как правило, являются нелокальными системами с распределенными параметрами и памятью. Принцип нелокальности выступает как фундаментальная основа системы управления процессом устойчивого регионального развития наряду с принципами локальности, полноты эффективных параметров, синергетизма и фрактальности.

Принцип локальности в системах управления региональным развитием предполагает, что основные законы управления справедливы и действуют не только для системы в целом, но для каждой из ее частей, какой бы малой она ни была в смысле той или иной топологии, которой наделен объект управления. Важность принципа полноты эффективных параметров следует из их определения: *эффективный параметр систе-*

мы (в том числе системы управления) – это такой параметр, изменение которого ведет к изменению поля поведения системы. Например, такие характеристики любого этноса, как пассионарность, среднее время его жизни, умение координировать свои действия, динамика численности, субпассионарность могут стать, по Г. Хакену [24], эффективными параметрами и параметрами порядка действующей или проектируемой в регионе системы управления. *Принцип синергетизма интерпретирует систему управления, наложенную на объект управления, как эволюционную синергетическую систему с памятью.* Для математического описания эффективных параметров этой системы целесообразно воспользоваться дифференциальными операторами дробного порядка. Например, за математическую модель динамики пассионарного напряжения $\sigma = \sigma(t)$ на стадии подъема можно принять обобщенное логистическое уравнение

$$D_{t_*}^\alpha \sigma^{1-m} = (1-m)[a(t)\sigma^{1-m} - b(t)], \quad t \geq t_*,$$

где $0 < \alpha \leq 1$, $m = \text{const} \geq 0$, $a(t)$ и $b(t)$ – непрерывные и неотрицательные функции времени t , t_* – момент обострения [21]. *Принцип фрактальности* играет знаковую роль при идентификации параметров управления в системах, имеющих фрактальную пространственно-временную структуру.

Адаптация глобальных моделей (типа Форрестера, Медоуза) и парадигмы устойчивого развития к региональным моделям на основе названных принципов и с учетом динамики эффективных экологических параметров через производственные и целевые функции делает целесообразным рассмотрение региона как социально-экономической системы, состоящей из двух взаимодействующих подсистем: экономической и социальной (общественной).

3. Производственная функция – элемент ядра линейного дифференциального оператора дробного порядка. При рассмотрении возможных сценариев устойчивого развития региона как открытой производственной системы «вход-выход» с единой целевой функцией (функцией благосостояния) важную роль играет производственная функция, которая выражает устойчивое количественное соотношение между входами и выходами, задает уравнение состояния (или определяющее уравнение) системы.

Пусть R^n – n -мерное пространство Евклида точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in R^n$; $x^\alpha \equiv x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$.

Производственная функция Кобба–Дугласа в ее классической форме связывает выпуск $v = v(x)$ с величиной производственных фондов x_1 и затрат труда x_2 в виде $v = kx^\alpha$, где $k = \text{const} > 0$, $x = (x_1, x_2)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Идентификация по обрабатывающей про-

мышленности США за период 1899–1922 гг. показала, что $k = 1,01$, коэффициент эластичности по фонду $\alpha_1 = 0,27$, а коэффициент эластичности по труду $\alpha_2 = 0,73$. Нетрудно доказать, что эта функция является простейшим частным решением следующего двумерного обобщенного уравнения Лапласа дробного порядка:

$$L_x^\alpha v \equiv D_{0x_1}^{\alpha_1+1} v + c D_{0x_2}^{\alpha_2+1} v = 0,$$

где $c = c(x)$ – параметр производственной системы, который можно отождествить с константой. Другими словами, производственная функция Кобба–Дугласа принадлежит ядру $\ker L_x^\alpha$ линейного дифференциального оператора L_x^α с частными производными дробного порядка. В связи с этим будет естественным назвать обобщенной двухфакторной производственной функцией Кобба–Дугласа любую функцию $v(x) = v(x_1, x_2) \in \ker L_x^\alpha$, удовлетворяющую однородным краевым условиям

$$v(0, x_2) = 0, \quad 0 \leq x_2 \leq x_2^0; \quad v(x_1, 0) = 0, \quad 0 \leq x_1 \leq x_1^0,$$

В силу ограниченности ресурсов наряду с этими однородными условиями производственная функция должна удовлетворять неоднородным краевым условиям, например, условиям вида

$$v(x_1, x_2^0) = \varphi_1(x_1), \quad 0 \leq x_1 \leq x_1^0; \quad v(x_1^0, x_2) = \varphi_2(x_2), \quad 0 \leq x_2 \leq x_2^0,$$

где $\varphi_1(x_1)$ и $\varphi_2(x_2)$ – заданные достаточно гладкие функции, $\varphi_1(0) = 0$, $\varphi_2(0) = 0$, $\varphi_1(x_1^0) = \varphi_2(x_2^0)$. В этом случае задача поиска производственной функции сводится к задаче Дирихле для обобщенного уравнения Лапласа дробного порядка в прямоугольной области: $0 < x_1 < x_1^0$, $0 < x_2 < x_2^0$.

Если вектор $x \in R^n$ описывает набор ресурсов, необходимых для функционирования производственного процесса, а $u \in R^n$ представляет собой вектор товаров, выпускаемых данным процессом, то в качестве производственной функции можно взять функцию $u = kx^\alpha$, α – вектор с неотрицательными компонентами.

Существуют различные обобщения функции Кобба–Дугласа. Наибольшее распространение получила кинематическая производственная функция

$$u(x, t) = kx^\alpha \exp(\nu t), \quad (5)$$

где α – вектор эластичности выпуска продукции относительно каждой из компонент затрат, который, как правило, таков, что $0 < \alpha_i < 1$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$, ν – коэффициент, характеризующий технический прогресс, темп роста.

Вектор $\alpha+1 = (\alpha_1+1, \alpha_2+1, \dots, \alpha_n+1)$ является характеристикой фрактальной размерности производственной поверхности.

При $n = 3$, $\nu = 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ функция (5) совпадает с отраслевой производственной функцией Викселя [25, с. 21].

Легко видеть, что если $0 < \alpha_i < 1$, то функция (5) является решением следующих уравнений в частных производных дробного по x_i и первого по t порядков:

$$D_{0x_i}^{\alpha_i+1}u = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \nu u \quad (6)$$

и она удовлетворяет начальному и граничным условиям:

$$u(x, 0) = v(x), \quad 0 < x_i < x_i^0, \quad (7)$$

$$u(x^j, t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (8)$$

где $x^j = (x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \dots, x_n)$, $x^1 = (0, x_2, \dots, x_n)$, $v(x)$ – некоторая (начальная) n -факторная производственная функция.

Равенства (6)–(8) говорят о целесообразности введения качественно нового понятия: функцию $u(x, t)$ назовем обобщенной кинематической производственной функцией Кобба–Дугласа, если

$$D_{0x_i}^{\alpha_i+1}u = \lambda_i u \quad \lambda_i = \text{const}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

или

$$\int_0^2 D_{0x_i}^{\mu} u d\mu = \lambda_i u \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (10)$$

и, кроме того, она удовлетворяет начальному (7) и граничному (8) условиям и одному из следующих двух уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu u - \varepsilon u^2 \quad (11)$$

или

$$\int_0^1 D_{0t}^{\mu} \left(\frac{1}{u} \right) d\mu + \frac{\nu}{u} = \varepsilon, \quad (12)$$

где $\varepsilon = \text{const} > 0$ – коэффициент Ферхюльста, или коэффициент флуктуации.

Уравнения (9) и (10) в какой-то степени отображают фрактальность графика производственной функции. Уравнения (11) и (12) говорят о том, что *производственная функция $u(x, t)$ как функция времени подчиняется (обобщенному) логистическому закону развития производственной системы* [16], [19] и, стало быть, подчеркивает синергетический характер производства.

Обобщенной кинематической (динамической) производственной функцией можно назвать и решение $u = u(x, t)$ уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^n D_{0x_i}^{\alpha_i+1} u, \quad (13)$$

где $\gamma = \text{const} > 0$ и вполне возможно, что $\gamma = n$.

Функция

$$u(x, t) = v(x) \exp(\mu t / \gamma), \quad (14)$$

где $v(x)$ – начальная производственная функция, $\mu = \text{const}$, будет решением уравнения (13) тогда и только тогда, когда

$$\Delta_x^\alpha v \equiv \sum_{i=1}^n D_{0x_i}^{\alpha_i+1} v = \mu v(x). \quad (15)$$

Уравнение $\Delta_x^\alpha v = 0$ назовем n -мерным обобщенным уравнением Лапласа дробного порядка.

Пусть $\mu = \sum_{i=1}^n \lambda_i$. Тогда уравнение состояния (15) можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^n [D_{0x_i}^{\alpha_i+1} v - \lambda_i v(x)] = 0. \quad (16)$$

В теории производственных функций, основанной на уравнениях (9)–(16), важную роль играет функция типа Миттаг-Леффлера [17, с. 86]:

$$E_{1/\rho}[z; \xi] = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\xi + \rho j)}, \quad (17)$$

где $\rho = \text{const} > 0$, $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера, $z = \text{Re} z + i \text{Im} z$ – комплексная переменная.

Действительно, пусть $\varepsilon_i = 1 + \alpha_i$, $0 < \alpha_i \leq 1$. Тогда функция

$$v(x) = a^{(i)} x_i^{\alpha_i} E_{1/\varepsilon_i}[\lambda_i x_i^{\varepsilon_i}; \varepsilon_i] + b^{(i)} x_i^{\alpha_i-1} E_{1/\varepsilon_i}[\lambda_i x_i^{\varepsilon_i}; \alpha_i]$$

с параметрами

$$a^{(i)} = \lim_{x_i \rightarrow 0} D_{0x_i}^{\alpha_i} v, \quad b^{(i)} = \lim_{x_i \rightarrow 0} D_{0x_i}^{\alpha_i-1} v$$

является решением уравнения (9).

Из экономического смысла производственной функции следует разумность краевого условия $b^{(i)} = 0$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$. Следовательно, если $0 < \alpha_i \leq 1$, $a^{(i)}$ – произвольные функции, не зависящие от i -го фактора x_i и удовлетворяющие условию

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n [D_{0x_j}^{\alpha_j+1} - \lambda_j] a^{(i)} = 0,$$

то функция

$$v(x) = a^{(i)} x_i^{\alpha_i} E_{1/\varepsilon_i}[\lambda_i x_i^{\varepsilon_i}; \varepsilon_i], \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (18)$$

будет решением уравнения (15).

В (18) положим

$$a^{(i)} = k x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_{i-1}^{\alpha_{i-1}} x_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \dots x_n^{\alpha_n}, \quad k = \text{const.}$$

В результате получим класс обобщенных производственных функций вида

$$v(x) = k x^\alpha E_{1/\alpha_i}[\lambda_i x_i^{1+\alpha_i}; 1 + \alpha_i]. \quad (19)$$

Пусть теперь

$$\alpha_i \in \begin{cases}]-1, 0] & \forall i = 1, 2, \dots, m; \\]0, 1] & \forall i = m+1, m+2, \dots, n. \end{cases}$$

Тогда формулу (18) надо заменить следующей формулой:

$$v(x) = \begin{cases} a^{(i)} x_i^{\alpha_i} \left\{ \frac{1}{\Gamma(\varepsilon_i)} + \lambda_i x_i^{\varepsilon_i} E_{1/\varepsilon_i}[\lambda_i x_i^{\varepsilon_i}; 2\varepsilon_i] \right\}, & i = 1, 2, \dots, m; \\ a^{(i)} x_i^{\alpha_i} E_{1/\varepsilon_i}[\lambda_i x_i^{\varepsilon_i}; \varepsilon_i], & i = m+1, m+2, \dots, n. \end{cases} \quad (20)$$

Простейшие приближения к производственным функциям типов (19) и (20) широко встречаются при планировании и управлении производством [2], в том числе сельскохозяйственным [25], при выборе целевой функции системы управления региональным развитием.

Производственная функция $v = v(x)$, определенная как решение уравнения (15) в области $D = \{x: 0 < x_i < d_i = \text{const}, i = 1, 2, \dots, n\}$, обладает весьма важным экстремальным свойством: если $\mu \geq 0$, то отличный от нуля экстремум $v(x)$ на компакте $\bar{D} = D \cup \partial D$ не может достигаться во внутренних точках D .

Алгебраическую форму двухфакторной производственной функции $v(x_1, x_2)$ можно конструировать следующим образом:

$$v(x_1, x_2) = \text{Re } E_{1/\rho}^n[z^\beta; \xi], \quad \text{или} \quad v(x_1, x_2) = \text{Re } E_{1/\rho}^n[\log z; \xi],$$

или же

$$v(x_1, x_2) = \text{Im } E_{1/\rho}^n[z^\beta; \xi],$$

где

$$z = x_1 + ix_2, \quad \beta = \beta_1 + i\beta_2 = \text{const}, \quad z^\beta = \exp(\beta \log z),$$

$$E_{1/\rho}^n[z; \xi] = \sum_{j=1}^n \frac{z^j}{\Gamma(\xi + \rho j)}$$

– полином Миттаг-Леффлера.

Вследствие этого, очевидно, система Коши–Римана

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right) w(z) = 0, \quad z = x_1 + ix_2$$

дает новый подход к аппроксимации производственной функции с помощью полиномов и квазиполиномов, близкий к методу разложения в ряд Тейлора [25, с. 189]. Любое решение $w(z)$ этой системы можно интерпретировать как комплексный потенциал производственной функции или просто производственного процесса.

Конструированию классов производственных функций типа Кобба–Дугласа, основанных на уравнении

$$x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = \beta u, \quad \beta = \text{const} > 0,$$

посвящена содержательная работа [9].

4. Целевая функция – элемент ядра обобщенного уравнения Лапласа дробного порядка. Формализованным выражением цели, которая наряду с производственной функцией характеризует поведение социально-экономических систем, обычно является *целевая функция* $u = u(x)$, называемая также критерием качества. Ее можно определить как *решение обобщенного уравнения Лапласа* в частных производных дробного порядка

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} D_{0x_i}^{\alpha_i-1} \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0. \quad (21)$$

Можно доказать, что функция (полезности [2, с. 127])

$$u(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^{\alpha_i}, \quad (22)$$

где $a_i = \text{const} > 0$, $0 < \alpha_i = \text{const} \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, n$, представляет собой решение уравнения (21).

Если все $\alpha_i = 1$, то уравнение (21) переходит в уравнение Лапласа $\Delta_x u = 0$, а функция (22) – в линейную функцию цели, являющуюся элементом ядра оператора Лапласа Δ_x .

5. О моделях управления региональным развитием и связи численности населения с уровнем технологии. Любая близкая к *оптимальной модели* управления региональным развитием, несомненно, сводится к решению задач математического программирования и охватывает широкий класс как *устойчивых*, так и *неустойчивых задач*, сформулированных в соответствующих функциональных пространствах типа пространства качества жизни. В этих задачах функция

цели, как правило, является нелинейной, и локальная оптимизация на уровне выходных параметров подсистем (например, системы (3)) в терминах линейного программирования не приводит к оптимизации системы управления в целом.

При реализации систем управления региональным развитием знаковую роль играют уравнения состояния вида

$$\sum_{i=0}^m a_{i+1}(t) D_{0t}^{\alpha_i} u = \sum_{i=0}^n b_{i+1}(t) D_{0t}^{\alpha_i} (v + f),$$

$$\sum_{i=0}^p c_{i+1}(t) D_{0t}^{\alpha_i} v = \sum_{i=0}^q d_{i+1}(t) D_{0t}^{\alpha_i} z,$$
(23)

где a_i, b_i – параметры объекта регулирования, c_i, d_i – параметры идентификатора (исполнительного устройства), u и v – выход и вход системы, z – управляющее воздействие, обеспечивающее, например, устойчивое конкурентное развитие, $f = f(t)$ – внешнее возмущение.

Система (23) как модель гомеостатической системы регионального или глобального развития не отождествляет механизмы поддержания гомеостаза с петлями обратной связи, регуляцию среды ее функционирования с саморегуляцией. Для функционирования гомеостатических открытых социально-экономических систем весьма важно сохранение стабильности ее некоторых вполне определенных параметров порядка. В связи с этим начальные и финальные условия для входных-выходных параметров $v = v(t)$, $u = u(t)$ и параметра управления $z = z(t)$ при их идентификации определяются с учетом того, что система, в которой работают механизмы, обеспечивающие гомеостаз, состоит из двух подсистем – «активной» и «пассивной». «Активная» подсистема не только обеспечивает собственное развитие, но и поддерживает «пассивную» подсистему в «стационарном состоянии» [10].

В случае, когда $D_{0t}^{\alpha_i} \equiv d^i/dt^i$, уравнения (23) совпадают с определяющими обыкновенными дифференциальными уравнениями классической теории линейных непрерывных систем связи и управления [6].

Существует убеждение в том, что уравнения в частных производных дробного порядка станут базовыми при формулировке фундаментальных, но вместе с тем простых, макрозаконов социальной эволюции, в частности, при моделировании глобального и регионального демографических процессов. Подтверждением тому является простейшее дифференциальное уравнение порядка $\alpha \in]0, 1[$: $D_{t_*t}^{\alpha} N = 0$, которое с допустимой точностью описывает динамику численности $N = N(t)$ населения для всех моментов времени t , меньших момента обострения $t = t_*$ [20].

Известно [12] эмпирическое подтверждение связи численности населения с уровнем технологии, с научно-техническим прогрессом как экзогенного, так и эндогенного характера. Такая связь может быть реализована, например, следующей моделью:

$$D_{t_*t}^\alpha \log N = aM, \quad D_{t_*t}^\alpha \log M = bN, \quad (24)$$

где $M = M(t)$ – ресурс на душу населения, определенный как разность между производительностью труда и минимально необходимым продуктом на одного человека; a и b – постоянные величины. При $\alpha = 1$ модель (24) переходит в модель работы [12].

Из (24) следует, что вектор (M, N) является синергетическим [16, с. 18].

Работа выполнена по Программе Отделения математических наук Российской академии наук «Современные вычисления и информационные технологии решения больших задач».

Литература

1. Айвазян С. А. К методологии измерения синтетических категорий качества жизни населения // Экономика и математические методы. 2003. Т. 39, № 2. С. 33–53.
2. Ашманов С. А. Введение в математическую экономику. М.: Наука, 1984. 296 с.
3. Брунтланд Г. Х. Наше общее будущее. Доклад Международной комиссии по окружающей среде и развитию. М.: Прогресс, 1989.
4. Гурман В. И., Кульбака Н. Э., Рюмина Е. В. Опыт социо-эколого-экономического моделирования развития региона // Экономика и математические методы. 1999. Т. 35, № 3. С. 69–79.
5. Данилов-Данильян В. И. Устойчивое развитие (теоретико-методологический анализ) // Экономика и математические методы. 2003. Т. 39, № 2. С. 123–135.
6. Емельянов С. В. Системы автоматического управления с переменной структурой. М.: Наука, 1976. 336 с.
7. Иванов П. М. Информатизация общества и устойчивое развитие региона // Известия КБНЦ РАН. 1998. № 1. С. 4–10.
8. Иванов П. М. Устойчивое региональное развитие: концепция и модель управления // Экономика и математические методы. 2006. Т. 42, № 2. С. 51–59.
9. Калажиков Х. Х., Ашабоков А. Б. К теории конструирования классов производственных функций // Известия КБНЦ РАН. 1998. № 1. С. 114–128.
10. Кряжинский Ф. В. Гомеостаз и самоподобие динамики биологических систем // Доклады РАН. 2007. Т. 413, № 5. С. 714–717.
11. Макаров В. Л. Экономическое равновесие: существование и экстремальное свойство. В. кн.: Современные проблемы математики (Итоги науки и техники, ВИНТИ АН СССР). Т. 19. М., 1981. С. 22–57.
12. Малков А. С., Коротаев А. В., Халтурина Д. А. Математическая модель роста населения Земли, экономики, технологии и образования // Нелинейный мир. 2005. Т. 3, № 5–6. С. 360–380.
13. Махов С. А. Математическое моделирование мировой динамики и устойчивости развития на при мере модели Форрестера // Нелинейный мир. 2005. Т. 3, № 5–6. С. 327–359.
14. Месарович М., Такахара Я. Общая теория систем: математические основы. М.: Мир, 1978. 331 с.

15. Муссу И. Устойчивое развитие и международное сотрудничество в области окружающей среды // Мир науки. 1991. Т. 35, № 4. С. 10–13.
16. Нахушев А. М. Об уравнениях состояния непрерывных одномерных систем и их приложениях. Нальчик: Логос, 1995. 95 с.
17. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 272 с.
18. Нахушев А. М. О некоторых эффективных параметрах открытых временных систем регионального управления // Известия КБНЦ РАН. 2002. № 1 (8). С. 72–75.
19. Нахушев А. М., Аттаев А. Х. Об одном подходе к обобщению производственной функции Кобба–Дугласа // Тезисы докладов междунар. конф. «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики». Нальчик, 1996. С. 61–62.
20. Нахушев А. М., Кенетова Р. О. Моделирование социально-исторических и этнических процессов. Нальчик: Эль-фа, 1998. 171 с.
21. Нахушев А. М., Кушхов А. А. К вопросу информационно-математического моделирования межэтнических конфликтов и этногенеза // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 1999. Т. 4, № 1. С. 55–59.
22. Парсонс Т. Функциональная теория изменения // Американская социологическая мысль. М.: Изд-во МГУ, 1994. С. 464–480.
23. Путилов В. А., Горохов А. В. Системная динамика регионального развития. Мурманск: НИЦ «Пазори», 2002. 306 с.
24. Хакен Г. Синергетика. М.: Мир, 1980. 404 с.
25. Хеди Э., Диллон Д. Производственные функции в сельском хозяйстве. М.: Прогресс, 1965. 599 с.
26. Daly H. E. Sustainable growth: an impossibility theorem // Clearinghouse bulletin 4(4).

О базовых уравнениях математических моделей процессов переноса в системах с фрактальной структурой

Анализ научных публикаций последних 15 лет показывает, что математической основой физики фракталов становится дробное (фрактальное) исчисление [1]. Понятие фрактала считается одной из парадигм современной фундаментальной и экспериментальной физики, радиофизики и радиолокации [2], [3].

Дробное (дифференциальное и интегральное) исчисление, наряду с квантовой математикой, становится адекватным языком для математического моделирования фундаментальных свойств вещества в экстремальных состояниях и процессов, протекающих на самоподобных фрактальных наноструктурах, для описания и исследования реакционных способностей наночастиц, зависимости физических и химических свойств этих частиц от числа входящих в их состав атомов.

Известно, например, что «химические свойства частиц размером 1 нм, включающих ~ 10 атомов металла, можно изменить добавлением лишь одного атома» [4].

В силу основополагающего в нанохимии закона (А. Эйнштейна) о броуновском движении и диффузии коллоидных частиц важную роль могут сыграть алгебры, состоящие из фрактальных дифференциальных операторов, действующих в специальном гильбертовом пространстве, например, в пространстве $H^\alpha[a, b]$, где для каждой пары $u(t)$ и $v(t)$ измеримых на сегменте $a \leq t \leq b$ вещественных функций определено скалярное произведение

$$\langle u, v \rangle^\alpha = \frac{1}{2} \int_a^b (u D_{at}^\alpha v + v D_{at}^\alpha u) dt, \quad |\alpha| < 1,$$

$$D_{at}^\alpha u(\eta) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^t \frac{u(\eta) d\eta}{(t-\eta)^{1+\alpha}}, & \alpha < 0, \\ u(t), & \alpha = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} D_{0t}^{\alpha-1} u(\eta), & \alpha > 0 \end{cases}$$

– оператор Римана–Лиувилля порядка α с началом в точке a и с концом в точке $t \in]a, b]$, $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера [1, с. 44].

Следует отметить, что в настоящее время фрактальная архитектура информационных систем получила широкое распространение и фрактальная алгебра именуется основой фрактальной парадигмы программирования [5].

В качестве базовых и эталонных уравнений линейных математических моделей различных процессов на фрактальных структурах и наносистемах, в том числе процесса распространения рентгеновского излучения через нанокapиллярные структуры, выступают нагруженные уравнения следующих типов [6], [7]:

$$\varepsilon_\nu D_{0t}^\nu u(x, \eta) = c_\nu \sum_{k=1}^n D_{a_k x_k}^{\alpha_k} u(\xi_k, t) + \lambda u(x, t), \quad (1)$$

$$D_{0t}^\nu u(x, \eta) = c_\nu \sum_{k=1}^n x_k^{1-\beta_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[x_k^{\beta_k-1} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_k} \right], \quad (2)$$

$$\text{sign}(t_* - t) |t - t_*|^\gamma D_{t_* t}^\nu u(x, \eta) = c_\nu \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}. \quad (3)$$

Здесь $\nu = \text{const} > 0$; t – безразмерное время; $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ – фиксированная точка n -мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ с координатами $\alpha_k \in]1, 2]$; $c_\nu = \text{const}$; a_k – действительные числа, $a_k < x_k$ для любого

$k = 1, \dots, n$; $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ – фиксированная точка из $\mathbb{R}^n$ с неотрицательными координатами β_k ; $\gamma = \text{const}$, $\lambda = \lambda(x, t)$ – «фрактальный» потенциал, t_* – момент обострения (критическое время).

Решение $u = u(x, t)$ каждого из уравнений (1), (2) и (3) допускает различные физические интерпретации.

Если в уравнении (1) положить

$$\nu = 1, \quad \varepsilon_1 = i\hbar, \quad c_1 = -\hbar^2/2m, \quad n = 3, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 2,$$

где i – мнимая единица, $\hbar$ – постоянная Планка, m – масса частицы (например, электрона), движущейся под действием силы, порождаемой потенциалом $\lambda = V(x, t)$, то получим временное уравнение Шредингера для волновой функции $u = \psi(x, t)$:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_k^2} + V(x, t)\psi. \quad (4)$$

Если же в уравнении (1) все $\alpha_k = \alpha \in]1, 2]$, $a_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$,

$$\Delta_{0x}^\alpha = \sum_{k=1}^n D_{0x_k}^\alpha$$

– *фрактальный оператор Лапласа* по переменным $x_1, x_2, \dots, x_n$, то оно примет следующий вид:

$$\varepsilon_\nu D_{0t}^\nu u(x, \eta) = c_\nu \Delta_{0x}^\alpha u(\xi, t) + \lambda u(x, t). \quad (5)$$

Пусть в уравнении (5) $0 < \nu < 1$, ε_ν – чисто мнимое число: $\varepsilon_\nu = i\hbar$, $c_\nu = \text{Re } c_\nu$ – действительное число, а «фрактальный потенциал» λ не зависит от времени t .

Тогда функция

$$u(x, t) = \varphi(t) \psi(x) \quad (6)$$

будет решением уравнения (5), если

$$\varepsilon_\nu D_{0t}^\nu \varphi(\eta) = \mu_\nu \varphi(t), \quad t > 0, \quad (7)$$

$$c_\nu \Delta_{0x}^\alpha \psi(\xi) + (\lambda - \mu_\nu) \psi(x) = 0, \quad (8)$$

где μ_ν – произвольная постоянная величина. При $\lambda = \mu_\nu$, $n = 3$ уравнение (8), записанное в виде

$$\frac{\partial^{2\alpha} \psi}{\partial x_1^{2\alpha}} + \frac{\partial^{2\alpha} \psi}{\partial x_2^{2\alpha}} + \frac{\partial^{2\alpha} \psi}{\partial x_3^{2\alpha}} = 0, \quad \frac{1}{2} < \alpha \leq 1,$$

было объектом исследования работы [8].

Введем число $\lambda_\nu = \mu_\nu/\varepsilon_\nu$ и функцию типа Миттаг-Леффлера

$$E_\rho(z; \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\xi + k/\rho)},$$

$\rho > 0$, которая является целой функцией комплексного переменного $z = \operatorname{Re} z + i\operatorname{Im} z$.

Любое решение $\varphi(t)$ уравнения (7) представимо в виде (см. [1, с. 94])

$$\varphi(t) = a_1 t^{\nu-1} \left[\frac{1}{\Gamma(\nu)} + \lambda_\nu t^\nu E_{1/\nu}(\lambda_\nu t^\nu; 2\nu) \right], \quad (9)$$

где $a_1 = \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\nu-1} \varphi(\eta)$ – произвольная постоянная величина.

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(\nu)} + \lambda_\nu t^\nu E_{1/\nu}(\lambda_\nu t^\nu; 2\nu) &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_\nu^{k+1} t^{\nu k + \nu}}{\Gamma(2\nu + \nu k)} = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\lambda_\nu t^\nu)^j}{\Gamma(\nu + \nu j)} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda_\nu t^\nu)^j}{\Gamma(\nu + \nu j)} = E_{1/\nu}(\lambda_\nu t^\nu; \nu). \end{aligned}$$

Поэтому формулу (9) можно записать в компактной форме

$$\varphi(t) = a_1 t^{\nu-1} \exp_\nu(\lambda_\nu t^\nu), \quad (10)$$

где

$$\exp_\nu(z) = E_{1/\nu}(z; \nu) \quad (11)$$

– обобщенная экспоненциальная функция по терминологии В. А. Нахушевой.

Функция

$$\operatorname{Exp}_\nu(t) = t^{\nu-1} \exp_\nu(t^\nu), \quad t > 0$$

при $\nu = 1$ совпадает с показательной функцией $\exp(t)$ и обладает следующим важным свойством:

$$D_{0t}^\nu \operatorname{Exp}_\nu(\eta) = \operatorname{Exp}_\nu(t).$$

В этом нетрудно убедиться непосредственным вычислением:

$$\begin{aligned} D_{0t}^\nu \operatorname{Exp}_\nu(\eta) &= D_{0t}^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\eta^{\nu k + \nu - 1}}{\Gamma(\nu + \nu k)} = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=0}^{\infty} D_{0t}^{\nu-1} \frac{\eta^{\nu k + \nu - 1}}{\Gamma(\nu + \nu k)} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{\nu k}}{\Gamma(1 + \nu k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\nu k t^{\nu k - 1}}{\Gamma(1 + \nu k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{\nu k - 1}}{\Gamma(\nu k)} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{\nu j + \nu - 1}}{\Gamma(\nu + \nu k)} = \operatorname{Exp}_\nu(t). \end{aligned}$$

Если $\mu_\nu > 0$, то число $\lambda_\nu = -i\mu_\nu/\hbar$ является чисто мнимым. Принимая это во внимание, в соответствии с формулами (6)–(11) функцию

$$u(x, t) = t^{\nu-1} \exp_\nu \left(-\frac{i\mu_\nu}{\hbar} t^\nu \right) \psi(x),$$

где $\psi(x)$ – решение «стационарного фрактального уравнения Шредингера» (8), можно назвать *фрактальной волновой функцией* для частицы, движущейся во фрактальной среде под действием силы, порождаемой «фрактальным потенциалом» λ .

Уравнением типа (7) является и фрактальное дифференциальное уравнение

$$D_{0t}^\alpha N(\eta) = \lambda_\alpha N(t), \quad t > 0, \quad (12)$$

которое представляет собой одно из базовых уравнений математической модели случайного блуждания точечной частицы по самоподобному фрактальному множеству Ω , вложенному в пространство $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

В уравнении (12) D_{0t}^α , как и ранее, означает оператор Римана–Лиувилля порядка $\alpha = 1 - s_\alpha/2$ с началом в начальный момент $t = 0$ времени t ; s_α – спектральная размерность Ω , определяющая число взаимно ортогональных направлений на Ω ; λ_α – спектральный параметр; $N(t)$ – число структурных элементов фрактала Ω , которые частица, блуждающая из фиксированной точки $\mathbb{R}^n$, посещает за время t .

Уравнение (12) относится к четырехпараметрическому классу дифференциальных уравнений вида

$$D_{0t}^\alpha u^\beta(\eta) = \beta[p u^\beta(t) - q], \quad (13)$$

которое является эталонным при создании математических (компьютерных) моделей, позволяющих описать процесс синтеза наноматериалов. Это уравнение при $\alpha = 1$, $\beta = -1$, p и $q = \text{const} > 0$ сводится к логистическому уравнению Бернулли

$$u'(t) = pu(t) - qu^2(t). \quad (14)$$

В уравнении (13) интенсивная переменная $u = u(t)$ может означать среднюю скорость v частицы радиуса r за промежуток времени t .

В частности, при $\beta = 1$, $p = 0$, $q = \text{const}$, $u(t) \equiv v(t)$ из (13) получаем простейшее дифференциальное уравнение порядка α

$$D_{0t}^\alpha v = -q. \quad (15)$$

Пусть R – универсальная газовая постоянная; T – абсолютная температура; N_A – число Авогадро; K – коэффициент вязкости; $c_0 = \sqrt{RT/(3\pi r K N_A)}$.

Единственное решение $v(t)$ видоизмененной задачи Коши

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{1-\alpha} v(t) = c_0 \quad (16)$$

для уравнения (15) определяется формулой

$$v(t) = c_0 t^{\alpha-1} - q t^{\alpha} / \Gamma(\alpha + 1). \quad (17)$$

Тогда из (17) при $\alpha = 1/2$, $q = 0$ получаем формулу Эйнштейна–Смолуховского $v(t) = c_0 / \sqrt{t}$.

Когда неизвестно точное значение порядка α фрактального дифференциального уравнения (15), который при проведении независимых опытов, в том числе вычислительных экспериментов, принимает определенные значения из заданного интервала $0 < \alpha < \varepsilon < 1$, реалии более адекватным может оказаться не уравнение (15), а следующее непрерывное, по терминологии В. Вольтерра, уравнение

$$\int_0^{\varepsilon} D_{0t}^{\alpha} v(\eta) d\alpha = -q. \quad (18)$$

Замена $s = \alpha - \varepsilon$ переменной интеграции позволяет записать это уравнение в эквивалентной форме

$$D_{0t}^{\varepsilon} D_{0\eta}^{[-\varepsilon, 0]} v(\eta_1) = -q, \quad D_{0t}^{[-\varepsilon, 0]} v(\eta) = \int_{-\varepsilon}^0 D_{0t}^s v(\eta) ds.$$

Поэтому в классе функций, удовлетворяющих однородному нелокальному условию Коши $\lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\varepsilon-1} v(\eta) = 0$, уравнение (18) эквивалентно непрерывному интегральному уравнению Абеля [1, с. 84]

$$D_{0t}^{[-\varepsilon, 0]} v(\eta) = -D_{0t}^{-\varepsilon} q = -q t^{\varepsilon} / \Gamma(\varepsilon + 1),$$

единственное решение которого определяется формулой [1, с. 86]

$$v(t) = \frac{-q}{\Gamma(\varepsilon)} \int_0^t \eta^{\varepsilon-1} \{ E_{1/\varepsilon}^1[(t-\eta)^{\varepsilon}] - E_{\varepsilon}[(t-\eta)^{\varepsilon} \log(t-\eta)] \} d\eta.$$

$$E_{1/\varepsilon}^{\mu}[z] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k \psi(\mu + \varepsilon k)}{\Gamma(\mu + \varepsilon k)}, \quad \psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.$$

Пусть в уравнении (14) $u(t) = w(t)$ означает долю наночастиц (в коллоидном растворе и осадках), размер которых меньше x_1 ; x_0 – характерный нормированный размер, близкий к среднему размеру наночастиц; $t = x_1/x_0$. Тогда уравнение (14) или более общее уравнение (13)

могут быть интерпретированы как кинетические уравнения. Тому подтверждение – данные работы [9] (см. рис. 1):

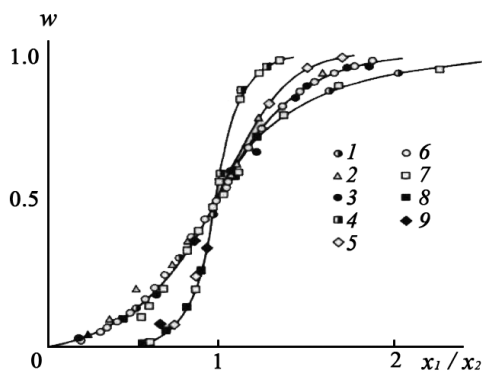


Рис. 1. Типичные распределения наночастиц по размеру в коллоидных растворах и осадках, образованных неорганическими веществами

Одномерный вариант уравнения (8), когда $\lambda_\alpha = (\lambda - \mu_\nu)/c_\nu$, $1 < \alpha \leq \leq 2$, $n = 1$, $x \equiv x_1$, совпадает с уравнением

$$D_{0x}^\alpha \psi(\xi) = \lambda_\alpha \psi(x), \quad (19)$$

любое решение которого в силу (11) представимо формулой [1, с. 102]

$$\psi(x) = a_1 x^{\alpha-1} \exp_\alpha(\lambda_\alpha x^\alpha) + a_2 x^{\alpha-2} E_{1/\alpha}(\lambda_\alpha x^\alpha; \alpha - 1), \quad (20)$$

где a_1 и a_2 – произвольные постоянные.

С уравнением (19) при $\lambda_\alpha = -\omega^\alpha$, $1 < \alpha < 2$, непосредственно связано дробное осцилляционное уравнение

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t \frac{u''(\eta) d\eta}{(t-\eta)^{\alpha-1}} + \omega^\alpha u(t) = 0, \quad t > 0,$$

предложенное F. Mainardi в 1996 г. [10]. Это уравнение можно переписать в виде

$$D_{0t}^{\alpha-2} \frac{d^2 u(\eta)}{d\eta^2} + \omega^\alpha u(t) = 0,$$

и оно эквивалентно соотношению

$$u''(t) + \omega^\alpha D_{0t}^{2-\alpha} u(\eta) = 0, \quad (21)$$

которое возникло в теории уравнений смешанного типа в 1977 г. [11], как необходимое следствие условия сопряжения на критической линии $t = t_* = 0$ изменения типа следующего уравнения:

$$\frac{\partial^{1+H(-t)} w(x, t)}{\partial t^{1+H(-t)}} = [|t|^\gamma H(-t) + \lambda_* H(t)] \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2},$$

где $H(t)$ – функция Хевисайда, $\gamma = \text{const} > 0$, λ_* – спектральный параметр.

Уравнение (21) является обобщением линейного уравнения гармонического осциллятора и любое его решение представимо в виде

$$u(t) = u(0) \cos_\alpha(\omega t) + \frac{u'(0)}{\omega} \sin_\alpha(\omega t). \quad (22)$$

В формуле (22) $\sin_\alpha(z)$ и $\cos_\alpha(z)$ являются обобщенными тригонометрическими функциями

$$\sin_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{\alpha k+1}}{\Gamma(2 + \alpha k)}, \quad \cos_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{\alpha k}}{\Gamma(1 + \alpha k)}.$$

Обобщенные тригонометрические функции $\sin_\alpha(z)$ и $\cos_\alpha(z)$, совпадая с классическими функциями $\sin z$ и $\cos z$ при $\alpha = 2$, обладают принципиально новыми свойствами. В частности, $\sin_\alpha(z)$ при $1 < \alpha < 2$ на вещественной оси $x = \operatorname{Re} z$ может иметь лишь конечное число нулей; и как недавно установила В. А. Нахушева,

$$\cos'_\alpha(z) = -z^{\alpha-1} \exp_\alpha(-z^\alpha) = -D_{0z}^{2-\alpha} \sin_\alpha t.$$

К уравнениям (1) и (3) примыкают непрерывные, по терминологии В. Вольтерра, уравнения следующих типов:

$$\frac{1}{\nu_2 - \nu_1} \int_{\nu_1}^{\nu_2} \varepsilon_\nu D_{0t}^\xi u(x, \eta) d\xi - \lambda u(x, t) = c_\nu \sum_{k=1}^n D_{a_k x_k}^{\alpha_k} u(\xi_k, t), \quad (23)$$

$$\frac{1}{\nu_2 - \nu_1} \int_{\nu_1}^{\nu_2} D_{0t}^\xi u(x, \eta) d\xi = c_\nu \sum_{k=1}^n x_k^{1-\beta_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[x_k^{\beta_k-1} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_k} \right], \quad (24)$$

$$\frac{\operatorname{sign}(t_* - t) |t - t_*|^\gamma}{\nu_2 - \nu_1} \int_{\nu_1}^{\nu_2} D_{t_* t}^\xi u(x, \eta) d\xi = c_\nu \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}. \quad (25)$$

Решения уравнений (2) и (3), (23)–(25), как и уравнения (1), допускают многочисленные интерпретации в физике фракталов и теории наносистем. Различные варианты этих уравнений и уравнений, полученных из них добавлением в правых их частях подчиненных слагаемых вида $f(x, t, u)$, зависящих от интенсивных параметров системы, безусловно войдут в математическое обеспечение САПР наносистем. Поэтому значительный интерес представляет построение теории начальных и смешанных краевых задач для уравнений (1)–(3), (23)–(25).

Наряду с фундаментальной работой Л. М. Зеленого и А. В. Милованова [2] отметим весьма важную работу И. М. Соколова [12], посвящен-

ную теории протекания (перколяций), в частности, уравнениям диффузии на фрактале следующего вида:

$$\frac{\partial P(r, t)}{\partial t} = \frac{1}{r^{D-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left[K r^{D-1-\theta} \frac{\partial P(r, t)}{\partial r} \right] \quad (\theta = 2D - 2), \quad (26)$$

где $P(r, t)$ – главная огибающая плотности вероятности найти частицу, помещенную в момент времени $t = 0$ в точку 0, в точке $r > 0$ в момент времени t , K – обобщенный коэффициент диффузии. Здесь под перколяцией понимается случайное распространение той или иной субстанции через среду. Перколяция является критическим процессом, предполагает существование некоторого порога, ниже которого распространение субстанции ограничено конечной областью среды, а вблизи порога протекание происходит по фрактальному множеству [2].

Замена в (26) $\partial P / \partial t$ дробной производной $D_{0t}^{\nu} P$ позволяет учесть «случайные блуждания» во фрактальном времени.

Уравнение (26) является вариантом уравнения (2) при $\nu = 1$.

В теории перколяции важную роль должны сыграть уравнения (3) и (25). При $\nu = 1$ уравнение (3) заменой $y = t_* - t$ сводится к уравнению в частных производных смешанного типа

$$\text{sign } y \cdot |y|^m u_{yy} = c_{\nu} \Delta_x u,$$

которое, как известно, является теоретической основой околосвуковой газовой динамики.

В теории перколяции возникают и фрактальные уравнения с вырождением порядка дробной производной от искомого решения $w = w(x, t)$ как по временной, так и по пространственным переменным. Простым примером такого уравнения является уравнение вида

$$\partial w(x, t) / \partial t = k_{\beta} D_{0x}^{\beta} w(\xi, t), \quad 0 < x < 1, \quad (27)$$

где $\beta = \alpha H(t) + 2H(-t)$ – задаваемая функцией Хевисайда $H(t)$ кусочно-постоянная функция, равная $\alpha \in]0, 2[$ при $t > 0$ и 2 при $t < 0$; $k_{\beta} = k_{\alpha} H(t) + k_2 H(-t)$, k_{α} и k_2 – постоянные величины, отличные от нуля.

Пусть $w(x, t)$ – решение уравнения (27) в прямоугольной области $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < r, t_2 < t < t_{\alpha}\}$, содержащей интервал $0 < x < r$ критической линии $t = 0$, где происходит вырождение порядка дробного дифференцирования, которое непрерывно вместе с $\partial w / \partial t = w_t(x, t)$; $u(x) = w(x, 0)$, $v(x) = w_t(x, 0)$. Тогда нетрудно показать, что

$$v(x) = k_{\alpha} D_{0x}^{\alpha} u(\xi) = k_2 u''(x).$$

Следовательно, функция $u = u(x)$ является решением уравнения

$$u''(x) + \lambda D_{0x}^{\alpha} u(\xi) = 0, \quad 0 < x < 1 \quad (28)$$

со спектральным параметром $\lambda = -k_{\alpha} / k_2$.

В работе [11] мною был поставлен вопрос о вещественных собственных значениях двухточечной краевой задачи

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0 \quad (29)$$

для уравнения (28), когда $0 < \alpha < 1$; выдвинута подтвержденная вычислительным экспериментом гипотеза об их наличии при небольших значениях α ; показано, что λ является собственным значением тогда и только тогда, когда

$$E_\rho(-\lambda; 2) = 0, \quad \rho = 1/(2 - \alpha).$$

А. Ю. Попов в работе [13] впервые теоретически обосновал данную гипотезу: он доказал, что при $0 < \alpha < 1/3$ задача (28), (29) имеет не менее двух вещественных собственных значений и установил границы, в которых они лежат. А. В. Псху [14] показал, что при $1/2 \leq \rho < 1$, $\mu \geq 3/(2\rho)$ функция $E_\rho(z, \mu)$ не имеет вещественных нулей. Отсюда следует, что при $2/3 \leq \alpha < 1$ задача (28), (29) не имеет вещественных собственных значений. Вопрос о наличии вещественных собственных значений задачи (28), (29) при $1/3 < \alpha < 2/3$ остается открытым.

Основные положения этой работы были содержанием моего пленарного доклада [15] на XXIII Международной конференции по уравнениям состояния вещества, Эльбрус-2008 (в [15] в определении фрактальной волновой функции пропущен сомножитель $x^{\nu-1}$ и в левой части уравнения (17) φ надо заменить на ψ).

Литература

1. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 272 с.
2. Зеленый Л. М., Милованов А. В. Фрактальная топология и странная кинетика: от теории перколяции к проблемам кинетической электродинамики // УФН. 2004. Т. 174, № 8. С. 809–850.
3. Потапов А. А. Фракталы в радиофизике и радиолокации: Топология выборки. М.: Университетская книга, 2005. 848 с.
4. Сергеев Г. Б. Нанохимия металлов // Успехи химии. 2001. Т. 70, № 10. С. 915–933.
5. Семенов А. С. Фрактальная алгебра как основа фрактальной парадигмы программирования // Информационные технологии и вычислительные системы. 2006. С. 64–70.
6. Nakhushev A. M. On some fundamental properties of Riemann–Liouville operator and their application to partial differential equations of fractional order // Book of Abstracts International Conference “Differential Equations and Related Topics”, dedicated to the Centenary Anniversary of I. G. Petrovskii. Moscow (May 22–27, 2001). Pp. 288–290.
7. Нахушева В. А. Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов. М.: Наука, 2006. 173 с.
8. Лопушанська Г. П. Основні граничні задачі для одного рівняння в дробових похідних // Укр. мат. журн. 1999. Т. 51, № 1. С. 48–59.
9. Мелихов И. В. Физикохимия наносистем: успехи и проблемы // Вестник РАН. 2002. Т. 27, № 10. С. 900–909.
10. Mainardi F. Fractional relaxation-ocillation and fractional diffusion-wave equation // Phenomena Chaos, Solitons and Fractals. 1996. Vol. 7, no. 9. Pp. 1461–1477.

11. Нахушев А. М. Задача Штурма–Лиувилля для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с дробными производными в младших членах // ДАН СССР. 1977. Т. 234. № 2. С. 308–311.
12. Соколов И. М. Размерности и другие геометрические критические показатели в теории протекания // УФН. 1986. Т. 150, вып. 2. С. 221–255.
13. Попов А. Ю. О количестве вещественных собственных значений одной краевой задачи для уравнения второго порядка с дробной производной // Фундаментальная и прикладная математика. 2006. Т. 12, № 6. С. 137–155.
14. Псху А. В. О вещественных нулях функции типа Миттаг-Леффлера // Мат. заметки. 2005. Т. 77, № 4. С. 592–599.
15. Нахушев А. М. К проблеме математического моделирования процессов переноса по самоподобному фрактальному множеству // Труды XXIII Международной конференции «Физика экстремальных состояний вещества – 2008». Черноголовка, 2008. С. 32–35.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН

К теории нагруженных уравнений

1. Определения нагруженного уравнения, локального и нелокального операторов. В моих работах [1–3] даны общие определения нагруженного уравнения, локального и нелокального операторов.

Заданное в n -мерной области Ω евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ (матричное или скалярное) уравнение

$$Au(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

называется *нагруженным*, если оно содержит след некоторых операций от искомого решения $u(x)$ на принадлежащих замыканию $\bar{\Omega}$ области Ω многообразиях, размерность которых строго меньше n . Входящий в это определение оператор A принято называть нагруженным [4], [5].

Пусть L – оператор, область определения $D(L)$ которого представляет собой множество отображений u с единой областью определения $D(u)$; μ – множество операций μ_α с $D(\mu_\alpha) = D(L)$; $\mu_\alpha u = \mu_\alpha \circ u$ – композиция отображений μ_α и u .

Оператор L с областью определения $D(L)$ в работе [5, с. 61] назван локальным в $D(u)$ относительно множества операций μ , если для любого отображения $u \in D(L)$ образ любой точки $x \in D(u)$ при отображении $L \circ u$ однозначно определяется значением $u(x)$ отображения u на элементе x или же значениями $\mu_\alpha u(x)$ операторов $\mu_\alpha u$, $\mu_\alpha \in \mu$ на этом же элементе x .

Оператор A называется нелокальным относительно множества операций μ , если он не является локальным относительно μ .

Нагруженный оператор A является нелокальным оператором, а нагруженное уравнение (1) – нелокальным уравнением.

2. Понятия нагруженного функционального и интегрального уравнений. Пусть: $F(x, y_0, y_1, \dots, y_i, \dots; z_0, z_1, \dots, z_j, \dots)$ – действительная функция точек $x \in \Omega$ и действительных переменных $y_0, y_1, \dots, y_i, \dots; z_0, z_1, \dots, z_j, \dots$, которая зависит хотя бы от одной из переменных $z_j, j = 0, 1, \dots; \theta_i = (\theta_i^1(x), \theta_i^2(x), \dots, \theta_i^n(x))$ – отображение множества $\bar{\Omega}$ на множество $\Omega_i \subset \bar{\Omega}, i = 1, 2, \dots; u(x)$ – действительная функция точек $x \in \Omega; \omega_j$ – принадлежащее множеству Ω многообразие размерности $j < n, j = 0, 1, \dots$

Уравнение

$$F(x, y_0, y_1, \dots, y_i, \dots; z_0, z_1, \dots, z_j, \dots) = 0,$$

где $y_0 = u(x), y_1 = u \circ \theta_1, \dots, y_i = u \circ \theta_i, \dots; z_0 = u|_{\omega_0}, z_1 = u|_{\omega_1}, \dots, z_j = u|_{\omega_j}, \dots$, называется нагруженным функциональным уравнением относительно функции $u = u(x)$.

Простейшие нагруженные функциональные уравнения возникают при отыскании приближенного решения $u(x)$ интегрального уравнения вида

$$\beta_0(x)u(x) + \int_{\Omega} k(x, y)u(y)dy = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

методом конечных сумм, когда полагают

$$\int_{\Omega} k(x, y)u(y)dy \approx \sum_{j=1}^m \beta_j(x)u(y^j),$$

где $y^j (j = 1, 2, \dots, m)$ – узлы квадратурной или кубатурной формулы. В результате для искомого приближенного решения $u(x)$ получают уравнение

$$\beta_0(x)u(x) + \sum_{j=1}^m \beta_j(x)u(y^j) = f(x),$$

которое, очевидно, является частным случаем более общего нагруженного функционального уравнения

$$\beta_0(x)u(x) + G(x)u \circ \theta(x) + \beta_j(x)u(y^j) = f(x),$$

где $G(x), \beta_j(x)$ и $f(x)$ – заданные в $\bar{\Omega}$ функции; $\theta(x)$ – заданное отображение замыкания $\bar{\Omega}$ множества Ω на компакт $\omega \subset \bar{\Omega}$.

Если в левой части уравнения (2) произвести возмущение, добавив линейную комбинацию значений искомого решения $u(x)$ в фиксированных точках $x^1, x^2, \dots, x^\nu$ компакта $\bar{\Omega}$, то получим классический пример нагруженного интегрального уравнения

$$a_0(x)u(x) + \sum_{j=1}^{\nu} a_j(x)u(x^j) + \int_{\Omega} k(x, y)u(y)dy = f(x). \quad (3)$$

Если существует хотя бы одна точка $x^0 \in \bar{\Omega}$ такая, что $a(x^0) = 0$, то уравнение (3) называется локально нагруженным интегральным уравнением *третьего рода*. Уравнение (3) принято называть локально нагруженным интегральным уравнением *первого* или *второго рода*, в зависимости от того, $a(x) = 0$ или $a(x) \neq 0$ для всех $x \in \bar{\Omega}$.

Линейным одномерным (локально) нагруженным интегральным уравнением Вольтерра называется уравнение вида

$$a_0(x)u(x) + \sum_{j=1}^m a_j(x)u(x^j) = \lambda \int_{x^0}^x k(x, y)u(y)dy + f(x), \quad (4)$$

где $x = x_1$, $y = y_1$; $x^0, x^1, \dots, x^m$ – заданные фиксированные точки сегмента $\bar{\Omega} = \{x : a \leq x \leq b\}$; λ – заданный постоянный параметр; $a_j(x)$, $j = 0, 1, \dots, m$ и $f(x)$ – заданные непрерывные на сегменте $[a, b]$ функции.

Уравнение

$$R(x, y; \lambda) = k(x, y) + \lambda \int_a^b k(x, t)R(t, y; \lambda)dt, \quad a \leq x \leq b,$$

для резольвенты $R(x, y; \lambda)$ ядра $k(x, y)$ интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, y)u(y)dy, \quad \lambda = \text{const},$$

представляет важный пример нагруженного интегрального уравнения.

Уравнение (4) классифицируется по родам, как и n -мерное нагруженное уравнение (3).

Положим, что $n = 2$ и Ω – область на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$; σ^j , $j = 1, 2, \dots, p$, – кусочно-гладкие линии, принадлежащие $\bar{\Omega}$. Линейным двумерным нагруженным интегральным уравнением третьего рода называется уравнение вида [5, с. 93]:

$$\begin{aligned} a_0(x)u(x) + \sum_{j=1}^m a_j(x)u^j(x) + \sum_{j=1}^p \int_{\sigma_j} k_j(x, y)u(y)d\sigma_y^j = \\ = \lambda \int_{\Omega} k(x, y)u(y)dy + f(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $d\sigma_y^j$ – элемент длины кривой σ^j в точке $y \in \sigma^j$; $u^j(x)$ – след искомого решения $u(x)$ на многообразиях S_j размерности $m_j < 2$; $k_j(x, y)$ – действительные суммируемые функции точки $x \in \bar{\Omega}$ и $y \in \sigma^j$; $\lambda \in \mathbb{R}$, $k(x, y)$ – действительная и суммируемая функция точки $(x, y) \in \bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$.

К нагруженным интегральным уравнениям относятся интегральные уравнения, задаваемые операторами с частными интегралами, называемые в монографии [6] *интегральными уравнениями с частными интегралами*.

Одним из вариантов уравнения (5) является нагруженное интегральное уравнение второго рода:

$$u(x) = f(x) - \int_{\sigma_1} k_1(x, y_1) u(y_1, x_2) dy_1 - \int_{\sigma_2} k_2(x, y_2) u(x_1, y_2) dy_2 + \\ + \lambda \int_{\sigma_1} \int_{\sigma_2} k(x, y) u(y) dy, \quad u(x) = u(x_1, x_2), \quad x \in \Omega, \quad (6)$$

где $\sigma_j = [\alpha_j, \beta_j]$, $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : \alpha_j < x_j < \beta_j, j = 1, 2\}$, $f(x)$, $k_1(x, y_1)$, $k_2(x, y_2)$, $k(x, y)$ – заданные измеримые в соответствующих областях функции, а интегралы понимаются в смысле Лебега.

Критерию фредгольмовости уравнения (6) в пространстве непрерывных функций посвящена работа [7].

Другим важным вариантом уравнения (5) служит одномерное ($n = 1, x = x_1$) нагруженное *интегральное уравнение типа интегральных уравнений Кнезера*

$$u(x) = f(x) + \sum_{j=1}^m a_j(x) u(x^j) + \lambda \int_{\alpha}^{\beta} k(x, y) u(y) dy. \quad (7)$$

Здесь, как и ранее, x^j – заданные фиксированные точки сегмента $\alpha \leq x \leq \beta$ (см. [8], [9, с. 170]).

Если

$$a_j(x) = \lambda c_j k(x, x^j), \quad c_j = \text{const} > 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, m, \quad (8)$$

то уравнение (7) равносильно уравнению

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha}^{\bar{\beta}} k(x, y) u(y) dy, \quad (9)$$

где черта над интегралом означает, что *интеграл понимается в смысле Кнезера* [9, с. 169]:

$$\int_{\alpha}^{\bar{\beta}} F(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} F(x, y) dy + \sum_{j=1}^m c_j F(x, x^j), \quad c_j \geq 0.$$

Частный случай уравнения (7), которое можно записать в виде

$$u(x) = f(x) + \lambda a(x)u(x_0) + \lambda \int_0^1 k(x, y)u(y)dy, \quad x_0 \in [0, 1], \quad (10)$$

исследован в 1948 году Н. Н. Назаровым [8] в предположении, что $k(x, y)$ обладает обычными свойствами ядра интегрального уравнения типа Фредгольма второго рода.

Пусть

$$\lambda a(x_0) \neq 1. \quad (11)$$

Тогда легко заметить, что уравнение (10) равносильно интегральному уравнению Фредгольма второго рода:

$$u(x) = \frac{[1 - \lambda a(x_0)]f(x) + \lambda a(x)f(x_0)}{1 - \lambda a(x_0)} + \lambda \int_0^1 \left[\frac{a(x)k(x_0, y)}{1 - \lambda a(x_0)} + k(x, y) \right] u(y)dy. \quad (12)$$

Этот факт имеет место для общего уравнения (7), если

$$\det \begin{vmatrix} 1 - a_1^1 & -a_2^1 & \cdots & -a_{m-1}^1 & -a_m^1 \\ -a_1^2 & 1 - a_2^2 & \cdots & -a_{m-1}^2 & -a_m^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a_1^m & -a_2^m & \cdots & -a_{m-1}^m & 1 - a_m^m \end{vmatrix} \neq 0, \quad a_j^i = a_j(x^i). \quad (13)$$

Если коэффициенты $a_j(x)$ уравнения (7) не зависят от x , то условие (13) можно заменить условием

$$a_1 + a_2 + \dots + a_m \neq 1. \quad (14)$$

Существенность условия (14), стало быть, и (13), продемонстрируем на следующих двух примерах.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$u(x) = \lambda \left[(1 - x) \int_0^x u(y)dy + \int_x^1 (1 - y)u(y)dy + a(1 - x)u(0) \right], \quad (15)$$

$0 \leq x \leq 1$, которое получается из (10), когда $f(x) \equiv 0$, $x_0 = 0$, $k(x, y) = 1 - x$ при $y \leq x$ и $k(x, y) = 1 - y$ при $y \geq x$, $a = \text{const} \neq 0$.

Уравнение (15) с симметричным ядром $k(x, y) = k(y, x)$ эквивалентно уравнению

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0 \quad (16)$$

с краевым условием

$$u(1) = 0, \quad u'(0) + \lambda a u(0) = 0. \quad (17)$$

При $\lambda = 0$ уравнение (15) имеет только тривиальное решение $u(x) = 0$. Когда $\lambda a = 1$, оно в точке $x = 0$ вырождается в интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$\int_0^1 (1-y)u(y)dy = 0,$$

выступающее в роли нелокального краевого условия для уравнения (16). Если $\lambda < 0$, $a > 0$, то из принципов экстремума (Хопфа, Заремба–Жиро) для уравнения (16) следует, что *задача Штурма–Лиувилля (16), (17) имеет лишь тривиальное (нулевое) решение.*

Пусть $\lambda = \mu^2 > 0$. Тогда из общего решения

$$u(x) = C_1 \sin \mu x + C_2 \cos \mu x, \quad C_1, C_2 = \text{const},$$

уравнения (16) в силу (17) заключаем, что *уравнение (15) имеет нетривиальное решение $u(x)$ тогда и только тогда, когда μ является корнем уравнения $\cos \mu = a\mu \sin \mu$. Если же $\lambda = -\mu^2 < 0$, то в качестве такого уравнения выступает уравнение $\text{ch } \mu = a\mu \text{ sh } \mu$, которое при $a > 0$ не может иметь корня. В исключительном случае, когда $\lambda a = 1$ и, стало быть, нарушено условие (11), уравнение (15) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда μ – корень уравнения*

$$\mu = \begin{cases} \text{tg } \mu, & \lambda = \mu^2, \\ \text{th } \mu, & \lambda = -\mu^2. \end{cases}$$

Пример 2. Рассмотрим уравнение (10) с вырожденным ядром $k(x, y) = \alpha(x)\beta(y)$, непрерывным в квадрате $0 \leq x, y \leq 1$.

Пусть для любой функции $\varphi(x) \in C[0, 1]$ символы φ_β и $\bar{\varphi}$ определены по формулам

$$\varphi_\beta = \varphi_\beta(x) = \beta(x)\varphi(x), \quad \bar{\varphi} = \int_0^1 \varphi(x)dx.$$

Тогда рассматриваемое уравнение, после умножения обеих его частей на $\beta(x)$ и применения операции интегрального усреднения, дает основание записать

$$\bar{u}_\beta = \lambda \bar{a}_\beta u(x_0) + \lambda \bar{\alpha}_\beta \bar{u}_\beta + \bar{f}_\beta.$$

Отсюда получаем, что если

$$\lambda\bar{\alpha}_\beta = 1, \quad (18)$$

то

$$\lambda\bar{a}_\beta u(x_0) = -\bar{f}_\beta, \quad (19)$$

а если же

$$\lambda\bar{\alpha}_\beta \neq 1, \quad (20)$$

то

$$\bar{u}_\beta = \frac{\lambda\bar{a}_\beta}{1 - \lambda\bar{\alpha}_\beta} u(x_0) + \frac{\bar{f}_\beta}{1 - \lambda\bar{\alpha}_\beta}. \quad (21)$$

Из (18)–(21) заключаем: *если $\lambda\bar{\alpha}_\beta = 1$, $\bar{a}_\beta \neq 0$, то исследуемый вариант уравнения (10) эквивалентен уравнению Фредгольма второго рода*

$$u(x) = f(x) - \frac{a(x)}{\bar{a}_\beta} \bar{f}_\beta + \lambda \int_0^1 \alpha(x)\beta(y)u(y)dy;$$

если соблюдено условие (20), то оно сводится к нагруженному функциональному уравнению

$$u(x) = f(x) + \lambda a(x)u(x_0) + \frac{\lambda^2 \alpha(x)\bar{a}_\beta}{1 - \lambda\bar{\alpha}_\beta} u(x_0) + \frac{\lambda \alpha(x)\bar{f}_\beta}{1 - \lambda\bar{\alpha}_\beta},$$

которое однозначно разрешимо тогда и только тогда, когда

$$\lambda a(x_0) + \frac{\alpha(x_0)\lambda^2 \bar{a}_\beta}{1 - \lambda\bar{\alpha}_\beta} \neq 1.$$

Здесь уместно отметить работу Х. М. Карова [10], где через интеграл Римана–Стильтьеса в банаховом пространстве $C[\alpha, \beta]$ определен оператор, сопряженный оператору

$$Nu \equiv \int_{\alpha}^{\beta} k(x, y)u(y)dy + \sum_{j=1}^m b_j(x)u(x^j),$$

и в случае, когда λ – характеристическое число уравнения (7) с непрерывным в квадрате $[\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta]$ ядром $k(x, y)$, с коэффициентами $a_j(x) = \lambda b_j(x)$ и свободным членом $f(x)$ из $C[\alpha, \beta]$, найдено необходимое и достаточное условие его разрешимости в пространстве $C[\alpha, \beta]$.

Следует обратить внимание (см. [11], [12], [13, с. 148]), что собственные колебания нагруженной среды сводятся к нагруженному интегральному уравнению, которое эквивалентно интегральному уравнению в интегралах Стильтьеса и Стильтьеса–Радона. Интегралам Стильтьеса–Радона и общей теории интегральных уравнений посвящены основополагающие работы Н. М. Гюнтера [11], [12].

Пусть теперь $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < x_j < \beta_j\}$; $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$; $\omega_j = \omega_j(x_j) \in C[0, \beta_j]$, $0 \leq \omega_j \leq x_j$ для любого $j = 1, 2, \dots, n$. Тогда широкий класс нагруженных интегральных уравнений типа Вольтерра образуют уравнения следующих видов:

$$\begin{aligned} a_0(x)u(x) = & f(x) + \sum_j \int_0^{\omega_j} k_j(x, \xi_j)u(x)|_{x_j=\xi_j} d\xi_j + \sum_{i \neq j} \int_0^{\omega_j} d\xi_i \times \\ & \times \int_0^{\omega_j} k_{ij}(x, \xi_i, \xi_j)u(x) \Big|_{\substack{x_j=\xi_i \\ x_j=\xi_j}} d\xi_j + \dots + \int_0^{\omega_1} d\xi_1 \int_0^{\omega_2} d\xi_2 \dots \int_0^{\omega_n} k(x; \xi)u(\xi) d\xi_n + \\ & + \sum_{i=1}^n a_i(x)u(x_1^0, x_2^0, \dots, x_i^0, x_{i+1}, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^m b_j(x)u(x^j). \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь, как и ранее, $u(x) = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – искомое решение, $x_i^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_i^0)$, $x^j = (x_1^j, x_2^j, \dots, x_n^j)$ – фиксированные точки из $\mathbb{R}^i$ и $\mathbb{R}^n$ соответственно.

Уравнение (22) при $n = 2$, $x = (x_1, x_2)$, $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$, $x^j = (x_1^j, x_2^j)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $\omega_j(x_j) = x_j$ принимает вид:

$$\begin{aligned} a_0(x)u(x) = & f(x) + \int_0^{x_1} k_1(x, \xi_1)u(\xi_1, x_2) d\xi_1 + \\ & + \int_0^{x_2} k_2(x, \xi_2)u(x_1, \xi_2) d\xi_2 + \int_0^{x_1} d\xi_1 \int_0^{x_2} k_{12}(x, \xi)u(\xi) d\xi_2 + a_1(x)u(x_1^0, x_2) + \\ & + a_2(x)u(x_1^0, x_2^0) + \sum_{j=1}^m b_j(x)u(x^j), \quad x \in [0, \beta_1] \times [0, \beta_2]. \end{aligned} \quad (23)$$

Если же $n = 1$, $x = x_1$, $x^0 = x_1^0 = x_0$, $x^j = x_1^j = x_j$, $\beta = \beta_1$, $\omega_1(x_1) \equiv \omega(x) \leq x$, то из (22) или (23) переходим к уравнению

$$\begin{aligned} a_0(x)u(x) = & f(x) + \int_0^{\omega(x)} k(x, \xi)u(\xi) d\xi + a_1(x)u(x_0) + \\ & + \sum_{j=1}^m b_j(x)u(x_j), \quad 0 \leq x \leq \beta. \end{aligned} \quad (24)$$

К уравнению (24) примыкает и уравнение с двумя переменными пределами:

$$a_0(x)u(x) = f(x) + \int_x^{\omega(x)} k(x, \xi)u(\xi)d\xi + \sum_{j=1}^m b_j(x)u(x_j), \quad 0 \leq x \leq \beta. \quad (25)$$

Известно (см., например, [9, с. 146]), что если $a_0(x) \equiv 1$, $b_j(x) \equiv 0$, $\omega(x) \in C[0, \beta]$, ядро

$$k(x, \xi) = (x - \xi)^{-\alpha} k_0(x, \xi), \quad 0 < \alpha = \text{const} < 1,$$

где $k_0(x, \xi)$ – непрерывная в квадрате $[0, \beta] \times [0, \beta]$ функция, то для любой функции $f(x) \in C[0, \beta]$ существует единственное решение $u(x) \in C[0, \beta]$ уравнения (24), которое может быть получено методом последовательных приближений.

Заслуживают внимания и нагруженные интегральные неравенства, получаемые из (22) после замены знака $=$ на знак $\leq$. Недавняя работа [14] посвящена неравенству вида

$$u(x) \leq f(x) + \int_0^{x_1} [K_1(x)u(x)] \Big|_{x_1=\xi_1} d\xi_1 + \\ + \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} [K_2(x)u(x)] \Big|_{\substack{x_1=\xi_1 \\ x_2=\xi_2}} d\xi_1 d\xi_2 + \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \dots \int_0^{x_n} K_n(\xi)u(\xi) d\xi.$$

3. Понятие нагруженных дифференциальных уравнений. Нагруженное уравнение (1) называется нагруженным дифференциальным уравнением в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, если оно содержит хотя бы одну производную от искомого решения $u(x)$ на принадлежащих $\bar{\Omega}$ многообразиях ненулевой меры.

Общее определение нагруженных дифференциальных операторов (уравнений) дано в моей работе [1]. Как заметил И. С. Ломов [15], это определение включает как подкласс и дифференциальные граничные операторы. А. М. Krall [16] дифференциальными граничными операторами назвал (обыкновенные) дифференциальные операторы L , содержащие в дифференциальном выражении Lu неизвестную функцию u в фиксированных точках интервала. А. Д. Искендеров в работах [17], [18] нагруженным дифференциальным уравнением называл «дифференциальное уравнение, в которое входят также значения искомой функции и ее производных в фиксированных точках области» его задания.

Многие явления в сложных эволюционных системах с памятью существенно зависят от предыстории этой системы. Эти явления, как правило, описываются нагруженными дифференциальными уравнениями, например, уравнениями следующих видов:

$$\Delta_x u(x, t) + N[u(x, t)] = 0, \quad \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \Delta_x u(x, t) + N[u(x, t)],$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \Delta_x u(x, t) + \int_0^t k_0(t, \tau) \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (26)$$

которые Вольтерра назвал интегро-дифференциальными уравнениями эллиптического, гиперболического и параболического типов соответственно. Здесь Δ_x – оператор Лапласа по $x = (x_1, x_2, x_3)$:

$$\Delta_x u(x, t) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_j^2}, \quad N[u(x, t)] = \int_0^t \sum_{j=1}^3 k_j(x, \tau) \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x_j^2} d\tau;$$

$k_0(t, \tau)$, $k_j(x, \tau)$ – заданные суммируемые функции.

Пусть t_i , $i = 0, 1, \dots, m$, – фиксированные точки сегмента $0 \leq \tau \leq t$ и функция $k_0(t, \tau) = a_i(t)$ при $t_i \leq \tau \leq t_{i+1}$, $0 < t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} = t$; решения $u = u(x, t)$ уравнения (26) таковы, что

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau = u(x, t_{j+1}) - u(x, t_j)$$

для любого $j = 0, 1, \dots, m$; $b_j(t) = a_{j-1}(t) - a_j(t)$, $a_{-1}(t) \equiv 0$. Тогда уравнению (26) можно придать следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_x u + a_m(t)u + \sum_{j=0}^m b_j(t)u(x, t_j).$$

Если же положить ядро $k_0(t, \tau) = \lambda(t - \tau)^{-\alpha}/\Gamma(1 - \alpha)$, где $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha \in]0, 1[$, $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера, и ввести выражение

$$\partial_{0t}^\alpha u(x, \tau) = D_{0t}^{\alpha-1} \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{-\alpha} \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau,$$

то из (26) получим следующее модельное нагруженное уравнение параболического типа:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \lambda \partial_{0t}^\alpha u(x, \tau) = \Delta_x u(x, t). \quad (27)$$

Входящее в (27) интегро-дифференциальное выражение $\partial_{0t}^\alpha u(x, \tau)$ известно как производная дробного порядка α от $u(x, t)$ по t в смысле Капуто.

В общем случае действие оператора ∂_{0t}^α , $n - 1 < \alpha \leq n = 1, 2, \dots$, на функцию $u(x, t)$ определяется следующей формулой:

$$\partial_{0t}^\alpha u(x, \tau) = D_{0t}^{\alpha-n} \frac{\partial^n u(x, \tau)}{\partial \tau^n} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \frac{\partial^n u(x, \tau)}{\partial \tau^n} d\tau.$$

Уравнение (27) при $\alpha > 2$ и более общее уравнение

$$\sum_{j=1}^p \lambda_j \partial_{0t}^{\alpha_j} u(x, \tau) = \Delta_x u(x, t) + \sum_{j=1}^q \mu_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \Big|_{x=(x_1, x_2, \dots, x_\nu, \dots, x_n)}, \quad (28)$$

где $\lambda_j, \mu_j = \text{const}$; $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_p > 2$; $\lambda_p^2 + \mu_q^2 \neq 0$, относятся к классу существенно нагруженных или спектрально-нагруженных дифференциальных уравнений по терминологии М. Т. Дженалиева и М. И. Рамазанова [19].

Когда $n = 1$ ($x_1 \equiv x$), $q = 1$ ($\mu_1 \equiv \mu$), уравнение (28) записывается в виде

$$\sum_{j=1}^p \lambda_j \partial_{0t}^{\alpha_j} u(x, \tau) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x=x_\nu}. \quad (29)$$

При $\mu \neq -1$ уравнение (29) редуцируется к уравнению

$$\sum_{j=1}^p \lambda_j \partial_{0t}^{\alpha_j} \left[u(x, \tau) - \frac{\mu}{\mu+1} u(x_\nu, \tau) \right] = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (30)$$

Если μ не зависит от x , то уравнение (30) эквивалентно следующей системе нагруженных уравнений:

$$\sum_{j=1}^p \lambda_j \partial_{0t}^{\alpha_j} v(x, \tau) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad u(x, t) - \frac{\mu}{\mu+1} u(x_\nu, t) = v(x, t). \quad (31)$$

Очевидна существенная взаимосвязь нагруженных дифференциальных уравнений и обратных задач.

Это хорошо прослеживается на простом примере обратной задачи для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varphi(x)\psi(t)$$

в полуполосе $0 < t < T$, $x > 0$ евклидовой плоскости точек (x, t) , которая состоит в отыскании функции $\psi(t) \in C[0, T]$ и функции $u = u(x, t)$,

удовлетворяющих, наряду с условием Тихонова при $x \rightarrow +\infty$, следующим условиям:

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad x \geq 0, \quad u(r, t) = \tau_r(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

где $\varphi(x)$, $\tau(x)$, $\tau_0(t)$, $\tau_r(t)$ – заданные функции из классов $C[0, \infty]$ и $C^1[0, T]$ соответственно, $\varphi(0) \neq 0$. Нетрудно видеть, что обратная задача редуцируется к прямой задаче

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad x \geq 0, \quad u(0, t) = \tau_0(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

для следующего спектрального нагруженного уравнения параболического типа:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} \left[\frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial x^2} + \tau'_r(t) \right]$$

с условием А. Н. Тихонова

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \max_{[0, T]} |u| \exp(-\varepsilon x^2) = 0 \quad (\varepsilon = \text{const} > 0).$$

А. И. Кожанов [20], [21] развил математическую технологию, основанную на переходе от обратной задачи к новой прямой краевой задаче для нагруженного уравнения с частными производными.

Важным примером нагруженных дифференциальных уравнений является стационарное односкоростное уравнение переноса [22]

$$\frac{1}{\alpha(x)} \sum_{j=1}^3 y_j \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x_j} + \varphi(x, y) = \frac{\lambda}{4\pi} \int_{|\xi|=1} \Theta(x, y, \xi) \varphi(x, \xi) d\xi + F(x, y)$$

в фазовой области $\{(x, y) : x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3, |y| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} = 1\}$. Здесь $\varphi(x, y)$ обозначает плотность частиц, летящих в направлении $y = (y_1, y_2, y_3)$ из точки $x = (x_1, x_2, x_3)$; $\alpha(x)$ – заданная в области Ω положительная и ограниченная функция, характеризующая поглощение среды; λ – спектральный параметр; $\Theta(x, y, \xi)$ и $F(x, y)$ – заданные функции.

В прямоугольной области $\Omega = \{x = (x_1, x_2) : 0 < x_j < a_j, j = 1, 2\}$ евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ рассмотрим систему двух уравнений с двумя неизвестными действительными функциями $u_1(x) = u_1(x_1, x_2)$, $u_2(x) = u_2(x_1, x_2)$:

$$\partial_{0x_1}^\alpha u_1(\xi_1, x_2) - \partial_{0x_2}^\alpha u_2(x_1, \xi_2) = a_{11}(x)u_1(x) + a_{12}(x)u_2(x) + f_1(x),$$

$$\partial_{0x_2}^\alpha u_1(x_1, \xi_2) + \partial_{0x_1}^\alpha u_2(\xi_1, x_2) = a_{21}(x)u_1(x) + a_{22}(x)u_2(x) + f_2(x). \quad (32)$$

Эта система является заслуживающим внимание примером нагруженных систем в частных производных дробного порядка.

Если Ω – содержащая начало координат область на плоскости комплексного переменного $z = x_1 + ix_2$, то уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + a(z)w + b(z)\bar{w} + c(z)w(\operatorname{Re} z) + d(z)w(\operatorname{Im} z) + A(z)\bar{w}(\operatorname{Re} z) + \\ + B(z)\bar{w}(\operatorname{Im} z) + \sum_{j=1}^p A_j(z)w(z_j) + \sum_{j=1}^q B_j(z)\bar{w}(z_j) = f(z), \end{aligned} \quad (33)$$

где

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \quad \bar{z} = x_1 - ix_2,$$

– оператор Коши–Римана, относится к классу нагруженных эллиптических систем с двумя неизвестными функциями $u_1 = \operatorname{Re} w$ и $u_2 = \operatorname{Im} w$.

Система (32) в определенном смысле является обобщением системы (33) с коэффициентами $A(z)$, $B(z)$, $A_j(z)$ и $B_j(z)$, тождественно равными нулю.

Исследованию задачи Римана–Гильберта для различных вариантов уравнения (29) посвящены работы [23], [24].

Следует отметить, что в основе математических моделей нелокальных физико-биологических процессов фрактальной организации, как правило, лежат нагруженные дифференциальные уравнения с частными производными дробного порядка [25], [26], в том числе и уравнения вида (31).

К нагруженным дифференциальным уравнениям приводят краевые задачи со смещением для уравнений с частными производными [27]. Классификации нагруженных дифференциальных уравнений как скалярных, так и матричных, а также важнейшим примерам этих уравнений посвящена вторая глава моей книги [5] (см. также [4]). Здесь же уместно отметить работы И. С. Ломова [15], [28], где на основе развития метода спектрального разложения В. А. Ильина [29], [30] на случай нагруженных обыкновенных дифференциальных операторов, определяемых на множестве разрывных функций, доказана теорема о безусловной базисности корневых векторов нагруженных дифференциальных операторов второго порядка.

4. Нагруженные уравнения как метод введения обобщенных решений уравнений математической физики. В монографиях [4], [25–27], [31] содержатся различные применения нагруженных уравнений как метода исследования задач математической биологии, математической физики, теории математического моделирования нелокальных процессов и явлений, механики сплошных сред с памятью и физики фракталов, краевых задач со смещением и теории упругих оболочек.

Нагруженные уравнения выступают как метод решения локальных и нелокальных задач для уравнений с частными производными и обыкновенных дифференциальных уравнений [27], [16].

В настоящее время установлена существенная взаимосвязь краевых задач со смещением и нагруженных уравнений. В случае обыкновенных дифференциальных уравнений эту связь можно увидеть на следующем примере: пусть $v(x)$ – решение нагруженного уравнения

$$v''(x) = c(x) \left[v(x) - \frac{v'(0) - \mu_1 v'(1)}{1 - \mu_1} \left(\frac{\mu_0}{1 - \mu_0} + x \right) + \frac{\mu_0 v(1) - v(0)}{1 - \mu_0} \right]$$

с коэффициентами $c(x) \in C[0, 1]$, μ_0 и $\mu_1 = \text{const} \neq 1$, тогда функция

$$u(x) = v(x) - \frac{v'(0) - \mu_1 v'(1)}{1 - \mu_1} \left(\frac{\mu_0}{1 - \mu_0} + x \right) + \frac{\mu_0 v(1) - v(0)}{1 - \mu_0}$$

на интервале $0 < x < 1$ является решением задачи со смещением

$$u(0) = \mu_0 u(1), \quad u'(0) = \mu_1 u'(1)$$

для уравнения

$$u''(x) = c(x)u(x).$$

Нагруженные уравнения можно использовать и как метод введения обобщенных решений уравнений в частных производных [32], [27].

Рассмотрим одномерное волновое уравнение

$$u_{yy} - u_{xx} = 0 \tag{34}$$

в области $\Omega = \{z : 0 < x + y < x - y < r = \text{const}\}$ евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ точек $z = (x, y)$.

В пространстве $C(\bar{\Omega})$ обобщенным решением уравнения (34) можно назвать любую функцию $u(z) = u(x, y) \in C(\bar{\Omega})$, являющуюся решением нагруженного функционального уравнения

$$u(x, y) = u\left(\frac{x-y}{2}, \frac{y-x}{2}\right) + u\left(\frac{r+x+y}{2}, \frac{r-x-y}{2}\right) - u\left(\frac{r}{2}, -\frac{r}{2}\right). \tag{35}$$

Уравнение (35) представляет собой специальную форму записи теоремы Даламбера о том, что любое регулярное в выпуклой области Ω решение $u(z)$ уравнения (34) представимо в виде

$$u(z) = \varphi(x+y) + \psi(x-y),$$

где $\varphi(\xi)$ и $\psi(\eta)$ – действительные непрерывные функции переменных $\xi = x+y$, $\eta = x-y$.

Функцию $u = u(x, y)$, обладающую тем свойством, что $u(x, 0)$ и $u_y(x, 0)$ принадлежат пространству $L[0, r]$, можно принять за обобщенное решение уравнения

$$|y|^m u_{xx} - u_{yy} = 0, \quad m = \text{const} \geq 0, \quad y < 0,$$

в области

$$\Omega = \left\{ z : 0 < \xi = x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} < \eta = x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} < r \right\},$$

если оно удовлетворяет нагруженному уравнению

$$u(x, y) = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)}(\eta - \xi)^{1-2\beta} D_{\xi\eta}^{-\beta}(\eta - t)^{\beta-1} u(t, 0) + \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{4}{m+2} \right)^{2\beta} \frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma(1-\beta)} D_{\xi\eta}^{\beta-1}(\eta - t)^{-\beta} u_y(t, 0), \quad \beta = \frac{m}{2m+4},$$

где $D_{\xi\eta}^{-\mu}$ – оператор дробного интегрирования порядка $\mu > 0$ с началом в точке $\xi \geq 0$ и с концом в точке $\eta > \xi$:

$$D_{\xi\eta}^{-\mu} \varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_{\xi}^{\eta} \frac{\varphi(t) dt}{(\eta - \xi)^{1-\mu}} \quad \forall \varphi(\eta) \in L[0, r].$$

В случае, когда $u(x, 0)$ и $u_y(x, 0)$ при $0 \leq x \leq r$ удовлетворяют условию Гельдера порядка $\alpha_1 > 1 - \beta$ и $\alpha_2 > \beta$ соответственно, это определение совпадает с определением обобщенного решения задачи Коши: $u(x, 0) = \tau(x)$, $u_y(x, 0) = \nu(x)$, $0 < x < r$ для уравнения (36) класса R_1 по терминологии К. И. Бабенко [33, с. 148], [34, с. 38].

Положим, что Ω – ограниченная область плоскости комплексной переменной $z = x + iy$, граница σ которой состоит из конечного числа непересекающихся кусочно-гладких замкнутых линий. В области Ω рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = f(z) = \text{Re } f(z) + i \text{Im } f(z), \quad (36)$$

где

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

– оператор Коши–Римана, $w(z) = u(z) + iv(z)$ – искомая, а $f(z)$ – заданная функции комплексной переменной $z = x + iy$.

Обобщенное решение $w = w(z) \in C(\bar{\Omega})$ уравнения (36) с правой частью $f(z) \in C(\bar{\Omega})$ можно ввести как решение нагруженного интегрального уравнения

$$w(z) - \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{w(t) dt}{t - z} = \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\Omega. \quad (37)$$

Уравнение (37) следует из формулы Грина для оператора $\partial/\partial\bar{z}$ и в теории функций комплексного переменного известно под названием формулы Бореля–Помпею.

Любое решение u нагруженного уравнения, задаваемого формулой Грина [4, с. 145] для линейного дифференциального оператора $L : D(L) \rightarrow R(L)$ легко интерпретируется как обобщенное решение соответствующего уравнения $Lu = f$, $u \in D(L)$, $f \in R(L)$. Сказанное прокомментируем на примере уравнения

$$Lu = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (38)$$

где $x \in (x_1, x_2, \dots, x_n)$;

$$L = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} a^{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n a^i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x),$$

Ω – область из $\mathbb{R}^n$, граница $\sigma = \partial\Omega$ которой состоит из конечного числа непересекающихся замкнутых $(n-1)$ -мерных гладких поверхностей; $a^{ij}(x)$, $a^i(x)$, $c(x)$ – непрерывные в замыкании $\bar{\Omega} = \Omega \cup \sigma$ функции.

Пусть:

$$L^* = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} a^{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} a^i(x)$$

– оператор, сопряженный к оператору L ; $\nu_j = \cos(\nu, x_j)$ – направляющие косинусы внешней нормали $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$ к границе σ в точке $x \in \sigma$; $\nu^* = (\nu^1, \nu^2, \dots, \nu^n)$, $\nu^i = a^{ij}(x)\nu_j$, – кономаль (относительно L) в точке $x \in \sigma$; $a = (a^1, a^2, \dots, a^n)$;

$$a\nu = a^1(x)\nu_1 + a^2(x)\nu_2 + \dots + a^n(x)\nu_n;$$

$\partial u/\partial \nu^*$ – производная по направлению кономали от функции $u(x)$ в точке x ; $v = v(x)$ – произвольная функция из области определения $D(L^*)$ оператора L^* , принадлежащей $C^1(\bar{\Omega})$. Тогда обобщенное решение уравнения (38) определяется как функция $u = u(x)$, удовлетворяющая нагруженному уравнению

$$\int_{\Omega} u L^* v d\Omega + \int_{\sigma} \left(v \frac{\partial u}{\partial \nu^*} - u \frac{\partial v}{\partial \nu^*} + u v a \nu \right) d\sigma = \int_{\Omega} v f d\Omega. \quad (39)$$

Если v и $\partial v/\partial \nu^*$ или же u и v обращены в нуль на σ , то нагруженное уравнение (39) вырождается в интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$\int_{\Omega} (u L^* v - f v) d\Omega = 0. \quad (40)$$

Хорошо известно, что уравнение (40) лежит в основе определения слабого решения задачи Дирихле $u|_{\sigma} = 0$ для уравнения (38).

При наличии специального (фундаментального) решения $v = G(x, y)$ у оператора L , которое обращается в бесконечность определенного порядка при $x = y$, уравнение (39) можно записать в виде (6).

В случае, когда $n = 2$, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, оператор

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial}{\partial x_2},$$

а

$$L^* = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial}{\partial x_2},$$

в качестве функции v можно взять, например, фундаментальное решение уравнения Фурье $Lu = 0$:

$$v(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(x_2 - y_2)}} \exp \left[\frac{(x_1 - y_1)^2}{y_2 - x_2} \right], \quad x_2 > y_2.$$

Литература

1. Нахушев А. М. О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегродифференциального уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 1. С. 103–108.
2. Нахушев А. М. Нелокальная задача и задача Гурса для нагруженного уравнения гиперболического типа и их приложения к прогнозу почвенной влаги // ДАН СССР. 1978. Т. 242, № 5. С. 1008–1011.
3. Nakhushev A. M. A nonlocal problem and the Goursat problem for a loaded equation of hyperbolic type, and their application to the prediction of ground moisture // Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1978. Vol. 242, no. 5. Pp. 1243–1247.
4. Дженалиев М. Т. К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алматы: Компьютерный центр ИТПМ, 1995. 270 с.
5. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. 301 с.
6. Калитвин А. С. Линейные операторы с частными интегралами. Воронеж: ЦЧКИ, 2000. 252 с.
7. Забрейко П. П., Калитвин А. С., Фролова Е. В. Об интегральных уравнениях с частными интегралами в пространстве непрерывных функций // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38, № 4. С. 538–546.
8. Назаров Н. Н. Об одном новом классе линейных интегральных уравнений // Труды Ин-та мат. и мех. АН УзССР. 1948. Вып. 4. С. 77–106.
9. Смирнов В. И. Курс высшей математики. М.–Л.: ГИТТЛ, 1951. Т. 4. 804 с.
10. Каров Х. М. Об одном приложении теоремы Рисса–Шаудера к интегральным уравнениям типа Кнезера // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 6. С. 815–819.
11. Гюнтер Н. М. К теории интегралов Стильтьеса–Радона и интегральных уравнений // Доклады АН СССР. 1938. Т. 21. С. 219–223.
12. Гюнтер Н. М. К общей теории интегральных уравнений // Доклады АН СССР. 1939. Т. 22. С. 215–219.

13. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.
14. Lungu N. On some Volterra integral inequalities // Fixed Point Theory. 2007. Vol. 8, no. 1. Pp. 39–45.
15. Ломов И. С. Свойства базисности корневых векторов нагруженных дифференциальных операторов второго порядка на интервале // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 1. С. 80–93.
16. Krall A. M. The development of general differential and general differential boundary systems // Rock. Moun. J. Math. 1975. Vol. 5, no. 4. Pp. 493–542.
17. Искендеров А. Д. О первой краевой задаче для нагруженной системы квазилинейных параболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, № 10. С. 1911–1913.
18. Искендеров А. Д. О смешанной задаче для нагруженных квазилинейных уравнений гиперболического типа // ДАН СССР. 1971. Т. 199, № 6. С. 1237–1239.
19. Dzenaliev M. T., Ramazanov M. I. On the boundary value problem for the spectrally loaded heat conduction operator // Siberian Math. J. 2006. Vol. 47, no. 3. Pp. 527–547.
20. Кожанов А. И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // Журнал вычисл. матем. и мат. физики. 2004. Т. 44, № 4. С. 694–716.
21. Кожанов А. И. Обратная задача для параболического уравнения с неизвестным коэффициентом специального типа // Неклассические уравнения математической физики: Труды семинара, посвященного 60-летию В. Н. Врагова. Новосибирск: Изд-во Института математики им. С. Л. Соболева, 2005. С. 167–176.
22. Владимиров В. С. Математические задачи односкоростной теории переноса частиц // Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1961. Т. 61. 158 с.
23. Хо Хо Сун Задача Трикоми для нагруженной системы Эйлера-Дарбу-Пуассона. Нальчик, 1989. 16 с. Деп. в ВИНТИ 31.10.90 г., № 546–890.
24. Хо Хо Сун Задача Дирихле для одной системы нагруженных уравнений первого порядка. Нелокальные задачи и их приложения к автоматизированным системам. Межвуз. сборник. Нальчик: КБГУ, 1989. С. 258–264.
25. Нахушева В. А. Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов. М.: Наука, 2006. 174 с.
26. Псху А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.
27. Нахушев А. М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006. 287 с.
28. Ломов И. С. Теорема о безусловной базисности корневых векторов нагруженных дифференциальных операторов второго порядка // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 9. С. 1550–1563.
29. Ильин В. А. О безусловной базисности на замкнутом интервале систем собственных и присоединенных функций дифференциального оператора второго порядка // Доклады АН СССР. 1983. Т. 273, № 5. С. 1048–1053.
30. Ильин В. А. Необходимые и достаточные условия базисности Рисса корневых векторов разрывных операторов второго порядка // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 12. С. 2059–2071.
31. Сербина Л. И. Нелокальные математические модели переноса в водоносных системах. М.: Наука, 2007. 167 с.
32. Нахушев А. М. О нелокальных краевых задачах со смещением и их связи с нагруженными уравнениями // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 1. С. 92–102.
33. Пулькин С. П. Избранные труды. Самара: Универс групп, 2007. 264 с.
34. Смирнов М. М. Вырождающиеся гиперболические уравнения. Минск: Вышэйшая шк., 1977. 157 с.

О некоторых модельных уравнениях движения почвенной влаги

При определенной идеализации движение влаги в почве описывается уравнением Аллера [1], [2]:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right], \quad 0 < x < h \equiv r, \quad 0 < y < T. \quad (1)$$

Здесь $u = u(x, y) \equiv u(z)$, $z = x + iy$, означает влажность в точке x почвенного слоя $0 \leq x \leq r$ в момент времени y от начального $y = 0$ до расчетного $y = T$; $\varepsilon = \text{const} \geq 0$, $a = \text{const} > 0$.

Если известен поток влаги на поверхности почвы $x = 0$:

$$\left(\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = -f(y), \quad 0 \leq y \leq T, \quad (2)$$

то уравнение (1) можно заменить нагруженным уравнением гиперболического типа:

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \int_0^x u(\xi, y) d\xi = f(y). \quad (3)$$

При $\varepsilon = 0$ уравнение (1) переходит в уравнение диффузии влаги

$$u_y = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < r, \quad 0 < y < T, \quad (4)$$

которое основано на законе Дарси, а условие (2) принимает вид

$$u_x(iy) = \nu(y), \quad 0 \leq y \leq T, \quad (5)$$

где $\nu(y) = -f(y)/a^2$.

Условие (2) представляет собой дифференциальное уравнение

$$\varepsilon du_x(iy)/dy + a^2 u_x(iy) = -f(y), \quad 0 \leq y \leq T,$$

относительно $u_x(iy)$. Поэтому если задано условие Коши: $u_x(0) = \nu_0$, то его решение задается формулой (5) с граничной функцией

$$\nu(y) = \nu_0 \exp\left(-\frac{a^2 y}{\varepsilon}\right) - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^y f(t) \exp\left(\frac{t-y}{\varepsilon} a^2\right) dt.$$

В области $\Omega = \{z : 0 < x < r, 0 < y < T\}$ существует и притом единственное решение $u(z) = u(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq r, \quad (6)$$

$$u(iy) = \tau(y), \quad u_x(iy) = \nu(y), \quad 0 \leq y \leq T. \quad (7)$$

Пусть $\sigma_{x0} = \{z: y = 0, 0 \leq x \leq r\}$, $\sigma_{0y} = \{z: x = 0, 0 \leq y \leq T\}$, $\sigma = \sigma_{x0} \cup \sigma_{0y}$. Отрезок σ_{0y} , где задается условие Коши (7), представляет собой временноподобное многообразие для уравнения (4).

Известно [3, с. 549], что задача определения в области Ω решения $u(z)$ уравнения (4), удовлетворяющего условию Коши (7) на σ_{0y} , не является корректной по Адамару, хотя она имеет, и притом единственное, решение.

В моей заметке [4, с. 105] (см. также [5]) было предложено регуляризовать задачу (6), (7) для уравнения (4), заменив его уравнением

$$a^2 u_{xx} + \varepsilon u_{xy} - u_y = 0. \quad (8)$$

Еще Ж. Адамар [6, с. 117] обращал внимание, что фундаментальное решение уравнения (4) можно получить как предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ функции Римана для уравнения (8).

Уравнение (8) для любого $\varepsilon > 0$ является уравнением гиперболического типа, имеет два семейства простых характеристик $y = \text{const}$, $a^2 y - \varepsilon x = \text{const}$, первое из которых совпадает с характеристиками уравнения (4).

Вместо уравнения (8) в качестве регуляризатора можно взять и уравнение (1). Это уравнение R. E. Showalter и T. W. Ting [7] назвали псевдопараболическим, хотя оно является тоже уравнением гиперболического типа с действительными характеристиками $x = \text{const}$, $y = \text{const}$. В случае уравнения (1) замкнутая область $\bar{\Omega}$ совпадает с характеристическим прямоугольником $0 \leq x \leq r$, $0 \leq y \leq T$, а носитель σ начально-краевых условий (6), (7) состоит из двух характеристических отрезков σ_{x0} и σ_{0y} , исходящих из одной точки $z = 0$, причем характеристики $x = \text{const}$ (в том числе и σ_{0y}) являются кратными.

Задача (6), (7) для уравнения (1) является задачей Гурса или характеристической задачей Коши с негладким характеристическим носителем, а для уравнения (4) – задачей Коши со смешанным носителем.

Предположим, что $a = 1$ и рассмотрим задачу Коши (7) для уравнения (8), то есть для уравнения

$$u_{xx} + \varepsilon u_{xy} - u_y = 0 \quad (9)$$

в области Ω_ε , ограниченной отрезком σ_{0y} и характеристиками $y = T$, $y = \varepsilon x$ (см. рис. 1): $A_0 = (0, 0)$, $B_0 = (0, T)$, $C_0 = (T/\varepsilon, T)$, $A_0 C_0: y = \varepsilon x$, $AC: \eta = \xi$; $C = (T, T)$.

В уравнении (9) совершим переход к характеристическим координатам $\xi = y - \varepsilon x$, $\eta = y$ и к новой зависимой переменной $v = v(\xi, \eta)$ по формуле

$$u = v(\xi, \eta) \exp[-(\xi + \eta)/\varepsilon^2]. \quad (10)$$

В результате область Ω_ε отобразится на область $\Delta_\varepsilon = \{(\xi, \eta) : 0 < \xi < \eta < T\}$, отрезок A_0B_0 – в отрезок AC , B_0C_0 – в BC , A_0C_0 – в AB (рис. 2).

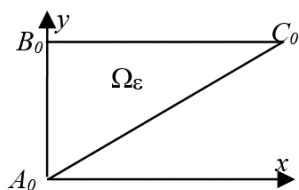


Рис. 1

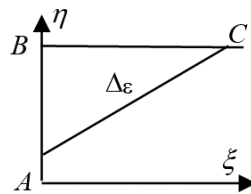


Рис. 2

Уравнение (4) запишется в виде

$$\left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} \right) u \left(\frac{\eta - \xi}{\varepsilon}, \eta \right) = 0; \quad (11)$$

функция $v = v(\xi, \eta)$ в области Δ_ε будет в силу (7), (10) и (11) решением телеграфного уравнения

$$\varepsilon^4 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} - v = 0, \quad (12)$$

удовлетворяющим на AC условию

$$v|_{\xi=\eta} = \tau_\varepsilon(\eta), \quad \left(\varepsilon^2 \frac{\partial v}{\partial \xi} - v \right) \Big|_{\xi=\eta} = \nu_\varepsilon(\eta), \quad (13)$$

где

$$\tau_\varepsilon(\eta) = \tau(\eta) \exp[-2\eta/\varepsilon^2], \quad \nu_\varepsilon(\eta) = -\varepsilon \nu(\eta) \exp[-2\eta/\varepsilon^2]. \quad (14)$$

С целью построения функции Римана для уравнения (12) в области Δ_ε рассмотрим уравнение

$$\mu^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = U, \quad \mu = \varepsilon^2. \quad (15)$$

Известно (см., например, [8, с. 194]), что функция Римана $R(x, y; \xi, \eta)$ для уравнения (15) однозначно определяется как решение интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$R(x, y; \xi, \eta) + \frac{1}{\mu^2} \int_{\xi}^x dx_1 \int_r^y R(x_1, y_1; \xi, \eta) dy_1 = 1, \quad (\xi, \eta) \in \Delta_\varepsilon. \quad (16)$$

Из (16) нетрудно увидеть, что решение (16) представимо в виде

$$R(x, y; \xi, \eta) = \Phi(Z), \quad (17)$$

$\Phi(Z)$ – непрерывная функция аргумента $Z = XY$, $X = x - \xi$, $Y = y - \eta$.

С учетом (17) из (16) имеем

$$[1 - \Phi(Z)]\mu^2 = \int_0^X dX_1 \int_0^Y \Phi(X_1 Y_1) dY_1; \quad (18)$$

$$\mu^2 \Phi'(Z) = -\frac{1}{Y} \int_0^Y \Phi(X Y_1) dY_1 = -\int_0^1 \Phi(Zt) dt; \quad (19)$$

$$\mu^2 [Z\Phi''(Z) + \Phi'(Z)] = -\Phi(Z). \quad (20)$$

Равенства (18)–(20) позволяют утверждать, что функция $\Phi(Z)$ должна удовлетворять одному из следующих двух условий:

$$\Phi(0) = 1 \quad (21)$$

или $\Phi'(0) = -1/\mu^2$ для вырождающегося при $Z = 0$ обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\mu^2 \frac{d}{dZ} [Z\Phi'(Z)] + \Phi(Z) = 0. \quad (22)$$

Пусть $\rho_n = (\rho^1, \rho^2, \dots, \rho^n)$ – точка из $\mathbb{R}^n$ с положительными координатами; $\mu_n = (\mu^1, \mu^2, \dots, \mu^n)$ – вектор с комплексными компонентами;

$$E_{1/\rho_n}[z; \mu_n] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu^1 + \rho^1 k) \Gamma(\mu^2 + \rho^2 k) \cdots \Gamma(\mu^n + \rho^n k)} \quad (23)$$

– обобщенная функция Райта [9] и обобщенная функция Миттаг-Леффлера [10];

$$E_{1/\rho_n}^{\rho_m}[z; \mu_n] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi(\mu^1 + \rho^1 k) \psi(\mu^2 + \rho^2 k) \cdots \psi(\mu^m + \rho^m k)}{\Gamma(\mu^1 + \rho^1 k) \Gamma(\mu^2 + \rho^2 k) \cdots \Gamma(\mu^n + \rho^n k)} z^k, \quad (24)$$

где $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ – пси-функция.

При $n = 2$, $\rho_2 = \mu_2 = (1, 1)$ функция (23) совпадает с функцией

$$J(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma^2(1+k)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k!)^2}, \quad (25)$$

а функция (24) – с функцией

$$E_{1/(1,1)}^1[z; (1, 1)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi(k+1)}{(k!)^2} z^k, \quad (26)$$

которую будем обозначать через $J_*(z)$.

Функция (25) является решением уравнения $[zJ(z)]' = J(z)$ и с функцией Бесселя $J_0(z)$ она связана формулой $J_0(z) = J(-z^2/4)$ [10, с. 130]. Легко видеть, что $J(z^2/4) = I_0(z)$, $|z| < \infty$, $|\arg z| < \pi$.

Имеет место следующая

Лемма 1. *Общее решение дифференциального уравнения*

$$[zw'(z)]' - w(z) = 0 \quad (27)$$

задается формулой

$$w(z) = C_1 J(z) + C_2 [J(z) \log z - 2J_*(z)], \quad (28)$$

где C_1 и C_2 – две произвольные постоянные.

Формула (28) вытекает из «общего интеграла», выписанного Э. Гурса [11, § 414] в следующей форме:

$$w(z) = C_1 J(1, x) + C_2 \left[J(1, x) \log x - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} \right].$$

Это легко увидеть, если обратить внимание на то, что

$$J(1, x) \equiv J(x), \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \psi(n+1) - \psi(1).$$

В силу (25) и (26) $J_*(0) = \psi(1)$, $J(0) = 1$. Поэтому из (28) заключаем, что задача Коши: $\lim_{z \rightarrow 0} w(z) = w_0 < \infty$ для уравнения (27) имеет и притом единственное решение $w(z) = w_0 J(z)$.

Единственное решение $\Phi(Z)$ специальной задачи Коши (21) для уравнения (22) имеет вид (см. [11, § 414])

$$\Phi(Z) = J(-Z/\mu^2). \quad (29)$$

Согласно (17) и (29) функция Римана для уравнения (15) однозначно определяется формулой

$$R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = J(-\zeta/\varepsilon^4), \quad \zeta = (\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0).$$

Отсюда, возвращаясь к прежним переменным, получим функцию Римана R_ε для уравнения (9):

$$\begin{aligned} R_\varepsilon(x, y; x_0, y_0) &= J \left(-\frac{(y - \varepsilon x - y_0 + \varepsilon x_0)(y - y_0)}{\varepsilon^4} \right) \exp \left[\frac{\varepsilon x - 2y}{\varepsilon^2} \right] = \\ &= J_0 \left(\frac{2}{\varepsilon^2} \sqrt{(y - y_0)(y - \varepsilon x - y_0 + \varepsilon x_0)} \right) \exp \left[\frac{\varepsilon x - 2y}{\varepsilon^2} \right]. \end{aligned} \quad (30)$$

Пользуясь асимптотическим представлением функции Бесселя (25) для больших значений аргумента, можно показать, что функция (30) при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремится к фундаментальному решению уравнения (4).

Решение $u_\varepsilon(x, y)$ задачи Коши (7) для уравнения (8) в треугольной области Ω_ε выписывается в явном виде через функцию Римана (30). Пусть $\psi(x)$ – след этого решения на характеристике A_0C_0 : $y = \varepsilon x$:

$$u_\varepsilon|_{A_0C_0} = \psi(x). \quad (31)$$

В части Ω_ε^- области Ω , лежащей ниже характеристики A_0C_0 , решение однозначно определяется как решение $u_\varepsilon^-(x, y)$ первой краевой задачи Дарбу (6), (31) для уравнения (8) с данными на $\sigma_{x0} \cup \sigma_{0y}$.

Если $r = \infty$ и решение $u(z)$ задачи ищется в классе функций, удовлетворяющих условию Тихонова, то функции $\varphi(x)$, $\tau(y)$ и $\nu(y)$ не могут быть заданы произвольным образом. Известно (см. [12, с. 30]), что если $\varphi(x) \equiv 0$, то $\tau(y)$ и $\nu(y)$ должны удовлетворять уравнению

$$a\nu(y) + D_{0y}^{1/2}\tau(y) = 0,$$

где $D_{0y}^{1/2}$ – оператор дробного дифференцирования порядка $1/2$ с началом и концом в точках 0 и y соответственно.

Самостоятельный интерес представляет нагруженное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\varepsilon \frac{\partial u}{\partial x} - \int_0^x u(\xi, y) d\xi - \int_0^y f(\eta) d\eta \right] = 0, \quad (32)$$

которое получается из (3) при $a = 0$.

Уравнение (32) в силу (6) эквивалентно уравнению

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial x} - \int_0^x u(\xi, y) d\xi - \int_0^y f(\eta) d\eta = \varepsilon \varphi'(x) - \int_0^x \varphi(\xi) d\xi. \quad (33)$$

Условие $u(iy) = \tau(y)$ из (7) позволяет переписать (33) в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon u(x, y) - \varepsilon \tau(y) - \int_0^x dt \int_0^t u(\xi, y) d\xi - x \int_0^y f(\eta) d\eta = \\ = \varepsilon [\varphi(x) - \varphi(0)] - \int_0^x dt \int_0^t \varphi(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Отсюда после перестановки порядка интегрирования находим

$$u(x, y) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x (x - \xi) u(\xi, y) d\xi + F(f, \varphi, \tau; x, y), \quad (34)$$

где

$$F(f, \varphi, \tau; x, y) = \tau(y) + \varphi(x) - \varphi(0) - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x (x - \xi) \varphi(\xi) d\xi + \frac{x}{\varepsilon} \int_0^y f(\eta) d\eta.$$

Единственное решение $u(z) = u(x, y)$ интегрального уравнения Вольтерра (34) задается формулой Хилле–Тамаркина

$$u(z) = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^x F(f, \varphi, \tau; t, y) E_2 \left[\frac{1}{\varepsilon} (x - t)^2 \right] dt. \quad (35)$$

Здесь $E_2[z] = E_{1/2}[z; 1] = \operatorname{ch} z$.

Функция (35) является решением уравнения $u_y = \varepsilon u_{xxy}$, удовлетворяющим условиям:

$$\begin{aligned} \varepsilon u_{xy}|_{x=0} &= -f(y), & u(x, 0) &= \varphi(x), & u(0, y) &= \tau(y), \\ u_x(0, y) &= \nu(y) = -D_{0y}^{-1} f(\eta)/\varepsilon. \end{aligned}$$

Формулой (35) можно эффективно воспользоваться для прогноза динамики почвенной влаги, когда коэффициент влагопроводности пренебрежительно мал и можно положить его равным нулю.

Для уравнения (1) рассмотрим смешанную задачу с начальным условием (6) и граничным условием

$$u_x(iy) = \nu(y), \quad u_x(r + iy) = 0, \quad 0 \leq y \leq T, \quad (36)$$

где $\nu(y) \in C^1[0, T]$, $\varphi(x) \in C^2[0, r]$. Здесь второе условие $u_x(r, y) = 0$ характеризует отсутствие потока влаги через границу $x = r$ почвенного слоя $0 \leq x \leq r$, и оно, как это следует из (3) при $x = r$, порождает нелокальное условие

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_0^r u(x, y) dx = f(y), \quad 0 \leq y \leq T, \quad (37)$$

с функцией $f(y)$, означающей скорость иссушения слоя $[0, r]$.

В уравнении (1) введем новую зависимую переменную $w = w(z)$ по формуле

$$w(z) = \begin{cases} u(z)\nu(0) - \varphi(x)\nu(y) & \text{при } \nu(0) = \varphi'(0) \neq 0; \\ u(z) - \varphi(x) & \text{при} \\ nu(0) = \varphi'(0) = 0. \end{cases}$$

Для отыскания функции $w(z)$ согласно (1) и (36) получаем однородную смешанную задачу [1]

$$w(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq r, \quad (38)$$

$$w_x(iy) = 0, \quad w_x(r + iy) = 0, \quad 0 \leq y \leq T, \quad (39)$$

для неоднородного уравнения

$$\varepsilon w_{xxy} + a^2 w_{xx} - w_y = F(z) \quad (40)$$

с правой частью

$$F(z) = \begin{cases} [a^2 \nu(y) + \varepsilon \nu'(y)] \varphi''(x) - \nu'(y) \varphi(x) & \text{при } \nu(0) = \varphi'(0) \neq 0; \\ a^2 \varphi''(x) & \text{при } \nu(0) = \varphi'(0) = 0. \end{cases}$$

Единственное решение $w(z)$ задачи (38), (39) для уравнения (40) задается следующей формулой:

$$w(z) = \int_0^y d\eta \int_0^r G_\varepsilon(x, \xi; y - \eta) F(\zeta) d\xi, \quad \zeta = \xi + i\eta, \quad (41)$$

где

$$G_\varepsilon(x, \xi; y - \eta) = \frac{2}{r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \varepsilon \mu_k^2} \exp \left[\frac{(a \mu_k)^2}{1 + \varepsilon \mu_k^2} (\eta - y) \right] \cos \mu_k x \cos \mu_k \xi, \quad (42)$$

— функция Грина, $\mu_k = \pi k/r$.

Соответствующее неоднородному внутреннекраевому условию (37) однородное условие

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_0^r u(\xi, y) d\xi = 0, \quad 0 \leq y \leq T, \quad (43)$$

вместе с условием согласования (непрерывности $u_x(z)$ в точке $z = r$): $u_x(r) = \tau'(r)$ при $\tau'(r) = 0$ эквивалентно условию

$$u_x(r + iy) = 0, \quad 0 \leq y \leq T, \quad (44)$$

а когда скорость иссушения $f(y) = 0$ и $u_x(0) = \nu_0 = \varphi'(0) = 0$, второе условие (7), эквивалентное условию (2), переходит в однородное условие

$$u_x(iy) = 0, \quad 0 \leq y \leq T. \quad (45)$$

Поскольку $\nu(0) = \varphi'(0) = 0$, то соответствующие задаче (6), (44), (45) для уравнения (1) функции $w(z) = u(z) - \varphi(x)$, $F(z) = a^2 \varphi''(x)$. Поэтому, если $\varphi(x) \in C^2[0, r]$, $\varphi'(0) = \varphi'(r) = 0$, то в соответствии с (41) единственное решение $u(z)$ нелокальной смешанной задачи (6), (43), (45) определяется по формуле

$$u(z) = \varphi(x) + a^2 \int_0^y d\eta \int_0^r G_\varepsilon(x, \xi; y - \eta) \varphi''(\xi) d\xi. \quad (46)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ функция $G_\varepsilon(x, \xi; y - \eta)$ имеет предел

$$G_0(x, \xi; y - \eta) = \frac{2}{r} \sum_{k=0}^{\infty} \exp[(\eta - y)(a\mu_k)^2] \cos \mu_k \xi \cos \mu_k x,$$

который является функцией Грина задачи (6), (44), (45) для уравнения (4).

Литература

1. Янггарбер В. А. Сеточная схема для решения модифицированного уравнения влагопереноса // Доклады академии сельскохозяйственных наук. 1966. № 8. С. 46–48.
2. Haillaire L. L'eau et la production vegetale // Institute National de la Recherche Agromomique. Pp. 1964.
3. Лаврентьев М. М., Соболев Л. Я. Теория операторов и некорректные задачи. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1999. 702 с.
4. Нахушев А. М. Регуляризация задачи Коши со смешанным носителем для уравнения теплопроводности методом малого параметра. В сб. «Методы малого параметра». Тезисы докладов Всесоюзного научного совещания. Кабардино-Балкарский госуниверситет. Нальчик, 1987. 167 с.
5. Лайпанова З. М. Об одном методе регуляризации задачи Коши со смешанным носителем // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2005. Т. 7, № 2. С. 32–36.
6. Hadamard J. Equations aux derivees partielles // L'enseignement mathematique. 1936. Vol. 35. Pp. 5.
7. Showalter R. E., Ting T. W. Asymptotic behavior of solutions of pseudo-parabolic partial differential equations // Ann. Mat. Pura Appl. 1971. Pp. 241–258.
8. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. 301 с.
9. Wright E. M. The generalized Bessel function of order greather than one // The Ruarterly Journal of Mathematics Oxford series. 1940. Vol. 11, no. 11. Pp. 36–48.
10. Гурса Э. Курс математического анализа. Т. III, ч. 1. М.–Л.: ГТТИ, 1933. 276 с.
11. Гурса Э. Курс математического анализа. Т. III, ч. 2. М.–Л.: ГТТИ, 1934. 320 с.
12. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 272 с.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН

On some synergetic input-output systems and their state equations

Let S – one-dimensional input-output system, defined as binary relation $S \subset V \times U$ with input unit V and output unit U ; $v \in V$ – input to system S , and $u \in U$ – output from S ; input, stimulus, rate signal – synonyms of the same concept: output, response, reaction are considered to be identical.

Vector $w = (u, v)$ is called synergetic, or synergetic couple, if linear differential operators L_m and L_n with domain definitions $D(L_m)$ and $D(L_n)$ exist and such invertible mapping $u \rightarrow \varphi(u) \in D(L_m)$ and $v \rightarrow \psi(v) \in D(L_n)$,

that $L_m\varphi(u) = L_n\psi(v)$. The equation, describing input-output formula, is called the equation of condition of input-output system. The equation of condition is called defining, if it imposes convention that is letting univalently define the response u of the system S to stimulus v .

A system with input signal $u \in U$ and output signal $v \in V$ is called quasilinear input-output system, if transformations like $u \rightarrow \varphi(u)$, $v \rightarrow \psi(v)$ exist, which are invertible almost for all $u \in D(\varphi)$ and $v \in D(\psi)$, so that the system with input $\psi(v)$ and output $\varphi(u)$ is linear [1].

At mathematical simulation of hereditary properties of the most visco-elastic bodies of fractal structure, which are interpreted as input-output model with synergetic vector $w = (\varepsilon, \sigma)$, different types of equation like

$$\sigma + \sum_{j=1}^m b_j D_{0t}^{\alpha_j} \sigma(\eta) = E_0 \varepsilon + \sum_{j=1}^n E_j D_{0t}^{\beta_j} \varepsilon(\eta), \quad (1)$$

occur as equation of condition where $\sigma = \sigma(t)$ and $\varepsilon = \varepsilon(t)$ – stress and deformation at timing $t \geq 0$, D_{0t}^μ – operator of fractional integro-differential according to Riemann-Liouville's order $|\mu|$ with the start at the primary initial moment of time $t = 0$; b_j , E_0 , E_j – given dimension of a body; m and n – natural numbers; α_j and β_j – real numbers [2], [3, p. 149].

The great interest causes a synergetic couple (ε, σ) with new equations of condition like

$$\sigma + \int_0^m b_\beta D_{0t}^\beta \sigma(\eta) d\beta = E_0 \varepsilon + \int_0^n E(\alpha) D_{0t}^\alpha \varepsilon(\eta) d\alpha.$$

Particular cases for equation (1) are Maxwell's model

$$\sigma + \tau \sigma' = \tau E_m \varepsilon' \Leftrightarrow \sigma = [\sigma(0) - E_m \varepsilon(0)] \exp(-t/\tau) + E_m \varepsilon - E[\varepsilon, t] \quad (2)$$

and rheological equation of condition [4, p. 75]

$$\sigma = E_0 D_{0t}^\alpha \varepsilon, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (3)$$

Here: τ – relaxation time; E_m – Hooke module; $\tau E[\varepsilon; t] = D_{0t}^{-1} \{ \exp[(\eta - t)/\tau] \varepsilon(\eta) \}$.

Boltzmann equation $\sigma(t) = E_m [\varepsilon(t) - D_{0t}^{-1} \varphi(t - \eta) \varepsilon(\eta)]$ with memory function $\varphi(t)$ appears as defining equation of input-output system with synergetic vector (ε, σ) . With $\tau \varphi(t) = \exp(-t/\tau)$ and $\sigma(0) = \varepsilon(0) E_m$ it follows from this equation (2).

The system of equations of motion for congenerical hereditary-elastic rod with density ρ , making up pitching oscillations under external load $f = f(x, t)$, meant per unit volume, looks like [5, p. 30]:

$$\rho u_{tt} - \sigma_x = f, \quad \varepsilon = u_x, \quad (4)$$

where $\sigma = \sigma(x, t)$, $u = u(x, t)$ and $\varepsilon = \varepsilon(x, t)$ – stress, shift of material element of rod at $t \in [0, T]$.

If the system (4) is interpreted as a input-output system with synergetic vector $w = (f, u)$, then as its equation of condition we can take the equation (1), when at this time σ and ε are functions of x point and time t . In particular, you can take the equation (3) for this system as the equation of condition. Then from (3) and (4) follows

$$\rho u_{tt} - E_0 D_{0t}^\alpha u_{xx}(x, \eta) = f. \quad (5)$$

Let $D_{0t}^\alpha \sigma_x(x, \eta) \in L[0, T]$, $\lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-1} \sigma_x(x, \eta) = 0$ for every coordinate x of rod point. Then any solution $u(x, t)$ of equation (5) will be the solution of the next loaded partial equation:

$$\begin{aligned} \rho \left[D_{0t}^{2-\alpha} u(x, \eta) - \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} u_t(x, 0) + \frac{t^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} u(x, 0) \right] = \\ = E_0 u_{xx} + D_{0t}^{-\alpha} f(x, \eta). \end{aligned} \quad (6)$$

If the shift of rod material element complies with homogeneous Cauchy condition: $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 0$ and $c^2 = E_0/\rho$, $F(x, t) = D_{0t}^{-\alpha} f(x, \eta)/\rho$, then any solution for equation (6) will be the solution of nonlocal wave equation

$$D_{0t}^{2-\alpha} u(x, \eta) - c^2 u_{xx} = F(x, t). \quad (7)$$

The theory of equations of type (7) is on intensive research phase.

At certain idealization, the question of propagation of electric signals in compound current lines, when at the cell $-r < x < 0$ of the semi-infinite line $x > -r$ is neglected by losses, and the other part $x > 0$ is seen as cable without leak (look at [6, p. 4]), reduces to the following input-output model:

$$u_x^- + \ell_1 v_t^- = 0, \quad v_x^- + c_1 u_t^- = 0, \quad -r < x < 0; \quad (8)$$

$$u_x^+ + r_2 v^+ = 0, \quad v_x^+ + c_2 u_t^+ = 0, \quad x > 0; \quad (9)$$

$$u^+(0, t) = u^-(0, t), \quad v^+(0, t) = v^-(0, t), \quad (10)$$

$$u^-(x, 0) = 0, \quad v^-(x, 0) = 0, \quad u^+(x, 0) = 0; \quad (11)$$

$$u^-(-r, t) = E(t), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u^+(x, t) = 0; \quad (12)$$

where $E(t)$ – continuous on a time segment $[0, T]$ function; ℓ_1, c_1 – self-induction and capacity (on unit of length) of the first site $-r \leq x \leq 0$, and r_2, c_2 – specific resistance and capacity of the second site $x \geq 0$ line; u^+, v^+ and u^-, v^- – the intensity $u = u(x, t)$ and current strength $v = v(x, t)$ at $x > 0$ and $x < 0$.

If mixed derivative of function u and v exist and are continuous at any point $x \neq 0$ and for any timing $t > 0$, $a^2 = a_1^2$ at $x < 0$ and $a^2 = a_2^2$ at $x > 0$;

$H(x)$ – Heaviside's function, then synergetic vectors $w^-(x, t) = (u^-, v^-)$ and $w^+(x, t) = (u^+, v^+)$ are going to be the solution for the equation

$$\begin{aligned} w_{tt}^- &= a_1^2 w_{xx}^-, & a_1^2 &= 1/(\ell_1 c_1); \\ w_t^+ &= a_2^2 w_{xx}^+, & a_2^2 &= 1/(r_2 c_2), \end{aligned} \quad (13)$$

and function $u = u(x, t)$ – will be the solution of partial differential equation (look [7])

$$\partial^{1+H(-x)} u / \partial t^{1+H(-x)} = a^2 u_{xx}. \quad (14)$$

From the first two equations of systems (8), (9) and the initial condition $v^-(x, 0) = 0$ from (11) follows equalities

$$\begin{aligned} r_2 v^+(x, t) &= -u_x^+(x, t), \\ \ell_1 v^-(x, t) &= -D_{0t}^{-1} u_x^-(x, \eta). \end{aligned} \quad (15)$$

Let $\nu^+(t) = u^+(0, t)$, $\nu^-(t) = u_x^-(0, t)$. Then from (15) and from fitting conditions (10) we have (look [6, p. 5]) the following defining equation for the system with input object $N_+ = \{\nu^+(t)\}$ and output object $N_- = \{\nu^-(t)\}$:

$$\ell_1 \nu^+ = r_2 D_{0t}^{-1} \nu^-(\eta), \quad 0 < t < T. \quad (16)$$

The equality (16) is nonlocal fitting conditions for the system (13) and equation (14) on a line $x = 0$ of changes of its type.

The conditions (11) and (12) for the function u^+ lead to the following equation of condition of input-output system with synergetic vector (τ^+, ν^+) :

$$a_2 \nu^+(t) = -D_{0t}^{1/2} \tau^+(\eta), \quad 0 < t < T. \quad (17)$$

Let counting time $T = 2r/a_1$; $\Omega^- = \{(x, t) : -r < x < 0, 0 < t < T\}$, $\Omega^+ = \{(x, t) : x > 0, 0 < t < T\}$. At Euclid's plane of points (x, t) the closure $\bar{\Omega}^-$ of domain Ω^- is a rectangle with vertices $A_0 = (0, 0)$, $B_0 = (0, T)$, $B_{-r} = (-r, T)$, $A_{-r} = (-r, 0)$. Characteristics $A_0 C_{-r}$: $x + a_1 t = 0$ and $A_{-r} C_0$: $x - a_1 t = -r$ cross its sides $A_{-r} B_{-r}$ and $A_0 B_0$ in points $C_{-r} = (-r, r/a_1)$ and $C_0 = (0, r/a_1)$; $A_0 C_{-r}$ and $A_{-r} C_0$ – diagonals of rectangle $A_0 C_0 C_{-r} A_{-r}$ and they cross in point $D_0 = (-r/2, r/(2a_1))$.

From the second equation of system (8) and (11), $v^-(x, 0) = 0$, follows

$$u^-(x, 0) = 0, \quad u_t^-(x, 0) = 0, \quad -r < x < 0. \quad (18)$$

The stress u^- is supposed to be continuous in $\bar{\Omega}^-$. That is why the function u^- as a solution of Cauchy problem (18) for wave equation is equal to zero in triangle $A_0 D_0 A_{-r}$. The equality to zero of a function u^- at $A_0 D_0$ guarantees a parity

$$a_1 \nu^-(t) = d\tau^-(t)/dt, \quad 0 < t < t_0 = r/a_1, \quad (19)$$

which plays a role of equation of condition of input-output system with synergetic vector (τ^-, ν^-) .

In triangle $A_{-r}D_0C_{-r}$ we have: $u^- = E(t - t_0 - x/a_1)$, $u^-(a_1t/2, t/2) = H(t - t_0)E(t - t_0)$. Taking that into consideration, it's not hard to prove that the components of the synergetic vector (τ^-, ν^-) are bond with the equation of condition

$$a_1\nu^-(t) = d\tau^-(t)/dt - 2H(t - t_0)E'(t - t_0). \quad (20)$$

Let $\tau(t) = \tau^+(t) = \tau^-(t)$, $\nu(t) = \nu^+(t)$, $0 < t < T$. Then the equation (16) and the condition (11) are bounding the equation of condition (17), (18) and (20) like:

$$a_2\nu(t) = -D_{0t}^{1/2}\tau(\eta), \quad (21)$$

$$a_1\ell_1\nu(t) = r_2\tau(t) - 2r_2H(t - t_0)E(t - t_0). \quad (22)$$

From (21) and (22) we conclude: the trace $\tau(t)$ of stress $u(x, t)$ at point $x = 0$ changes of «type» of compound current lines $x \geq -r$ absolutely defines as the solution $\tau(x)$ of Cauchy problem $\tau(0) = 0$ for differential equation of fractional order:

$$D_{0t}^{1/2}\tau(\eta) - \lambda\tau(t) = h(t), \quad 0 < t < T$$

and

$$\tau(t) = D_{0t}^{-1/2}h(\eta) + \lambda \int_0^t E_{1/2}[\lambda\sqrt{t-\eta}] h(\eta)d\eta, \quad (23)$$

$$\tau'(t) = 2\lambda \left\{ D_{t_0t}^{1/2}E(\eta - t_0) + \lambda^2 \int_{t_0}^t \frac{E_2[\lambda\sqrt{t-\eta}; 1/2]}{\sqrt{t-\eta}} E(\eta - t_0)d\eta \right\}, \quad (24)$$

where $t > t_0$, $\lambda = -a_2r_2/(a_1\ell_1)$, $h(t) = -2\lambda H(t - t_0)E(t - t_0)$, $E_\alpha[z; \mu]$ – Mittag-Leffler function, and $E_{1/\alpha}[z] = E_\alpha[z; 1]$.

Let $E' \in L^p[t_0, T]$, $1 < p < 2$, $q = 2p/(2 - p)$. Then $\tau'(t) \in L^q[t_0, T]$ and

$$\left[\int_{t_0}^T |\tau'(t)|^q dt \right]^{1/q} \leq K \left[\int_{t_0}^T |E'(t)|^p dt \right]^{1/p}, \quad (25)$$

where positive constant K depends only on p . The estimate (25) is the corollary of (24) and properties of Riemann–Louville's operator [3, p. 15].

The qualities (21)–(25) of the synergetic vector (τ, ν) allows to build up effective numeral solution methods for local problems of equation (14).

Let now timing is $T = r/(na_1)$, $n = 1, 2, \dots, m$ and it means the site A_0A_{-r} can be divided into $n+1$ equal parts $A_0A_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_{-r}$, $A_j = (a_jT, 0)$, $j = 1, 2, \dots, n-1$. Then function $u^- \neq 0$ only in part $\bar{\Omega}^-$, laying higher the characterized $A_{-r}B_{n-1}$.

The generalized model of synergetic interaction of «predator-prey» type, considering eriditarian phenomena, is given by following equations of motion:

$$\partial_{0t}^\alpha u(\eta) = (\varepsilon_1 - \gamma_1 v)u, \quad \partial_{0t}^\alpha v(\eta) = -(\varepsilon_2 - \gamma_2 u)v, \quad (26)$$

where ∂_{0t}^α – operator of fractional (as in M. Caputo [3, p. 236]) differentiation of an order $\alpha \in [0, 1]$; $u = u(t)$ and $v = v(t)$ – components of the synergetic vector (u, v) at timing $t \geq 0$.

The equation of condition, cohering to (26) input-output system with synergetic vector (u, v) , looks like

$$\gamma_2[\partial_{0t}^\alpha u(\eta) - \varepsilon_1 u] = -\gamma_1[\partial_{0t}^\alpha v(\eta) - \varepsilon_2 v]. \quad (27)$$

With $\alpha = 1$ model (27) coincides with Volterra's model of the ecological interaction «predator-prey» [8].

The equation

$$\partial_{0t}^\alpha u(x, \eta) + u - D_1 u_{xx} - a = -\partial_{0t}^\alpha v(x, \eta) + D_2 v_{xx}$$

is the equation of condition of input-output system, that is given by the following generalized Turing model process of reaction flow in one-dimensional reactor with length r

$$\partial_{0t}^\alpha u(x, \eta) = a + vu^2 - (b + 1)u + D_1 u_{xx};$$

$$\partial_{0t}^\alpha v(x, \eta) = bu - vu^2 + D_2 v_{xx}; \quad 0 < x < r.$$

Here a, b, D_1, D_2 – are constant; $u = u(x, t)$, $v = v(x, t)$ – the concentration of interactioning substances in point x at timing $t \geq 0$.

References

1. Nakhushev A. M. On some synergetic systems input-output and equation of their condition // Works of the international scientific conference "The Differential equations with private derivatives and related problems of the analysis and computer science". Tashkent, 2004. (in Russian).
2. Begli P. L., Torvik G. L. The aerospace technics. 1984. Vol. 2, no. 2. Pp. 84–93.
3. Nakhushev A. M. Fractional calculus and its application. M.: FIZMATLIT, 2003. 272 p. (in Russian).
4. Blend D. R. The theory of linear viscoelasticity. M.: Mir, 1965. 199 p. (in Russian).
5. Lokshin A. A., Suvorov Y. V. The mathematical theory of distribution of waves in environments with memory. M.: MSU, 1982. 152 p. (in Russian).
6. Dzhuraev T. D., Sopuev A. S., Mamazhanov M. Boundary value problems for the equations of parabolic-hyperbolic type. Tashkent: Fan, 1986. 220 p. (in Russian).
7. Nakhusheva V. A. Some classes of the differential equations of mathematical models of non-local physical processes. Nalchik: KBNC RAN, 2002. 100 p. (in Russian).
8. Volterra V. The mathematical theory of struggle for existence. M.: Nauka, 1976. 258 p. (in Russian).

Нагруженные уравнения математической экономики

Математические модели теории экономического роста основываются на производственных функциях [1], играющих важную роль при исследовании возможных сценариев устойчивого развития социально-экономической системы как открытой производственной системы «вход-выход». Производственная функция (Pf) выражает устойчивое количественное соотношение между входом x из пространства факторов Ω и выходом-выпуском $u(x)$ конечного продукта. Существуют различные методы построения производственных функций, в том числе отраслевых [1–3].

Рассмотрим простой, но вместе с тем эффективный, метод конструирования алгебраической формы производственной функции, основанный на следующем аналоге формулы Маклорена в дробном исчислении, который сформулируем в виде следующей леммы:

Лемма 1. Пусть однофакторная Pf $u(x)$ на сегменте $[0, r]$ имеет суммируемую производную $D_{0x}^\alpha u$ порядка $\alpha \in]m - 1, m]$, $m = 1, 2, \dots$. Тогда почти всюду на $[0, r]$ она представима в виде

$$u(x) = \sum_{k=1}^m a_k x^{\alpha-k} + D_{0x}^{-\alpha} D_{0t}^\alpha u(\xi), \quad (1)$$

где

$$\lim_{x \rightarrow 0} D_{0x}^{\alpha-k} u(\xi) = a_k \Gamma(\alpha - k + 1). \quad (2)$$

При $\alpha = m$ равенство (1) совпадает с формулой Маклорена (Тейлора)

$$u(x) = P_m(x) + D_{0x}^{-m} u^{(m)}(\xi),$$

где $P_m(x)$ – полином Маклорена. В случае, когда Pf $u(x)$ представима формулой (1), роль полинома $P_m(x)$ играет функция

$$u_\alpha(x) = \sum_{k=1}^m a_k x^{\alpha-k}, \quad (3)$$

однозначно определяемая как решение $u = u_\alpha(x)$ уравнения

$$D_{0x}^\alpha u(\xi) = 0, \quad 0 < x < \varepsilon, \quad (4)$$

удовлетворяющее *видоизмененному* условию Коши (2).

Поскольку $\alpha \leq m$, то решение (3) уравнения (4) будет удовлетворять условию

$$u|_{x=0} = 0 \quad (5)$$

только тогда, когда $a_m = 0$.

Пусть $u(x)$ – многофакторная Pf точки $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $m_j - 1 \leq \alpha_j \leq m_j$. В соответствии с (4) и (5) для вывода Pf $u(x)$ можно использовать следующее нагруженное уравнение дробного порядка:

$$\sum_{j=1}^n \gamma_j D_{0x_j}^{\alpha_j} u(x_1, x_2, \dots, \xi_j, \dots, x_n) = 0 \quad (6)$$

с постоянными техническими коэффициентами $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ и граничным условием

$$u(x)|_{x_j=0} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

Из (6) и (7) при $n = 2$, $x = (x_1, x_2)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ имеем

$$\gamma_1 D_{0x_1}^{\alpha_1} u(\xi_1, x_2) + \gamma_2 D_{0x_2}^{\alpha_2} u(x_1, \xi_2) = 0, \quad (8)$$

$$u(x_1, 0) = 0, \quad 0 \leq x_1 \leq x_1^0; \quad u(0, x_2) = 0, \quad 0 \leq x_2 \leq x_2^0. \quad (9)$$

Производственные функции вида

$$u(x) = X_1(x_1)X_2(x_2) \quad (10)$$

будут решением системы (8), (9) тогда и только тогда, когда

$$\gamma_j D_{0x_j}^{\alpha_j} X_j(\xi_j) = (-1)^j \lambda X(x_j), \quad X_j(0) = 0, \quad j = 1, 2, \quad (11)$$

где λ – постоянный параметр, не зависящий от j .

Решение системы (11) задается формулой

$$X_j(x_j) = \sum_{k=1}^{m_j-1} a_k^j x_j^{\alpha_j-k} E_{1/\alpha_j}[\lambda_j x_j^{\alpha_j}; 1 + \alpha_j - k], \quad (12)$$

где a_k^j – произвольные постоянные величины, $\lambda_j = \lambda (-1)^j / \gamma_j$, $\gamma_j \neq 0$.

Если $1 < \alpha_j < 2$, $m_j = 2$, $a_{12} = a_1^1 a_1^2$, $\beta = (\beta_1, \beta_2)$, $\beta_j = \alpha_j - 1$, $x^\beta = x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2}$, то из (10), (12) получаем

$$u(x) = a_{12} x^\beta E_{1/\alpha_1}[\lambda_1 x_1^{\alpha_1}; \alpha_1] E_{1/\alpha_2}[\lambda_2 x_2^{\alpha_2}; \alpha_2]. \quad (13)$$

При

$$\beta_1 + \beta_2 = 1 \quad (\alpha_1 + \alpha_2 = 3), \quad k = a_{12} / [\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2)]$$

функция (13) переходит в производственную функцию Кобба–Дугласа

$$u(x) = k x^\beta,$$

связывающую выпуск $u(x)$ с величиной производственных фондов x_1 и затрат труда x_2 .

Функция Кобба–Дугласа удовлетворяет уравнениям

$$D_{0x_1}^{\alpha_1} u + D_{0x_2}^{\alpha_2} u = 0, \quad (14)$$

$$D_{0x_1}^{\alpha_1} u - D_{0x_2}^{\alpha_2} u = 0. \quad (15)$$

Если $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, то формула (13) дает следующий класс решений уравнения (14):

$$u(x) = k\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)x^\beta E_{1/\alpha_1}[-\lambda x_1^{\alpha_1}; \alpha_1] E_{1/\alpha_2}[\lambda x_2^{\alpha_2}; \alpha_2].$$

Если же $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = -1$, то из (13) получаем производственные функции вида

$$u(x) = k\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)x^\beta E_{1/\alpha_1}[\lambda x_1^{\alpha_1}; \alpha_1] E_{1/\alpha_2}[\lambda x_2^{\alpha_2}; \alpha_2],$$

определяемые как решение уравнения (15).

Далее под Pf будем понимать любое решение $u = u(x)$ уравнения (14), удовлетворяющее условиям (9) и обладающее непрерывной смешанной производной $\partial^2 u / \partial x_1 \partial x_2$ при $x_1 x_2 > 0$; через $\varphi = \partial u / \partial x_2$ и $\psi = \partial u / \partial x_1$ обозначим предельную фондоотдачу и предельную производительность труда.

Нетрудно доказать, что функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(x)$ находятся в системной связи, вектор (φ, ψ) является решением следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad D_{0x_2}^{\beta_2} \varphi = -D_{0x_1}^{\beta_1} \psi. \quad (16)$$

Средняя фондоотдача $\bar{\varphi}(x)$ и средняя производительность труда $\bar{\psi}(x)$ определяются по формулам $\bar{\varphi}(x) = u(x)/x_2$, $\bar{\psi}(x) = u(x)/x_1$.

Система (16) при $\beta_1 = \beta_2 = 1$ ($\alpha_1 = \alpha_2 = 1$) переходит в систему Коши–Римана $\partial w / \partial \bar{z} = 0$, где $w = \varphi(x) + i\psi(x)$, $z = x_1 + ix_2$ – комплексная переменная,

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right)$$

– оператор Коши–Римана.

В теории материального производства весьма важную роль может сыграть класс производственных функций вида $u = u(v)$, $v = v(x_1, x_2, \dots, x_n)$, где u – решение дифференциального уравнения порядка $\mu \in [p-1, p]$:

$$D_{0v}^{\mu-p+1} D_{0t}^p u(\tau) = \lambda u(v), \quad \lambda = \text{const}, \quad p = 1, 2, \dots, \quad (17)$$

а $v = v(x)$ – решение нагруженного уравнения в частных производных

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} D_{0x_j}^\nu \frac{\partial v(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial \xi_j} = 0. \quad (18)$$

Прямые вычисления показывают, что к этому классу относятся функции постоянной эластичности, имеющие следующий вид:

$$u(v) = a_0 v^{-\beta/\alpha}, \quad v = \sum_{j=1}^n a_j x_j^{-\alpha}, \quad (19)$$

где a_0 – коэффициент шкалы, a_j – коэффициенты распределения, β – степень однородности, α – коэффициент замещения, и предполагается, что $a_0 > 0$, $a_j \geq 0$, $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$, $-1 < \alpha < 0$, $\beta > 0$.

Функция $u(v) = a_0 v^\mu$ является решением уравнения (17) при $\lambda = 0$, а функция $v(x) = a_1 x_1^{-\alpha} + \dots + a_j x_j^{-\alpha} + \dots + a_n x_n^{-\alpha}$ – решение обобщенного уравнения Лапласа

$$\sum_{j=1}^n D_{0x_j}^{1-\alpha} v = 0.$$

Производственная функция (19) часто используется в практике прогнозирования и предпроектных расчетов [2, с. 38], [4, с. 90].

Существуют различные обобщения статистической функции Кобба–Дугласа. Примером динамизированного варианта этой функции является $\text{Pf } u(x, t) = a_0(t)[x(t)]^\alpha$, при котором параметр a_0 и вектор $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$, описывающие набор ресурсов, необходимых для функционирования производственного процесса, зависят от времени.

Считается целесообразным назвать обобщенной кинематической (динамической) производственной функцией решение $u = u(x, t)$ уравнения

$$\partial_{0t}^\mu u(x, \tau) = k_\mu \sum_{j=1}^n \partial_{0x_j}^{\nu_j} u(x_1, x_2, \dots, \xi_j, \dots, x_n, t), \quad (20)$$

где $\mu \in]0, 2]$, $k_\mu = \text{const} \neq 0$, $\nu_j \in]1, 2]$, $\partial_{0y_j}^{\varepsilon_j}$ – регуляризованный оператор Римана–Лиувилля порядка ε_j по переменной y_j , $m_j - 1 < \varepsilon \leq m_j = 1, 2, \dots$.

Особый интерес представляет класс решений уравнения (20), представимых в виде $u(x, t) = \varphi(t)\psi(x)$, где $\varphi(t)$ и $\psi(x)$ является решением уравнения

$$\begin{aligned} \partial_{0t}^\mu \varphi(\tau) &= \lambda k_\mu \varphi(t), \quad \lambda = \text{const}, \\ \Delta_x^\nu \psi &\equiv \sum_{j=1}^n \partial_{0x_j}^{\nu_j} \psi(x_1, x_2, \dots, \xi_j, \dots, x) = \lambda \psi(x). \end{aligned}$$

При $\mu = 2$, $k_\mu > 0$, $n = 1$, $x \equiv x_1$, $\nu \equiv \nu_1$ уравнение (20) совпадает с нагруженным уравнением однофакторной кинематической производственной функции:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k_\mu \partial_{0x}^\nu u(\xi, t).$$

Формализованным выражением цели, которая наряду с производственной функцией характеризует поведение социально-экономических систем, является *целевая функция* $u = u(x)$, называемая также критерием качества.

Ее можно определить как решение следующего уравнения

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} D_{0x_j}^{\alpha_j-1} \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0. \quad (21)$$

Можно доказать, что функция (полезности [5, с. 127])

$$u(x) = a_1 x_1^{\alpha_1} + a_2 x_2^{\alpha_2} + \dots + a_n x_n^{\alpha_n},$$

где $a_j = \text{const} > 0$, $0 < \alpha_j = \text{const} \leq 1$, $j = 1, 2, \dots, n$, представляет собой решение уравнения (21). В случае, когда $0 < \alpha_j \leq 1$ и соблюдено (7), (21) эквивалентно уравнению

$$\sum_{j=1}^n D_{0x_j}^{\alpha_j} \frac{\partial u}{\partial \xi_j} = 0.$$

В основе математических моделей денежных и материальных накоплений ансамбля семей, стоимости ценных бумаг лежат системы дифференциальных, интегральных и функциональных уравнений [6].

Например, в случае модели денежных накоплений ансамбля семей в качестве такой системы может выступить система следующих уравнений относительно динамических переменных $u = u(x, t)$ и $v = v(x, t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[au - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (bu) \right] = f, \quad 0 < x < r, \quad 0 < t < T; \quad (22)$$

$$v(x, t) = \int_0^x u(\xi, t) d\xi, \quad 0 \leq x \leq r, \quad 0 \leq t \leq T; \quad (23)$$

$$v(r, t) = \varphi(t), \quad 0 \leq t \leq T; \quad (24)$$

$$\int_0^r xu(x, t) dx = \psi(t), \quad 0 \leq t \leq T; \quad (25)$$

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq r. \quad (26)$$

Здесь $u(x, t)$ интерпретируется как плотность распределения семей по накоплениям x в момент времени t , а $v(x, t)$ – как число семей с денежными накоплениями в пределах отрезка $0 \leq \xi \leq x$ в момент времени t ; $a = a(x, t)$, $b = b(x, t)$, $f = f(x, t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ и $\tau(x)$ – заданные достаточно гладкие функции своих аргументов.

Условие (24) согласно (23) имеет вид

$$\int_0^r u(x, t) dx = \varphi(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (27)$$

где $\varphi(t)$ означает число семей с денежными накоплениями в пределах $0 \leq x \leq r$ в момент времени t от начального $t = 0$ до финального $t = T$.

Система (22)–(26) иницирует нелокальную краевую задачу (25)–(27) для уравнения (22) в области $D = \{(x, t) : 0 < x < r, 0 < t < T\}$.

Из (22) и (23) следует, что функция $v(x, t)$ является решением уравнения в частных производных третьего порядка

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial v}{\partial t} + a \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(b \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] = f. \quad (28)$$

В силу (23) функция v удовлетворяет краевому условию

$$v(0, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (29)$$

Из (25) на основании (24), (29) и равенства $v_x = u$ получаем

$$\psi(t) = \int_0^r x \frac{\partial v}{\partial x} dx = r\varphi(t) - \int_0^r v(x, t) dx.$$

Стало быть,

$$\int_0^r v(x, t) dx = \Phi(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (30)$$

где $\Phi(t) = r\varphi(t) - \psi(t)$.

Следовательно, число семей $v(x, t)$ с денежными накоплениями в пределах отрезка $0 \leq \xi \leq x$ в момент времени t определяется как решение следующей краевой задачи с нелокальным (интегральным) смещением.

Задача 1. Найти регулярное в области D решение $v = v(x, t)$ уравнения (28), непрерывное в $\overline{D}$, удовлетворяющее краевым условиям (24), (29), (30) и начальному условию

$$v_x(x, 0) = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq r. \quad (31)$$

Условие (31) вытекает из начального условия (26).

Следуя предложенному З. А. Нахушевой [7] приему редукции задачи с интегральным (нелокальным) условием для уравнения m -го порядка

к локальной краевой задаче для уравнения порядка $n > m$, в уравнении (28) перейдем к новой динамической переменной $w = w(x, t)$ по формуле

$$w = \int_0^x v(\xi, t) d\xi \Rightarrow w_x = v(x, t). \quad (32)$$

В результате из (28) получим уравнение в частных производных четвертого порядка

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] = f. \quad (33)$$

В силу (29), (30), (31) и (32) функция w должна удовлетворять краевым условиям

$$w(0, t) = 0, \quad w_x(0, t) = 0, \quad w(r, t) = \Phi(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (34)$$

$$w_{xx}(x, 0) = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq r. \quad (35)$$

Связь между системами (22)–(26) и (32)–(35) реализуется формулой

$$w = \int_0^x d\xi \int_0^\xi u(\xi_1, t) d\xi_1 = \int_0^x (x - \xi_1) u(\xi_1, t) d\xi_1. \quad (36)$$

Важным вариантом уравнения (22) является уравнение для плотности акций [6, с. 210]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta x \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma u, \quad \alpha, \beta, \gamma = \text{const}, \quad (37)$$

которое относится к классу уравнений в частных производных второго порядка параболического типа с вырождением порядка при $x = 0$.

Реалии может быть более адекватной модель, основанная не на уравнении (37), а на нагруженном уравнении вида

$$\partial_{0t}^\varepsilon u = \alpha x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta x \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma u, \quad \alpha, \beta, \gamma = \text{const}, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Литература

1. Петров А. А., Поспелов И. Г. Системный анализ развивающейся экономики к теории производственной функций // Техническая кибернетика. 1979. № 2. С. 17–27.
2. Терехов Л. Л. Производственные функции. М.: Статистика, 1974. 127 с.
3. Хеди Э., Диллон Д. Производственные функции в сельском хозяйстве. М.: Прогресс, 1965. 599 с.
4. Баграновский К. А., Матюшек В. М. Экономико-математические методы и модели (микроэкономика). М.: Изд-во РУДН, 2006. 220 с.

5. Ашманов С. А. Введение в математическую экономику. М.: Наука, 1984. 296 с.
6. Ерофеев В. Т., Козловская И. С. Уравнения с частными производными и математические модели в экономике. М.: Едиториал УРСС, 2004. 248 с.
7. Нахушева З. А. Задача Гурса в интегральной постановке // Материалы Международного Российско-Болгарского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики». Нальчик-Хабез, 2010. С. 195–197.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН

Международный институт математики,
нано- и информационных технологий
Адыгской (Черкесской) Международной академии наук

Задача Дирихле для нагруженного уравнения смешанного типа в цилиндрической области

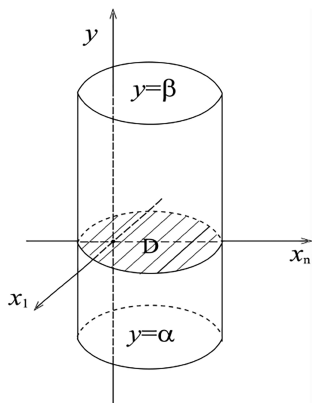


Рис. 1

Пусть D – ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ с кусочно-гладкой границей $\sigma = \partial D : I_{ab}$ – интервал $a < y < b$; $\Omega_{ab} = D \times I_{ab}$ – цилиндрическая область в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ точек $z = (x, y)$; σ_{ab} – граница Ω_{ab} ; $\Sigma_{ab} = \sigma \times I_{ab}$ – боковая поверхность цилиндра Ω_{ab} ; D_a – нижнее, а D_b – верхнее основания цилиндра Ω_{ab} (рис. 1).

В области $\Omega_{\alpha\beta}$ с индексами $\alpha < 0$ и $\beta > 0$ рассмотрим нагруженное уравнение смешанного типа второго порядка

$$k(y) \left[\frac{\partial}{\partial x_j} a^{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u \right] - \partial_{0y}^\gamma u(x, \eta) = 0, \quad (1)$$

где по индексам i и j подразумевается суммирование от 1 до n ; $yk(y) > 0$ при $y \neq 0$, $u = u(x, y)$, $1 < \gamma = \text{const} < 2$;

$$\partial_{ay}^\gamma u(x, \eta) = D_{ay}^{\gamma-2} \frac{\partial^2 u(x, \eta)}{\partial \eta^2} = \frac{\text{sign}(y-a)}{\Gamma(2-\gamma)} \int_a^y |y-\eta|^{1-\gamma} \frac{\partial^2 u(x, \eta)}{\partial \eta^2} d\eta. \quad (2)$$

Предполагается, что $0 \geq c(x) \in C(\bar{D})$; $a^{ij}(x) = a^{ji}(x) \in C(\bar{D})$; функция $k(y)$ непрерывна на сегменте $[\alpha, \beta] = \bar{I}_{\alpha\beta}$ всюду, за исключением, быть может, точки $y = 0$; для всех $x \in D$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$ форма $Q(x, \xi) = a^{ij}(x) \xi_i \xi_j$ удовлетворяет неравенству

$$Q(x, \xi) \geq c_0 |\xi|^2, \quad c_0 = \text{const} > 0.$$

Примем следующие обозначения:

$$L_\lambda u = [a^{ij}(x)u_{x_i}]_{x_j} + [c(x) + \lambda]u, \quad \lambda = \text{const};$$

$$L_0 u = L_\lambda u|_{\lambda=0}; \quad Lu = k(y)L_0 u - \partial_{0y}^\gamma u(x, \eta);$$

$$L^* w = k(y)L_0 w - D_{ay}^\gamma w(x, \eta), \quad a = \beta H(y) + \alpha H(-y).$$

Так как $wL_0 u - uL_0 w = wL_\lambda u - uL_\lambda w$, то

$$wLu - uL^* w = k(y)(wL_\lambda u - uL_\lambda w) + F(u, w), \quad (3)$$

где

$$F(u, w) = uD_{ay}^\gamma w(x, \eta) - w\partial_{0y}^\gamma u(x, \eta). \quad (4)$$

Решение $u = u(x, y)$ уравнения (1) будем называть регулярным в области $\Omega_{\alpha\beta}$, если оно принадлежит классу $C(\bar{\Omega}_{\alpha\beta}) \cap C^1(\Omega_{\alpha\beta})$ и таково, что функции $u_{x_i x_j}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$), $\partial_{0y}^\gamma u(x, \eta)$ являются непрерывными всюду в $\Omega_{\alpha\beta}$, за исключением, быть может, точек $(x, 0)$, $x \in D$.

Задача 1 (задача Дирихле). Найти регулярное в области $\Omega_{\alpha\beta}$ решение $u(x, y)$ уравнения (1) из пространства Соболева $W_2^1(\Omega_{\alpha\beta})$, принимающее заданные значения на $\sigma_{\alpha\beta}$.

Пусть функция $u(x, y)$ – решение однородной задачи Дирихле для уравнения (1) в области $\Omega_{\alpha\beta}$:

$$Lu = 0 \text{ в } \Omega_{\alpha 0} \cup \Omega_{0\beta}, \quad u|_{\sigma_{\alpha\beta}} = 0, \quad (5)$$

а функция

$$w(x, y) = \omega(y)v(x) \quad (6)$$

– решение уравнения

$$L^* w = 0 \text{ в } \Omega_{\alpha 0} \cup \Omega_{0\beta}. \quad (7)$$

Равенства (6)–(7) возможны тогда и только тогда, когда

$$L_\lambda v(x) = 0, \quad x \in D, \quad (8)$$

$$D_{ay}^\gamma \omega(\eta) + \lambda k(y)\omega(y) = 0, \quad y \in I_{\alpha 0} \cup I_{0\beta}. \quad (9)$$

Теорема 1. Если σ , $a^{ij}(x)$ и $c(x)$ обладают тем свойством, что система $\{v_m(x)\}$ собственных функций $v_m(x)$, соответствующих собственным значениям λ_m однородной задачи Дирихле $v|_\sigma = 0$ для уравнения $L_{\lambda_m} v = 0$ в области D , полна в пространстве $L^2(D)$ и $v_m(x) \in C^1(\bar{D}) \cap C^2(D)$ для любого m , то задача 1 не может иметь более одного решения, если

$$I_{\alpha 0}^{\gamma-2} \omega(0) I_{0\beta}^{\gamma-2} \omega'(0) \neq I_{0\beta}^{\gamma-2} \omega(0) I_{\alpha 0}^{\gamma-2} \omega'(0). \quad (10)$$

Здесь $\omega(y)$ – решение уравнения (9), удовлетворяющее условиям $\omega(\alpha) = 0$, $\omega(\beta) = 0$,

$$I_{\varepsilon\delta}^{\gamma-2}\psi(0) = \frac{1}{\Gamma(2-\gamma)} \int_{\varepsilon}^{\delta} \psi(\eta) |\eta|^{1-\gamma} d\eta$$

– значение дробного интеграла $I_{\varepsilon\delta}^{\gamma-2}\psi(y)$ от функции $\psi(y)$ порядка $2-\gamma$ с фиксированными началом и концом в точках ε и δ при $y = 0$ [1, с. 33].

В случае уравнения

$$\text{sign } y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \partial_{0y}^{\gamma} u(x, \eta) = 0, \quad 0 < x \equiv x_1 < r,$$

соответствующие собственному значению $\lambda = \lambda_m = (\pi m/r)^2$ функции $v = v_m(x)$ и $\omega = \omega_m(y)$ имеют вид

$$v = \sin \sqrt{\lambda_m} x, \quad \omega(y) = \omega_m(y) = |y-a|^{\gamma-1} \exp_{\gamma}(-\lambda_m |y-a|^{\gamma-1}), \quad m = 1, 2, \dots$$

Из (3) и равенств $Lu = 0$, $L^*w = 0$ следует, что

$$k(y)(wL_{\lambda}u - uL_{\lambda}w) = -F(u, w).$$

Отсюда, принимая во внимание, что $F(u, \omega v) = v(x)F(u, \omega)$, получаем равенство

$$k(y)\omega(y)(vL_{\lambda}u - uL_{\lambda}v) = -vF(u, \omega).$$

Так как

$$vL_{\lambda}u - uL_{\lambda}v = [a^{ij}(u_{x_i}v - v_{x_i}u)]_{x_j},$$

то его можно переписать в виде

$$|k(y)|\omega(y)[a^{ij}(x)(u_{x_i}v - v_{x_i}u)]_{x_j} = -vF(u, \omega) \text{ sign } y. \quad (11)$$

Воспользуемся теперь формулой Грина для дифференциального оператора L_{λ} :

$$\int_D (vL_{\lambda}u - uL_{\lambda}v)dx = \int_{\sigma} \left[v(x) \frac{\partial u(x, y)}{\partial \nu^*} - u(x, y) \frac{\partial v(x)}{\partial \nu^*} \right] d\sigma.$$

Здесь $\nu^i = a^{ij}(x)\nu_j$, $\nu_j = \cos(\nu, x_j)$ – направляющие косинусы внешней нормали $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$ к границе σ области D в точке $x \in \sigma$, $\nu^* = (\nu^1, \nu^2, \dots, \nu^n)$ – кономаль в точке $x \in \sigma$ [1, с. 146].

Поскольку $v|_{\sigma} = 0$, $u|_{\Sigma_{\alpha\beta}} = 0$, то из этой формулы вытекает, что

$$(v, L_{\lambda}u)_0 = (u, L_{\lambda}v)_0, \quad (12)$$

где $(\cdot, \cdot)_0$ – скалярное произведение в пространстве $L^2(D)$.

В соответствии с (2) и равенством

$$\frac{\partial}{\partial y} D_{ay}^{\gamma-1} \omega(\eta) = -\text{sign } y \cdot D_{ay}^{\gamma} \omega(\eta)$$

форма (4) примет вид

$$F(u, \omega) = \text{sign } y \left[u_y D_{ay}^{\gamma-1} \omega(\eta) - \frac{\partial}{\partial y} u D_{ay}^{\gamma-1} \omega(\eta) \right] - \omega D_{0y}^{\gamma-2} u_{\eta\eta}(x, \eta). \quad (13)$$

Положим, что

$$I_0^{\beta}(u, \omega) = \int_0^{\beta} F(u, \omega) dy, \quad I_{\alpha}^0(u, \omega) = \int_{\alpha}^0 F(u, \omega) dy.$$

Из (11) и (12) заключаем:

$$\begin{aligned} (v, F)_0 &= \int_D v(x) F(u, \omega) dx = 0; \\ \int_0^{\beta} (v, F)_0 dy &= \int_D v(x) I_0^{\beta}(u, \omega) dx = 0; \\ \int_{\alpha}^0 (v, F)_0 dy &= \int_D v(x) I_{\alpha}^0(u, \omega) dx = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Согласно (13) имеем

$$\begin{aligned} I_0^{\beta}(u, \omega) &= - \int_0^{\beta} \left[\omega(y) D_{0y}^{\gamma-2} u_{\eta\eta}(x, \eta) + \frac{\partial}{\partial y} u(x, y) D_{\beta y}^{\gamma-1} \omega(\eta) - \right. \\ &\quad \left. - u_y(x, y) D_{\beta y}^{\gamma-1} \omega(\eta) \right] dy, \\ I_{\alpha}^0(u, \omega) &= - \int_{\alpha}^0 \left[\omega(y) D_{0y}^{\gamma-2} u_{\eta\eta}(x, \eta) - \frac{\partial}{\partial y} u(x, y) D_{\alpha y}^{\gamma-1} \omega(\eta) + \right. \\ &\quad \left. + u_y(x, y) D_{\alpha y}^{\gamma-1} \omega(\eta) \right] dy. \end{aligned}$$

Известно, что

$$\int_0^{\beta} \omega(y) D_{0y}^{\gamma-2} u_{\eta\eta}(x, \eta) dy = \int_0^{\beta} u_{yy}(x, y) D_{\beta y}^{\gamma-2} \omega(\eta) dy,$$

$$\int_{\alpha}^0 \omega(y) D_{0y}^{\gamma-2} u_{\eta\eta}(x, \eta) dy = \int_{\alpha}^0 u_{yy}(x, y) D_{\alpha y}^{\gamma-2} \omega(\eta) dy.$$

Поэтому

$$I_0^{\beta}(u, \omega) = - \int_0^{\beta} F^{+}(u, \omega) dy, \quad I_{\alpha}^0(u, \omega) = - \int_{\alpha}^0 F^{-}(u, \omega) dy,$$

где

$$F^{+}(u, \omega) = u_{yy} D_{\beta y}^{\gamma-2} \omega(\eta) + \frac{\partial}{\partial y} u D_{\beta y}^{\gamma-1} \omega(\eta) - u_y D_{\beta y}^{\gamma-1} \omega(\eta),$$

$$F^{-}(u, \omega) = u_{yy} D_{\alpha y}^{\gamma-2} \omega(\eta) - \frac{\partial}{\partial y} u D_{\alpha y}^{\gamma-1} \omega(\eta) + u_y D_{\alpha y}^{\gamma-1} \omega(\eta).$$

Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial y} D_{\beta y}^{\gamma-2} \omega(\eta) = - D_{\beta y}^{\gamma-1} \omega(\eta), \quad \frac{\partial}{\partial y} D_{\alpha y}^{\gamma-2} \omega(\eta) = D_{\alpha y}^{\gamma-1} \omega(\eta),$$

то

$$F^{+}(u, \omega) = \frac{\partial}{\partial y} [u_y D_{\beta y}^{\gamma-2} \omega(\eta) + u D_{\beta y}^{\gamma-1} \omega(\eta) - u D_{\beta y}^{\gamma-1} \omega(\eta)] -$$

$$- u_y \frac{\partial}{\partial y} D_{\beta y}^{\gamma-2} \omega(\eta) + u \frac{\partial}{\partial y} D_{\beta y}^{\gamma-1} \omega(\eta) = \frac{\partial}{\partial y} u_y D_{\beta y}^{\gamma-2} \omega(\eta) +$$

$$+ u_y D_{\beta y}^{\gamma-1} \omega(\eta) + u \frac{\partial}{\partial y} D_{\beta y}^{\gamma-1} \omega(\eta) = \frac{\partial}{\partial y} [u_y D_{\beta y}^{\gamma-2} \omega(\eta) + u D_{\beta y}^{\gamma-1} \omega(\eta)],$$

$$F^{-}(u, \omega) = \frac{\partial}{\partial y} [u_y D_{\alpha y}^{\gamma-2} \omega(\eta) - u D_{\alpha y}^{\gamma-1} \omega(\eta) + u D_{\alpha y}^{\gamma-1} \omega(\eta)] -$$

$$- u_y D_{\alpha y}^{\gamma-1} \omega(\eta) - u \frac{\partial}{\partial y} D_{\alpha y}^{\gamma-1} \omega(\eta) = \frac{\partial}{\partial y} [u_y D_{\alpha y}^{\gamma-2} \omega(\eta) - u D_{\alpha y}^{\gamma-1} \omega(\eta)].$$

Следовательно, если

$$\varphi_{\alpha}(x, y) \equiv u_y D_{\alpha y}^{\gamma-2} \omega(\eta) + \text{sign } y \cdot u D_{\alpha y}^{\gamma-1} \omega(\eta),$$

то

$$I_0^{\beta}(u, \omega) = \varphi_{\beta}(x, 0) - \varphi_{\beta}(x, \beta), \quad I_{\alpha}^0(u, \omega) = \varphi_{\alpha}(x, \alpha) - \varphi_{\alpha}(x, 0).$$

Далее будем предполагать, что решение $\omega(y)$ уравнения (10) удовлетворяет условию Дирихле

$$\omega(\alpha) = 0, \quad \omega(\beta) = 0. \quad (15)$$

Условие (15) дает основание записать

$$D_{ay}^{\gamma-1}\omega(\eta) = -\text{sign } y D_{ay}^{\gamma-2}\omega'(\eta),$$

и, стало быть,

$$\begin{aligned} \varphi_a(x, y) &= u_y D_{ay}^{\gamma-2}\omega(\eta) - u D_{ay}^{\gamma-2}\omega'(\eta), \quad \varphi_a(x, a) = 0, \\ I_0^\beta(u, \omega) &= \varphi_\beta(x, 0) = -\tau(x) I_{0\beta}^{\gamma-2}\omega'(0) + \nu(x) I_{0\beta}^{\gamma-2}\omega(0), \end{aligned} \quad (16)$$

$$-I_\alpha^0(u, \omega) = \varphi_\alpha(x, 0) = -\tau(x) I_{\alpha 0}^{\gamma-2}\omega'(0) + \nu(x) I_{\alpha 0}^{\gamma-2}\omega(0), \quad (17)$$

где

$$\tau(x) = u(x, 0), \quad \nu(x) = u_y(x, 0).$$

Из (14) на основании (2) и (3) получаем однородную алгебраическую систему

$$\begin{aligned} I_{0\beta}^{\gamma-2}\omega'(0)(\tau, v)_0 - I_{0\beta}^{\gamma-2}\omega(0)(\nu, v)_0 &= 0, \\ I_{\alpha 0}^{\gamma-2}\omega'(0)(\tau, v)_0 - I_{\alpha 0}^{\gamma-2}\omega(0)(\nu, v)_0 &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Условие (5) для системы (18) означает, что

$$(\tau, v)_0 = 0, \quad (\nu, v)_0 = 0. \quad (19)$$

Равенства (19) имеют место для любой функции $v(x) = v_m(x)$, $m = 1, 2, \dots$ из системы $\{v_m(x)\}$, которая полна в $L^2(D)$. Поэтому из леммы Лагранжа получаем, что $\tau(x) = 0$, $\nu(x) = 0$ в D . Следовательно,

$$\begin{aligned} \partial_{0y}^\gamma u(x, \eta) &= D_{0y}^\gamma u(x, \eta) - \tau(x) |y|^{-\gamma} / \Gamma(1 - \gamma) - \\ &- \nu(x) |y|^{1-\gamma} / \Gamma(2 - \gamma) = D_{0y}^\gamma u(x, \eta) \end{aligned}$$

и задача в области $\Omega_{\alpha 0}$ свелась к однородной задаче Дирихле

$$u|_{\partial\Omega_{\alpha 0}} = 0 \quad (20)$$

для уравнения

$$D_{0y}^\gamma u(x, \eta) + |k(y)| L_0 u = 0, \quad (21)$$

а в области $\Omega_{0\beta}$ – к однородной смешанной задаче:

$$u(x, 0) = 0, \quad u_y(x, 0) = 0 \quad \forall x \in \overline{D}, \quad (22)$$

$$u(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \Sigma_{0\beta} \quad (23)$$

для уравнения

$$D_{0y}^\gamma u(x, \eta) - |k(y)| L_0 u = 0. \quad (24)$$

Решения задачи Дирихле (20), (21) и смешанной задачи (22)–(24) удовлетворяют условиям сопряжения

$$\lim_{y \rightarrow -0} u(x, y) = \lim_{y \rightarrow +0} u(x, y) = 0,$$

$$\lim_{y \rightarrow -0} u_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow +0} u_y(x, y) = 0.$$

Из принципа экстремума для уравнения (21) [2, с. 50] следует, что однородная задача (20) для этого уравнения в области $\Omega_{\alpha 0}$ не имеет решений, отличных от тривиального.

Докажем теперь, что если $u(x, \eta)$ – решение смешанной задачи (22), (23) для уравнения (24), то $u(x, y) \equiv 0$ в $\Omega_{0\beta}$.

Действительно, пусть L^-u – дифференциальное выражение, стоящее в левой части равенства (24). Нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} D_{0y}^{\gamma-1}u(x, \eta)L^-u &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} [D_{0y}^{\gamma-1}u(x, \eta)]^2 + k(y)[a^{ij}(x)u_{x_i}D_{0y}^{\gamma-1}u_{x_j}(x, \eta) - \\ &- c(x)uD_{0y}^{\gamma-1}u(x, \eta)] - \frac{\partial}{\partial x_j} [k(y)D_{0y}^{\gamma-1}u(x, \eta)a^{ij}(x)u_{x_i}]. \end{aligned} \quad (25)$$

Отсюда с помощью формулы Грина получаем

$$\begin{aligned} (D_{0y}^{\gamma-1}u, L^-u)_{L^2(\Omega_{0\beta})} &= \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_{0\beta}} [D_{0y}^{\gamma-1}u(x, \eta)]^2 \nu_0 d\sigma_{0\beta} + \\ &+ \int_{\Omega_{0\beta}} k(y)[a^{ij}(x)u_{x_j}D_{0y}^{\gamma-1}u_{x_j}(x, \eta) - c(x)uD_{0y}^{\gamma-1}u(x, \eta)] d\Omega_{0\beta} - \\ &- \int_{\partial\Omega_{0\beta}} [k(y)D_{0y}^{\gamma-1}u(x, \eta)a^{ij}(x)u_{x_j}] \nu_j d\sigma_{0\beta}, \end{aligned} \quad (26)$$

где $\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n$ – направляющие косинусы внешней нормали к границе $\partial\Omega_{0\beta}$ области $\Omega_{0\beta}$.

Из (26) в силу (22)–(24) заключаем, что

$$\int_{\Omega_{0\beta}} k(y)[a^{ij}(x)u_{x_j}D_{0y}^{\gamma-1}u_{x_j}(x, \eta) - c(x)uD_{0y}^{\gamma-1}u(x, \eta)] d\Omega_{0\beta} = 0. \quad (27)$$

Равенство (27) с учетом положительной определенности формы $\Theta(x, \xi)$ с оператором дробного интегро-дифференцирования порядка меньше единицы [3, с. 46] дает основание утверждать, что $u_x = 0$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Поэтому функция u может зависеть только от y : $u = u(y)$ и, в соответствии с (1),

$$\partial_{0y}^\gamma u(\eta) = k(y)cu(y), \quad c = \text{const}. \quad (28)$$

Но однородная задача Коши: $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$ для уравнения (28) не имеет решений, отличных от тривиального.

Этим завершается доказательство теоремы 1.

Здесь следует отметить работу О. Х. Масяевой [4], где исследована задача Дирихле для уравнения

$$\partial_{0y}^\gamma u(x, \eta) - u_{xx} = 0$$

в области $\Omega_{0\beta} = \{(x, y) : 0 < x < r, 0 < y < \beta\}$ и доказано, что если

$$\sin_\gamma[\beta(2\pi/r)^{2/\gamma}] \neq 0,$$

то эта задача имеет не более одного решения.

В заключение рассмотрим однородную смешанную задачу (22), (23) для неоднородного уравнения

$$D_{0y}^\gamma u(x, \eta) - c^\gamma \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x_j^2} = f(x, y), \quad c^\gamma = \text{const} > 0 \quad (29)$$

с суммируемой в области $\Omega_{0\beta}$ правой частью $f(x, y)$.

В случае уравнения (29) алгебраическое тождество (25) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} f(x, y) D_{0y}^{\gamma-1} u(x, \eta) &= \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{1}{2} [D_{0y}^{\gamma-1} u(x, \eta)]^2 + c^\gamma \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} D_{0y}^{\gamma-2} u_{x_j}(x, \eta) \right\} - \\ &- c^\gamma \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial u}{\partial x_j} D_{0y}^{\gamma-1} u(x, \eta) + \frac{\partial u}{\partial y} D_{0y}^{\gamma-2} u_{x_j}(x, \eta) \right] + \\ &+ c^\gamma \frac{\partial u}{\partial y} D_{0y}^{\gamma-2} \Delta_x u(x, \eta), \end{aligned} \quad (30)$$

где Δ_x – оператор Лапласа по x .

Поскольку $u(x, y)$ – решение однородной смешанной задачи для уравнения (29), то

$$c^\gamma \frac{\partial u}{\partial y} D_{0y}^{\gamma-2} \Delta_x u(x, \eta) = \frac{\partial}{\partial y} [D_{0y}^{\gamma-2} D_{0\eta}^\gamma u(x, \eta_1) - D_{0y}^{\gamma-2} f(x, \eta)]. \quad (31)$$

Из (30) и (31) получаем

$$f(x, y) D_{0y}^{\gamma-1} u(x, \eta) + u_y(x, y) D_{0y}^{\gamma-2} f(x, \eta) =$$

$$= f(x, y) D_{0y}^{\gamma-2} u_\eta(x, \eta) + u_y(x, y) D_{0y}^{\gamma-2} f(x, \eta) = \frac{\partial}{\partial y} E^\gamma(x, y) - \\ - c^\gamma \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} [u_{x_j} D_{0y}^{\gamma-1} u(x, \eta) + u_y D_{0y}^{\gamma-2} u_{x_j}(x, \eta)] + u_y D_{0y}^{2\gamma-3} u_\eta(x, \eta), \quad (32)$$

где

$$E^\gamma(x, y) = \frac{1}{2} [D_{0y}^{\gamma-1} u(x, \eta)]^2 + c^\gamma \sum_{j=1}^n u_{x_j} D_{0y}^{\gamma-2} u_{x_j}(x, \eta)$$

– аналог энергии единицы объема (см. [5, с. 36]).

Введем в рассмотрение билинейный функционал

$$\langle f, u_y \rangle^{\gamma-2} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_{0\varepsilon}} [f(x, y) D_{0y}^{\gamma-2} u_\eta(x, \eta) + u_y(x, y) D_{0y}^{\gamma-2} f(x, \eta)] dx dy$$

с параметром $\varepsilon \in]0, \beta]$.

Из (32) на основании формулы Грина получаем энергетическое равенство

$$2\langle f, u_y \rangle^{\gamma-2} = \int_D E^\gamma(x, \varepsilon) dx + \int_D dx \int_0^\varepsilon u_y(x, y) D_{0y}^{2\gamma-3} u_\eta(x, \eta) dy, \quad (33)$$

справедливое для любого $\varepsilon > 0$.

Из (33) немедленно следует теорема единственности решения смешанной задачи (22), (23) для уравнения (29).

Равенство (33) можно успешно использовать при реализации функциональных методов доказательства существования слабых (обобщенных) решений этой задачи.

Левая часть равенства (33) в определенном смысле соответствует работе, совершаемой внешней силой f в объеме D при смещении $u(x, y)$ точки x на временном сегменте $0 < y \leq \varepsilon$.

Литература

1. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. 301 с.
2. Нахушев А. М. Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов. М.: Наука, 2006. 174 с.
3. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 272 с.
4. Масаева О. Х. Задача Дирихле для диффузионно-волнового уравнения // Материалы IX Школы молодых ученых «Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики». Нальчик, 2011. С. 64–65.
5. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1965. 357 с.

Об одном классе нагруженных уравнений в частных производных дробного порядка

В прямоугольной области $\Omega = \{z : 0 < x < r, 0 < y < T\}$ евклидовой плоскости точек $z = (x, y)$ рассмотрим модельное нагруженное уравнение в частных производных

$$aD_{0y}^{\alpha}u(x, \eta) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} [bD_{0y}^{\alpha}u(x, \eta) + cu(x, y)] + f(x, y)y^{\alpha-1} \quad (1)$$

с постоянными коэффициентами a, b, c и с оператором дробного дифференцирования Римана–Лиувилля порядка $\alpha \in]0, 1]$, который определяется следующим образом:

$$D_{0y}^{\alpha}u(x, \eta) = \frac{\partial}{\partial y} D_{0y}^{\alpha-1}u(x, \eta), \quad D_{0y}^{\alpha-1}u(x, \eta) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\eta} \frac{u(x, \eta)d\eta}{(y-\eta)^{\alpha}},$$

$$D_{0y}^0u(x, \eta) = u(x, y).$$

Здесь $\Gamma(x)$ – гамма-функция Эйлера и предполагается, что $b \neq 0$ и функция $f(z) = f(x, y)$ – непрерывна в замыкании $\bar{\Omega} = \{z : 0 \leq x \leq r, 0 \leq y \leq T\}$ области Ω .

Уравнение (1) при $a = 1, \alpha = 1, f(z) = 0$ известно как уравнение Аллера

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (2)$$

и его решение $u(z) = u(x, y)$ интерпретируется как влажность почвы с коэффициентом диффузии c и коэффициентом влагопроводности b в точке x почвенного слоя $0 \leq x \leq r$ в момент времени $y \in [0, T]$. В работе [1] уравнение (2) называется модифицированным уравнением влагопереноса.

При $a = 0, \alpha = 1$ уравнение (1) в области Ω переходит в дифференциальное уравнение третьего порядка

$$b \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -f(z), \quad (3)$$

решение $u(z)$ которого можно интерпретировать как деформацию снега с коэффициентом вязкости b и коэффициентом одностороннего сжатия $1/c$ в точке x снежного покрова $0 \leq x \leq r$ толщины r в момент времени $y \geq 0$ под действием нагрузки $f = \rho g$ (ρ – плотность, g – ускорение, b/c – время релаксации одностороннего сжатия [2]).

Уравнения (2), (3) являются дифференциальными уравнениями гиперболического типа, хотя их называют уравнениями псевдопараболического типа [3, с. 255].

Этим и более общим дифференциальным уравнениям со старшими частными производными посвящена монография В. И. Жегалова и А. Н. Миронова [4].

Уравнение (1) в случае, когда $a \neq 0$, $b = 0$, является уравнением диффузии дробного порядка [5, с. 64].

В уравнении (1) с начальным условием

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-1} u(x, \eta) = \tau(x), \quad 0 < x \leq r \quad (4)$$

совершим переход к новой динамической переменной

$$v(z) = D_{0y}^{\alpha} u(x, \eta) - \lambda u(x, y), \quad \lambda = -c/b. \quad (5)$$

Из (4), (5) следует (см. [6, с. 98]), что

$$\begin{aligned} u(z) = & \tau(x) y^{\alpha-1} E_{1/\alpha} [\lambda y^{\alpha}; \alpha] + \\ & + \int_0^y (y - \eta)^{\alpha-1} E_{1/\alpha} [\lambda (y - \eta)^{\alpha}; \alpha] v(x, \eta) d\eta, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$E_{1/\alpha} [\xi; \eta] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^k}{\Gamma(\eta + \alpha k)}$$

— функция типа Миттаг-Леффлера.

Равенства (5) и (6) дают основание записать:

$$D_{0y}^{\alpha-1} u(x, \eta) = \tau(x) E_{1/\alpha} [\lambda y^{\alpha}; 1] + \int_0^y E_{1/\alpha} [\lambda (y - \eta)^{\alpha}; 1] v(x, \eta) d\eta, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} D_{0y}^{\alpha} u(x, \eta) = & v(x, y) + \lambda \int_0^y (y - \eta)^{\alpha-1} E_{1/\alpha} [\lambda (y - \eta)^{\alpha}; \alpha] v(x, \eta) d\eta + \\ & + \lambda \tau(x) y^{\alpha-1} E_{1/\alpha} [\lambda y^{\alpha}; \alpha]. \end{aligned} \quad (8)$$

Как видно из (7), условие (4) эквивалентно условию

$$\lim_{y \rightarrow 0} u(z) y^{1-\alpha} = \tau(x) / \Gamma(\alpha), \quad 0 \leq x \leq r. \quad (9)$$

В силу (8) замена (6) редуцирует уравнение (1) к уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{a}{b}v = F_1(z) + \frac{a\lambda}{b} \int_0^y (y-\eta)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}[\lambda(y-\eta)^\alpha; \alpha] v(x, \eta) d\eta \quad (10)$$

со свободным членом

$$F_1(z) = \frac{1}{b} y^{\alpha-1} \{a\lambda\tau(x) E_{1/\alpha}[\lambda y^\alpha; \alpha] - f(z)\}.$$

Через $F[v; x, y]$ обозначим правую часть уравнения (10) и положим $a/b = \mu^2 > 0$, $b > 0$,

$$v(0, y) = \varphi_0(y), \quad v_x(0, y) = \psi_0(y), \quad 0 < y \leq T. \quad (11)$$

Любое непрерывное и суммируемое при $0 \leq x \leq r$, $0 < y \leq T$ решение $v(z)$ уравнения (10) представимо в виде

$$v(z) = C_1(y)e^{\mu x} + C_2(y)e^{-\mu x} + \frac{1}{\mu} \int_0^x F[v; \xi, y] \operatorname{sh} \mu(x - \xi) d\xi, \quad (12)$$

где $C_1(y)$ и $C_2(y)$ – функции из класса $C[0, T] \cap L[0, T]$. Согласно (11) и (12)

$$C_1(y) + C_2(y) = \varphi_0(y), \quad C_1(y) - C_2(y) = \psi_0(y)/\mu$$

и, стало быть,

$$v(z) = \varphi_0(y) \operatorname{ch}(\mu x) + \frac{1}{\mu} \psi_0(y) \operatorname{sh}(\mu x) + \frac{1}{\mu} \int_0^x F[v; \xi, y] \operatorname{sh} \mu(x - \xi) d\xi. \quad (13)$$

Пусть

$$f_1(z) = \varphi_0(y) \operatorname{ch}(\mu x) + \frac{1}{\mu} \psi_0(y) \operatorname{sh}(\mu x) + \frac{1}{\mu} \int_0^x F_1(\xi, y) \operatorname{sh} \mu(x - \xi) d\xi.$$

Тогда уравнение (13) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} v(z) = \frac{a\lambda}{b\mu} \int_0^x d\xi \int_0^y (y-\eta)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}[\lambda(y-\eta)^\alpha; \alpha] \times \\ \times \operatorname{sh} \mu(x - \xi) v(\xi, \eta) d\eta + f_1(z). \end{aligned} \quad (14)$$

Уравнение (14) с условием Коши (11), где $y^{1-\alpha}\varphi_0(y)$ и $y^{1-\alpha}\psi_0(y)$ – функции из $C[0, T]$, является интегральным уравнением Вольтерра второго рода и оно в банаховом пространстве $C_\alpha(\Omega)$ функции $v(z)$ с конечной нормой $\|v\| = \max_{\bar{\Omega}} y^{1-\alpha}|v(z)|$ имеет и притом единственное решение $v(z) = v(x, y)$.

Условие (11) в соответствии с (5) означает, что

$$D_{0y}^\alpha u(0, \eta) - \lambda u(0, y) = \varphi_0(y), \quad (15)$$

$$D_{0y}^\alpha u_x(0, \eta) - \lambda u_x(0, y) = \psi_0(y), \quad 0 < y \leq T.$$

Следовательно, задача (9), (15) для уравнения (1) при $a > 0$, $b > 0$ в области Ω редуцируется к уравнению (14).

Уравнение (1) при $a = 0$ переходит в уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} [bD_{0y}^\alpha u(x, \eta) + cu] = -y^{\alpha-1}f(z). \quad (16)$$

Соответствующее уравнению (16) уравнение для функции $v = v(z)$ в силу (5) имеет вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{f(z)}{b}y^{\alpha-1}. \quad (17)$$

Единственное решение $v(z)$ уравнения (17), удовлетворяющее условию Коши (11), в области Ω определяется формулой

$$v(z) = x\psi_0(y) + \varphi_0(y) - \frac{1}{b}y^{\alpha-1} \int_0^x f(\xi, y)(x - \xi)d\xi. \quad (18)$$

Равенства (5) и (18) приводят к уравнению

$$D_{0y}^\alpha u(x, \eta) - \lambda u(z) = x\psi_0(y) + \varphi_0(y) - \frac{1}{b}y^{\alpha-1} \int_0^x f(\xi, y)(x - \xi)d\xi \quad (19)$$

с начальным условием (4) или (9).

Из (18) при

$$f(z) = f_0 y^{1-\alpha}, \quad f_0 = \text{const} \quad (20)$$

следует, что функция

$$v(z) = x\psi_0(y) + \varphi_0(y) - \frac{f_0}{2b}x^2. \quad (21)$$

Этой функции, согласно (6), отвечает функция

$$u(z) = \tau(x)y^{\alpha-1}E_{1/\alpha}[\lambda y^\alpha; \alpha] - \frac{f_0}{2b}x^2 \int_0^y (y - \eta)^{\alpha-1}E_{1/\alpha}[\lambda(y - \eta)^\alpha; \alpha] d\eta +$$

$$+ \int_0^y (y - \eta)^{\alpha-1} E_{1/\alpha} [\lambda(y - \eta)^\alpha; \alpha] [x\psi_0(\eta) + \varphi_0(\eta)] d\eta.$$

Отсюда, с учетом равенства

$$\int_0^y (y - \eta)^{\alpha-1} E_{1/\alpha} [\lambda(y - \eta)^\alpha; \alpha] d\eta = y^\alpha E_{1/\alpha} [\lambda y^\alpha; \alpha + 1],$$

получаем

$$u(z) = U[\tau, f_0; z] + \int_0^y (y - \eta)^{\alpha-1} E_{1/\alpha} [\lambda(y - \eta)^\alpha; \alpha] [x\psi_0(\eta) + \varphi_0(\eta)] d\eta, \quad (22)$$

где

$$U[\tau, f_0; z] = \tau(x)y^{\alpha-1} E_{1/\alpha} [\lambda y^\alpha; \alpha] - \frac{f_0}{2b} x^2 y^\alpha E_{1/\alpha} [\lambda y^\alpha; \alpha + 1].$$

Для уравнения (16) рассмотрим смешанную задачу с начальным условием (4) и граничными динамическими условиями

$$\begin{aligned} D_{0y}^\alpha u(0, y) - \lambda u(0, y) &= \varphi_0(y), \\ D_{0y}^\alpha u_x(r, y) - \lambda u_x(r, y) &= \psi_r(y), \quad 0 < y \leq T. \end{aligned} \quad (23)$$

Условия (23) эквивалентны условиям

$$v(0, y) = \varphi_0(y), \quad v_x(r, y) = \psi_r(y), \quad 0 < y \leq T. \quad (24)$$

Как видно из (18) и (24)

$$\psi_0(y) = \psi_r(y) + \frac{1}{b} y^{\alpha-1} \int_0^r f(\xi, y) d\xi.$$

Стало быть,

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \varphi_0(y) + \\ &+ x \left[\psi_r(y) + \frac{1}{b} y^{\alpha-1} \int_0^r f(\xi, y) d\xi \right] - \frac{1}{b} y^{\alpha-1} \int_0^x f(\xi, y) (x - \xi) d\xi. \end{aligned} \quad (25)$$

В случае (20), (21) функция

$$\psi_0(y) = \psi_r(y) + r f_0 / b.$$

Формула (21) принимает вид

$$v(z) = \varphi_0(y) + x \left[\psi_r(y) + \frac{r}{b} f_0 \right] - \frac{f_0}{2b} x^2,$$

и решение $u(z)$ смешанной задачи (4), (23) для уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} [bD_{0y}^\alpha u(x, \eta) + cu(z)] = -f_0 \quad (26)$$

однозначно определяется следующим образом:

$$u(z) = U[\tau, f_0; z] + \int_0^y (y - \eta)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}[\lambda(y - \eta)^\alpha; \alpha] \left\{ x \left[\psi_r(\eta) + \frac{r}{b} f_0 \right] + \varphi_0(\eta) \right\} d\eta. \quad (27)$$

Поскольку

$$E_1[\xi; 1] = \exp(\xi), \quad \xi E_1[\xi; 2] = \exp(\xi) - 1,$$

то из (27) при $\alpha = 1$, $\tau(x) \equiv 0$, $\varphi_0(y) \equiv 0$, $\psi_r(y) \equiv 0$ получаем решение

$$u(z) = \frac{f_0}{\lambda b} (1 - e^{\lambda y}) \left(\frac{1}{2} x^2 - rx \right), \quad 0 \leq x \leq r, \quad \lambda = -c/b \quad (28)$$

уравнения

$$b \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -f_0, \quad (29)$$

удовлетворяющее однородным условиям

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq r, \quad (30)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} u(0, y) = \lambda u(0, y), \quad \frac{\partial}{\partial y} u_x(r, y) = \lambda u_x(r, y), \quad 0 \leq y \leq T. \quad (31)$$

Так как $u(0, 0) = 0$ и $u_x(r, 0) = 0$, то условия (31) равносильны условиям

$$u(0, y) = 0, \quad u_x(r, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq T. \quad (32)$$

Смешанная задача (30), (32) для уравнения (29) возникает при моделировании вязкоупругих характеристик снега [2]. Снег, как вязкоупругое твердое тело, имеет фрактальную структуру. Поэтому более адекватной реалии может быть формула (27), нежели (28).

При компьютерной реализации задачи Коши (9) для уравнения (19) в этом уравнении производную $D_{0y}^\alpha u(x, \eta)$ можно приближенно заменить отношением $[u(x, y + h) - u(x, y)]/h^\beta$, где h – шаг по времени y , $0 < \beta = \text{const} \leq \alpha < 1$.

Рассмотрим уравнение

$$\left(\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + \omega^2 \frac{\partial}{\partial y} \right) D_{0y}^{\alpha-1} u(x, \eta) = 0, \quad \omega^2 = -a/b > 0, \quad (33)$$

которое получается из (1) при $c = 0$, $f(z) \equiv 0$.

Уравнение (33) заменой

$$U(x, y) = D_{0y}^{\alpha-1} u(x, \eta), \quad z \in \bar{\Omega} \quad (34)$$

сводится к уравнению

$$\left(\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + \omega^2 \frac{\partial}{\partial y} \right) U(x, y) = 0. \quad (35)$$

Однородная краевая задача:

$$U(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi/\omega;$$

$$U(0, y) = U(\pi/\omega, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq T$$

для уравнения (35) в области Ω при $r = \pi/\omega$, $\omega = 1, 2, \dots$ имеет, как известно [7], нетривиальное решение $U(z) = y \sin \omega x$. Согласно (34) этому решению соответствует функция

$$u(z) = D_{0y}^{1-\alpha} \eta \sin \omega x = y^\alpha \sin \omega x / \Gamma(\alpha + 1),$$

которая является решением однородной краевой задачи:

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-1} u(x, \eta) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi/\omega; \quad u(0, y) = u(\pi/\omega, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq T$$

для уравнения (33) в области $\Omega = \{z : 0 < x < \pi/\omega, \quad 0 < y < T\}$.

В уравнении (33) с начальным условием (9) совершим переход к новой динамической переменной

$$v(z) = D_{0y}^\alpha u(x, \eta) \Rightarrow u(z) = \frac{\tau(x)}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} + D_{0y}^{-\alpha} v(x, \eta), \quad (36)$$

$$0 < x < r, \quad 0 < y < T.$$

Следствием этой операции будет уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \omega^2 v = 0. \quad (37)$$

Любое решение $v(z)$ уравнения (37) представимо в виде

$$v(z) = \varphi_0(y) \cos \omega x + \frac{1}{\omega} \psi_0(y) \sin \omega x, \quad (38)$$

где $\varphi_0(y)$ и $\psi_0(y)$ принадлежат классу $C[0, T] \cap L[0, T]$.

Удовлетворим функцию (38) условию (24):

$$\psi_r(y) = \psi_0(y) \cos \omega r - \omega \varphi_0(y) \sin \omega r.$$

Отсюда можно найти $\psi_0(y)$ тогда и только тогда, когда $\cos \omega r \neq 0$. При соблюдении этого условия

$$\psi_0(y) = [\psi_r(y) + \omega \varphi_0(y) \sin \omega r] / \cos \omega r.$$

Если же $\cos \omega r = 0$ ($\omega r = \pi/2 + k\pi$, $k = 0, 1, \dots$), то однородная краевая задача:

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-1} u(x, \eta) = 0, \quad 0 \leq x \leq r; \quad u(0, y) = 0, \quad u_x(r, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq T$$

для уравнения (33) в области Ω имеет бесчисленное множество линейно независимых решений вида

$$u(z) = \frac{\sin \omega x}{\omega} D_{0y}^{-\alpha} \psi_0(\eta), \quad \omega = \frac{\pi}{r} \left(\frac{1}{2} + k \right), \quad k = 0, 1, \dots$$

В заключение отметим, что нагруженные дифференциальные уравнения вида (1) могут стать базовыми уравнениями при математическом моделировании влияния влажности почв на изменения их фрактальных характеристик; метод малоуглового рассеяния нейтронов позволил обнаружить фрактальную организацию почв [8].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-01-00142).

Литература

1. Янггарбер В. А. О смешанной задаче для модифицированного уравнения влагопереноса // Журнал прикладной механики и технической физики. 1967. № 1. С. 91–96.
2. Жекамухов М. Х., Жекамухова И. М. Классические реологические модели и квазистатические методы определения вязкоупругих характеристик снега // Труды Высшего горного геофизического института. Физика облаков и активные воздействия. Вып. 95. С. 84–122.
3. Нахушев А. М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006. 287 с.
4. Жегалов В. И., Миронов А. Н. Дифференциальные уравнения со старшими частными производными. Казанское математическое общество, 2001. 226 с.
5. Нахушева В. А. Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов. М.: Наука, 2006. 174 с.
6. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 272 с.
7. Colton D. Pseudoparabolic equations in one space variable // J. Different. equations. 1972. Vol. 12, no. 3. Pp. 559–565.
8. Федотов Г. Н., Третьяков Ю. Д., Пахомов Е. И., Куклин А. Н., Исламов А. Х., Початкова Т. Н. Влияние влажности на фрактальные свойства почвенных коллоидов // Доклады РАН. 2006. Т. 409, № 2. С. 199–201.

О некоторых математических моделях критических событий фрактальной структуры, происходящих в режиме с обострением

Среди теоретических схем критических событий (экстремальные природные явления, экономические и демографические ситуации), используемых при исследованиях и расчетах, особое место занимают схемы, в основе которых лежит дифференциальное уравнение Пирсона

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2)y'(x) = (x - a_3)y(x), \quad a_j = \text{const}, \quad j = 0, 1, 2, 3. \quad (1)$$

В теории вероятности любое решение $y(x)$ уравнения (1) называется плотностью распределения Пирсона.

В работе [1] исследованы нагруженные дифференциальные уравнения, которые позволяют получить законы эволюции плотности распределения случайных величин, определить передаточную функцию плотностей немарковских процессов и броуновского движения через фундаментальное решение уравнения фрактальной диффузии, ввести понятие плотности обобщенного распределения Пирсона как аналога уравнения экспоненциального роста в дробном исчислении, вывести степенной закон катастрофических процессов (в частности, наводнений) как решение видоизмененной задачи Коши для уравнения в частных производных дробного порядка меньше 1.

Функция

$$y(x) = kx^{-q} \exp(-\alpha/x), \quad 0 < x < \infty \quad (2)$$

с постоянными параметрами k , q и α удовлетворяет уравнению

$$x^2y'(x) = (\alpha - qx)y(x), \quad 0 < x < \infty, \quad (3)$$

которое следует из (1) при $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = -1/q$, $a_3 = \alpha/q$, $q \neq 0$.

При $\alpha = 0$ уравнение (3) и его решение (2) соответственно принимают вид

$$xy'(x) = -qy(x), \quad (4)$$

$$y(x) = kx^{-q}, \quad 0 < x < \infty. \quad (5)$$

Задаваемое уравнением (4) степенное распределение вероятностей (5) является характерным для многих катастрофических событий (наводнения, ураганы, землетрясения, лавины, сели, столкновение метеоритов с землей, ...).

Любое решение (5) уравнения (4) представляет собой решение уравнения

$$x^2 y''(x) + p y(x) = 0 \quad (6)$$

и уравнения

$$D_{0x}^{m-q} \xi^{m-1} y(\xi) = 0, \quad x > 0, \quad (7)$$

где $p = -q(q+1)$, D_{0x}^{m-q} – оператор Римана–Лиувилля, m – целая часть $[q]$ числа $q \in]m-1, m]$, $m = 1, 2, \dots$. Общее решение уравнения (4) совпадает с общим решением уравнения (7).

Точка $x = 0$ – особая точка уравнений (3) и (6): в этой точке вырождается их порядок.

В случае, когда $m = 1$ (например, в случае ураганов и землетрясений), уравнение (7) приводит к модельному уравнению дробного порядка

$$D_{0x}^{1-q} y(\xi) = 0. \quad (8)$$

Непосредственным обобщением уравнения (8) является уравнение

$$D_{0x}^{1-q} y(\xi) = \lambda y(x), \quad x > 0$$

с вещественным параметром λ , любое решение $y(x)$ которого представимо в виде

$$y(x) = a_{1-q} x^{-q} \exp_{1-q}(\lambda x^{1-q}),$$

где

$$a_{1-q} = \Gamma(1-q) \lim_{x \rightarrow 0} x^q y(x), \quad \exp_\varepsilon(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\varepsilon + \varepsilon j)},$$

$\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера, $\exp_\varepsilon(z)$ – фрактальная (обобщенная) экспоненциальная функция [1].

Общее решение уравнения (6) задается формулой

$$\frac{y(x)}{\sqrt{x}} = \begin{cases} c_1 \cos(\omega \log x) + c_2 \sin(\omega \log x) & \text{при } \omega^2 = p - 1/4 > 0, \\ c_1 x^\omega + c_2 x^{-\omega} & \text{при } \omega^2 = 1/4 - p > 0, \\ c_1 + c_2 \log x & \text{при } p = 1/4; \end{cases} \quad (9)$$

здесь c_1 и c_2 – произвольные постоянные.

Далее будем предполагать, что $x = t_c - t$, где t – безразмерное время, не превосходящее критического значения t_c .

Как видно из (9), уравнение (6) с коэффициентом $p > 1/4$ может стать базовой моделью явления, называемого лог-периодичностью, при котором, например, вероятность или коэффициент угрозы ускоряются не монотонно, но осложнены осцилляциями с частотами, растущими при приближении критического времени $t = t_c$ [2].

Известно, что в различных процессах, протекающих в режиме с обострением, на основной тренд накладываются лог-периодические колебания, неограниченно ускоряющиеся по мере приближения к критическому времени.

При $p = \omega^2 + 1/4$ решение (9) уравнения (6) записывается в виде

$$y(x) = \sqrt{x} u(x), \quad u(x) = A \cos(\omega \log x + \varphi) + B \sin(\omega \log x + \varphi), \quad (10)$$

где $A = c_1 \cos \varphi - c_2 \sin \varphi$, $B = c_1 \sin \varphi + c_2 \cos \varphi$.

Легко проверить, что функция

$$\hat{u}(x) = u(\exp x) = A \cos(\omega x + \varphi) + B \sin(\omega x + \varphi)$$

является решением уравнения гармонического осциллятора

$$\hat{u}''(x) + \omega^2 \hat{u}(x) = 0, \quad x \geq 0.$$

D. Sornette, A. Johansen в своих работах [3–7], посвященных моделированию различных критических ситуаций, в особенности финансовых крахов, широко используют функции следующих конструкций:

$$w(x) = a + [u(x) + b]x^\beta, \quad x \geq 0, \quad a = \text{const}, \quad b = \text{const}, \quad \beta = \text{const} < 0. \quad (11)$$

Здесь $u(x)$ – лог-периодическая функция, задаваемая формулой (10) с коэффициентом $B = 0$, b и A – амплитуды, соответственно, основного тренда и колебаний около него.

Как отмечено в работе А. А. Акаева, В. А. Садовниченко, А. В. Коротаева [8], ускоряющиеся лог-периодические колебания, накладываются на взрывной возрастающий тренд, описываемый степенной функцией вида

$$w_0(t) = a + [A \cos(\omega \log x + \varphi) + b]x^\beta, \quad x = t_c - t$$

с сингулярностью в конечный момент времени t_c , наблюдаются в ситуациях, ведущих к катастрофическим, и служат их предвестниками, позволяющими предсказывать эти события.

Предлагается за определение функции $w(x)$ принять основное ее свойство: функция

$$y(x) = \left[\frac{w(x) - a}{x^\beta} - b \right] \sqrt{x} \quad (12)$$

должна быть решением уравнения (6). Тривиальному решению $y(x) \equiv 0$ этого уравнения отвечает степенной закон:

$$w(x) = a + bx^\beta. \quad (13)$$

Из (9) и (12) получаем, что в качестве функции $w(x)$ можно рассмотреть и функцию вида

$$w(x) = a + bx^\beta + x^\beta \begin{cases} c_1 \cos(\omega \log x) + c_2 \sin(\omega \log x) & \text{при } p > 1/4, \\ c_1 x^\omega + c_2 x^{-\omega} & \text{при } p < 1/4, \\ c_1 + c_2 \log x & \text{при } p = 1/4. \end{cases}$$

В модели (11) функцию $u(x)$ можно заменить решением $y(x) = u(x)$ уравнения

$$D_{0x}^\gamma y(\xi) = \lambda y(x), \quad 0 < \gamma = \text{const} \leq 1, \quad \lambda = \text{const}. \quad (14)$$

Тогда будем иметь

$$w(x) = a + bx^\beta + a_\gamma x^{\beta+\gamma-1} \exp_\gamma(\lambda x^\gamma). \quad (15)$$

Уравнение (14) при $\beta + \gamma < 1$ в силу (15) приводит к режиму с обострением. В частности, из (15) при $a = b = \lambda = 0$, $a_\gamma = 179 \cdot 10^9 \Gamma(\gamma)$, $t_c = 2027$, $\beta + \gamma = 0,01$ получаем демографическую формулу Ферстера [9].

Математическому моделированию демографической динамики посвящены работы [10–12].

В работе [11] обосновывается, что фрактальные дифференциальные уравнения станут базовыми при формулировании фундаментальных, но вместе с тем простых макрозаконів социальной эволюции, в частности, при моделировании глобального и регионального демографических процессов, играющих доминирующую роль в становлении и развитии информационного общества. Фрактальное дифференциальное уравнение (8), общее решение которого задается формулой (5), при $x = t_c - t > 0$ описывает динамику народонаселения

$$N(t) = y(t_c - t) = k(t_c - t)^{-q}.$$

Примечательно, что эта функция лишь при $k = (q/a)^q$ совпадает с единственным решением задачи Коши:

$$\lim_{t \rightarrow t_c} N(t) = \infty$$

для нелинейного дифференциального уравнения первого порядка

$$N'(t) = a[N(t)]^{1+1/q}, \quad a = \text{const} > 0. \quad (16)$$

Уравнение (16) является частным случаем уравнения Бернулли–Ферхюльста [1, с. 156] – эталонным объектом теории режимов с обострением, и его решение

$$N(t) = N(0) \left(\frac{t_c}{t_c - t} \right)^q, \quad t_c = \frac{q}{a} [N(0)]^{-1/q}, \quad 0 \leq t < t_c$$

задает закон роста народонаселения.

Известно [11], [12] эмпирическое подтверждение существенной связи численности населения $N(t)$ с уровнем технологии, с научно-техническим прогрессом. Такая связь может быть реализована, например, моделью

$$D_{0t}^\mu \log U(\eta) = cN(t), \quad t > 0, \quad 0 < \mu = \text{const} \leq 1, \quad c = \text{const} \geq 0,$$

где $U(t)$ – уровень технологического развития. Это уравнение при $\mu = 1$ совпадает с дифференциальным уравнением технологического развития Кузнеця–Кремера (S. Kuznets, M. Kremer).

При моделировании демографического взрыва как процесса с обострением в формуле (10) можно положить $y(x) = u(\log x)$, где $u(x)$ – решение дробного осцилляционного уравнения

$$\partial_{0x}^\mu u(\xi) + u^\mu u(x) = 0, \quad 1 < \mu = \text{const} \leq 2, \quad 0 \leq \omega = \text{const} \quad (17)$$

с оператором $\partial_{0x}^\mu = D_{0x}^{\mu-2} d^2/d\xi^2$ в главной части.

Известно (см. [14, с. 239]), что любое решение $u(x)$ уравнения (17) представимо в виде

$$u(x) = c_1 \cos_\mu(\omega x) + c_2 \sin_\mu(\omega x),$$

где $c_1 = u(0)$, $c_2 = u'(0)/\omega$,

$$\sin_\mu \xi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \xi^{\mu k+1}}{\Gamma(2 + \mu k)}, \quad \cos_\mu \xi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \xi^{\mu k}}{\Gamma(1 + \mu k)}$$

– обобщенные тригонометрические функции [14].

Простой, но весьма важной моделью скорости производства информации $v(t)$ в информационном обществе может стать функция $v(t) = y(t_c - t)$, где $y(x)$ – решение уравнения (8) или более общего уравнения (14).

Литература

1. Нахушева В. А. О нелокальных дифференциальных уравнениях математических моделей некоторых стохастических процессов // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2011. Т. 13, № 1. С. 90–97.
2. Сорнетте Д. Как предсказывать крахи финансовых рынков: критические события в комплексных финансовых системах. М., 2003.
3. Johansen A., Sornette D. Finite-time singularity in the dynamics of the world population, economic and financial indices // Physika A. 2001. Vol. 294, no. 3/4. Pp. 465–502.
4. Sornette D., Johansen A. Significance of log-periodic precursors to financial crashes // Quantitative Finance. 2001. No. 1/4. Pp. 452–471.
5. Sornette D., Johansen A. Large financial crashes // Physika A. 1997. Vol. 245, no. 3/4. Pp. 411–422.
6. Johansen A., Sornette D., Wakita H., et al. Discrete scaling in earthquake precursory phenomena: evidence in the Kobe earthquake, Japan // J. Phys. I. 1996. Vol. 6, no. 10. Pp. 1391–1402.
7. Sornette D., Johansen A. J. Phys. I. 1995. Vol. 5, no. 5. Pp. 607–619.

8. Акаев А. А., Садовничий В. А., Коротаев А. В. Взрывной рост цен на золото и нефть как предвестник мирового финансово-экономического кризиса // ДАН. 2011. Т. 437, № 6. С. 727–730.
9. Капица С. П. Математическая модель роста народонаселения мира // Математическое моделирование. 1992. Т. 4, № 6. С. 65–79.
10. Нахушев А. М., Кенетова Р. О. Моделирование социально-исторических и этнических процессов. Нальчик: Эль-Фа, 1997. 170 с.
11. Нахушев А. М. К проблеме математического моделирования региональных социально-экономических систем // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Математическая. 2007. № 2 (6). С. 4–15.
12. Акаев А. А., Садовничий В. А. Математическая модель демографической динамики со стабилизацией численности населения мира вокруг стационарного уровня // ДАН. 2010. Т. 435, № 3. С. 320–324.
13. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. 301 с.
14. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 272 с.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН

Об одной задаче начально-граничного управления для дифференциального уравнения смешанного типа

Рассмотрим уравнение в частных производных второго порядка смешанного типа

$$\frac{\partial^{2H(-x)+H(x)}u}{\partial y^{2H(-x)+H(x)}} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad y > 0, \quad (1)$$

где $H(x)$ – функция Хевисайда, $c^2 = a^2 H(-x) + b^2 H(x)$, a и b – положительные числа, $u = u(x, y)$ – действительная функция точки $z = (x, y)$ евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ независимых переменных x и y .

При $x < 0$ уравнение (1) совпадает с волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad y > 0, \quad (2)$$

а при $x > 0$ – с уравнением Фурье

$$\frac{\partial u}{\partial y} = b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad y > 0. \quad (3)$$

Здесь y играет роль временной переменной, которая меняется от начального $y = 0$ до финального значений $y = T$.

Уравнение (1) является уравнением смешанного гиперβολо-параболического типа и оно выступает базовой математической моделью различных физико-биологических процессов, протекающих в составных средах, например, движения газа или малосжимаемой жидкости в канале, окруженном пористой средой [1], [2].

Пусть $\Omega^+ = \{z : x > 0, 0 < y < T\}$; Ω^- – область, ограниченная отрезками $A_0B_0 = \{(0, y) : 0 \leq y \leq T\}$, $B_0B_l = \{(x, T) : l \leq x \leq 0\}$, $B_lA_{2l} = \{z : x - ay = 2l, 0 \leq y \leq T\}$ и $A_{2l}A_0 = \{(x, 0), 2l \leq x \leq 0\}$, где $A_0 = (0, 0)$, $B_0 = (0, T)$, $B_l = (l, T)$ – точка пересечения характеристик $A_0B_l : x + ay = 0, y \geq 0$, $B_lA_{2l} : x - ay = 2l$ и прямой: $y = T$, $A_{2l} = (2l, 0)$; $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^- \cup \{(0, y) : 0 < y < T\}$, $\bar{\Omega}$ – замыкание области Ω , $C_0 = (l/2, T/2)$ – точка пересечения характеристик $A_lB_0 : x - ay = l$ и A_0B_l ; $l = -aT$. Через Ω_0 , Ω_1 и Ω_2 обозначим треугольники $A_{2l}A_0B_l$, $A_0B_0C_0$, $B_0B_lC_0$. Характеристика A_0B_l разбивает область Ω^- на две подобласти Ω_0 и $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \{z : x - ay = l, T/2 < y < T\} = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup C_0B_0$ (см. рис. 1).

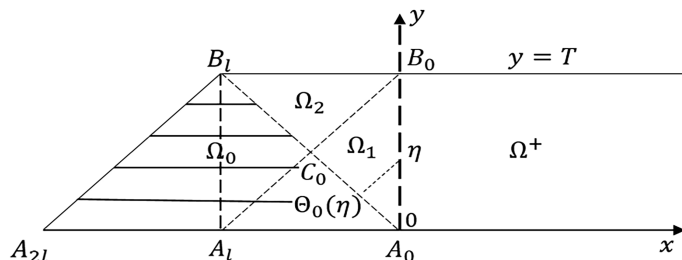


Рис. 1

Решением уравнения (1) в области Ω^- будем называть любую функцию $u(x, y)$ из класса функций $C(\bar{\Omega}^-)$, непрерывных в $\bar{\Omega}^-$, удовлетворяющую нагруженному уравнению

$$2u(x, y) = \begin{cases} u(x + ay, 0) + u(x - ay, 0) + \frac{1}{a} \int_{x-ay}^{x+ay} u_y(\xi, 0) d\xi, & z \in \Omega_0, \\ u(0, y + \frac{x}{a}) + u(0, y - \frac{x}{a}) + a \int_{y-x/a}^{y+x/a} u_x(0, \eta) d\eta, & z \in \Omega_1, \\ u(x + aT - ay, T) + u(x - aT + ay, T) - \frac{1}{a} \int_{x-aT+ay}^{x+aT-ay} u_y(\xi, T) d\xi, & z \in \Omega_2, \end{cases} \quad (4)$$

а решением уравнения (1) в области Ω^+ назовем любую функцию $u(x, y) \in C(\bar{\Omega}^+)$, удовлетворяющую нагруженному уравнению

$$u(x, y) = -\frac{b}{\sqrt{\pi}} \int_0^y u_x(+0, \eta) (y - \eta)^{-1/2} \exp \left[-\frac{x^2}{4(y - \eta)b^2} \right] d\eta + \frac{1}{2b\sqrt{\pi y}} \int_0^\infty u(\xi, 0) \left[\exp \frac{(x - \xi)^2}{-4yb^2} + \exp \frac{(x + \xi)^2}{-4yb^2} \right] d\xi. \quad (5)$$

Задача начально-граничного управления примыкает к краевой задаче для уравнения

$$D_{0y}^{\alpha H(x)+2H(-x)} u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < \alpha = \text{const} \leq 1, \quad y > 0$$

с оператором Римана–Лиувилля по времени y , исследованной в работе [3, с. 189], и ставится следующим образом.

Задача. В области Ω найти решение $u(z)$ уравнения (1) из класса $C(\overline{\Omega})$, удовлетворяющее заданным условиям Коши:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 2l \leq x < \infty; \quad (6)$$

$$u_y(x, 0) = \psi(x), \quad 2l \leq x < 0, \quad (7)$$

произвольно заданному финальному условию:

$$u(x, T) = \Phi(x), \quad l \leq x \leq 0, \quad (8)$$

условию Тихонова:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \max_{[0, T]} |u(x, y)| \exp(-\varepsilon x^2) = 0 \quad (9)$$

и условию сопряжения:

$$u_x(-0, y) = \beta u_x(+0, y), \quad 0 < y < T, \quad (10)$$

где

$$\varphi(x) \in C[2l, \infty[\cap C^1]2l, 0[, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} |\varphi(x)| \exp(-\varepsilon x^2) = 0,$$

$$\psi(x) \in C[2l, 0[\cap L[2l, 0], \quad \Phi(x) \in C[l, 0], \quad \beta = \text{const} \neq 0.$$

Задачу можно интерпретировать и как задачу граничного управления, суть которой состоит в нахождении функции $\tau(y) = u(0, y)$, $0 \leq y \leq T$, переводящей начальное состояние (6), (7) решения $u(z) = u(x, y)$ уравнения (2) в области Ω^- в финальное (8), когда известно, что оно продолжается из области Ω^- через $A_0 B_0 = \{(0, y) : 0 < y < T\}$ в область Ω^+ как решение уравнения (3), удовлетворяющее условиям (9), (10).

В основополагающих работах В. А. Ильина [4], [5] впервые предложен метод исследования задач граничного управления для уравнения (2) в прямоугольной области $Q_T = \{z : 0 < x < l, 0 < y < T\}$ при любом значении финального времени T .

Задаче сопряжения уравнений (2), (3) в области $-\infty < x < \infty$, $0 < y < +\infty$ посвящена работа [2].

В области Ω_0 решение задачи определяется как решение задачи Коши (6), (7) для уравнения (2) по следующей хорошо известной формуле:

$$2u(z) = \varphi(x + ay) + \varphi(x - ay) + \frac{1}{a} \int_{x-ay}^{x+ay} \psi(\xi) d\xi, \quad z \in \Omega_0. \quad (11)$$

Пусть $\theta_0(\eta) = (-a\eta/2, \eta/2)$ – точка пересечения характеристики $x - ay = -a\eta$, выходящей из точки $(0, \eta) \in A_0B_0$ с характеристикой $A_0C_0: x + ay = 0$.

Из (11) следует, что

$$2u[\theta_0(\eta)] = \varphi(0) + \varphi(-a\eta) + \frac{1}{a} \int_{-a\eta}^0 \psi(\xi) d\xi, \quad 0 < \eta < T. \quad (12)$$

Аналогично из (4) находим, что

$$2u(z) = \tau\left(y + \frac{x}{a}\right) + \tau\left(y - \frac{x}{a}\right) + a \int_{y-x/a}^{y+x/a} \nu^-(\xi) d\xi, \quad z \in \Omega_1,$$

где $\tau(y) = u(0, y)$, $\nu^-(y) = u_x(-0, y)$;

$$2u[\theta_0(\eta)] = \varphi(0) + \tau(\eta) + a \int_{\eta}^0 \nu^-(\xi) d\xi, \quad 0 < \eta < T. \quad (13)$$

Равенства (12) и (13) при $\eta = y$ приводят к уравнению

$$\tau(y) - a \int_0^y \nu^-(\xi) d\xi = \varphi(-ay) + \frac{1}{a} \int_{-ay}^0 \psi(\xi) d\xi, \quad 0 \leq y \leq T. \quad (14)$$

Из (14), согласно условию сопряжения (10), имеем фундаментальное соотношение между функцией $\tau(y)$ и функцией $\nu(y) = u_x(+0, y)$:

$$\tau(y) - a\beta \int_0^y \nu(\xi) d\xi = \varphi(-ay) + \frac{1}{a} \int_{-ay}^0 \psi(\xi) d\xi. \quad (15)$$

Уравнение (15), которое при $\beta = 1$ совпадает с уравнением (14), представляет собой динамическое краевое условие для уравнения (3) в области Ω^+ , и его можно записать в виде:

$$\tau(0) = \varphi(0), \quad \tau'(y) - a\beta\nu(y) = \psi(-ay) - a\varphi'(-ay), \quad 0 < y \leq T.$$

Удовлетворив решение (5) краевому условию (6) при $0 < x < \infty$, а затем положив $x = 0$, получим второе функциональное соотношение между $\tau(y)$ и $\nu(y)$:

$$\tau(y) + bD_{0y}^{-1/2}\nu(y) = \frac{1}{b\sqrt{\pi}}\varphi_0(y), \quad 0 < y < T, \quad (16)$$

где $D_{0y}^{-1/2}$ – оператор Римана–Лиувилля, а

$$\varphi_0(y) = \frac{1}{\sqrt{y}} \int_0^\infty \varphi(\xi) \exp \left[-\frac{\xi^2}{4yb^2} \right] d\xi.$$

Исключим из системы (15), (16) функцию $\tau(y)$. В результате для функции $\nu(y)$ получим интегральное уравнение Вольтерра первого рода:

$$D_{0y}^{-1/2}\nu(y) + \lambda D_{0y}^{-1}\nu(y) = \mu(y) \quad (17)$$

с параметром $\lambda = a\beta/b$ и правой частью

$$\mu(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}b^2}\varphi_0(y) - \frac{1}{b}\varphi(-ay) - \frac{1}{ab} \int_{-ay}^0 \psi(\xi) d\xi.$$

Если функция

$$f(y) = D_{0y}^{1/2}\mu(y) \in C[0, T] \cap L[0, T], \quad (18)$$

то из уравнения (17) получаем

$$\nu(y) + \lambda D_{0y}^{-1/2}\nu(y) = f(y), \quad 0 < y \leq T. \quad (19)$$

Единственное решение $\nu(y)$ интегрального уравнения Вольтерра второго рода (19) задается формулой Хилле–Тамаркина [6, с. 93]:

$$\nu(y) = \frac{d}{dy} \int_0^y f(\eta) E_{1/2} [\lambda(y - \eta)^{1/2}] d\eta, \quad (20)$$

где

$$E_\rho[z; \zeta] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\zeta + k/\rho)}, \quad \rho > 0$$

– функция типа Миттаг-Леффлера, которая при $\zeta = 1$ совпадает с функцией Миттаг-Леффлера $E_{1/\rho}[z] = E_\rho[z; 1]$.

Формулу (20) можно записать и в виде

$$\nu(y) = f(y) + \lambda \int_0^y (y - \eta)^{-1/2} E_2 [\lambda(y - \eta)^{1/2}; 1/2] f(\eta) d\eta. \quad (21)$$

Изучим поведение функции (21) при $y \rightarrow 0$. Начнем с функции $\varphi_0(y)$. Легко проверить, что после замены переменной интегриации $\xi = 2b\sqrt{yt}$, в силу равенства $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ при $x > 0$, ее можно записать в виде

$$\varphi_0(y) = b \int_0^\infty [\varphi(2b\sqrt{yt}) - \varphi(0)] e^{-t} t^{-1/2} dt + b\Gamma(1/2)\varphi(0).$$

Отсюда следует, что если

$$\varphi'(x) = |x|^\gamma \varphi_1(x), \quad \psi(x) \in C[2l, 0], \quad (22)$$

где $\gamma = \text{const} > -1$, $\varphi_1(x) \in C[2l, \infty[$, $\varphi_1(0) \neq 0$, то

$$\lim_{y \rightarrow +0} \varphi_0(y) = b\sqrt{\pi}\varphi(0), \quad \lim_{y \rightarrow +0} \mu(0) = 0,$$

$$\varphi'_0(y) = \frac{b^2}{\sqrt{y}} \int_0^\infty \varphi' [2b\sqrt{yt}] e^{-t} dt, \quad 0 < y \leq T,$$

$$\mu'(y) = \frac{1}{b^2\sqrt{\pi}}\varphi'_0(y) + \frac{a}{b}\varphi'(-ay) - \frac{1}{b}\psi(-ay), \quad 0 < y \leq T,$$

$$f(y) = D_{0y}^{-1/2}\mu'(\eta) = \frac{1}{b^2\sqrt{\pi}}\partial_{0y}^{1/2}\varphi_0(\eta) + \frac{a}{b}\partial_{0y}^{1/2}\varphi(-a\eta) - \frac{1}{b}D_{0y}^{-1/2}\psi(-a\eta),$$

$$\partial_{0y}^{1/2}\varphi_0(\eta) = \frac{2^\gamma}{\sqrt{\pi}}b^{2+\gamma} \int_0^y \frac{\eta^{\frac{\gamma}{2}-\frac{1}{2}}}{\sqrt{y-\eta}} d\eta \int_0^\infty \varphi_1 [2b\sqrt{\eta t}] e^{-t} dt =$$

$$= \frac{2^\gamma}{\sqrt{\pi}}b^{2+\gamma}y^{\frac{\gamma}{2}} \int_0^1 \frac{\xi^{\frac{\gamma}{2}-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-\xi}} d\xi \int_0^\infty t^{\frac{\gamma}{2}} \varphi_1 [2b\sqrt{\xi y t}] e^{-t} dt,$$

$$\partial_{0y}^{1/2}\varphi(-a\eta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \frac{\varphi'(-a\eta)}{\sqrt{y-\eta}} d\eta = \frac{a^\gamma}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \frac{\eta^\gamma \varphi_1(-a\eta)}{\sqrt{y-\eta}} d\eta =$$

$$= \frac{a^\gamma}{\sqrt{\pi}}y^{\gamma+1/2} \int_0^1 \frac{\xi^\gamma \varphi_1(-a\xi y)}{\sqrt{1-\xi}} d\xi,$$

$$D_{0y}^{-1/2}\psi(-a\eta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \frac{\psi(-a\eta)}{\sqrt{y-\eta}} d\eta = \frac{1}{\sqrt{\pi}}y^{1/2} \int_0^1 \frac{\psi(-a\xi y)}{\sqrt{1-\xi}} d\xi.$$

Теперь нетрудно видеть, что

$$f(y) = y^{\gamma/2} \varphi_{11}(y) + y^{\gamma+1/2} \varphi_{12}(y) + y^{1/2} \psi_1(y), \quad (23)$$

где $\varphi_{11}(y)$, $\varphi_{12}(y)$ и $\psi_1(y)$ принадлежат классу $C[0, T]$,

$$\varphi_{11}(0) = \frac{(2b)^\gamma}{\pi} \varphi_1(0) \Gamma\left(\frac{\gamma}{2} + 1\right) \int_0^1 \frac{\xi^{\gamma/2-1/2}}{(1-\xi)^{1/2}} d\xi = \frac{\varphi_1(0)}{\sqrt{\pi}} (2b)^\gamma \Gamma\left(\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2}\right),$$

$$\varphi_{12}(0) = \frac{a^{\gamma+1}}{b\sqrt{\pi}} \varphi_1(0) \int_0^1 \xi^\gamma (1-\xi)^{-1/2} d\xi = \frac{\varphi_1(0)}{b} a^{\gamma+1} \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+3/2)},$$

$$\psi_1(0) = -\frac{1}{b\sqrt{\pi}} \psi(0) \int_0^1 (1-\xi)^{-1/2} d\xi = \frac{2}{b\sqrt{\pi}} \psi(0),$$

и, стало быть, числа $\varphi_{11}(0)$ и $\varphi_{12}(0) \neq 0$, а $\psi_1(0) \neq 0$ при $\psi(0) \neq 0$.

Пусть соблюдено условие (22). Тогда из формулы (21) в силу равенства (24) и функционального соотношения для гамма-функции

$$2^{\gamma-1} \Gamma(\gamma/2 + 1/2) \Gamma(\gamma/2 + 1/2) = \sqrt{\pi} \Gamma(\gamma)$$

закключаем: если $\gamma \geq 0$, то $\nu(y) \in C[0, T]$; если $-1 < \gamma < 0$, то

$$f(y) = y^{\gamma/2} f_1(y), \quad f_1(y) \in C[0, T], \quad f_1(0) = \varphi_{11}(0) = \frac{2b^\gamma \Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma/2)} \varphi_1(0) \neq 0$$

и $\nu(y)$ при $y \rightarrow 0$ обращается в бесконечность порядка $-\gamma/2$.

Подставим функцию $\nu(y)$ из (20) в уравнение (15). Тогда будем иметь

$$u(0, y) = a\beta \int_0^y f(\eta) E_{1/2}[\lambda(y-\eta)^{1/2}] d\eta + \varphi(-ay) + \frac{1}{a} \int_{-ay}^0 \psi(\xi) d\xi. \quad (24)$$

Точки

$$z_0 = (l-x, 0), \quad z_1 = \left(0, \frac{x-l}{a}\right), \quad z_2 = (x, T), \quad z_3 = \left(l, -\frac{x}{a}\right)$$

при $l < x < 0$ для уравнения (2) являются вершинами характеристического четырехугольника $z_0 z_1 z_2 z_3$ со сторонами $z_0 z_1$, $z_1 z_2$, $z_2 z_3$, $z_3 z_0$, лежащими в прямоугольнике $A_l A_0 B_0 B_l$.

Для любого решения $u(z) = u(x, y)$ нагруженного уравнения (4) справедлива теорема о среднем значении:

$$u(z_0) + u(z_2) = u(z_1) + u(z_3).$$

Поэтому из финального условия (8) и формул (11), (24) следует, что

$$\begin{aligned} \varphi(l-x) + \Phi(x) = a\beta \int_0^{(x-l)/a} f(\eta) E_{1/2} \left[\lambda \left(\frac{x-l}{a} - \eta \right)^{1/2} \right] d\eta + \\ + \varphi(l-x) + \frac{1}{a} \int_{l-x}^0 \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2} \left[\varphi(l-x) + \varphi(l+x) + \frac{1}{a} \int_{l+x}^{l-x} \psi(t) dt \right], \quad l \leq x \leq 0. \end{aligned}$$

Стало быть,

$$\begin{aligned} \Phi(x) = \frac{1}{2} [\varphi(l+x) + \varphi(l-x)] + \frac{1}{2a} \int_{l+x}^{l-x} \psi(t) dt + \\ + \frac{1}{a} \int_{l-x}^0 \psi(\xi) d\xi + a\beta \int_0^{(x-l)/a} f(\eta) E_{1/2} \left[\lambda \left(\frac{x-l}{a} - \eta \right)^{1/2} \right] d\eta. \end{aligned} \quad (25)$$

Пусть

$$2\chi(y) = \varphi(l+ay) + \varphi(l-ay) + \frac{1}{a} \int_{l-ay}^{l+ay} \psi(\xi) d\xi, \quad 0 \leq y \leq T. \quad (26)$$

Тогда из (11) получаем

$$u(l, y) = \chi(y), \quad 0 \leq y \leq T. \quad (27)$$

При $\beta = 1$, $u_x(-0, y) = u_x(+0, y) = u_x(0, y)$ уравнение (14) можно переписать в виде

$$u(0, y) - a \int_0^y u_x(0, \eta) d\eta = \chi_0(y), \quad 0 \leq y \leq T, \quad (28)$$

где

$$\chi_0(y) = \varphi(-ay) + \frac{1}{a} \int_{-ay}^0 \psi(\xi) d\xi, \quad 0 \leq y \leq T. \quad (29)$$

В силу (5), (6) и (29) задача по существу свелась к задаче с граничными условиями (7), (8) и начально-финальными условиями

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_y(x, 0) = \psi(x), \quad u(x, T) = \Phi(x), \quad l \leq x \leq 0 \quad (30)$$

для одномерного волнового уравнения (2) в области

$$D = \{z: l < x < 0, \quad 0 < y < T\}.$$

Поскольку $\nu^-(y) = \beta\nu(y)$, то из (4), в силу (6), (7) и (8), заключаем:

$$2u(z) = \begin{cases} \tau\left(y + \frac{x}{a}\right) + \tau\left(y - \frac{x}{a}\right) + a\beta \int_{y-x/a}^{y+x/a} \nu(\eta) d\eta, & z \in \Omega_1, \\ \Phi(x - ay + aT) + \Phi(x + ay - aT) - \frac{1}{a} \int_{x+ay-aT}^{x-ay+aT} \Psi(\xi) d\xi, & z \in \Omega_2, \end{cases} \quad (31)$$

где $\Psi(x) = u_y(x, T)$, $l \leq x \leq 0$.

Пусть в представлении (22) число $\gamma \geq 0$. Так как $\varphi(x) \in C^1]2l, 0[$, $\psi(x) \in C[2l, 0[$, то из (15) получаем

$$\tau'(y) = a\beta\nu(y) + \frac{d\varphi(-ay)}{dy} + \psi(-ay), \quad 0 < y \leq T. \quad (32)$$

Из (32) и включения $\nu(y) \in C[0, T]$ заключаем, что $\tau'(y) \in C[0, T]$.

На основании (11) можно записать

$$2u_x(z) = \varphi'(x + ay) + \varphi'(x - ay) + \frac{1}{a}[\psi(x + ay) - \psi(x - ay)], \quad z \in \Omega_0;$$

$$2u_x(l, y) = \varphi'(l + ay) + \varphi'(l - ay) + \frac{1}{a}[\psi(l + ay) - \psi(l - ay)], \quad 0 \leq y \leq T,$$

$$2u_x\left(l, -\frac{x}{a}\right) = \varphi'(l - x) + \varphi'(l + x) + \frac{1}{a}[\psi(l - x) - \psi(l + x)], \quad (33)$$

$$2u_y(z) = a[\varphi'(x + ay) - \varphi'(x - ay)] + \psi(x + ay) + \psi(x - ay),$$

$$2u_y(l, y) = a[\varphi'(l + ay) - \varphi'(l - ay)] + \psi(l + ay) + \psi(l - ay),$$

$$2u_y\left(l, -\frac{x}{a}\right) = a[\varphi'(l - x) - \varphi'(l + x)] + \psi(l - x) + \psi(l + x). \quad (34)$$

К функциям $u_x(z)$ и $u_y(z)$, как и к функции $u(z)$, применим теорему о среднем значении для характеристического четырехугольника $z_0 z_1 z_2 z_3$ и воспользуемся формулами (30), (31), (33), (34). В результате получим

$$\begin{aligned} \varphi'(l - x) + \Phi'(x) &= \nu^-\left(\frac{x - l}{a}\right) + u_x\left(l, -\frac{x}{a}\right) = \\ &= \beta\nu\left(\frac{x - l}{a}\right) + \frac{1}{2}[\varphi'(l - x) + \varphi'(l + x)] + \frac{1}{2a}[\psi(l - x) - \psi(l + x)]; \\ \psi(l - x) + \Psi(x) &= u_y\left(l, -\frac{x}{a}\right) + \tau'\left(\frac{x - l}{a}\right) = \\ &= \frac{a}{2}[\varphi'(l - x) - \varphi'(l + x)] + \frac{1}{2}[\psi(l - x) + \psi(l + x)] + \tau'\left(\frac{x - l}{a}\right). \end{aligned}$$

Отсюда на основании (15) и (21) имеем

$$\Phi'(x) = \beta\nu \left(\frac{x-l}{a} \right) + \frac{1}{2}[\varphi'(l+x) - \varphi'(l-x)] + \frac{1}{2a}[\psi(l-x) - \psi(l+x)], \quad (35)$$

$$\Psi(x) = \tau' \left(\frac{x-l}{a} \right) + \frac{a}{2}[\varphi'(l-x) - \varphi'(l+x)] + \frac{1}{2}[\psi(l+x) - \psi(l-x)], \quad (36)$$

где

$$\begin{aligned} \nu \left(\frac{x-l}{a} \right) &= f \left(\frac{x-l}{a} \right) + \\ &+ \lambda \int_0^{(x-l)/a} \left(\frac{x-l}{a} - \eta \right)^{-1/2} E_2 \left[\lambda \left(\frac{x-l}{a} - \eta \right)^{1/2}; \frac{1}{2} \right] f(\eta) d\eta, \\ \tau' \left(\frac{x-l}{a} \right) &= a\beta\nu \left(\frac{x-l}{a} \right) + \psi(l-x) - a\varphi'(l-x), \\ \Phi(l) &= \frac{1}{2}[\varphi(l+aT) + \varphi(l-aT)] + \frac{1}{2a} \int_{l-aT}^{l+aT} \psi(\xi) d\xi = \\ &= \frac{1}{2}[\varphi(2l) + \varphi(0)] + \frac{1}{2a} \int_{2l}^0 \psi(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Таким образом установлено, что начальное состояние (6), (7) и финальное состояние $u(x, T) = \Phi(x)$, $u_y(x, T) = \Psi(x)$, $l \leq x \leq 0$ системы, задаваемой уравнением (1), условием Тихонова (9) и условием сопряжения (10), при $\gamma \geq 0$ должны быть связаны формулами (26), (35) и (36).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-01-00142-а).

Литература

1. Джурев Т. Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: ФАН, 1979. 240 с.
2. Стручина Г. М. Задача о сопряжении двух уравнений // Инженерно-физический журнал. 1961. Т. IV, № 11. С. 99–104.
3. Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их применение. М.: Наука, 2012. 232 с.
4. Ильин В. А. Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 11. С. 1513–1528.
5. Ильин В. А. Граничное управление процессом колебаний на одном конце при закреплённом втором конце в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергии // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 12. С. 1670–1686.
6. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 272 с.

On some classes of loaded equations and their applications

Consider the system of the following three equations:

$$\partial_{0x}^\alpha u(\xi, t) + \sigma(t)\bar{v}(t)u(x, t) = 0, \quad 0 < x < r, \quad \sigma(t) > 0; \quad (1)$$

$$k\partial_{\tau t}^\beta v(x, \eta) = -\frac{\partial\omega_1}{\partial x}, \quad \tau = \text{const} \geq 0, \quad k = \text{const} > 0; \quad (2)$$

$$\omega_1 = -\frac{\partial}{\partial x}(av + b)v, \quad a = \text{const} \geq 0, \quad b = \text{const} > 0. \quad (3)$$

Here $0 < \alpha = \text{const} \leq 1$, $0 < \beta = \text{const} \leq 1$, and t denotes dimensionless time,

$$\partial_{0x}^\alpha u(\xi, t) = D_{0x}^{\alpha-1} \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial \xi} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-\xi)^{-\alpha} \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial \xi} d\xi;$$

$$\partial_{\tau t}^\beta v(x, \eta) = \text{sign}(t-\tau) D_{\tau t}^{\beta-1} \frac{\partial v(x, \eta)}{\partial \eta} = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_\tau^t |t-\eta|^{-\beta} \frac{\partial v(x, \eta)}{\partial \eta} d\eta,$$

where $\Gamma(z)$ is the Euler gamma-function;

$$\bar{v}(t) = \frac{1}{r} \int_0^r v(x, t) dx.$$

For $\alpha = 1$, equation (1) is a differential form of the Bouguer–Lambert–Beer law for plane waves propagating in an absorbing medium along the ray $x \geq 0$ when the attenuation (absorption) coefficient ω^α , the concentration of absorbing particles $v = v(x, t)$ in the layer $0 \leq x \leq r$ and absorption cross-section $\sigma(t)$ are related by

$$\omega^\alpha = \sigma(t)\bar{v}(t). \quad (4)$$

Equation (3) expresses the second law of Fick when diffusion coefficient depends on the concentration linearly.

Equation (2) may be interpreted as the continuity equation or as a fractal differential form of the mass conservation law, and it realizes the relationship between the concentration of absorbing particles with its density $\omega_1 = \omega_1(x, t)$ [1, p. 26]. The order β of the time derivative with respect to t may depend on x .

By virtue of (4), equation (1) as may be written in the form follows:

$$\partial_{0x}^\alpha u(\xi, t) + \omega^\alpha u(x, t) = 0, \quad 0 < x < r, \quad t \geq 0. \quad (5)$$

Equation (5) is a loaded partial differential equation with partial derivative of order $\alpha \in]0, 1]$ with respect to the spatial variable x .

The order α and the coefficient ω^α may be functions of time t . This equation generalizes the Bouguer–Lambert–Beer law for the intensity $u(x, t) \equiv I_\nu(x, t)$ of the radiation with given frequency ν at the point x and at time t when the absorber layer, $0 \leq x \leq r$, is the medium with fractal dimension that is less than or equal to α . It is the simplest case of an equation that is referred in [2, p. 242] as the generalized fractional oscillation equation.

Any solution $u = u(x, t)$ of (5) can be represented in the form

$$u(x, t) = u(0, t) \text{Exp}_\alpha(-\omega x), \quad (6)$$

where

$$\text{Exp}_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{\alpha k}}{\Gamma(1 + \alpha k)}$$

is the generalized exponential function by terminology of V. A. Nakhushcheva [3].

It follows from (6) that

$$u(r, t) = \varphi_0(t) \text{Exp}_\alpha(-\omega r), \quad (7)$$

where $\varphi_0(t)$ is the intensity of radiation at the beginning of the route $x = 0$, and $\omega r = \tau_\nu$ is the optical depth (thickness) of the fractal layer $0 \leq x \leq r$.

From formula (7) with $\alpha = 1$, we have the known representation of Bouguer law

$$u(r, t) = \varphi_0(t) \exp(-\omega r).$$

We assume that $u(x, t)$ satisfies the local boundary value condition

$$u(0, t) = \varphi_0(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (8)$$

and the function $v(x, t)$ satisfies non-local boundary condition (4).

Using (8), the spectral absorption

$$A_\alpha = \frac{\varphi_0(t) - u(r, t)}{\varphi_0(t)}$$

can be calculated by the formula $A_\alpha = 1 - \text{Exp}_\alpha(-\omega r)$.

Due (2) and (3), the function $v(x, t)$ must be a solution of the equation

$$k \partial_{\tau t}^\beta v(x, \eta) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} [(av + b)v]. \quad (9)$$

We differentiate both sides of equation (9) with respect to the time variable t and, taking into account the equality

$$\frac{\partial}{\partial t} \partial_{\tau t}^{\beta} v(x, \eta) = \frac{\partial}{\partial t} \text{sign}(t - \tau) D_{\tau t}^{\beta-1} \frac{\partial v(x, \eta)}{\partial \eta} D_{\tau t}^{\beta} \frac{\partial v(x, \eta)}{\partial \eta},$$

we obtain the equation

$$k D_{\tau t}^{\beta} \frac{\partial v(x, \eta)}{\partial \eta} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[(2a\bar{v} + b) \frac{\partial v}{\partial t} \right]. \quad (10)$$

The boundary value condition (4) gives us some justification to approximate equation (10) by the equation

$$k D_{\tau t}^{\beta} \frac{\partial v(x, \eta)}{\partial \eta} = (2a\bar{v} + b) \frac{\partial^3 v(x, t)}{\partial x^2 \partial t}. \quad (11)$$

In equation (11) we introduce the new dependent variable

$$\omega(x, t) = \frac{\partial v(x, t)}{\partial t}. \quad (12)$$

Then, for $\omega = \omega(x, t)$ we obtain

$$D_{\tau t}^{\beta} \omega(x, \eta) = k_{\alpha} \frac{\partial^2 \omega(x, t)}{\partial x^2} \quad (13)$$

with coefficient

$$k_{\alpha} = \frac{2a\bar{v} + b}{k} = \frac{1}{k} \left[\frac{2a\omega^2}{\sigma(t)} + b \right]. \quad (14)$$

Equation (11) can be approximately replaced by the equation

$$D_{\tau t}^{\beta} \frac{\partial v(x, \eta)}{\partial \eta} = K(t) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2}, \quad (15)$$

where

$$K(t) = \frac{2a\bar{v}'(t)}{k} = \frac{2a}{k} \frac{d}{dt} \left[\frac{\omega^2}{\sigma(t)} \right]. \quad (16)$$

Let τ be a time moment when the average value of the concentration of molecules $\bar{v}(t)$ in absorbing medium $0 \leq x \leq r$ reaches its maximum, and let the function (16) can be represented in the form

$$K(t) = |t - \tau|^m \chi(t) \text{sign}(\tau - t), \quad (17)$$

where $m = \text{const} \geq 0$, $\chi(t)$ is a continuous positive function defined on time interval $[0, T]$ with initial, $t = 0$, and estimated, $t = T$, time moments.

Condition (17) means that equation (15) for $\beta = 1$ is a partial differential equation of mixed type. At the model case, when $\chi(t) \equiv 1$, equation (15) takes the following form:

$$D_{\tau t}^{\beta} \frac{\partial v(x, \eta)}{\partial \eta} = \text{sign}(\tau - t) |t - \tau|^m \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2}. \quad (18)$$

Equation (18) with $\beta = 1$ and $m = 1$ coincides with the Tricomi equation of hypersonic flow

$$(t - \tau) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (19)$$

which is well known from the theory of gas dynamics, and, coincides with the Lavrent'ev–Bitsadze equation

$$\text{sign}(t - \tau) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (20)$$

when $\beta = 1$ and $m = 0$.

Using (12), we have

$$\bar{\omega}(t) = \bar{v}'(t) = \frac{d}{dt} \left[\frac{\omega^{\alpha}}{\sigma(t)} \right]. \quad (21)$$

Equation (13) may be approximated by the equation

$$k_{\alpha} \frac{\partial^2 \omega(x, t)}{\partial x^2} = D_{\tau t}^{\beta} \bar{\omega}(\eta), \quad (22)$$

where the coefficient k_{α} is uniquely defined by (14). Hence, we find

$$\begin{aligned} k_{\alpha} [\omega_x(x, t) - \omega_x(0, t)] &= x D_{\tau t}^{\beta} \bar{\omega}(\eta), \\ k_{\alpha} [\omega(x, t) - \omega(r, t) - (x - r)\omega_x(0, t)] &= \frac{1}{2}(x^2 - r^2) D_{\tau t}^{\beta} \bar{\omega}(\eta), \end{aligned} \quad (23)$$

$$k_{\alpha} \left[\bar{\omega}(t) - \omega(r, t) + \frac{1}{2} r \omega_x(0, t) \right] = \frac{1}{3} r^2 D_{\tau t}^{\beta} \bar{\omega}(\eta), \quad (24)$$

where

$$\omega_x(x, t) = \frac{\partial \omega(x, t)}{\partial x}.$$

Consequently, the solution $\omega = \omega(x, t)$ of (22) may be determined uniquely, if we add to the nonlocal condition the local conditions on the edge of absorption layer $0 \leq x \leq r$

$$\omega_x(0, t) = \psi_1(t), \quad \omega(r, t) = \psi_0(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (25)$$

where $\psi_1(t)$ and $\psi_0(t)$ are the given functions continuous on $[0, T]$.

It follows from (21), (23), (24) and (25) that

$$k_{\alpha} [\omega(x, t) - \psi_0(t) - (x - r)\psi_1(t)] = \frac{1}{2}(x^2 - r^2) D_{\tau t}^{\beta} \frac{d}{d\eta} \left[\frac{\omega^{\alpha}}{\sigma(\eta)} \right],$$

$$k_\alpha \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\omega^\alpha}{\sigma(\eta)} \right] - \psi_0(t) + \frac{r}{2} \psi_1(t) \right\} = \frac{1}{3} r^2 D_{\tau t}^\beta \frac{d}{d\eta} \left[\frac{\omega^\alpha}{\sigma(\eta)} \right]. \quad (26)$$

The algorithm of calculation must involve the checkup of condition (26) for the input data (22).

Equation (18) can be approximated by the following equations:

$$D_{\tau t}^\beta \frac{\partial \bar{v}(\eta)}{\partial \eta} = \text{sign}(\tau - t) |t - \tau|^m \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2}, \quad (27)$$

$$D_{\tau t}^\beta \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{h_i} \det \begin{vmatrix} v(x_i, \eta) & x_i - x \\ v(x_{i+1}, \eta) & x_{i+1} - x \end{vmatrix} + \text{sign}(t - \tau) |t - \tau|^m \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = 0, \quad (28)$$

where $x_i < x < x_{i+1}$, $i = 0, 1, \dots, n$.

We use the method of reducing the Samarskii problem to the local boundary value problem, which is posed in the paper [4].

We introduce the new dependent variable in equation (27)

$$U(x, t) = \int_0^x v(\xi, t) d\xi. \quad (29)$$

Function (29) is a solution of partial differential equations of the first order

$$\frac{\partial U}{\partial x} = v(x, t), \quad 0 \leq x \leq r, \quad (30)$$

and satisfies the local boundary value conditions

$$U(0, t) = 0, \quad U(r, t) = r \bar{v}(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (31)$$

Therefore, equation (27) takes the following form:

$$D_{\tau t}^\beta \frac{\partial U}{\partial \eta} = r \cdot \text{sign}(\tau - t) |t - \tau|^m \frac{\partial^3 U}{\partial x^3}. \quad (32)$$

We add to condition (4) the boundary condition

$$v(0, t) = \psi_0(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (33)$$

where $\psi_0(t)$ is a given function continuous on $[0, T]$.

Because of (30), from this condition it follows that

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=0} = \psi_0(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (34)$$

So, the problem is reduced to the following: find a solution $U = U(x, t)$ of (32) at any point x of the absorbing layer and at any time t from the

initial $t = 0$ to the estimated $t = T$ time moments, which satisfies the boundary value conditions (31) and (34).

In the case of (28), the function $v = v(x, t)$ must satisfy the conditions (4) and (33). Due to the fact that equations (15), (19) and (20) are loaded ones of mixed type, we can interpret the absorbing medium as a fractal input-output mixed system [5].

To study the boundary value problems for the equation (13), one can successfully use the Green function that is constructed in [6].

In conclusion, it should be mentioned that the work is based on the report that was made on in the International conference “Physics of Extreme States of Matter” [7].

References

1. Nakhusheva V. A. Differential equations of mathematical models of non-local processes. M.: Nauka, 2006. 174 p. (in Russian).
2. Nakhushev A. M. Fractional calculus and its application. M.: FIZMATLIT, 2003. 272 p. (in Russian).
3. Nakhusheva V. A. On mathematical models of catastrophic floods law // Reports of Adyghe (Circassian) International Academy of Sciences. 2009. Vol. 11, no. 2. Pp. 63–70. (in Russian).
4. Nakhusheva Z. A. Nonlocal boundary value problems a for basic and mixed types of differential equations. Nalchik: KBSC RAS, 2012. 196 p. (in Russian).
5. Nakhushev A. M. On state equations of continuous one-dimensional systems and their applications. Nalchik: Logos, 1995. 59 p. (in Russian).
6. Pskhu A. V. Partial differential equations of fractional order. M.: Nauka, 2005. 199 p. (in Russian).
7. Nakhushev A. M., Nakhusheva V. A. On an algorithm for calculating the concentration distribution of absorbing molecules along the laser beam // Paper to the compendium “Physics of Extreme States of Matter”, 2013. Pp. 154–157. (in Russian).

Institute of Applied Mathematics
and Automation of KBSC RAS

Some generalizations of Bouguer–Lambert–Beer law, and algorithms for calculating the distribution of the concentration of the absorbing molecules on the track of the laser radiation

Bouguer–Lambert for a plane wave propagating in the direction of the beam in differential form can be written as

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \omega u = 0, \quad (1)$$

wherein $u = I_\nu(x, t)$ – the intensity ν of the radiation at the frequency x at a time t , $\omega = \omega(x, t; \nu)$ – attenuation.

Let $x_1, x_2, \dots, x_m, \dots$ – the distance from the laser transmitter, which form an arithmetic progression with difference in progression l , and u_m – the intensity of the radiation frequency at a point x_m . In a homogeneous medium, when $\omega = \omega(t, \nu)$ the equation (1) it follows that

$$u_{m+1} = T(\nu)u_m, \quad (2)$$

where $T(\nu) = \exp(-\omega l)$, $m = 1, 2, \dots$. So Bouguer–Lambert law gives reason to consider that the intensity of the radiation is attenuated monochromatic in geometric progression with ratio equal to the spectral transmittance $T(\nu)$, of the laser if the distance x from the transmitter increases in an arithmetic progression with difference l .

Assuming that the extermination coefficient ω , the concentration $v = v(x, t)$ of absorbing particles in the layer $x_m \leq x \leq x_{m+1}$ and the absorption cross $\sigma = \sigma(t, \nu)$ section are related $\omega = \sigma v$, then (1) we have

$$u_{m+1} = T_m(\nu)u_m, \quad (3)$$

where $\bar{v}$ – the average concentration:

$$l\bar{v} = \int_{x_m}^{x_{m+1}} v(x, t)dx, \quad T_m(\nu) = \exp(-\sigma\bar{v}l).$$

Consequently, (2) remains in force, and when $\bar{v}$ they do not depend on $m = 1, 2, \dots$ Bouguer–Lambert law is no longer adequately describe the radiation process, when there is a synergy of the light beam and the molecules of the absorbing medium. Formula (3) ignores the significant dependence of the intensity of the absorption cross section and concentration, an increase of which, as is known (see [1], [2]) leads to enhancement of nonlinear effects of intermolecular and intermolecular interactions. These interactions tend to lead to the formation of new structures; opaque medium to weak radiation can become transparent to RF energy, and vice versa.

Interpretation of the absorbing medium as a synergetic system helps draw for her modeling equation of synergy, especially biosinergetiki [3]. In the case of multiphoton processes of the differential equation for the radiation intensity is given by and

$$c \frac{\partial u}{\partial x} = -F(u)v_0, \quad (4)$$

where c – the speed of light, $F(u)$ – a polynomial u characterizing the probability per unit time v_0 – the number of absorbing molecules per unit volume [2]. And self-induced nonlinear absorption due to the dependence of the attenuation coefficient of (1) the intensity of the radiation.

Assume that the attenuation factor is a linear function of the intensity of radiation u :

$$\omega = p_\nu - q_\nu u. \quad (5)$$

This hypothesis expresses the simplest functional (regression) relationship between the two signs and the radiation process.

Equation (1) in accordance with the hypothesis (5) is:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (q_\nu u - p_\nu)u. \quad (6)$$

Logistic coefficient characterizes q_ν the resistance of the radiation process medium, according to the losing of photons density process in the light beam. Increasing the concentration of the absorbing molecules may lead to the strengthening of the role of logistics factor.

If the absorption process takes place in a homogeneous medium and according to logistic rules (6), there is the following relationship between the intensity of the beam u_m incident on the layer $x_m \leq x \leq x_{m+1}$ and the intensity u_{m+1} of the output layer

$$\frac{1}{u_{m+1}} = \exp(p_\nu l) \frac{1}{u_m} + \frac{q_\nu}{p_\nu} [1 - \exp(p_\nu l)]. \quad (7)$$

Among the distinctive properties of the absorbing medium, interpreted as a synergistic system should also include stochasticity.

Taking into account the fluctuation of the intensity of radiation and assume that the average is proportional to the amplitude of the fluctuations $\sqrt{u}$, the stochastic version Bouguer–Lambert–Beer law can be written as and

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\omega(x, t; \nu)u - \mu(x, t; \nu)\sqrt{u}, \quad (8)$$

wherein μ – the coefficient of fluctuation in the frequency point x of the path of radiation in time t .

Equation (8) with respect to the new dependent variable $w = \sqrt{u}$ is linear:

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\omega}{2}w = \frac{\mu}{2}. \quad (9)$$

Therefore, μ the coefficient can be interpreted as twice the fluctuating force.

By (9) for a homogeneous medium, the formula

$$u_{m+1} = \left\{ \sqrt{u_m} \exp \frac{\omega l}{2} + \frac{\mu}{2} \left[1 - \exp \frac{\omega l}{2} \right] \right\}^2. \quad (10)$$

Equations (7) and (10) are nonlinear generalizations of the law (2) that take into account synergies absorption process.

Now consider the loaded system of differential equations

$$\partial_{0x}^\alpha u(\xi, t) + \sigma(t)\bar{v}(t)u(x, t) = 0, \quad 0 < x < r, \quad \sigma(t) > 0, \quad (11)$$

$$k\partial_{\tau t}^{\beta}v(x, \eta) = -\frac{\partial w_1}{\partial x}, \quad \tau = \text{const} \geq 0, \quad k = \text{const} > 0, \quad (12)$$

$$w_1 = -\frac{\partial}{\partial x}(av + b)v, \quad a = \text{const} \geq 0, \quad b = \text{const} > 0. \quad (13)$$

Here: $0 < \alpha = \text{const} \leq 1$, $0 < \beta = \text{const} \leq 1$, t dimensionless time ∂_{0x}^{α} , $\partial_{\tau t}^{\beta}$ – regularized Riemann–Liouville operators defined by formulas

$$\partial_{0x}^{\alpha}u(\xi, t) = D_{0x}^{\alpha-1}\frac{\partial u(\xi, t)}{\partial \xi} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-\xi)^{-\alpha} \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial \xi} d\xi,$$

$$\partial_{\tau t}^{\beta}v(x, \eta) = \text{sign}(t - \tau) D_{\tau t}^{\beta-1} \frac{\partial v(x, \eta)}{\partial \eta} = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_{\tau}^t |t - \eta|^{-\beta} \frac{\partial v(x, \eta)}{\partial \eta} d\eta,$$

where $\Gamma(z)$ – the gamma function.

Equation (11) represents the differential notation Bouguer–Lambert law for plane waves propagating in the absorbing medium in the beam direction in the case $x \geq 0$ where the attenuation coefficient (absorption) ω^{α} , the concentration $v = v(x, t)$ of the absorbing particle in the layer $0 \leq x \leq r$ and the absorption $\sigma(t)$ cross section are related by

$$\omega^{\alpha} = \sigma(t)\bar{v}(t). \quad (14)$$

Equation (13) expresses the second law of Fick's diffusion coefficient which is linearly dependent on the concentration itself. Equation (12) is interpreted as the continuity equation, or fractal-differential form of the law of conservation of mass, and it implements a concentration of absorbing particles with its density $w_1 = w_1(x, t)$ [4, p. 26]. Order β time t derivative may depend x .

By (14), equation (11) can be rewritten as

$$\partial_{0x}^{\alpha}u(\xi, t) + \omega^{\alpha}u(x, t) = 0, \quad 0 < x < r, \quad t \geq 0. \quad (15)$$

Equation (15) is loaded by a differential equation with partial derivative in the spatial variable x order $\alpha \in]0, 1]$. Procedure as α the coefficient ω^{α} may be a function of time t . This equation summarizes Bouguer–Lambert law emission intensity $u(x, t) \equiv I_{\nu}(x, t)$ for a given frequency ν at a point x in time t when the absorbent layer $0 \leq x \leq r$ is a medium, the fractal dimension does not exceed α . It is the simplest version of the equation, called in [5, p. 242] generalized fractional oscillation equation.

Any solution $u = u(x, t)$ of equation (15) can be represented as

$$u(x, t) = u(0, t)\text{Exp}_{\alpha}(-\omega x), \quad (16)$$

where $\text{Exp}_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{\alpha k}}{\Gamma(1 + \alpha k)}$, $\text{Exp}_\alpha(x)$ – generalized exponential function in the terminology of V. A. Nakhushева [6].

From (16) follows that

$$u(r, t) = \varphi_0(t) \text{Exp}_\alpha(-\omega r), \quad (17)$$

where $\varphi_0(t)$ – the intensity of the radiation at the beginning of the route, $x = 0$ and $-\omega r = \tau_\nu$ – optical depth (thickness) of fractal layer $0 \leq x \leq r$.

If $\alpha = 1$ formula (13) gives the well-known expression of Bugar law $u(r, t) = \varphi_0(t) \exp(-\omega r)$.

It is assumed that the local function $u(x, t)$ satisfies the boundary condition

$$u(0, t) = \varphi_0(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (18)$$

and the function $v(x, t)$ – a nonlocal boundary condition (11), where T – the estimated time.

In view of (18) the spectral absorption calculated $A_\alpha = \frac{\varphi_0(t) - u(r, t)}{\varphi_0(t)}$ according to the following formula:

$$A_\alpha = 1 - \text{Exp}_\alpha(-\omega r).$$

As follows from (12) and (13), the function $v(x, t)$ must be a solution of equation

$$k \partial_{\tau t}^\beta v(x, \eta) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} [(av + b)v]. \quad (19)$$

We differentiate both sides of equation (19) in time t and take into account the equality

$$\frac{\partial}{\partial t} \partial_{\tau t}^\beta v(x, \eta) = \frac{\partial}{\partial t} \text{sign}(t - \tau) D_{\tau t}^{\beta-1} \frac{\partial v(x, \eta)}{\partial \eta} = D_{\tau t}^\beta \frac{\partial v(x, \eta)}{\partial \eta}.$$

As a result, we obtain the equation

$$k D_{\tau t}^\beta \frac{\partial v(x, \eta)}{\partial \eta} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[(2av + b) \frac{\partial v}{\partial t} \right]. \quad (20)$$

The boundary condition (14) gives some justification for the approximation of equation (20) by the following equation:

$$k D_{\tau t}^\beta \frac{\partial v(x, \eta)}{\partial \eta} = (2av + b) \frac{\partial^3 v(x, t)}{\partial x^2 \partial t}. \quad (21)$$

In equation (21) we introduce a new dependent variable

$$w(x, t) = \frac{\partial v(x, t)}{\partial t}. \quad (22)$$

Then we get $w = w(x, t)$ the equation with respect

$$kD_{\tau t}^{\beta}w(x, \eta)\partial\eta = k_{\alpha}\frac{\partial^2w(x, t)}{\partial x^2}, \quad (23)$$

with coefficient

$$k_{\alpha} = \frac{2av + b}{k} = \frac{1}{k} \left[\frac{2a\omega^{\alpha}}{\sigma(t)} + b \right]. \quad (24)$$

Equation (21) can be approximately replaced by an equation of the form

$$D_{\tau t}^{\beta}\frac{\partial v(x, \eta)}{\partial\eta} = K(t)\frac{\partial^2v(x, t)}{\partial x^2}, \quad (25)$$

where the function

$$K(t) = \frac{2av'(t)}{k} = \frac{2a}{k} \frac{d}{dt} \left[\frac{\omega^2}{\sigma(t)} \right]. \quad (26)$$

As we choose τ a time when the cumulative average value $\bar{v}(t)$ of the concentration of the molecules of the absorbing medium reaches the maximum value $0 \leq x \leq r$, and assume that (26) can be represented as

$$K(t) = |t - \tau|^m \chi(t) \text{sign}(\tau - t), \quad (27)$$

where $-m = \text{const} \geq 0$, $\chi(t)$ a continuous positive function defined on some time interval $[0, T]$ of the initial $t = 0$ and $t = T$ settlement. Condition (27) implies that the critical line $t = \tau$ on a Euclidean plane points (x, t) equation (25) as relates $\beta = 1$ to partial differential equations of mixed type. In the case when $\chi(t) \equiv 1$ the equation (25) takes the following form:

$$D_{\tau t}^{\beta}\frac{\partial v(x, \eta)}{\partial\eta} = \text{sign}(\tau - t)|t - \tau|^m\frac{\partial^2v(x, t)}{\partial x^2}. \quad (28)$$

Equation (28) for the same as $\beta = 1$, $m = 1$ the well-known gas dynamics in transonic flow Tricomi equation:

$$(t - \tau)\frac{\partial^2v(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2v(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (29)$$

when $\beta = 1$, $m = 0$ – with the Lavrent'ev–Bitsadze

$$\text{sign}(t - \tau)\frac{\partial^2v(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2v(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (30)$$

and when $\beta = 1$, $m \neq 0$, $m \neq 1$ – to the equation Gellerstedt

$$\text{sign}(t - \tau)|t - \tau|^m\frac{\partial^2v(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2v(x, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (31)$$

Equation (31) $t < \tau$ is a hyperbolic equation with a parabolic degeneracy and when $t = \tau$ it subject to fluctuating forces $f(x, y)$, $y = t - \tau$ can be written as

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - (-y)^m \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = f(x, y), \quad y < 0. \quad (32)$$

Continuing

$$\overline{D} = \left\{ (x, y) : 0 \leq x - \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2} \leq x + \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2} \leq l \right\}$$

to solution v of equation (32) satisfying the conditions has the following qualitatively $v = 0$, when $y = 0$, $y = ((m+2)x/2)^{2/(m+2)}$, $0 \leq x \leq l/2$, new feature.

Let $2 < m < 4$, $f(x, y)$ – and $f(0, 0) \neq 0$ continuously differentiable $\overline{D}$. Then the gradient of concentration $\partial v / \partial x$ of the absorbing molecules is continuous everywhere $\overline{D}$ except at the point $(0, 0)$, where it becomes infinite. This feature is localized and is not carried away along the characteristics of (32). This property of the function is known [7, p. 223] in the theory of boundary value problems as the localization features of the gradient solutions of the Darboux problem for the equation (32).

From equation (22) we have:

$$w(t) = v'(t) = \frac{d}{dt} \left[\frac{\omega^\alpha}{\sigma(t)} \right]. \quad (33)$$

Equation (23) admits the following approximation:

$$k_\alpha \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} = D_{\tau t}^\beta w(\eta), \quad (34)$$

where k_α the coefficient is uniquely defined by the formula (24).

Hence, we find:

$$k_\alpha [w_x(x, t) - w_x(0, t)] = x D_{\tau t}^\beta w(\eta),$$

$$k_\alpha [w(x, t) - w(r, t) - (x - r)w_x(0, t)] = \frac{1}{2}(x^2 - r^2) D_{\tau t}^\beta w(\eta), \quad (35)$$

$$k_\alpha \left[w(t) - w(r, t) + \frac{1}{2}w_x(0, t) \right] = \frac{1}{3}r^2 D_{\tau t}^\beta w(\eta), \quad (36)$$

where $w_x(x, t) = \partial w(x, t) / \partial x$.

Therefore, the solution of (34) is uniquely determined, if coupled with a nonlocal condition it satisfies the local conditions at the boundary of the absorbing layer: $0 \leq x \leq r$

$$w_x(0, t) = \psi_1(t), \quad w(r, t) = \psi_0(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (37)$$

where $\psi_1(t)$, $\psi_0(t)$ – given functions that are continuous in the time interval $[0, T]$.

From (33), (35), (36) and (37) it follows that

$$k_\alpha [w(x, t) - \psi_0(t)(x - r)\psi_1(t)] = \frac{1}{2}(x^2 - r^2)D_{\tau t}^\beta \frac{d}{d\eta} \left[\frac{\omega^\alpha}{\sigma(\eta)} \right],$$

$$k_\alpha \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\omega^\alpha}{\sigma(t)} \right] - \psi_0(t) + \frac{r}{2}\psi_1(t) \right\} = \frac{1}{3}r^2 D_{\tau t}^\beta \frac{d}{d\eta} \left[\frac{\omega^\alpha}{\sigma(\eta)} \right]. \quad (38)$$

The algorithm involves the calculation of tracking compliance with the conditions (38) on the inputs to the model (34).

Equation (28) can be approximated by the equations of the following forms:

$$D_{\tau t}^\beta \frac{\partial v(\eta)}{\partial \eta} = \text{sign}(\tau - t)|t - \tau|^m \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2}, \quad (39)$$

$$D_{\tau t}^\beta \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{h_i} \det \left\| \begin{array}{cc} v(x_i, \eta) & x_i - x \\ v(x_{i+1}, \eta) & x_{i+1} - x \end{array} \right\| +$$

$$+ \text{sign}(\tau - t)|t - \tau|^m \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = 0, \quad (40)$$

where $x_i < x < x_{i+1}$, $i = 0, 1, \dots, n$.

We use reducing method of Samarsky's problem proposed in [8] to a local boundary value problem in equation (39) to make the transition to the new dependent variable

$$U(x, t) = \int_0^x v(\xi, t) d\xi. \quad (41)$$

The function (41) is the solution of partial differential equations of the first order

$$\frac{\partial U}{\partial x} = v(x, t) \quad 0 \leq x \leq r, \quad (42)$$

meet the local boundary conditions

$$U(0, t) = 0, \quad U(r, t) = rv(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (43)$$

Therefore, when such a change of equation (39) takes the following form

$$D_{\tau t}^\beta \frac{\partial U(r, \eta)}{\partial \eta} = r \text{sign}(\tau - t)|t - \tau|^m \frac{\partial^3 U}{\partial x^3}. \quad (44)$$

By condition (14) adjoin the boundary condition

$$v(0, t) = \psi_0(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (45)$$

where $\psi_0(t)$ – is defined and continuous on the interval $[0, T]$ function.

This condition is in effect (42) indicates that

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=0} = \psi_0(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (46)$$

Consequently, the problem reduces to the following: to find a solution $U = U(x, t)$ of equation (44) at each point x of the absorbent layer and at any time t from the start $t = 0$ to the calculated $t = T$, which satisfies the boundary conditions (43) and (46).

In the case of a loaded differential equation (40), the function must satisfy the conditions (14) and (45). The fact that equations (25), (29) and (30) are loaded by the equations of mixed type, allows us to interpret the absorbing medium as a fractal system input-output mixed-type [9]. Green's function, built in [10] can successfully be used in the study of boundary value problems for the equation (23).

References

1. Zuev V. E. Transparency atmosphere for the laser radiation. In.: Laser control of the atmosphere. Springer-Verlag, 1979. Pp. 45–90.
2. Zuev V. E. Propagation of visible and infrared wavelengths in the atmosphere. M.: Owls. radio, 1970. 491 p.
3. Haken H. Synergetics. Springer-Verlag. 1985. 412 p.
4. Nakhusheva V. A. Differential equations of mathematical models of non-local processes. M.: Nauka, 2006. 174 p. (In Russian).
5. Nakhushev A. M. Fractional calculus and its application. M.: FIZMATLIT, 2003. 272 p. (In Russian).
6. Nakhusheva V. A. Some fractal differential equations of mathematical models of catastrophic situations // Differential Equations. 2013. Vol. 49, no. 4. Pp. 506–512.
7. Nakhushev A. M. Problem with shift for partial differential equations. M.: Nauka, 2006. 287 p.
8. Nakhusheva Z. A. Non-local boundary value problems for the main and mixed types of differential equations. Nalchik: KBNC RAS, 2012. 196 p.
9. Nakhushev A. M. Laden with equations and their applications. M.: Nauka, 2012. 232 p.
10. Pskhu A. V. Partial differential equations of fractional order. M.: Nauka, 2005. 199 p.

Institute of Applied Mathematics
and Automation of KBSC RAS

О внутреннекраевых условиях со смещением, возникающих при дискретизации краевых задач для уравнений в частных производных второго порядка

Предлагаемый метод организации вычислительного процесса, основанный на замене локальных краевых условий и условий сопряжения в дифференциальной задаче нелокальными внутреннекраевыми условиями, продемонстрируем на модельных уравнениях в частных производных.

Рассмотрим следующие весьма важные в математической физике и биологии уравнения в частных производных второго порядка с неизвестной функцией $u = u(x, y)$:

$$u_{yy} = a^2 u_{xx}, \quad a = \text{const} > 0, \quad (x, y) \in \Omega^-, \quad (1)$$

$$u_y = b^2 u_{xx}, \quad b = \text{const} > 0, \quad (x, y) \in \Omega_r^+, \quad 0 < r = \text{const} \leq \infty, \quad (2)$$

$$u_{yy} + u_{xx} = 0, \quad (x, y) \in \Omega_r^+, \quad (3)$$

$$u_y = \text{sign } x u_{xx}, \quad |x| < r, \quad 0 < y < T. \quad (4)$$

Здесь:

1) $\Omega_r^+ = \{z : 0 < x < r, 0 < y < T\}$ – область евклидовой плоскости точек $z = (x, y)$;

2) Ω^- – область, ограниченная отрезком $A_0 B_0 = \{(0, y) : 0 \leq y \leq T\}$, $A_0 = (0, 0)$, $B_0 = (0, T)$, отрезком $A_0 C_0$ прямой $x + ay = 0$, $C_0 = (-aT/2, T/2)$ и отрезком $B_0 C_0$ прямой $x - ay = -aT$;

3) $\Omega = \Omega_r^+ \cup \Omega^- \cup \{(0, y) : 0 < y < T\}$, $\bar{\Omega}$ – замыкание области Ω ;

4) $A_r = (r, 0)$, $B_r = (r, T)$, h – шаг по оси x , $A_h = (-ah, h)$, $B_h = (-ah, T-h)$; Ω_h^- – треугольник с вершинами в точках A_h , B_h и C_0 , $\Omega_h^- \rightarrow \Omega^-$ при $h \rightarrow 0$ (см. рис. 1).

1. Под решением уравнения (1) в области Ω^- будем понимать любую функцию $u(z) = u(x, y) \in C(\bar{\Omega}^-)$, удовлетворяющую нагруженному уравнению

$$2u(z) = u\left(0, y + \frac{x}{a}\right) + u\left(0, y - \frac{x}{a}\right) + a \int_{y-x/a}^{y+x/a} \frac{\partial u(0, \eta)}{\partial x} d\eta, \quad z \in \Omega^-.$$

Пусть: $\Theta(\eta) = (-a\eta/2, \eta/2)$ – точка пересечения характеристики $x - ay = -a\eta$ уравнения (1), выходящей из точки $(0, \eta) \in A_0 B_0$, с характеристикой $x + ay = 0$, $0 < \eta < T$;

$$u[\Theta(y)] = \psi(y) \in C^1[0, T]; \quad (5)$$

$$u(0, y) = \tau(y) \in C[0, T] \cap C^1]0, T[; \quad u_x(0, y) = \nu(y) \in C]0, T[\cap L[0, T]. \quad (6)$$

Любое решение $u(z)$ уравнения (1) в области Ω^- в силу (5) и (6) подчиняется необходимому динамическому краевому условию

$$\tau'(y) = a\nu(y) + 2\psi'(y), \quad 0 < y < T. \quad (7)$$

К этому условию присоединим условие

$$p\tau'(y) + q\nu(y) = \varphi_0(y), \quad 0 < y < T, \quad p^2 + q^2 \neq 0, \quad (8)$$

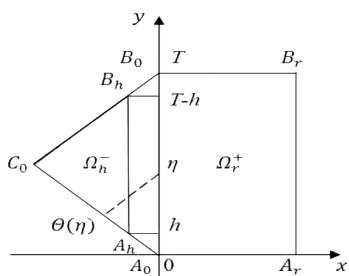


Рис. 1

где p и q – заданные числа, $\varphi_0(y)$ – заданная функция, непрерывная на сегменте $[0, T]$, которое совместимо с условием (7).

Из системы (7), (8) следует, что

$$(ap + q)\nu(y) = \varphi_0(y) - 2p\psi'(y), \quad 0 < y < T, \quad (9)$$

$$(ap + q)\tau'(y) = 2q\psi'(y) - a\varphi_0(y). \quad (10)$$

В равенстве (9) заменим $\nu(y)$ левой разностной производной, положив

$$\nu(y) \approx [\tau(y) - u(-h, y)]/h,$$

где $0 < h$ – шаг по оси x . В результате при $ap + q \neq 0$ приходим к следующему внутреннекраевому условию Бицадзе–Самарского [1] для уравнения (1) в области Ω^- :

$$u(0, y) = u(-h, y) + h[\varphi_0(y) - 2p\psi'(y)]/(ap + q). \quad (11)$$

Условие (11) и решение

$$u(0, y) = \psi(0) + \frac{1}{ap + q} \int_0^y [2q\psi'(\eta) - a\varphi_0(\eta)] d\eta \equiv f(y)$$

задачи Коши $\tau(0) = \psi(0)$ для уравнения (10) дают основание записать

$$u(-h, y) = f(y) - h[\varphi_0(y) - 2p\psi'(y)]/(ap + q), \quad h \leq y \leq T - h.$$

Следовательно, задача (5), (11) для уравнения (1) в области Ω^- свелась к задаче Дарбу для этого же уравнения в области Ω_h^- с граничными данными на $A_h B_h \cup A_h C_0$.

2. Пусть $u(z)$ – решение уравнения (2) в области Ω_∞^+ , удовлетворяющее условиям:

$$u(x, 0) = \varphi(x) \in C[0, \infty[, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) \exp(-\varepsilon x^2) = 0, \quad \varepsilon = \text{const} > 0;$$

$$pu_y(0, y) + qu_x(0, y) = \varphi_0(y) \in C[0, T];$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \max_{[0, T]} |u(x, y)| \exp(-\varepsilon x^2) = 0; \quad \tau(y) = u(0, y) \in C[0, T] \cap C^1]0, T[;$$

$$\nu(y) = u_x(0, y) \in C]0, T[\cap L^2[0, T].$$

Тогда на части $A_0 B_0 \cup \{(x, 0) : 0 \leq x < \infty\}$ границы $\partial\Omega_\infty^+$ области Ω_∞^+ функции $\tau(y)$, $\nu(y)$ и $\varphi(x)$ связаны необходимым краевым условием

$$\tau(y) = -\frac{b}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \frac{\nu(\eta) d\eta}{(y - \eta)^{1/2}} + \frac{1}{b\sqrt{\pi y}} \int_0^\infty \varphi(\xi) \exp \frac{-\xi^2}{4b^2 y} d\xi, \quad 0 \leq y \leq T. \quad (12)$$

Условие (12) является следствием представления

$$u(z) = -\frac{b}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \nu(\eta)(y-\eta)^{-1/2} \exp \left[-\frac{x^2}{4(y-\eta)b^2} \right] d\eta + \\ + \frac{1}{2b\sqrt{\pi y}} \int_0^\infty \varphi(\xi) \left[\exp \frac{(x-\xi)^2}{-4yb^2} + \exp \frac{(x+\xi)^2}{-4yb^2} \right] d\xi,$$

которое справедливо для любого решения уравнения (1) из указанного класса [3].

Сущность предлагаемого приема дискретизации локального краевого условия (8) для уравнения Фурье (2) раскроем в случае, когда $\varphi(x) \equiv 0$. Это не нарушает общности рассуждения. Из (12) при $\varphi(x) \equiv 0$ получаем

$$\tau(y) = -bD_{0y}^{-1/2}\nu(\eta), \quad 0 < y < T, \quad (13)$$

$$\tau'(y) = -bD_{0y}^{1/2}\nu(\eta), \quad 0 < y < T, \quad (14)$$

где D_{0y}^α – оператор Римана–Лиувилля.

Из равенств (8) и (14) имеем

$$pbD_{0y}^{1/2}\nu(\eta) - q\nu(y) = -\varphi_0(y), \quad 0 < y < T. \quad (15)$$

При $p \neq 0$ уравнение (15) представляет собой дифференциальное уравнение порядка, $1/2$ и его единственное решение $\nu(y)$ из пространства $L^2[0, T]$ задается формулой [2, с. 93]:

$$\nu(y) = \Phi(y) = -\frac{1}{pb}D_{0y}^{-1/2}\varphi_0(\eta) - \\ - \frac{q}{(pb)^2} \int_0^y \varphi_0(\eta) E_2 \left[\frac{q}{pb}(y-\eta)^{1/2}; 1 \right] d\eta, \quad (16)$$

где $E_2[z; 1] = \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{\Gamma(1+k/2)}$ – функция Миттаг-Леффлера, $z = x + iy$.

В равенстве (16) заменим $\nu(y)$ правой разностной производной, положив

$$\nu(y) \approx [u(h, y) - \tau(y)]/h. \quad (17)$$

В результате получим условие Бицадзе–Самарского для уравнения (2) в области Ω_∞^+ :

$$u(0, y) = u(h, y) - h\Phi(y), \quad 0 < y < T. \quad (18)$$

Из условия (18) в силу (13) и (16) получаем

$$u(h, y) = h\Phi(y) - bD_{0y}^{-1/2}\Phi(\eta).$$

3. Пусть $u = u(z)$ – ограниченное решение задачи сопряжения уравнений (1) и (2) в области $\Omega = \Omega^- \cup \Omega_\infty^+ \cup \{(0, y): 0 < y < T\}$, удовлетворяющее условиям:

$$u(-0, y) = u(+0, y) \in C[0, T], \quad u_x(-0, y) = u_x(+0, y) \in L^2[0, T] \cap C]0, T[, \\ u(-ay/2, y/2) = \psi(y) \in C^1[0, T]; \quad u(x, 0) = 0 \quad \text{при } 0 \leq x < \infty.$$

Тогда

$$\tau'(y) = a\nu(y) + 2\psi'(y) = -bD_{0y}^{1/2}\nu(\eta), \quad \tau(0) = u(0, 0) = \psi(0) = 0, \\ \nu(y) = \Psi(y) = -\frac{2}{b}D_{0y}^{1/2}\psi(\eta) - \frac{a}{b^2} \int_0^y \psi'(\eta) E_2 \left[-\frac{a}{b}(y - \eta)^{1/2}; 1 \right] d\eta. \quad (19)$$

Равенство (19), после замены $\nu(y)$ центральной разностной производной $[u(h, y) - u(-h, y)]/(2h)$, приводит к условию

$$u(h, y) = u(-h, y) + 2h\Psi(y), \quad h \leq y \leq T - h.$$

4. Пусть $u = u(z)$ – решение уравнения (2) в области Ω_r , $r < \infty$, удовлетворяющее условиям задачи Самарского [4, с. 140]:

$$u(0, y) = \tau(y) \in C[0, T], \quad u(x, 0) = \varphi(x) \in C[0, r],$$

$$\int_0^r u(x, y) dx = \int_0^r \varphi(x) dx.$$

Тогда $u_x(0, y) = \nu(y) = \nu_r(y) = u_x(r, y) \in L^2[0, r] \cap C]0, r[$.

Равенство $\nu(y) = \nu_r(y)$, $0 < y < T$, после замены $\nu_r(y)$ левой разностной производной, а $\nu(y)$ – правой (17), приводит к следующему внутренне-краевому условию типа нелокального условия Бицадзе–Самарского [1]

$$u(r, y) = u(h, y) + u(r - h, y) - \tau(y), \quad 0 \leq y \leq T.$$

5. Пусть $u = u(z)$ – решение смешанной краевой задачи:

$$u(x, 0) = \varphi(x) \in C[0, r], \quad u(x, T) = \psi(x) \in C[0, r],$$

$$u(r, y) = \tau_r(y) \in C[0, T], \quad u_x(0, y) = \nu_0(y) \in C]0, T[\cap L[0, T]$$

для уравнения Лапласа (3) в области Ω_r^+ . Если в этой задаче $u_x(0, y)$ аппроксимировать правой разностной производной $[u(h, y) - u(0, y)]/h$, то получим задачу Бицадзе–Самарского с нелокальным условием

$$u(0, y) = u(h, y) - h\nu(y) \quad \text{при } 0 \leq y \leq T.$$

6. Пусть $u = u(z)$ – решение уравнения

$$u_{yy} + [H(y) - a^2 H(-y)]u_{xx} = 0 \quad (20)$$

в области $\Omega = \{z: 0 < x < r, |y| < T\}$, из класса $C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, удовлетворяющее условиям задачи А. А. Дезина [5, с. 8]:

$$u(x, T) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq r, \quad (21)$$

$$u_y(x, -T) = \lambda u(x, 0), \quad 0 \leq x \leq r, \quad (22)$$

$$u(0, y) = u(r, y), \quad -T \leq y \leq T, \quad (23)$$

где $H(y)$ – функция Хевисайда, $\varphi(x) \in C[0, r]$, $\varphi(0) = \varphi(r)$.

Во внутреннекраевом условии (22) заменим $u_y(x, -T)$ разностной производной, положив $u_y(x, -T) \approx [u(x, h - T) - u(x, -T)]/h$, $0 < h$ – шаг по оси y . Тогда будем иметь

$$u(x, -T) = u(x, h - T) - \lambda h u(x, 0), \quad 0 \leq x \leq r. \quad (24)$$

Условие (24) является внутреннекраевым условием с локальным смещением. Задача (21), (23), (24) относится к классу нелокальных задач для уравнений смешанного типа (20).

7. Пусть $u = u(z)$ – решение уравнения (4) в области $\Omega = \{z: |x| < r, 0 < y < T\}$ из класса $C(\bar{\Omega})$, удовлетворяющее условиям:

$$u(x, 0) = \varphi_0(x) \in C[0, r], \quad u(x, T) = \varphi_T(x) \in C[-r, 0], \quad (25)$$

$$u_x(-0, y) = q u_x(+0, y), \quad q = \text{const} \neq 0, \quad 0 < y < T, \quad (26)$$

где $\varphi_0(x)$, $\varphi_T(x)$ – заданные функции, q – заданное число.

Уравнение (4) является моделью уравнений в частных производных второго порядка параболического типа со знакопеременной характеристической формой [5, с. 49].

В условии сопряжения (26) положим

$$u_x(-0, y) \approx [u(0, y) - u(-h, y)]/h, \quad u_x(+0, y) \approx [u(h, y) - u(0, y)]/h.$$

Результат этой операции запишется в виде

$$(1 + q)u(0, y) = u(-h, y) + qu(h, y). \quad (27)$$

Из (27) при $q \neq -1$ получаем

$$u(0, y) = \frac{u(-h, y) + qu(h, y)}{1 + q}, \quad 0 < y < T. \quad (28)$$

Если же $q = -1$, то $u(-h, y) = u(h, y)$.

Из (28) при $q = 1$ заключаем, что значение $u(0, y)$ совпадает со средним арифметическим значений в узлах $(-h, y)$ и (h, y) для любого $y \in [0, T]$.

Известно [6, с. 363], что если в прямоугольной сетке стороны прямоугольников, параллельные оси x , имеют длину h , а стороны, параллельные оси y , – длину $h^2/2$, то в уравнении в конечных разностях, соответствующем уравнению Фурье (2), значение $u(z)$ в любом узле сетки совпадает со средним арифметическим значений в предшествующем и последующем узлах ближайшей нижележащей строки.

Для уравнения (4) с краевыми условиями (25) равенство (27) играет роль условия линейного сопряжения. А. А. Самарский в своих фундаментальных работах обращал внимание на важность дискретных аналогов непрерывных краевых условий, которым удовлетворяют все решения дифференциального уравнения из заданного класса.

Литература

1. Бицадзе А. В., Самарский А. А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // ДАН СССР. 1969. Т. 185, № 4. С. 739–740.
2. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 272 с.
3. Нахушев А. М., Нахушева В. А. Об одной задаче начально-граничного управления для дифференциального уравнения смешанного типа // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2013. Т. 15, № 1. С. 9–17.
4. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. 301 с.
5. Нахушев А. М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006. 287 с.
6. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М.: Изд-во ин. литературы, 1957. 444 с.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН

К теории краевых задач для нагруженных интегральных уравнений

Рассмотрим нагруженное интегральное уравнение

$$u(x, y) = \frac{(\eta - \xi)^{1-2\beta}}{B(\beta, 1-2\beta)} \int_0^\xi [(\eta - t)(\xi - t)]^{\beta-1} u(t, 0) dt + f(x, y), \quad (1)$$

где

$$\xi = x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}, \quad \eta = x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}, \quad y < 0; m = \text{const} \geq 0. \quad (2)$$

Бета-функция $B(\beta, 1 - 2\beta)$ выражается через гамма-функцию Эйлера по формуле

$$B(\beta, 1 - 2\beta) = \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{-2\beta} dt = \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma(1-\beta)}; \quad \beta = \frac{m}{2m+4};$$

независимые переменные x и y меняются в области

$$\Omega_m = \{(x, y): 0 < \xi < \eta < r = \text{const} > 0\}$$

евклидовой плоскости точек (x, y) ; $f(x, y)$ – заданная непрерывная в замыкании $\bar{\Omega}_m$ области Ω_m функция; $u(x, y)$ – зависимая переменная из класса $C(\bar{\Omega}_m)$.

Решение $u = u(x, y) \in C(\bar{\Omega}_m)$ однородного уравнения

$$u(x, y) = \frac{(\eta - \xi)^{1-2\beta}}{B(\beta, 1 - 2\beta)} \int_0^\xi [(\eta - t)(\xi - t)]^{\beta-1} u(t, 0) dt, \quad (3)$$

соответствующего уравнению (1), можно назвать обобщенным решением следующего уравнения в частных производных второго порядка:

$$u_{yy} = (-y)^m u_{xx}, \quad (x, y) \in \Omega_m. \quad (4)$$

В характеристических переменных (2) уравнение (4) совпадает с однопараметрическим уравнением Эйлера–Дарбу–Пуассона

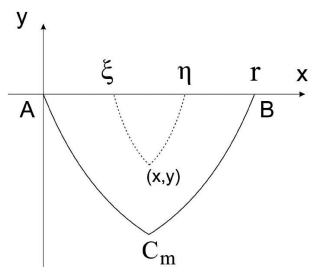


Рис. 1

$$(\eta - \xi) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \beta \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0.$$

Область Ω_m ограничена характеристиками $AC_m: \xi = 0$, $BC_m: \eta = r$ уравнения (4) и отрезком $AB: 0 \leq x \leq r$ прямой $y = 0$, $A = (0, 0)$, $B = (r, 0)$ (см. рис. 1).

Уравнение (3) после замены t на $t_1 = (\xi - t)/(\eta - \xi)$ принимает следующий вид:

$$u(x, y) = \frac{1}{B(\beta, 1 - 2\beta)} \int_0^{\xi/(\eta-\xi)} u(\xi - t_1(\eta - \xi), 0) t_1^{\beta-1} (1 + t_1)^{\beta-1} dt_1.$$

Отсюда, учитывая, что в области Ω_m $\eta > \xi$, получаем

$$u(x, y) < \frac{M}{B(\beta, 1 - 2\beta)} \int_0^\infty t_1^{\beta-1} (1 + t_1)^{\beta-1} dt_1,$$

где M – положительный максимум функции $u(x, 0)$ на сегменте $[0, r]$.

Замена $t = 1/(1 + t_1)$ позволяет увидеть, что

$$\int_0^{\infty} t_1^{\beta-1} (1 + t_1)^{\beta-1} dt_1 = \int_0^1 t^{-2\beta} (1 - t)^{\beta-1} dt = B(1 - 2\beta, \beta) = B(\beta, 1 - 2\beta).$$

Стало быть, $u(x, y) < M$. Если же M – отрицательный минимум $u(x, 0)$ на $[0, r]$, то $u(x, y) > M$ для всех $(x, y) \in \bar{\Omega}_m \setminus \{(x, 0)\}$.

Было известно (см. [1, с. 31], [2, с. 382]), что $|u(x, y)|$ нигде в области Ω_m не превосходит максимума, достигаемого $|u(x, 0)|$ на $AB = [0, r]$. Другими словами, $|u(x, y)| \leq \max |u(x, 0)|$. Такая оценка имеет место и для класса гиперболического типа уравнений вида

$$u_{\xi\eta} + a(\xi, \eta)u_{\xi} + b(\xi, \eta)u_{\eta} + c(\xi, \eta)u = 0$$

с неположительным инвариантом $h = a_{\xi} + ab - c$ [3], [4, с. 238]. В случае уравнения Эйлера–Дарбу–Пуассона первый инвариант $h = \beta/(\eta - \xi)^2 - \beta^2/(\eta - \xi)^2 = \beta(1 - \beta)/(\eta - \xi)^2$, а второй инвариант $k = b_{\eta} + ab - c$ совпадает с первым.

Решение $u(x, y)$ уравнения (3) обращается в нуль на характеристике $AC_m: \xi = 0$ уравнения (4) и его можно представить в виде

$$u(x, y) = \lambda_{\beta}(\eta - \xi)^{1-2\beta} D_{0\xi}^{-\beta}(\eta - t)^{\beta-1} u(t, 0) \equiv u[\Theta_{\xi}^m(\eta)], \quad (5)$$

где $D_{0\xi}^{-\beta}$ – оператор Римана–Лиувилля, $\lambda_{\beta} = \Gamma(1 - \beta)/\Gamma(1 - 2\beta)$ и в силу (2) $x = (\xi + \eta)/2$, $y = [(\eta - \xi)/(2(1 - 2\beta))]^{1-2\beta}$, $\Theta_{\xi}^m(\eta) = x + iy$.

Из (5) при $m = 0$, $\xi = x + y$, $\eta = x - y$ получаем нагруженное функциональное уравнение

$$u(x, y) = u(\xi, 0) \quad \forall (x, y) \in \Omega_0, \quad (6)$$

которое подтверждает, что обобщенное решение $u(x, y)$ волнового уравнения $u_{yy} = u_{xx}$ каждое значение (в том числе экстремальное), принимаемое им в области Ω_0 , обязательно принимает и на $AB = \{(x, 0) : 0 < x < r\}$ [1]. Если $u(x, 0) = \tau(x) \in C^1[0, r]$, то $u_y(x, y) = \tau'(\xi) \quad \forall (x, y) \in \Omega_0$ и в точке (x^*, y^*) локального экстремума $\nu(x^*) = u_y(x^*, 0) = \tau'(x^*) = 0$.

Из аналога теоремы Ферма в дробном исчислении [5, с. 104] заключаем, что если функция $\tau(x)$ в точке $\xi = \xi^* \in]0, r]$ достигает положительный максимум и существует $D_{0\xi}^{1-2\beta} \tau(t)$, то при $\xi = \xi^* \quad D_{0\xi}^{1-2\beta} \tau(t) > 0$.

Известно (см. [5, с. 29]), что

$$\nu(\xi) = u_y(\xi, 0) = \gamma(m) D_{0\xi}^{1-2\beta} \tau(t), \quad (7)$$

где

$$\gamma(m) = \frac{\Gamma(2\beta)\Gamma(1 - \beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(2 - 2\beta)} (2 - 4\beta)^{1-2\beta}.$$

Из (7) следует, что при $m \neq 0$ $\nu(\xi^*) > 0$.

Условие $f(x, 0) = 0$ при $0 \leq x \leq r$ является необходимым для разрешимости неоднородного уравнения (1) в классе $C(\overline{\Omega}_m)$. При соблюдении этого условия замена

$$v(x, y) = u(x, y) - f(x, y) = u[\Theta_\xi(\eta)] - f[\Theta_\xi(\eta)] \quad (8)$$

сводит уравнение (1) к однородному

$$v[\Theta_\xi(\eta)] = \lambda_\beta(\eta - \xi)^{1-2\beta} D_{0\xi}^{-\beta}(\eta - t)^{\beta-1} v(t, 0), \quad 0 < \xi < \eta < r. \quad (9)$$

Координатные прямые $\xi = \text{const}$, $\eta = \text{const}$ евклидовой плоскости точек $\zeta = (\xi, \eta)$ можно назвать характеристиками уравнения (6).

Предположим, что $u_y(x, y), f_y(x, y) \in C(\Omega_m)$, $u_y(x, 0) = \nu(x) \in C[0, r]$, $f_y(x, 0) \in C[0, r]$

$$\int_0^r v_y(x, 0)[x(r-x)]^{-\beta} dx = \int_0^r [\nu(x) - f_y(x, 0)][x(r-x)]^{-\beta} dx < \infty.$$

Тогда, как известно [4, с. 225],

$$\begin{aligned} v[\Theta_0^m(x)] &= \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)} x^{1-2\beta} D_{0x}^{-\beta} t^{\beta-1} v(t, 0) - \\ &- \frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma(1-\beta)} (2-4\beta)^{2\beta-1} D_{0x}^{\beta-1} t^{-\beta} v_y(t, 0). \end{aligned}$$

Но $v[\Theta_0^m(x)] = 0$ и в силу (5) $v(x, 0) = u(x, 0) = \tau(x)$. Поэтому

$$D_{0x}^{\beta-1} t^{-\beta} v_y(t, 0) = \gamma(m) x^{1-2\beta} D_{0x}^{-\beta} t^{\beta-1} \tau(t). \quad (10)$$

Равенство (10) дает основание утверждать:

$$x^{-\beta} v_y(x, 0) = \gamma(m) D_{0x}^{1-\beta} t^{1-2\beta} D_{0t}^{-\beta} t_1^{\beta-1} \tau(t_1) = \gamma(m) x^{-\beta} D_{0x}^{1-2\beta} \tau(t).$$

Следовательно,

$$\nu(x) = f_y(x, 0) + \gamma(m) D_{0x}^{1-2\beta} \tau(t). \quad (11)$$

Важным следствием формулы (7) является следующее экстремальное свойство решения уравнения (1). Пусть $f_y(x, 0) \geq 0$ при $0 < x < r$ и $\tau(x) = u(x, 0)$ достигает положительный максимум в точке $x^* \in]0, r]$. Тогда $\nu(x^*) > 0$. Если же $f_y(x, 0) \leq 0$ и $\tau(x)$ достигает отрицательный минимум в точке $x_* \in]0, r]$, то $\nu(x_*) < 0$.

Фундаментальное соотношение (7) позволяет эффективно исследовать краевые задачи для уравнения (1) в области Ω_m ; в частности, краевую задачу вида

$$a u_y(x, 0) + b u(x, 0) = c(x), \quad 0 < x < r, \quad (12)$$

где $a = \text{const} \neq 0$, $b = \text{const}$, $c(x) \in C[0, r]$.

Действительно, формулу (7) можно записать также в виде

$$\gamma(m)\tau(x) = D_{0x}^{2\beta-1}\nu(t) - D_{0x}^{2\beta-1}f_y(t, 0). \quad (13)$$

Подставляя $\tau(x)$ из (13) в (12), получим

$$\nu(x) - \mu D_{0x}^{2\beta-1}\nu(t) = F(x), \quad 0 < x < r, \quad (14)$$

где

$$\mu = -\frac{b}{\gamma(m)a}, \quad F(x) = \frac{1}{\gamma(m)a} \left[\gamma(m)c(x) + bD_{0x}^{2\beta-1}f_y(t, 0) \right].$$

Для любой правой части $F(x) \in L[0, r]$ единственное решение $\nu(x)$ уравнения (14) задается формулой Хилле–Тамаркина [5, с. 93]:

$$\nu(x) = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^x F(t) E_{1-2\beta} [\mu(x-t)^{1-2\beta}] dt,$$

где

$$E_{1-2\beta}[z] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1 + (1 - 2\beta)k)}$$

– функция Миттаг-Леффлера.

Для нахождения $\tau(x) = u(x, 0)$ нужно только воспользоваться равенствами (12)–(14): при $b = 0$, $\nu(y) = c(x)/a$

$$\tau(x) = D_{0x}^{2\beta-1}N_0(t), \quad N_0(x) = [c(x)/a - f_y(x, 0)]/\gamma(m), \quad 0 \leq x \leq r; \quad (15)$$

при $b \neq 0$

$$\tau(x) = \frac{c(x)}{b} - \frac{a}{b}\nu(x) = N(x), \quad 0 \leq x \leq r, \quad (16)$$

где

$$N(x) = \frac{c(x)}{b} - \frac{a}{b} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^x F(t) E_{1-2\beta} [\mu(x-t)^{1-2\beta}] dt.$$

Единственное решение $u(x, y)$ краевой задачи (12) для нагруженного интегрального уравнения (1) задается формулой (5), где $\tau(x) = u(x, 0)$ находится согласно (15), (16).

В случае (15) эта формула имеет вид

$$u(x, y) = \lambda_\beta(\eta - \xi)^{1-2\beta} D_{0\xi}^{-\beta}(\eta - t)^{\beta-1} D_{0t}^{2\beta-1} N_0(t_1).$$

В заключение отметим, что решение $u(x, y)$ однородного уравнения (3) в случае, когда $\tau(x) \in C[0, r]$, $\nu(x) \in C]0, r[$ и

$$\int_0^r \nu(x)[x(r-x)]^{-\beta} dx < \infty$$

можно искать как решение уравнения

$$u(x, y) = \frac{1}{B(\beta, \beta)} \int_0^1 \tau[\eta + (\eta - \xi)t][t(1-t)]^{\beta-1} dt + \\ + \frac{y}{B(1-\beta, 1-\beta)} \int_0^1 \nu[\eta + (\eta - \xi)t][t(1-t)]^{-\beta} dt,$$

обращающееся в нуль на AC_m : $\xi = 0$, $0 \leq x \leq r/2$.

Основные результаты этой работы в тезисной форме опубликованы в [6].

Литература

1. Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.
2. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М.: Издательство иностранной литературы, 1957. 444 с.
3. Agmon S., Nirenberg L., Protter A. M. A maximum principle for a class of hyperbolic equations and applications to equations of mixed elliptic-hyperbolic type // Communications on pure and applied mathematics. 1953. Vol. VI. Pp. 155–170.
4. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. 301 с.
5. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 272 с.
6. Нахушев А. М. К теории краевых задач для нагруженных интегральных уравнений // Тезисы докладов Республиканской научной конференции с участием международных ученых «Неклассические уравнения математической физики и их приложения». Ташкент, 2014.

Институт прикладной математики
и автоматизации КБНЦ РАН

Разностный метод решения задачи Дирихле для уравнения эллиптического типа

В области $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ рассмотрим уравнение

$$z_{xx} + z_{yy} + a(x, y)z_x + b(x, y)z_y + c(x, y)z = f(x, y). \quad (1)$$

Введем на Ω сетку с квадратными ячейками со сторонами h . Обозначим $a_{m,n}$, $b_{m,n}$, $c_{m,n}$, $f_{m,n}$ и $z_{m,n}$ соответственно значения функций $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$, $f(x, y)$ и $z(x, y)$ в узле $P_{m,n}$ сетки.

При $h^2 c_{m,n} - h(a_{m,n} + b_{m,n}) \neq 4$ заменим производные z_x, z_y, z_{xx}, z_{yy} функции z в уравнении (1) в узле $P_{m,n}$ сетки соответственно разностными соотношениями

$$\frac{1}{h}(z_{m+1,n} - z_{m,n}), \quad \frac{1}{h}(z_{m,n+1} - z_{m,n}), \quad (2)$$

$$\frac{1}{h^2}(z_{m-1,n} - 2z_{m,n} + z_{m+1,n}), \quad \frac{1}{h^2}(z_{m,n-1} - 2z_{m,n} + z_{m,n+1}). \quad (3)$$

Тогда в узле $P_{m,n}$ получим следующее значение

$$z_{m,n} = \frac{-z_{m-1,n} - z_{m,n-1} - (1 + a_{m,n}h)z_{m+1,n} - (1 + b_{m,n}h)z_{m,n+1} + h^2 f_{m,n}}{h^2 c_{m,n} - h(a_{m,n} + b_{m,n}) - 4}.$$

При $h^2 c_{m,n} - h(a_{m,n} + b_{m,n}) = 4$ производные z_x, z_y в уравнении (1) заменим соотношениями

$$\frac{1}{h}(z_{m,n} - z_{m-1,n}), \quad \frac{1}{h}(z_{m,n} - z_{m,n-1}),$$

а для производных z_{xx}, z_{yy} оставим соотношения (3). Тогда в узле $P_{m,n}$ получим следующее значение

$$z_{m,n} = \frac{-z_{m+1,n} - z_{m,n+1} - (1 - a_{m,n}h)z_{m-1,n} - (1 - b_{m,n}h)z_{m,n-1} + h^2 f_{m,n}}{h^2 c_{m,n} + h(a_{m,n} + b_{m,n}) - 4}.$$

Заметим, что при выполнении условия $a(x, y) + b(x, y) \neq 0$, для всех $(x, y) \in \Omega$, равенство $h^2 c_{m,n} + h(a_{m,n} + b_{m,n}) = 4$ не выполняется одновременно с равенством $h^2 c_{m,n} - h(a_{m,n} + b_{m,n}) = 4$.

Пользуясь следующей схемой

$$(z_{0,1}, z_{1,0}, z_{1,2}, z_{2,1}) \rightarrow z_{1,1}; \quad \dots \quad (z_{m-1,1}, z_{m,0}, z_{m+1,1}, z_{m,2}) \rightarrow z_{m,1};$$

$$(z_{0,2}, z_{1,1}, z_{2,2}, z_{1,3}) \rightarrow z_{1,2}; \quad \dots \quad (z_{m-1,2}, z_{m,1}, z_{m+1,2}, z_{m,3}) \rightarrow z_{m,2};$$

...

$$(z_{0,n}, z_{1,n-1}, z_{2,n}, z_{1,n+1}) \rightarrow z_{1,n}; \quad \dots \quad (z_{m-1,n}, z_{m,n-1}, z_{m+1,n}, z_{m,n+1}) \rightarrow z_{m,n};$$

для нахождения значений $z_{i,j}$, ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$), получим систему линейных уравнений.

В основе предлагаемого метода в случае гармонической функции лежит теорема о среднем арифметическом значений, принимаемых функцией z в четырех узлах $P_{0,1}, P_{1,0}, P_{1,2}, P_{2,1}$, «соседних» с $P_{1,1}$ [1, с. 323].

Литература

1. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М.: КомКнига, 2007.

Библиография научных трудов А. М. Нахушева

1959

1. Нахушев А. М. О некоторых результатах, связанных с интегрированием дифференциального уравнения вида $y'' = P(x, y)y' + Q(x, y)y$ // Сборник студенческих научных работ КБГУ: Кабардино-Балкарское книжное издательство, 1959.

1961

2. Нахушев А. М. Об одном достаточном признаке разрешимости уравнения Риккати n -й степени // Сборник студенческих научных работ КБГУ: Кабардино-Балкарское книжное издательство, вып. 2. 1961.
3. Нахушев А. М. О диофантовом уравнении $x^2 + y^2 = 2w^2$ и постановке более общей задачи // Сборник студенческих научных работ КБГУ: Кабардино-Балкарское книжное издательство, вып. 2. 1961.
4. Нахушев А. М. Об одном обобщении сравнений Скворцова П. Г. и Калажокова Х. Х. // Сборник студенческих научных работ КБГУ: Кабардино-Балкарское книжное издательство, вып. 2. 1961.

1963

5. Нахушев А. М. К интегрированию обобщенного уравнения Риккати в квадратурах // Ученые записки КБГУ. Сер. физ.-мат. наук: Кабардино-Балкарское книжное издательство, вып. 19. 1963.

1966

6. Нахушев А. М. Об одной задаче смешанного типа для уравнения $y(y-1)u_{xx} + u_{yy} = 0$ // ДАН СССР. 1966. Т. 166, № 3. С. 536–539.
Nakhushev A. M. A problem of the mixed type for the equation $y(y-1)u_{xx} + u_{yy} = 0$. *Sov. Math. Dokl.* 1966. Vol. 7. Pp. 113–117. (English. Russian original)
7. Нахушев А. М. Краевая задача для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // ДАН СССР. 1966. Т. 170, № 1. С. 38–40.
Nakhushev A. M. A boundary value problem for an equation of mixed type with two lines of degeneracy. *Sov. Math. Dokl.* 1966. Vol. 7. Pp. 1142–1145. (English. Russian original)
8. Нахушев А. М. Краевые задачи для уравнения смешанного типа с двумя линиями параболического вырождения // Тезисы международного конгресса математиков. Москва, 1966.

9. Нахушев А. М. Некоторые краевые задачи для уравнения смешанного типа с двумя линиями параболического вырождения: дис... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1966.
10. Нахушев А. М. Некоторые краевые задачи для уравнения смешанного типа с двумя линиями параболического вырождения: автореф. дис... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1966.

1967

11. Нахушев А. М. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа с двумя линиями параболического вырождения // Дифференц. уравнения. 1967. Т. 3, № 1. С. 45–68.
12. Нахушев А. М. О некоторых задачах для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // Сибирский мат. журнал. 1967. Т. 8, № 1. С. 19–48.

Nakhushev A. M. Some problems for an equation of mixed type with two lines of degeneration. *Siberian Math. J.* 1967. Vol. 8, no. 1. Pp. 13–34.

1968

13. Нахушев А. М. Об одном трехмерном аналоге задачи Геллерстедта // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, № 1. С. 52–62.
14. Бжихатлов Х. Г., Нахушев А. М. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа // ДАН СССР. 1968. Т. 183, № 2. С. 261–264.

Bzhikhatlov Kh. G., Nakhushev A. M. A boundary value problem for a mixed equation of parabolic-hyperbolic type. *Sov. Math. Dokl.* 1968. Vol. 9. Pp. 1349–1352. (English. Russian original)

1969

15. Нахушев А. М. О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5, № 1. С. 44–59.
16. Нахушев А. М. Новая краевая задача для одного вырождающегося гиперболического уравнения // ДАН СССР. 1969. Т. 187, № 4. С. 736–739.

1970

17. Нахушев А. М. Критерий единственности решения задачи Дирихле для уравнения смешанного типа в цилиндрической области // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6, № 1. С. 190–191.

18. Нахушев А. М. Методика постановки корректных задач для линейных гиперболических уравнений второго порядка на плоскости // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6, № 1. С. 192–195.
19. Нахушев А. М. Об одной задаче А. В. Бицадзе // ДАН СССР. 1970. Т. 192, № 3. С. 499–502.
Nakhushev A. M. On a problem of A. V. Bitsadze. *Sov. Math. Dokl.* 1970. Vol. 11. Pp. 667–670. (English. Russian original)
20. Нахушев А. М. Многомерный аналог задачи Дарбу для гиперболических уравнений // ДАН СССР. 1970. Т. 194, № 1. С. 31–34.
21. Нахушев А. М. О задаче Дарбу для гиперболических уравнений // ДАН СССР. 1970. Т. 195, № 4. С. 776–779.
Nakhushev A. M. On the Darboux problem for hyperbolic equations. *Sov. Math. Dokl.* 1970. Vol. 11, no. 5. Pp. 1567–1570.

1971

22. Нахушев А. М. О задаче Дарбу для вырождающихся гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, № 1. С. 49–56.
23. Нахушев А. М., Пашковский В. И. О задаче А. В. Бицадзе для уравнений смешанного типа в многомерных областях // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, № 1. С. 57–63.
24. Нахушев А. М. К теории линейных краевых задач для гиперболических и смешанных уравнений второго порядка: дис... д-ра физ.-мат. наук. Новосибирск: Институт математики СО АН СССР. 1971.
25. Нахушев А. М. К теории линейных краевых задач для гиперболических и смешанных уравнений второго порядка: автореф. дис... д-ра физ.-мат. наук. Новосибирск: Институт математики СО АН СССР. 1971.

1972

26. Нахушев А. М. К априорным оценкам для задач Трикоми и Дарбу // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8, № 1. С. 107–117.
27. Бицадзе А. В., Нахушев А. М. К теории вырождающихся гиперболических уравнений в многомерных областях // ДАН СССР. 1972. Т. 204, № 6. С. 1289–1291.
28. Бицадзе А. В., Нахушев А. М. О корректной постановке задач для уравнений смешанного типа в многомерных областях // ДАН СССР. 1972. Т. 205, № 1. С. 9–12.
Bitsadze A. V., Nakhushev A. M. Correct formulations of problems for equations of mixed type in multidimensional domains. *Sov. Math. Dokl.* 1972. Vol. 13, no. 4. Pp. 857–860. (English. Russian original)

29. Нахушев А. М., Карасев И. М., Лесковский И. П., Бжихатлов Х. Г. Избранные вопросы дифференциальных и интегральных уравнений // Межвуз. сборник. Нальчик: КБГУ, 1972.
30. Нахушев А. М. О корректной постановке краевых задач для параболических уравнений со знакопеременной характеристической формой // Тезисы I Республиканской конф. мат. по дифференц. уравнениям. Ашхабад, 1972.
31. Нахушев А. М. О корректной постановке краевых задач для параболических уравнений со знакопеременной характеристической формой // Тезисы III съезда болгарских математиков. София, 1972.

1973

32. Нахушев А. М. Всесоюзный симпозиум по избранным вопросам уравнений с частными производными // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9, № 1. С. 3–4.
33. Нахушев А. М. О правильной постановке краевых задач для параболических уравнений со знакопеременной характеристической формой // Дифференц. уравнения, 1973. Т. 9, № 1. С. 130–135.

1974

34. Нахушев А. М. Обратные задачи для вырождающихся уравнений и интегральные уравнения Вольтерра третьего рода // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10, № 1. С. 100–111.
35. Бицадзе А. В., Нахушев А. М. К теории уравнений смешанного типа в многомерных областях // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10, № 12. С. 2184–2191.

1975

36. Нахушев А. М. Об одной смешанной задаче для вырождающихся эллиптических уравнений // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11, № 1. С. 192–195.
37. Нахушев А. М. К теории краевых задач для вырождающихся гиперболических уравнений // Сообщение АН Гр. ССР, 1975. Т. 77, № 3. С. 545–548.
38. Нахушев А. М. Об одной краевой задаче для гиперболических уравнений второго порядка // Мат. сборник СОГУ. Вып. 2. Орджоникидзе, 1975.
39. Нахушев А. М. Об одной смешанной задаче для вырождающихся эллиптических уравнений // Балгарско мат. содружество. Конференция по диф. уравнениям. София, 1975.
40. Нахушев А. М. Семнадцать лекций по топологии. Нальчик, КБГУ, 1975.

1976

41. Нахушев А. М. О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 1. С. 103–108.
42. Дикинов Х. Ж., Керефов А. А., Нахушев А. М. Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения теплопроводности // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 1. С. 177–179.
43. Нахушев А. М., Гудиев А. Х. Люди советской науки. А. В. Бицадзе (к 60-летию со дня рождения) // Мат. сборник СОГУ. Вып. 3. Орджоникидзе, 1976.
44. Нахушев А. М. О современном состоянии теории краевых задач для гиперболических и смешанных уравнений второго порядка в многомерных областях // Мат. сборник СОГУ. Вып. 3. Орджоникидзе, 1976.

1977

45. Нахушев А. М., Борисов В. Н. Краевые задачи для нагруженных параболических уравнений и их приложения к прогнозу уровня грунтовых вод // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 1. С. 105–110.
46. Нахушев А. М. Задача Штурма–Лиувилля для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с дробными производными в младших членах // ДАН СССР. 1977. Т. 234, № 2. С. 308–311.
47. Нахушев А. М. К теории краевых задач для уравнений смешанного гипербола-параболического типа // ДАН СССР. 1977. Т. 235, № 2. С. 273–276.
48. Нахушев А. М. Бицадзе уравнение // Мат. энциклопедия. Т. 1. Москва: Советская энциклопедия, 1977.
49. Нахушев А. М. Гурса задача // Мат. энциклопедия. Т. 1. Москва: Советская энциклопедия, 1977.

1978

50. Нахушев А. М. О современном состоянии теории краевых задач для уравнения второго порядка гиперболического и смешанного типов в многомерных областях // Труды Всесоюзной конференции по уравнениям с частными производными. Москва, 7–31 января 1978 г.
51. Нахушев А. М. К теории линейных краевых задач для уравнения второго порядка смешанного гипербола-параболического типа // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14, № 1. С. 66–73.

52. Нахушев А. М. Нелокальная задача и задача Гурса для нагруженного уравнения гиперболического типа и их приложения к прогнозу почвенной влаги // ДАН СССР. 1978. Т. 242, № 5. С. 1008–1011.
Nakhushev A. M. A nonlocal problem and the Goursat problem for a loaded equation of hyperbolic type, and their application in prediction of ground moisture. *Sov. Math. Dokl.* 1978. Vol. 19, no. 5. Pp. 1243–1247. (English. Russian original)
53. Нахушев А. М., Канчукоев В. З., Шхануков-Лафишев М. Х. Краевые задачи для модифицированного уравнения влагопереноса и точные методы их решения // Республиканский симпозиум по дифференциальным уравнениям. Тезисы докладов. Ашхабад, 1978.
54. Нахушев А. М. Локальные и нелокальные краевые задачи для нагруженного уравнения параболического типа и их приложения к прогнозу почвенной влаги // Республиканский симпозиум по дифференциальным уравнениям. Тезисы докладов. Ашхабад, 1978.

1979

55. Нахушев А. М. Краевые задачи для нагруженных интегродифференциальных уравнений гиперболического типа и некоторые их приложения к прогнозу почвенной влаги // Дифференц. уравнения, 1979. Т. 15, № 1. С. 96–105.
56. Нахушев А. М. О некоторых способах линеаризации уравнений движения грунтовой воды и почвенной влаги // Межвузовский сборник «Краевые задачи для уравнений смешанного типа и родственные проблемы функционального анализа и прикладной математики». Вып. 2. Нальчик: КБГУ, 1979. С. 173–183.
57. Нахушев А. М. Дифференциальное уравнение с частными производными; задача с данными на характеристиках // Мат. энциклопедия. Т. 2. Москва: Советская энциклопедия, 1979.
58. Нахушев А. М. Дифференциальное уравнение с частными производными с особенностями в коэффициентах // Мат. энциклопедия. Т. 2. Москва: Советская энциклопедия, 1979.
59. Нахушев А. М. Кирхгофа формула // Мат. энциклопедия. Т. 2. Москва: Советская энциклопедия, 1979.

1980

60. Нахушев А. М. Критерий единственности решения задачи Дарбу для одного вырождающегося гиперболического уравнения влагопереноса // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16, № 9. С. 1643–1649.

1981

61. Нахушев А. М. О справедливости одной априорной оценки // ДАН СССР. 1981. Т. 257, № 1. С. 45–47.

62. Нахушев А. М., Кадомский А. М., Назаров Ю. К., Борисов В. Н. Некоторые математические аспекты построения САПР гидромелиоративных систем и систем сельхозводоснабжения // Межвузовский сборник «Математические методы в мелиорации». Нальчик, КБГУ, 1981. С. 3–9.
63. Нахушев А. М., Карданов Р. Г. Об одном методе регуляризации задачи Коши со смешанным негладким носителем для уравнения параболического типа // Межвузовский сборник «Математические методы в мелиорации». Нальчик, КБГУ, 1981. С. 126–130.
64. Нахушев А. М. Задача типа Штурма-Лиувилля для нагруженных дифференциальных уравнений с дробными производными // В книге «Second Conference of Differential Equations and Applications. Abstracts of Invited and Contributed Papers». KDU-II, PUSE'81.

1982

65. Нахушев А. М. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 1. С. 72–81.
66. Нахушев А. М. Коши–Ковалевской теорема // Мат. энциклопедия. Т. 3. Москва: Советская энциклопедия, 1982.
67. Нахушев А. М. Линейное гиперболическое уравнение и система // Мат. энциклопедия. Т. 3. Москва: Советская энциклопедия, 1982.
68. Нахушев А. М. Нагруженные дифференциальные уравнения и их приложения // Труды Всесоюзного симпозиума в Тбилиси, 21–23 апреля 1982 г.
69. Нахушев А. М. Планирование и управление экспериментом, описываемым нагруженным дифференциальным уравнением параболического типа // Тезисы докладов «Перспективные методы планирования и анализа экспериментов при исследовании случайных полей и процессов». Ч. 1. М., 1982.
70. Нахушев А. М., Энеева Л. А. Планирование машинного эксперимента по идентификации математических моделей роста биомассы основных сельхозкультур // Тезисы докладов «Перспективные методы планирования и анализа экспериментов при исследовании случайных полей и процессов». Ч. 2. М., 1982.
71. Нахушев А. М., Карданов Р. Г. К определению дифференциальных уравнений и их решений // Сборник научных трудов «Нелокальные краевые задачи для нагруженных уравнений смешанного типа и родственные проблемы непрерывного анализа». Нальчик, КБГУ, 1982. С. 5–14.

72. Нахушев А. М. Элементы теории уравнений и систем с частными производными. Нальчик: КБГУ, 1982.
73. Нахушев А. М. К теории нагруженных уравнений в частных производных // Partial Differential Equations. Short communication (Abstracts). Section 11. 1982.
74. Нахушев А. М. Boundary value problems for loaded differential equations // Труды семестра «Уравнения в частных производных» Международного центра им. Стефана Банаха по повышению квалификации молодых ученых. Варшава, 1982.

1983

75. Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их приложения // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 1. С. 86–94.
76. Нахушев А. М., Карданов Р. Г. О некоторых способах идентификации математической модели динамики грунтовой воды и почвенной влаги // Сборник научных трудов «САПР и АСПР в мелиорации». Нальчик: КБГУ, 1983. С. 3–20.
77. Нахушев А. М., Казиев В. М., Энеева Л. А., Ананчина Г. А., Нахушева З. А. К вопросу автоматизированного прогнозирования урожайности основных сельхозкультур в условиях орошения // Сборник научных трудов «САПР и АСПР в мелиорации». Нальчик: КБГУ, 1983. С. 156–165.

1984

78. Нахушев А. М. О современном состоянии теории нелокальных краевых задач для уравнений в частных производных // Дифференц. уравнения (Математическая физика). Тезисы докладов участников Куйбышевского областного межвуз. научного совещания-семинара. Куйбышев: КППИ, 1984. С. 83.
79. Нахушев А. М. Определение локальных и нелокальных задач для дифференциальных уравнений // Тезисы докладов IX школы по теории операторов в функциональных пространствах. Тернополь, 1984.

1985

80. Нахушев А. М. О нелокальных краевых задачах со смешением и их связи с нагруженными уравнениями // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 1. С. 92–101.
81. Нахушев А. М. Римана метод // Мат. энциклопедия. Т. 5. Москва: Советская энциклопедия, 1985.
82. Нахушев А. М. Смешанная задача // Мат. энциклопедия, Т. 5. Москва: Советская энциклопедия, 1985.

83. Нахушев А. М. Смешанная и краевая задача для гиперболических уравнений и систем // Мат. энциклопедия, Т. 5. Москва: Советская энциклопедия, 1985.
84. Нахушев А. М. Смешанного типа уравнение // Мат. энциклопедия, Т. 5. Москва: Советская энциклопедия, 1985.
85. Нахушев А. М. Трикоми задача // Мат. энциклопедия, Т. 5. Москва: Советская энциклопедия, 1985.
86. Нахушев А. М. Трикоми уравнение // Мат. энциклопедия, Т. 5. Москва: Советская энциклопедия, 1985.
87. Нахушев А. М. Шаудера метод // Мат. энциклопедия, Т. 5. Москва: Советская энциклопедия, 1985.
88. Нахушев А. М., Шхануков М. Х. Методология автоматизации проектирования сложных систем с распределенными параметрами как подсистем САПР Минводхоза РСФСР // Сборник научных трудов «Методы математического моделирования в системах автоматизированного проектирования и планирования». Нальчик: КБГУ, 1985. С. 3-26.
89. Нахушев А. М., Карданов Р. Г. О некоторых способах определения коэффициента конвективной диффузии соли при полном насыщении почвы влагой // Сборник научных трудов «Методы математического моделирования в системах автоматизированного проектирования и планирования». Нальчик: КБГУ, 1985. С. 145–150.
90. Нахушев А. М. Современное состояние теории нелокальных задач для дифференциальных уравнений // Third conference of differential equations and application. KDU-III, PVCF'85.

1986

91. Нахушев А. М., Салахитдинов М. С., Янушаускас А. И., Прилепко А. И., Гвазава Д. К. Люди советской науки. Бицадзе (к 70-летию со дня рождения) // Межвузовский сборник «Нелокальные задачи для уравнений в частных производных и применение к моделированию и автоматизации проектирования сложных систем». Нальчик, 1986. С. 3–16.
92. Энеева Л. А., Нахушев А. М. Некоторые аспекты моделирования продуктивности кукурузы в условиях орошения и степной зоны // Межвузовский сборник «Нелокальные задачи для уравнений в частных производных и применение к моделированию и автоматизации проектирования сложных систем». Нальчик: КБГУ, 1986. С. 173–175.
93. Нахушев А. М., Салахитдинов М. С. К теории дробного исчисления // Межвузовский сборник «Нелокальные задачи для уравнений

в частных производных и применение к моделированию и автоматизации проектирования сложных систем». Нальчик: КБГУ, 1986. С. 156–158.

94. Нахушев А. М. Нагруженные дифференциальные уравнения и их приложения // Труды Всесоюзного симпозиума «Дифференциальные уравнения в частных производных и их приложения». Тбилиси, 1986.
95. Nakhushev A. M. Some aspects of boundary value problems theory with a shift // In: Mixed Type Equations. BSB, TEVBNER-TEXTE ZUR. Mathematic Band 90. Leipzig: B. B. Feubner, 1986.
96. Nakhushev A. M. Differential equation with partial derivatives; problems with datas on characteristics // Mathematical Encyclopedia. Netherlands: Reidel, 1986.
97. Nakhushev A. M. Differential equation with partial derivatives with singular coefficients // Mathematical Encyclopedia. Netherlands: Reidel, 1986.
98. Nakhushev A. M. Cauchy-Kovalevskaya theorem // Mathematical Encyclopedia. Netherlands: Reidel, 1986.

1987

99. Нахушев А. М. К проблеме поиска необходимых краевых условий для основных типов уравнений математической физики // Труды Всесоюзного симпозиума «Современные проблемы математической физики». Тбилиси, 1987.
100. Нахушев А. М. О некоторых проблемах уравнений математической биологии // Тезисы докладов Всесоюзной научной конференции «Классические и неклассические краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными, специальные функции, интегральные уравнения и их приложения». Куйбышев, 1987.
101. Нахушев А. М. О некоторых проблемах уравнении математической физики // Тезисы докладов Всесоюзной научной конференции «Классические и неклассические краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными, специальные функции, интегральные уравнения и их приложения». Куйбышев, 1987.
102. Нахушев А. М. Регуляризация задачи Коши со смешанным носителем для уравнения теплопроводности методом малого параметра // Тезисы докладов Всесоюзной научной конференции «Методы малого параметра», Куйбышев, 1987.
103. Нахушев А. М. Регуляризация задачи Коши со смешанным носителем для уравнения теплопроводности методом малого параметра // Тезисы докладов Всесоюзного научного совещания. Нальчик, 1987.

104. Нахушев А. М. Математические методы в исторических исследованиях. Нальчик: КБГУ, 1987.
105. Nakhushev A. M. Kirchhoff formula // *Mathematical Encyclopedia*. Netherlands: Reidel, 1987.
106. Nakhushev A. M. Goursat problem // *Mathematical Encyclopedia*. Netherlands: Reidel, 1987.

1988

107. Нахушев А. М. Об одном алгоритме одномерной минимизации // Тезисы докладов Всесоюзной школы молодых ученых «Функциональные методы в прикладной математике и математической физике». Ч. 1. Ташкент, 1988.
108. Нахушев А. М. К теории дробного исчисления // *Дифференц. уравнения*. 1988 Т. 24, № 2. С. 313–324.
Nakhushev A. M. On the theory of fractional calculus. *Differ. Equ.* 1988. Vol. 24, no. 2. Pp. 239–247. (English. Russian original)
109. Нахушев А. М., Салахитдинов М. С. О законе композиции операторов дробного интегродифференцирования с различными началами // *ДАН СССР*. 1988. Т. 299, № 6. С. 1313–1316.
Nakhushev A. M., Salakhitdinov M. S. The law of composition of operators for fractional integro-differentiation with various origins. *Sov. Math. Dokl.* 1988. Vol. 37, no. 2. Pp. 565–568. (English. Russian original)
110. Нахушев А. М. О непрерывных дифференциальных уравнениях и их разностных аналогах // *ДАН СССР*. 1988. Т. 300, № 4. С. 796–799.
Nakhushev A. M. Continuous differential equations and their difference analogues. *Sov. Math. Dokl.* 1988. Vol. 37, no. 3. Pp. 729–732. (English. Russian original)

1989

111. Нахушев А. М. Анализ одной математической модели спирального филлотаксиса // Межвузовский сборник «Нелокальные задачи и их приложения к автоматизированным системам». Нальчик: КБГУ, 1989. С. 161–167.

1990

112. Нахушев А. М. Об одной внутреннекраевой задаче с нелокальным смещением для системы уравнений половозрастной структуры популяции // Тезисы докладов Всесоюзной конференции «Дифференциальные уравнения и оптимальное управление», Ашхабад, 4–6 октября 1990 г.

1991

113. Нахушев А. М. Критерий непрерывности градиента решения задачи Трикоми для уравнения Геллерстедта // Тезисы докладов науч. конф. «Краевые задачи и их спектральные вопросы для дифференциальных уравнений», Алма-Ата, 22–25 мая 1991 г.
114. Нахушев А. М. О современном состоянии теории нелокальных задач // Тезисы докладов III Северо-Кавказской региональной конференции «Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения». ДГУ, Махачкала, 10–15 сентября 1991 г.

1992

115. Нахушев А. М. Эффект локализации особенности градиента решения задачи Дарбу для уравнения Геллерстедта и критерии его непрерывности // Доклады РАН. 1992. Т. 323, № 5. С. 834–837.
Nakhushev A. M. The localization effect of the singularity of the solution gradient of the Darboux problem for the Gellerstedt equation, and a criterion for its continuity. *Sov. Math. Dokl.* 1992. Vol. 45, no. 2. Pp. 436–440. (English. Russian original)
116. Нахушев А. М. Об одном классе линейных краевых задач для гиперболического и смешанного типов уравнений второго порядка. Нальчик: Эльбрус. 1992. 155 с.
117. Нахушев А. М. Критерий непрерывности градиента решения задачи Дарбу для уравнения Геллерстедта // Диффер. уравнения. 1992. Т. 10, № 28. С. 1770–1785.
Nakhushev A. M. A criterion for continuity of the gradient of the solution of the Darboux problem for the Gellerstedt equation. *Differ. Equ.* 1992. Vol. 28, no. 10. Pp. 1445–1457. (English. Russian original)
118. Нахушев А. М. Критерий непрерывности градиента решения задачи Дарбу для уравнения Геллерстедта. Препринт № 1. Нальчик. НИИ ПМА. 1992. 26 с.
119. Нахушев А. М., Беккиев А. Ю. О нелинейных обобщениях закона Бугера–Лэмберта–Бэра о теоретическом эффекте локализации особенностей градиента концентрации молекул в поглощающей среде. Препринт № 2. Нальчик. НИИ ПМА, 1992. 8 с.

1994

120. Нахушев А. М. Об уравнениях состояния непрерывных одномерных систем и их аналогах в дробном исчислении // Доклады АМАН. 1994. Т. 1, № 1. С. 22–26.
121. Нахушев А. М. Математические методы в исторических исследованиях // Материалы научно-практической конференции ученых Адыгеи «Наука Адыгее». Майкоп: Меоты, 1994.

1995

122. Нахушев А. М., Тхакахов Р. Б. О континуальных аналогах реологических уравнений состояния и логическом законе изменения вязкоупругих свойств полимера // Доклады АМАН. 1995. Т. 1, № 2. С. 6–11.
123. Нахушев А. М. Аналог уравнения Бернулли в дробном исчислении и обобщенный логистический закон развития одномерных непрерывных систем // Тезисы докладов Международной конференции «Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ». Москва, 27 апреля – 3 мая 1995 г.
124. Нахушев А. М. Непрерывные дифференциальные уравнения и математическое моделирование вязкоупругих свойств полимеров // Тезисы юбилейной научной конференции. Алматы, 25–29 сентября 1995 г.
125. Нахушев А. М. Об уравнениях состояния непрерывных одномерных систем и их приложениях. Нальчик: Логос. 1995. 50 с.
126. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. Москва: Высшая школа. 1995. 301 с.

1996

127. Нахушев А. М., Нахушева В. А. Об одном классе дифференциальных уравнений состояния дробного порядка в сплошных средах с памятью // Доклады Адыгской (Черкесской) международной академии наук. 1996. Т. 2, № 1. С. 52–55.
128. Нахушев А. М. Уравнения смешанного типа и дробное исчисление // Тезисы докладов Международной конференции «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики». Нальчик, 1996. С. 60–61.
129. Нахушев А. М., Аттаев А. Х. Об одном подходе к обобщению производственной функции Кобба-Дугласа // Тезисы докладов Международной конференции «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики». Нальчик, 3–7 декабря 1996 г. С. 61–62.

1997

130. Нахушев А. М. Об одной модели распределения концентрации поглощающих молекул по трассе лазерного излучения // Тезисы XII Международной конференции «Воздействие интенсивных потоков энергии на вещество». Терскол, 1997.
131. Нахушев А. М. О положительности интегральных операторов, весьма важных в дробном исчислении и в теории уравнений смешанного типа // Доклады АМАН. 1997. Т. 2, № 2. С. 10–12.

132. Нахушев А. М., Кенетова Р. О. К математическому моделированию внутриэтнической эволюции // Труды ФОРА. 1997, № 2.

1998

133. Нахушев А. М., Бейтуганов М. Н., Темроков А. И. Инициирование искусственных молний в грозо-градовых облаках плазменными образованиями, как метод предотвращения наземных молний // Тезисы XIII Международной конференции «Уравнения состояния вещества». Терскол, 1998.
134. Нахушев А. М., Кенетова Р. О. К проблеме математического моделирования социально-исторических процессов // Тезисы XIII Международной конференции «Уравнения состояния вещества». Терскол, 1998.
135. Нахушев А. М. О положительности операторов непрерывного и дискретного дифференцирования и интегрирования весьма важных в дробном исчислении и в теории уравнении смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 1. С. 101–109.
136. Нахушев А. М. Роль математической науки в исследовании проблем гуманизации межнациональных отношений // Доклады АМАН. 1998. Т. 1, № 1. С. 60–61.
137. Нахушев А. М., Кенетова Р. О. К проблеме математического моделирования социально-исторических процессов // Доклады АМАН. 1998. Т. 1, № 1. С. 95–96.
138. Нахушев А. М. К проблеме о нулях функции Миттаг-Леффлера и спектре одного дифференциального оператора дробного порядка // Понtryгинские чтения – IX. Тезисы докладов. Воронеж, ВГУ, 1998.
139. Нахушев А. М., Кенетова Р. О. Математическое моделирование социально-исторических и этнических процессов. Нальчик: Эль-Фа. 1998. 170 с.
140. Нахушев А. М. Об одной формуле обращения интегрального уравнения Абеля // Доклады АМАН. 1998. Т. 3, № 2. С. 10–11.
141. Нахушев А. М. Структурные и качественные свойства операторов, обратных операторам непрерывного и дискретного интегродифференцирования // Тезисы докладов Международной конференции. Москва: РУДН, 1998. С. 148.

1999

142. Нахушев А. М. О некоторых прикладных аспектах дробного исчисления // Тезисы XIV Международной конференции «Воздействие потоков энергии на вещество». Терскол, 1999. С. 37–38.

143. Нахушев А. М., Кушхов А. А. К вопросу информационно-математического моделирования межэтнических конфликтов и этногенеза // Доклады АМАН. 1999. Т. 4, № 1. С. 55–59.
144. Нахушев А. М., Кенетова Р. О. К проблеме математического моделирования солнечной и социальной активностей // Тезисы докладов III Всероссийского симпозиума «Математическое моделирование и компьютерные технологии». Т. 1. Кисловодск, 22–24 апреля 1999 г.
145. Нахушев А. М. Структурно-функциональный анализ решений модельных дискретных и непрерывных дифференциальных уравнений дробного порядка // Тезисы докладов Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения – X». Воронеж, 1999. С. 179.
146. Нахушев А. М., Нахушева В. А. О некоторых дифференциальных уравнениях дробного порядка и их приложениях // Тезисы докладов Международной конференции «AMADE-99». Минск, Беларусь, 14–18 сентября 1999 г. С. 156–157.
147. Нахушев А. М., Кенетова Р. О. К проблеме математического моделирования солнечной и социальной активностей // Сборник трудов XII Международной научной конференции «Математические методы в технике и технологиях ММТТ-12». 1999.
148. Нахушев А. М. Роль математической науки в исследовании проблем гуманизации межнациональных отношений // Материалы международной научно-теоретической конференции «Культурно-историческая общность народов Северного Кавказа и проблемы гуманизации межнациональных отношений на современном этапе». Черкесск–Архыз, 1999.

2000

149. Нахушев А. М., Нахушева В. А. О некоторых обобщениях закона Кольрауша и дифференциальных уравнениях переноса дробного порядка // Тезисы XV Международной конференции «Уравнения состояния вещества». Терскол, 2000. С. 188.
150. Нахушев А. М., Нахушева З. А. Дробный интеграл Мегуми Сайго и его связь с законом взвешенной композиции операторов дробного интегрирования в смысле Римана-Лиувилля // Доклады АМАН. 2000. Т. 5, № 1. С. 36–39.
151. Нахушев А. М. Математические модели вязкоупругого тела // Известия вузов Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2000, № 3. С. 107–109.

152. Нахушев А. М. Видоизмененная задача Коши для оператора дробного дифференцирования с фиксированными началом и концом // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 7. С. 903–908.
- Nakhushev A. M. A modified Cauchy problem for the fractional-order differentiation operator with fixed beginning and end. *Differ. Equ.* 2000. Vol. 36, no. 7. Pp. 1003–1009. (English. Russian original)
153. Нахушев А. М. Структурные и качественные свойства оператора обратного оператору дробного интегро-дифференцирования с фиксированными началом и концом // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 8. С. 1093–1100.
- Nakhushev A. M. Structural and qualitative properties of the inverse of the fractional integro-differentiation operator with fixed endpoints. *Differ. Equ.* 2000. Vol. 36, no. 8. Pp. 1211–1219. (English. Russian original)
154. Нахушев А. М. Об одном классе математических моделей тепломассопереноса в средах с фрактальной структурой, задаваемых дифференциальными операторами дробного порядка // Труды IX Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики». Орел, 2000.
155. Нахушев А. М., Нахушева В. А. О дифференциальных уравнениях переноса и состояния дробного порядка и некоторых обобщениях закона Кольрауша. Сообщения НИИ ПМА. 2000. 11 с.
156. Нахушев А. М. Элементы дробного исчисления и их применение. Нальчик: КБНЦ РАН. 2000. 299 с.

2001

157. Нахушев А. М., Нахушева В. А. Дробное исчисление – математическая основа уравнения состояния фрактальных сред // Тезисы XVI Международной конференции «Воздействие интенсивных потоков энергии на вещество». Эльбрус, 2001. С. 120–122.
158. Нахушев А. М., Нахушева В. А. Дробное исчисление – математическая основа уравнения состояния фрактальных сред // Труды XVI Международной конференции «Воздействие интенсивных потоков энергии на вещество». Эльбрус, 2001.
159. Нахушев А. М. Еще раз об одном свойстве оператора Римана–Лиувилля // Доклады АМАН. 2001. Т. 5, № 2. С. 42–43.
160. Нахушев А. М., Нахушева В. А. Дробное исчисление как математическая основа уравнений состояния фрактальных сред // Доклады АМАН. 2001. Т. 5, № 2. С. 94–98.

161. Nakhushev A. M. On some fundamental properties of Rieman-Liouville operator and their application to partial differential equations of fractional order // Международная конференция «Дифференциальные уравнения и родственные проблемы». 2001.
162. Нахушев А. М. Элементы дробного исчисления и их применение // Труды Международной конференции «Математическое моделирование, статистика и информатика в современном управлении экономикой». Самара, 2001.
163. Нахушев А. М., Кенетова Р. О. Об одной математической модели прогнозирования информационной безопасности двух этносов с единой средой обитания // Тезисы докладов II Международной конференции «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики». Нальчик, 3–7 декабря 2001 г. С. 170–171.

2002

164. Нахушев А. М. Качественный анализ математической модели распространения волны горения по поверхности горючего материала при гетерогенной реакции // Тезисы XVII Международной конференции «Воздействие интенсивных потоков энергии на вещество». Эльбрус, 2002. С. 67.
165. Нахушев А. М. Качественный анализ математической модели распространения волны горения по поверхности горючего материала при гетерогенной реакции // Труды XVII Международной конференции «Физика экстремальных состояний вещества». Эльбрус, 2002. С. 94–95.
166. Нахушев А. М. О некоторых эффективных параметрах открытых временных систем регионального управления // Известия КБНЦ РАН. 2002, № 1(8). С. 72–75.
167. Нахушев А. М. Об априорных оценках для уравнения с обобщенным оператором Трикоми в главной части // Доклады АМАН. 2002. Т. 6. № 1. С. 22–27.
168. Нахушев А. М. Об априорных оценках для вырождающихся гиперболических уравнений // Сборник научных трудов «Неклассические уравнения математической физики». Новосибирск, 2002. С. 140–149.
169. Нахушев А. М. Солнцедеятельность и социальная активность – эффективные параметры открытых временных систем регионального управления // Сборник трудов международной конференции «Моделирование региональных, экономических и медико-экологических процессов». Нальчик, 2002.

2003

170. Нахушев А. М., Нахушева В. А. О конструктивных и качественных свойствах решений регуляризованного уравнения фрактального осциллятора // Тезисы XVIII Международной конференции «Воздействие интенсивных потоков энергии на вещество». Эльбрус, 2003. С. 115.
171. Нахушев А. М., Нахушева В. А. О конструктивных и качественных свойствах решений регуляризованного уравнения фрактального осциллятора // Сборник трудов XVIII Международной конференции «Физика экстремальных состояний вещества – 2003». Черноголовка, 2003. С. 148–149.
172. Нахушев А. М. Априорные оценки для вырождающихся гиперболических уравнений и теорема единственности решения одной задачи Франкля // Материалы Международного российско-узбекского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики» и Школы молодых ученых «Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики». Нальчик–Эльбрус, 2003. С. 70.
173. Нахушев А. М., Барсагова Т. И. К вопросу математического моделирования процесса распространения волны горения по поверхности горючего материала при гетерогенной реакции // Материалы Международного российско-узбекского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики» и Школы молодых ученых «Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики». Нальчик–Эльбрус, 2003. С. 136–141.
174. Нахушев А. М. О качественных свойствах регуляризованного оператора Римана-Лиувилля // Тезисы докладов II Международной конференции. Москва, 2003.
175. Нахушев А. М. Прямая задача теории сопла Лаваля // Доклады АМАН. 2003. Т. 6, № 2. С. 52–62.
176. Нахушев А. М. О спектре одного нелокального оператора – базового элемента математических моделей различных систем с фрактальной структурой и памятью // Труды Международной конференции «Спектральная теория дифференциальных операторов и родственные проблемы». Т. 1. Стерлитамак, 24–28 июня 2003 г.
177. Нахушев А. М. Дробное исчисление – фундаментальная основа краевых задач со смещением и математической физики фракталов // Труды Международной научной конференции «Современные проблемы математической физики и информационные технологии». Ташкент, 2003. С. 207–212.

178. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. Москва: ФИЗМАТЛИТ. 2003. 272 с.

2004

179. Нахушев А. М., Борисов В. Н., Бураев А. В. Об экстремальных региональных проявлениях солнечной и селевой активностей // Сборник трудов Международной конференции «Физика экстремальных состояний вещества - 2004». Черноголовка, 2004.
180. Нахушев А. М., Борисов В. Н., Бураев А. В. Об экстремальных региональных проявлениях солнечной и селевой активностей // Тезисы XIX Международной конференции «Уравнения состояния вещества». Эльбрус. Черноголовка: ИПХФ РАН, 2004. С. 155.
181. Нахушев А. М. Селевая активность в сопоставлении с вариациями солнечной активности // Известия КБНЦ РАН. 2004, № 1(11). С. 25–30.
182. Нахушев А. М. Дробное исчисление – фундаментальная основа краевых задач со смещением и математической физики фракталов // Доклады АМАН. 2004. Т. 7, № 1. С. 60–65.
183. Нахушев А. М., Борисов В. Н., Бураев А. В. О некоторых базовых элементах математических моделей системы мониторинга экологии горной и предгорной территории // Доклады АМАН. 2004. Т. 7, № 1. С. 110–123.
184. Нахушев А. М., Кенетова Р. О. О локальных историометрических циклах Кавказской войны // Доклады АМАН. 2004. Т. 7, № 1. С. 176–180.
185. Нахушев А. М. Дробное исчисление – фундаментальная основа краевых задач со смещением и математической физики фракталов // Материалы Международного российско-казахского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики» и Школы молодых ученых «Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики». Нальчик–Эльбрус, 2004. С. 135.
186. Нахушев А. М. Дробное исчисление – фундаментальная основа краевых задач со смещением и математической физики фракталов // Труды Всероссийской конференции «Математическое моделирование и краевые задачи». Самара, 27–28 мая 2004. С. 161.
187. Нахушев А. М. К проблеме информационной безопасности в системах с фрактальной структурой и памятью // Материалы VI Международной научно-практической конференции «Информационная безопасность». Таганрог, 2004 г.

188. Нахушев А. М. К проблеме математического обеспечения информационной безопасности в системах с фрактальной структурой и памятью // Математика в Высшей школе. Ереван. 2004. № 4. С. 62–68.
189. Нахушев А. М. О некоторых системах вход-выход и уравнениях их состояния // Труды Международной научной конференции «Дифференциальные уравнения с частными производными и родственные проблемы анализа и информатики». Ташкент, 2004. С. 111–115.

2005

190. Нахушев А. М. О некоторых одномерных системах вход-выход и уравнениях их состояния // Труды XX Международной конференции «Физика экстремальных состояний вещества - 2005». Черноголовка, 2005.
191. Нахушев А. М. О некоторых одномерных системах вход-выход и уравнениях их состояния // Тезисы XX Международной конференции «Воздействие интенсивных потоков энергии на вещество». Эльбрус, 2005. С. 113.
192. Нахушев А. М. Селевая активность в сопоставлении с вариациями солнечной активности // Доклады АМАН. 2005. Т. 7, № 2. С. 35–100.
193. Нахушев А. М. Некоторые факты из теории краевых задач со смещением // Доклады АМАН. 2005. Т. 8, № 1. С. 50–77.
194. Нахушев А. М. К проблеме информационной безопасности в системах с фрактальной структурой и памятью // Информационное противодействие угрозам терроризма. 2005. № 3. С. 44–46.
195. Нахушев А. М., Бураев А. В. К проблеме математического моделирования селевой активности // Труды Всероссийской конференции по селям. Нальчик. ВГИ, 26–28 октября 2005 г.
196. Нахушев А. М. Некоторые факты из теории краевых задач со смещением. Нальчик: КБНЦ РАН. 2005. 63 с.

2006

197. Нахушев А. М. Об одной ударной задаче Франкля // Сборник трудов XX Международной конференции «Физика экстремальных состояний вещества - 2006». Черноголовка, 2006. С. 61–63.
198. Нахушев А. М. О современном состоянии краевых задач со смещением для основных типов уравнений в частных производных // Труды третьей Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование и краевые задачи». Самара, 2006. С. 170–173.
199. Нахушев А. М. О современном состоянии краевых задач со смещением для основных типов уравнений в частных производных // Труды Международной конференции «Тихонов и современная мате-

- матика: Функциональный анализ дифференциальные уравнения». Москва, 2006. С. 187–188.
200. Нахушев А. М. О задаче Дирихле для уравнений смешанного типа // Доклады АМАН. 2006. Т. 8, № 2. С. 32–42.
201. Нахушев А. М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. Москва: Наука. 2006. 287 с.
202. Нахушев А. М. Краевые задачи со смещением для основных типов уравнений в частных производных // Материалы III Международной конференции «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики». Нальчик, 2006. С. 206–207.

2007

203. Нахушев А. М. О качественных свойствах уравнения состояния одномерной системы «вход - выход» смешанного типа и его применение // Тезисы докладов XXII Международной конференции «Воздействие интенсивных потоков энергии на вещество». Эльбрус, 2007. С. 236–238.
204. Нахушев А. М. О качественных свойствах уравнения состояния одномерной системы «вход - выход» смешанного типа и его применение // Материалы докладов XXII Международной конференции «Воздействие интенсивных потоков энергии на вещество». Эльбрус, 2007. С. 236–238.
205. Нахушев А. М. О математических и информационных технологиях моделирования и управления региональным развитием // Доклады АМАН. 2007. Т. 9, № 1. С. 128–138.
206. Нахушев А. М. О математических и информационных технологиях моделирования и управления региональным развитием // Материалы второй Международной конференции «Моделирование устойчивого регионального развития». Нальчик, 2007.
207. Нахушев А. М. Вклад академика И. Н. Векуа в развитие теории уравнений смешанного типа // Доклады АМАН. 2007. Т. 9, № 2. С. 9–16.
208. Нахушев А. М. К проблеме математического моделирования региональных социально-экономических систем // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия математическая. № 2(6). 2007. С. 4–14.
209. Нахушев А. М. К теории краевых задач со смещением // Тезисы докладов международной конференции «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения». Новосибирск, 2007. С. 240–241.

2008

210. Нахушев А. М. К проблеме математического моделирования процессов переноса по самоподобному фрактальному множеству // Материалы XIII Международной конференции «Уравнения состояния вещества». Эльбрус, 2008. Черноголовка: ИПХФ РАН, 2008. С. 32–35.
211. Нахушев А. М. О базовых уравнениях математических моделей процессов переноса в системах с фрактальной структурой // Доклады АМАН. 2008. Т. 10, № 1. С. 85–92.
212. Нахушев А. М. О некоторых уравнениях математических моделей процессов переноса в системах с фрактальной организацией // Материалы Международного российско-азербайджанского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики» и VI Школы молодых ученых «Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики». Эльбрус, 2008. С. 120–125.
213. Нахушев А. М. К теории нагруженных уравнений // Доклады АМАН. 2008. Т. 10, № 2. С. 30–42.
214. Нахушев А. М. Общие сведения о нагруженных уравнениях // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия математическая. 2008, № 2(8). С. 4–18.
215. Нахушев А. М. О базовых уравнениях математических моделей процессов переноса в системах с фрактальной структурой // Труды Международной конференции «Дифференциальные уравнения и смежные проблемы». Т. II. Стерлитамак, 2008. С. 131–136.

2009

216. Нахушев А. М. О некоторых модельных уравнениях движения почвенной влаги // Доклады АМАН. 2009. Т. 11, № 1. С. 103–109.
217. Nakhushev A. M. On some synergetic input-output systems and their state equations // Доклады АМАН. 2009. Т. 11, № 2. С. 27–31.
218. Нахушев А. М. Задача Дарбу для нагруженного вырождающегося гиперболического уравнения второго порядка // Тезисы XIII Воронежской весенней математической школы «Современные методы теории краевых задач» (Понtryгинские чтения – XX). Воронеж, 3–9 мая 2009 г. С. 127–128.
219. Нахушев А. М. К теории нагруженных уравнений с частными производными // Материалы Международного российско-абхазского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики». Нальчик–Эльбрус, 17–22 мая 2009 г. С. 170–171.

220. Нахушев А. М. К теории нагруженных уравнений с частными производными // Труды Международной научной конференции «Современные проблемы вычислительной математики и математической физики». Москва, МГУ, 16–18 июня 2009 г. С. 221–222.
221. Нахушев А. М. To the theory of loaded partial equations // Труды международной конференции, посвященной юбилею Института математики и механики НАН Азербайджана. Май 2009.

2010

222. Nakhushev A. M. On some synergetic input-output systems and equations of their condition // XXVI International conference "Equations of state for matter", Russia, Kabardino-Balkariya, Elbrus, March 1–6, 2010. Pp. 42–44.
223. Нахушев А. М. Нагруженные уравнения математической экономики // Доклады АМАН. 2010. Т. 12, № 1. С. 91–97.
224. Нахушев А. М., Бостанов Р. А., Маршанкулов Д. Д. Об одном методе конструирования алгебраической формы производственной функции, основанном на аналоге формулы Маклорена в дробном исчислении // VII Всероссийская научная конференция с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи», Самара. 3–6 июня 2010 г. С. 193–196.
225. Нахушев А. М., Бостанов Р. А., Маршанкулов Д. Д. К теории производственных и целевых функций // Международный российско-болгарский симпозиум «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики». Нальчик. 2010. С. 180–182.
226. Нахушев А. М., Бостанов Р. А., Маршанкулов Д. Д. К теории производственных и целевых функций // Международная научная конференция «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования». Владикавказ, 19–24 июля 2010 г.
227. Нахушев А. М. Краевые задачи для нагруженных уравнений смешанного типа // Сборник научных работ «Неклассические уравнения математической физики». Новосибирск, 2010. С. 160–174.

2011

228. Нахушев А. М. Задача Дирихле для нагруженного уравнения смешанного типа в цилиндрической области // Доклады АМАН. 2011. Т. 13, № 1. С. 83–89.
229. Нахушев А. М., Нахушева В. А. Краевые и внутреннекраевые задачи для линейных нагруженных уравнений смешанного типа // Материалы второго Международного российско-казахского симпозиум «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики», Нальчик, 23–27 мая 2011 г. С. 125–127.

230. Нахушев А. М., Нахушева В. А. Краевые задачи для нагруженных уравнений смешанного типа // Тезисы докладов Международной конференции «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы». Москва, 29 мая – 4 июня 2011 г.
231. Нахушев А. М., Нахушева В. А. Краевые задачи и задача граничного управления для нагруженных уравнений смешанного типа // Материалы Всероссийской научной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения» с международным участием. Стерлитамак, 27–30 июня 2011 г.
232. Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их применение // Материалы Международной конференции «Комплексный анализ и его приложения в дифференциальных уравнениях и теории чисел». Белгород, 17–21 октября 2011 г. С. 85.

2012

233. Нахушев А. М. Об одном классе нагруженных уравнений в частных производных дробного порядка // Доклады АМАН. 2012. Т. 14, № 1. С. 51–57.
234. Нахушев А. М., Нахушева В. А. О некоторых математических моделях критических событий фрактальной структуры, происходящих в режиме с обострением // Доклады АМАН. 2012. Т. 14, № 2. С. 55–69.
235. Нахушев А. М. Об одном классе нагруженных уравнений в частных производных дробного порядка // Материалы второго Международного российско-узбекского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики». Нальчик, 23–27 мая 2012 г. С. 197–198.
236. Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их применение. Москва: Наука. 2012. 232 с.
237. Нахушев А. М. Об одном классе нагруженных уравнений в частных производных дробного порядка // Международная конференция «Обратные и некорректные задачи математической физики». Новосибирск, Россия, 5–12 августа 2012 г.
238. Нахушев А. М. Математические методы и модели в исторических исследованиях. Нальчик: Изд-во М. и В. Котляровых. 2012. 144 с.

2013

239. Nakhushev A. M., Nakhusheva V. A. On an algorithm for calculating the concentration distribution of absorbing molecules along the laser beam // Book of Abstracts on International conference “Physics of Extreme States of Matter”. 2013. Pp. 124–125.

240. Nakhushev A. M., Nakhusheva V. A. On an algorithm for calculating the concentration distribution of absorbing molecules along the laser beam // The paper to the compendium "Physics of Extreme States of Matter". 2013. Pp. 154–157.
241. Нахушев А. М., Нахушева В. А. Об одной задаче начально-граничного управления для дифференциального уравнения смешанного типа // Доклады АМАН. 2013. Т. 15, № 1. С. 9–17.
242. Нахушев А. М., Нахушева В. А. Об одном методе расчета концентрации поглощающих молекул по трассе лазерного излучения // Материалы Международной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения». Белгород, 2013. С. 156.
243. Nakhushev A. M., Nakhusheva V. A. On some classes of loaded equation and their applications // Тезисы Международной конференции «Актуальные проблемы математики и информатики». Баку. 2013. С. 84–85.
244. Nakhushev A. M., Nakhusheva V. A. Об одной задаче начально-граничного управления для дифференциального уравнения смешанного типа // Материалы IV Международной конференции «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики». Нальчик–Терскол, 2013. С. 194–197.
245. Nakhushev A. M., Nakhusheva V. A. On some classes of loaded equations and their applications // Caspian Journal of Applied Mathematics, Economics and Ecology. 2013. Vol. 1, no. 1. Pp. 82–88.

2014

246. Nakhushev A. M., Nakhusheva V. A. Some mathematical models of fractional Brownian motion // Book of Abstracts of XXIX International Conference on "Equations of State for Matter", Moscow–Chernogolovka–Nalchik, 2014. Pp. 37–38.
247. Nakhushev A. M., Nakhusheva V. A. Some mathematical models of fractional Brownian motion // Paper to the compendium "Physics of Extreme States of Matter". Moscow, 2014. Pp. 28–30.
248. Нахушев А. М., Нахушева В. А. Some generalizations of Bouguer-Lambert-Beer law, and algorithms for calculating the distribution of the concentration of the absorbing molecules on the track of the laser radiation // Reports of Adyghe (Circassian) International Academy of Sciences. 2014. Vol. 16, no. 1. Pp. 63–70.
249. Нахушев А. М. О нелокальных внутреннекраевых условиях, возникающих при дискретизации краевых задач для уравнений математической физики // Тезисы Международной научной конференции

«Современные проблемы вычислительной математики и математической физики». Москва, 2014.

250. Нахушев А. М. О внутреннекраевых условиях со смещением, возникающих при дискретизации краевых задач для уравнений в частных производных второго порядка // Доклады АМАН. 2014. Т. 16, № 2. С. 52–57.
251. Нахушев А. М. К теории краевых задач для нагруженных интегральных уравнений // Тезисы III Международного российско-казахского симпозиума «Уравнения смешанного типа, родственные проблемы анализа и информатики». 2014. С. 149–150.
252. Нахушев А. М. К теории краевых задач для нагруженных интегральных уравнений // Доклады АМАН. 2014. Т. 16, № 3. С. 30–34.

2016

253. Нахушев А. М. Разностный метод решения задачи Дирихле для уравнения эллиптического типа // Доклады АМАН. 2016. Т. 18, № 1. С. 27–28.

2019

254. Nakhushev A. M., Begehr H., Soldatov A. P. Honoring A. V. Bitsadze's service to science (on his 100th birthday) // Complex variables and elliptic equations. 2019. Vol. 64, no. 5. Pp. 721–735.