К.Б. САБИТОВ, С.Н. СИДОРОВ

ДЛЯ ВУЗОВ

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

НАУКА

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

СТЕРЛИТАМАКСКИЙ ФИЛИАЛ
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
БЮДЖЕТНОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«УФИМСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ НАУКИ И ТЕХНОЛОГИЙ»

К. Б. САБИТОВ, С. Н. СИДОРОВ

Вариационное исчисление и его приложения

МОСКВА НАУКА 2026

УДК 517.97
ББК 22.1
С 12

Р е ц е н з е н т ы:

Ломов И.С. доктор физ.-мат. наук, зав. кафедрой общей математики
факультета ВМиК (МГУ им. М.В. Ломоносова),
Агачев Ю.Р., кандидат физ.-мат. наук, доцент
(Казанский федеральный университет)

Сабитов К.Б., Сидоров С.Н.
С 12 Вариационное исчисление и его приложения: Учеб. пособие для вузов. М.: Наука, 2026. 148 с.

ISBN 978-5-02-041660-4

В учебном пособии изложены основы курса вариационного исчисления, основной задачей которого является отыскание наибольших и наименьших значений функционалов, имеющих применение при решении механических, физических и геометрических задач. Предназначено для студентов и аспирантов физических, математических, механико-математических факультетов, а также факультетов естественно-научных и технических дисциплин.

УДК 517.97
ББК 22.1

ISBN 978-5-02-041660-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 4
Список некоторых обозначений и сокращений 6
Латинский и греческий алфавиты 7
§ 1. Функционалы, основные понятия 8
§ 2. Основные задачи вариационного исчисления. Уравнение Эйлера 21
1. Классификация локальных экстремумов 21
2. Задача с закрепленными концами 22
3. Задача с одним закрепленным и другим свободным концом 31
4. Задача с обоими свободными концами 32
5. Задача с подвижной границей 34
6. Задача Больца 37
7. Инвариантность уравнения Эйлера 39
§ 3. Достаточные условия существования слабого локального экстремума 42
§ 4. Обобщение вариационной задачи на функционалы более общего вида 55
1. Функционалы, зависящие от производных высших порядков 56
2. Функционалы, зависящие от многих функций, т.е. от вектор-функции 58
3. Функционалы от функций многих переменных 61
§ 5. Условный экстремум 65
§ 6. Задача Лагранжа 72
§ 7. Необходимые и достаточные условия сильного локального экстремума 79
§ 8. Глобальный экстремум для квадратичных функционалов 85
§ 9. Прямые методы вариационного исчисления 89
§ 10. Параметрическая форма вариационной задачи 96
§ 11. Разрывные вариационные задачи 100
1. Разрывные задачи первого рода 101
2. Разрывные задачи второго рода 105
§ 12. Принцип Гамильтона–Остроградского или принцип наименьшего действия 108
1. Вывод уравнений движения механической системы из материальных точек 108
2. Вывод уравнения колебаний струны 110
3. Вывод уравнения колебаний мембраны 111
4. Вывод уравнения колебаний балки 112
5. Вывод уравнения колебаний пластины 113
§ 13. Оптимальное управление. Принцип максимума Понтрягина 115
1. Постановка задачи оптимального управления 115
2. Принцип максимума Понтрягина 117
3. Принцип максимума Понтрягина и вариационное исчисление 122
§ 14. Решение прикладных задач 123
Задачи для самостоятельной работы 136
Список литературы 146

Предисловие

В настоящей книге изложены основы курса вариационного исчисления, и она написана на основе курса лекций первого автора профессора Сабитова К.Б., прочитанных как спецкурс студентам и аспирантам физико-математического факультета Стерлитамакского государственного педагогического института, затем Стерлитамакского филиала БашГУ в течение многих лет в пределах одного семестра. Второй автор к.ф.-м.н. Сидоров С.Н. систематизировал эти лекции, подобрал задачи для самостоятельной работы студентов, осуществил компьютерный набор и верстку. При подготовке расширенного варианта курса лекций к изданию в печати использованы основополагающие курсы вариационного исчисления:

1. Лаврентьев М.А., Люстерник Л.А. Курс вариационного исчисления. М.: Гостехиздат, 1938. 192 с.

2. Ахиезер Н.И. Лекции по вариационному исчислению. М.: Гостехиздат, 1955. 248 с.

3. Блисс Г.А. Лекции по вариационному исчислению. М.: ИЛ, 1950. 348 с.

и другие, которые приведены в списке литературы.

Основной задачей вариационного исчисления является отыскание наибольших и наименьших значений функционалов, выражаемых определенными интегралами от функции и ее частных производных. Такая задача аналогична задаче курса дифференциального исчисления об отыскании наибольших и наименьших значений функции. Как мы знаем, такая задача решается путем разыскания точек экстремума функции на основании производной. Аналогичным образом рассматриваются задачи и для функционалов. На заре появления теории вариационного исчисления появился целый ряд геометрических, механических и физических задач на отыскание экстремумов функционалов.

Исторически первой задачей, возбудившей к себе общий интерес у математиков, является задача о брахистохроне, поставленная Иоганном Бернулли в 1696 г.: среди всех кривых, лежащих на вертикальной плоскости и соединяющих две данные точки A и B, найти ту, по которой тяжелая точка, двигаясь из точки A вниз под влиянием силы тяжести, попадает в точку B за кратчайшее время.

Эта задача аналитически родственна физической задаче: в прозрачной среде с переменной оптической плоскостью заданы две точки A и B; требуется определить траекторию луча света, идущего от точки A к точке B. Эта задача на основании принципа Ферма сводится к задаче отыскания экстремума функционала: из всех кривых, соединяющих точки A и B, траектория луча света есть линия, по которой свет приходит из A в B в кратчайшее время.

Основы теории вариационного исчисления разработаны трудами Л. Эйлера, Ж. Лагранжа, К. Якоби, А. Лежандра, К. Вейерштрасса и других математиков.

Данное учебное пособие предназначено для студентов и аспирантов физических, математических, механико-математических факультетов, а также факультетов естественно-научных и технических дисциплин.

Данный курс нужен и очень полезен в плане подготовки специалистов по математике, информатике и физике высокой квалификации.

Авторы выражают благодарность рецензентам профессору Ломову И.С. и доценту Агачеву Ю.Р. за внимательное прочтение рукописи, указанные замечания и пожелания по улучшению качества изложения материала, а также профессору Ляхову Л.Н. и его ученикам кандидатам физико-математических наук Рощупкину С.А., Булатову Ю.Н. за оказание финансовой помощи при издании данной книги.

Авторы будут благодарны всем, кто пришлет свои замечания и пожелания на электронные адреса: sabitov_fmf@mail.ru, sts-id@mail.ru.

Список некоторых обозначений и сокращений

$\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел

$\mathbb{R}$ – множество действительных чисел

$\mathbb{R}^n$ – арифметическое евклидово пространство размерности n, $n \in \mathbb{N}$;

$\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2_{xy}$ – плоскость изменения переменных x и y

$k = \overline{1, n}$ – число k принимает последовательно все натуральные значения от 1 вплоть до n

$x \in X$ – элемент x принадлежит множеству X

$x \notin X$ – элемент x не принадлежит множеству X

$Y \subset X$ – множество Y является собственным подмножеством множества X

$Y \subseteq X$ – множество $Y \subset X$ или $X = Y$

$\max\limits_D f(x)$ – максимальное (наибольшее) значение функции $f(x)$ по множеству D

$\min\limits_D f(x)$ – минимальное (наименьшее) значение $f(x)$ по множеству D

$\dfrac{df(x)}{dx}$ или $f'(x)$, $\dfrac{d^k f(x)}{dx^k}$ или $f^{(k)}(x)$ – производная функции $f(x)$ k-го порядка

$\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}$, $f_x(x, y)$ – частная производная функции $f(x, y)$ по переменной x

$C(D)$ – множество всех непрерывных функций, заданных на множестве D, $C^k(D)$ – множество k раз непрерывно дифференцируемых функций, заданных на множестве D, причем $C^0(D) \equiv C(D)$

$Q^1(D)$ – множество кусочно-гладких функций на множестве D

$\bar{D}$ – замыкание множества D

∂D – граница множества D

д.у. – дифференциальное уравнение

т.е. – то есть

■ – конец доказательства леммы или теоремы, решения примера

Латинский алфавит

A, a	– а	N, n	– эн
B, b	– бэ	O, o	– о
C, c	– цэ	P, p	– пэ
D, d	– дэ	Q, q	– ку
E, e	– е/э	R, r	– эр
F, f	– эф	S, s	– эс
G, g	– жэ	T, t	– тэ
H, h	– ха/аш	U, u	– у
I, i	– и	V, v	– вэ
J, j	– йот/жи	W, w	– дубль-вэ
K, k	– ка	X, x	– икс
L, l	– эль	Y, y	– игрек
M, m	– эм	Z, z	– зед

Греческий алфавит

Α, α	– альфа	Ν, ν	– ню
Β, β	– бета	Ξ, ξ	– кси
Γ, γ	– гамма	Ο, ο	– омикрон
Δ, δ	– дельта	Π, π	– πι пи
Ε, ε	– эпсилон	Ρ, ρ	– ро
Ζ, ζ	– дзета	Σ, σ	– сигма
Η, η	– эта	Τ, τ	– тау
Θ, θ	– тета	Υ, υ	– ипсилон
Ι, ι	– йота	Φ, φ	– фи
Κ, κ	– каппа	Χ, χ	– хи
Λ, λ	– лямбда	Ψ, ψ	– пси
Μ, μ	– мю	Ω, ω	– омега

§ 1. Функционалы, основные понятия

Пусть каждой функции $y(x)$ из некоторого множества M линейного нормированного пространства E с нормой $\|y\|$ элементов $y \in E$ поставлено в соответствие действительное число $J\left(y(x)\right)$:

$$J : y(x) \to J\left(y(x)\right) \in \mathbb{R}.$$

Тогда говорят задан функционал J на множестве M, множество $M \subset E$ называется областью определения.

Приведем примеры.

1. Пусть кривая $y = y(x)$, $a \le x \le b$, на плоскости $\mathbb{R}^2_{xy}$ соединяет две точки $A = \left(a, y(a)\right)$ и $B = \left(b, y(b)\right)$. Ее длина определяется по формуле

$$J\left(y(x)\right) = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx. \tag{1}$$

Данный интеграл является функционалом, так как каждой кривой $y = y(x)$ ставит в соответствие число, равное длине этой кривой.

2. Площадь под кривой $y = y(x) \ge 0$, $a \le x \le b$, находится по формуле

$$J\left(y(x)\right) = \int_a^b y(x)\, dx.$$

Этот интеграл также задает функционал.

Как известно, одной из основных задач дифференциального исчисления является нахождение локальных и глобальных экстремумов функций от одной или нескольких переменных. Основными задачами вариационного исчисления также являются нахождение локальных и глобальных значений функционалов.

Рассмотрим примеры на отыскание экстремумов функционалов.

Пример 1. Среди всех кривых $y = y(x)$, $a \le x \le b$, с концами в точках A и B найти ту, для которой функционал (1) принимает наименьшее значение.

Ясно, что искомой кривой, дающей минимум функционалу (1), является отрезок, соединяющий точки A и B, т.е. линейная функция

$$y(x) = y(a) + \frac{y(b) - y(a)}{b - a}(x - a).$$

Пример 2. Исторически первой задачей, вызвавшей к себе общий интерес среди математиков, была задача о брахистохроне, поставленная швейцарским математиком Иоганном Бернулли в 1696 г.: в вертикальной плоскости заданы две точки A и B, не лежащие на одной вертикали; требуется среди всех кривых, соединяющих данные точки, найти ту, по которой материальная точка, двигаясь из точки A под действием силы тяжести без трения с нулевой начальной скоростью, попадает в точку B в кратчайшее время. Эта задача знаменита тем, что она стала как источник идей для создания новой области математики – вариационного исчисления.

Пусть на вертикальной плоскости заданы точки A и B. Примем за ось Ox горизонтальную прямую, а ось Oy направим вертикально вниз (рис. 1).

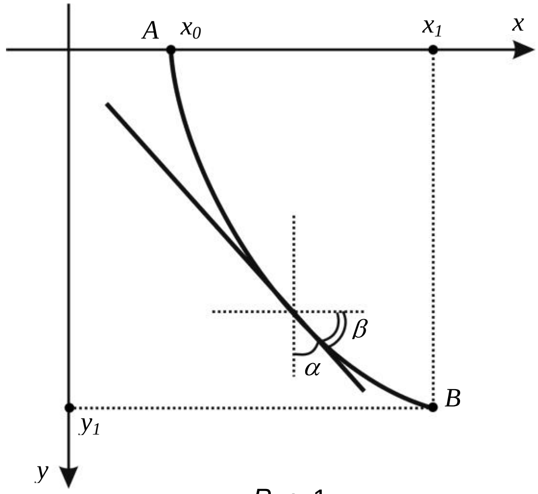

Рис. 1

Соединим точки $A(x_0, 0)$ и $B(x_1, y_1)$ произвольной гладкой дугой

$$y = y(x), \ x_0 \le x \le x_1.$$

Из принципа сохранения энергии следует, что скорость движения материальной точки зависит только от потери потенциальной энергии и не зависит от вида траектории, по которой скатывается шарик. Тогда, поскольку начальная скорость равна нулю, то [16, гл. 1, § 3] скорость в точке с ординатой y равна $\upsilon=\sqrt{2g\,y}$, где g – ускорение силы тяжести. С другой стороны, если $y=y(x)$ есть уравнение кривой, по которой движется точка из A в B, то

$$\upsilon(t)=\frac{ds}{dt}=\frac{\sqrt{1+y'^2(x)}\;dx}{dt},$$

здесь элемент ds длины дуги кривой $y=y(x)$ вычисляется по известной формуле из математического анализа (см. [17, гл. 1, § 12, теорема 3])

$$ds=\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx\,.$$

Тогда имеем

$$dt=\frac{\sqrt{1+y'^2(x)}\;dx}{\sqrt{2g\,y(x)}}\,.$$

Интегрируя данное уравнение, найдем время t для покрытия пути от A до B по кривой $y=y(x)$:

$$t\big(y(x)\big)=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{\sqrt{2g\,y(x)}}\,dx\,. \tag{2}$$

Ясно, что время t, заданное равенством (2), зависит от функции $y(x)$, и оно представляет функционал. Требуется найти функцию $y(x)$, $x_0\le x\le x_1$, для которой функционал (2) принимает наименьшее значение, т.е. требуется найти экстремум функционала (2) на множестве гладких функций $y(x)$, заданных на сегменте $[x_0,x_1]$. Такая задача является типичной задачей вариационного исчисления.

Пример 3. Задача о брахистохроне аналитически родственна другой физической задаче: в прозрачной среде с переменной оптической плотностью даны две точки A и B; требуется найти траекторию луча света, идущего от точки A к точке B. Эта задача также сводится к задаче на отыскание экстремума функционала на основании принципа Ферма: из всех кривых, соединяющих точки A

и B, траектория луча света есть линия, по которой свет проходит из A в B в кратчайшее время.

Рассмотрим плоский случай, т.е. принимаем за плоскость распространения света плоскость $\mathbb{R}^2_{xy}$, пусть заданы две точки $A=(x_0, y_0)$ и $B=(x_1, y_1)$, а $y=y(x)$, $x_0 \le x \le x_1$, – кривая, соединяющая эти точки. Обозначим через $\upsilon(x, y)$ скорость распространения света на этой плоскости. Тогда вдоль кривой $y=y(x)$

$$dt = \frac{ds}{\upsilon} = \frac{\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx}{\upsilon\big(x, y(x)\big)}.$$

Интегрируя данное равенство по промежутку $[x_0, x_1]$, получим

$$t\big(y(x)\big) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx}{\upsilon\big(x, y(x)\big)}. \qquad (3)$$

Согласно принципу Ферма задача определения траектории луча света сводится к отысканию кривой (линии), для которой функционал (3) принимает наименьшее значение.

Пример 4. Также отметим древнейшую задачу, над которой размышляли еще греческие философы, в том числе знаменитый Аристотель: среди плоских гладких замкнутых кривых заданной длины найти ту, которая ограничивает наибольшую площадь. Им было известно, что такой кривой является окружность, хотя не было обоснования этого.

Поскольку функционал является отображением множества функций во множество действительных чисел $\mathbb{R}$, то многие понятия для функционалов вводятся по аналогии с понятиями функций одной или нескольких переменных.

Предварительно приведем примеры основных линейных нормированных пространств, которые будем рассматривать в дальнейшем.

1. Пространство $C[a,b]$ – это множество всех функций, непрерывных на сегменте $[a,b]$ с нормой

$$\| y(x) \|_C = \max_{a \le x \le b} |y(x)|.$$

Сходимость по норме этого пространства – это есть равномерная сходимость последовательности $y_n(x) \rightrightarrows y(x)$ на отрезке $[a,b]$.

2. Пространство $C^k[a,b]$, $k \in \mathbb{N}$, – это пространство всех непрерывно дифференцируемых до k-го порядка включительно на $[a,b]$ функций с нормой

$$\|y(x)\|_{C^k} = \max_{a \le x \le b} |y(x)| + \max_{a \le x \le b} |y'(x)| + \ldots + \max_{a \le x \le b} |y^{(k)}(x)|.$$

Сходимость последовательности $y_n(x) \to y(x)$ по норме C^k, т.е.

$$\lim_n \|y_n(x) - y(x)\|_{C^k} = 0,$$

равносильна равномерной сходимости последовательностей

$$y_n(x) \rightrightarrows y(x),\ y_n'(x) \rightrightarrows y'(x),\ \ldots,\ y_n^{(k)}(x) \rightrightarrows y^{(k)}(x) \text{ на } [a,b].$$

Определение 1. *Функционал $J(y)$ называется непрерывным в точке $y_0 \in M$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $y \in M$, удовлетворяющих условию $\|y - y_0\| < \delta$, выполняется условие*

$$|J(y) - J(y_0)| < \varepsilon.$$

Определение 2. *Функционал $J(y)$ называется линейным на M, если для любых y, y_1, y_2 из M и любого действительного числа α выполняются следующие равенства:*

1°. $J(y_1 + y_2) = J(y_1) + J(y_2)$;

2°. $J(\alpha y) = \alpha J(y)$.

Рассмотрим пример функционала

$$J(y) = \int_a^b f(x) y(x)\, dx \tag{4}$$

на множестве $C[a,b]$, где $f(x)$ – заданная непрерывная на $[a,b]$ функция.

Нетрудно видеть, что этот функционал линеен на $C[a,b]$. Покажем, что он непрерывен на этом пространстве. По условию функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, тогда она там ограничена:

$\left| f(x) \right| \le M = \text{const} > 0$. Пусть $y(x)$, $y_0(x) \in C[a,b]$ и рассмотрим разность

$$\left| J(y) - J(y_0) \right| \le \int_a^b \left| f(x) \right| \left| y(x) - y_0(x) \right| dx \le$$

$$\le M \int_a^b \max_{a \le x \le b} \left| y(x) - y_0(x) \right| dx = M \left\| y - y_0 \right\|_C (b-a).$$

Для любого заданного $\varepsilon > 0$ примем $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M(b-a)}$. Тогда при $\left\| y - y_0 \right\|_C < \delta$ имеем

$$\left| J(y) - J(y_0) \right| \le M(b-a) \left\| y - y_0 \right\|_C < \varepsilon.$$

Это означает, что функционал (4) непрерывен на $C[a,b]$.

Рассмотрим еще один из основных примеров – функционал

$$J(y) = \int_a^b F\left(x, y(x), y'(x)\right) dx, \tag{5}$$

где функция $F\left(x, y, z\right)$ непрерывна по совокупности переменных при $a \le x \le b$, $-\infty < y, z < +\infty$.

Данный функционал непрерывен в пространстве $C^1[a,b]$, однако в пространстве $C[a,b]$ он может не быть непрерывным. Примером такого функционала является интеграл (1) по вычислению длины кривой $y(x)$.

На основании понятия линейного функционала вводится понятие первого дифференциала (первой вариации) функционала аналогично определению дифференцируемости функции: *функция $f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0, если ее приращение можно представить в виде*

$$\Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0) = A \cdot h + \alpha(h) \cdot h = \varphi(h) + o(h),$$

где $h = \Delta x$, $\alpha(h)$ – бесконечно малая при $h \to 0$, $\varphi(h)$ – линейная функция, которая называется дифференциалом функции $f(x)$ в точке x_0.

Определение 3. *Функционал J называется дифференцируемым в точке $y_0 \in M$, если его приращение представимо в виде*

$$\Delta J = J(y_0 + h) - J(y_0) = \varphi(h) + o(h), \qquad (6)$$

где $h \in M$, $\varphi(h)$ – линейный функционал, который и называется первой вариацией или первым дифференциалом функционала $J(y)$ в точке y_0 и обозначается так:

$$\varphi(h) = \delta J(y_0, h) \text{ или } \varphi(h) = \delta J_{y_0}(h).$$

Отметим, что дифференциал $\delta J(y_0, h)$ определяется единственным образом.

Если функционал $J(y)$ дифференцируем в точке y_0, то его первый дифференциал можно вычислить по формуле

$$\varphi(h) = \frac{d}{dt} J(y_0 + th)\Big|_{t=0}. \qquad (7)$$

Докажем это. Введем функцию

$$\psi(t) = J(y_0 + th),$$

где элемент $h \in M$ и фиксирован. Тогда на основании равенства (6) имеем

$$\psi(t) - \psi(0) = \psi'(0)t + o(t) = \varphi(h)t + o(t),$$

т.е. $\psi'(0) = \varphi(h)$.

Далее вычислим первую вариацию функционала (5) при условии, что функция $F\left(x, y, z\right)$ непрерывно дифференцируема по переменным $a \le x \le b$, $-\infty < y, z < +\infty$. Представим его в виде

$$J(y_0 + th) = \int_a^b F\left(x, y_0 + th, y_0' + th'\right) dx.$$

Тогда на основании формулы (7) и теоремы дифференцирования сложной функции имеем

$$\delta J(y_0, h) = \frac{d}{dt} J(y_0 + ht)\Big|_{t=0} =$$

$$= \int_a^b \left(\frac{\partial F\left(x, y_0(x), y_0'(x)\right)}{\partial y} h + \frac{\partial F\left(x, y_0(x), y_0'(x)\right)}{\partial y'} h' \right) dx. \qquad (8)$$

Определение 4. *Точка* $y_0 \in M$ *называется точкой локального максимума (минимума) функционала* $J(y)$*, если существует окрестность* $U(y_0)$ *точки* y_0*, что для всех* $y \in U(y_0)$ *выполняется неравенство*

$$J(y_0) \geq J(y) \quad \left(J(y_0) \leq J(y)\right). \tag{9}$$

Точка y_0 *называется точкой локального экстремума функционала* $J(y)$*, если она является точкой локального максимума или минимума.*

Определение 5. *Если неравенство* (9) *имеет место для всех* $y(x) \in M$ *, то говорят, что функция* $y_0(x)$ *функционалу* $J(y)$ *доставляет абсолютный (глобальный) максимум (минимум). Абсолютные максимум и минимум объединяются единым термином абсолютного (глобального) экстремума.*

Теорема 1 (необходимое условие локального экстремума). *Если функционал* $J(y)$ *дифференцируем в точке* y_0 *и имеет в этой точке локальный экстремум, то*

$$\delta J(y_0, h) = 0 \text{ для любого } h \in M .$$

Доказательство. Пусть для определенности точка y_0 – точка локального минимума функционала $J(y)$, и пусть первая вариация $\delta J(y_0, h) = \varphi(h) \neq 0$. Тогда существует элемент h_0 такой, что $\varphi(h_0) \neq 0$. При малых $|t|$ имеем

$$0 \leq \Delta J = J(y_0 + th_0) - J(y_0) = t\left[\varphi(h_0) + o(1)\right].$$

Знак последнего выражения при малых $t \neq 0$ совпадает со знаком $t\varphi(h_0)$. Следовательно, t можно выбрать так, чтобы $t\varphi(h_0)$ было отрицательным. Полученное противоречие и доказывает теорему. ■

Аналогично теории функций можно ввести понятие стационарной точки функционала $J(y)$.

Определение 6. *Точка* $y_0 \in M$ *называется стационарной точкой функционала* $J(y)$*, если вариация* $\delta J(y_0, h)$ *определена в этой точке и* $\delta J(y_0, h) = 0$ *при любом* $h \in M$ *.*

Найдем выражение главной части приращения функционала (5) при переходе от кривой γ: $y = y(x)$, $a \le x \le b$, к бесконечно близкой кривой $\tilde{\gamma}$: $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$, $\tilde{a} \le x \le \tilde{b}$. Обозначим приращения: $\tilde{a} - a = \delta a$, $\tilde{b} - b = \delta b$, $\tilde{y}(a) - y(a) = \delta y(a)$, $\tilde{y}(b) - y(b) = \delta y(b)$. Найдем приращение

$$\Delta J = J(\tilde{\gamma}) - J(\gamma) = \int_{a+\delta a}^{b+\delta b} F\left(x, \tilde{y}, \tilde{y}'\right) dx - \int_a^b F\left(x, y, y'\right) dx =$$

$$= -\int_a^{a+\delta a} F\left(x, \tilde{y}, \tilde{y}'\right) dx + \int_b^{b+\delta b} F\left(x, \tilde{y}, \tilde{y}'\right) dx +$$

$$+\int_a^b \left[F\left(x, \tilde{y}, \tilde{y}'\right) - F\left(x, y, y'\right)\right] dx. \qquad (10)$$

Пусть $\tilde{y}(x) - y(x) = \delta y$, $\tilde{y}'(x) - y'(x) = \delta y'$ и будем пренебрегать величинами высшего порядка малости с приращениями δa, δb, δy, $\delta y'$ сравнительно с бесконечно малым расстоянием $r(\gamma, \tilde{\gamma})$ между кривыми γ и $\tilde{\gamma}$. Тогда имеем

$$\int_a^{a+\delta a} F\left(x, \tilde{y}, \tilde{y}'\right) dx \approx \delta a \left[F\left(x, \tilde{y}, \tilde{y}'\right)\right]_{x=a} \approx \left[F\left(x, y, y'\right)\right]_{x=a} \delta a,$$

$$\int_b^{b+\delta b} F\left(x, \tilde{y}, \tilde{y}'\right) dx \approx \left[F\left(x, y, y'\right)\right]_{x=b} \delta b,$$

$$\int_a^b \left[F\left(x, \tilde{y}, \tilde{y}'\right) - F\left(x, y, y'\right)\right] dx =$$

$$= \int_a^b \left[F_y\left(x, y + \theta_1 \delta y, y' + \theta_2 \delta y'\right) \delta y + F_{y'}\left(x, y + \theta_1 \delta y, y' + \theta_2 \delta y'\right) \delta y'\right] dx \approx$$

$$\approx \int_a^b \left[F_y\left(x, y, y'\right) \delta y + F_{y'}\left(x, y, y'\right) \delta y'\right] dx =$$

$$= \left[F_{y'} \delta y\right]_{x=b} - \left[F_{y'} \delta y\right]_{x=a} + \int_a^b \left[F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}\right] \delta y \, dx.$$

Подставляя эти значения в равенство (10), получим

$$\Delta J = -\left[F\left(x,y,y'\right)\right]_{x=a}\delta a - \left[F_{y'}\left(x,y,y'\right)\delta y\right]_{x=a} +$$

$$+\left[F\left(x,y,y'\right)\right]_{x=b}\delta b - \left[F_{y'}\left(x,y,y'\right)\delta y\right]_{x=b} -$$

$$-\int_a^b\left[F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right]\delta y\,dx + \varepsilon\, r(\gamma,\tilde{\gamma}), \qquad (11)$$

где $\varepsilon \to 0$ при $r(\gamma,\tilde{\gamma}) \to 0$.

Далее выразим $\left[\delta y\right]_{x=a}$ и $\left[\delta y\right]_{x=b}$ через приращения концов кривой γ (см. рис. 2). Для левого конца: $\left[\delta y\right]_{x=a} = AC$, $\delta y(a) = EB$, $BD \approx \left[\tilde{y}'\right]_{x=a}\delta a \approx \left[y'\right]_{x=a}\delta a$. Поскольку $AC = EB - DB$, то

$$\left[\delta y\right]_{x=a} = \delta y(a) - \left[y'\right]_{x=a}\delta a. \qquad (12)$$

Аналогично можно получить для правого конца

$$\left[\delta y\right]_{x=b} = \delta y(b) - \left[y'\right]_{x=b}\delta b. \qquad (13)$$

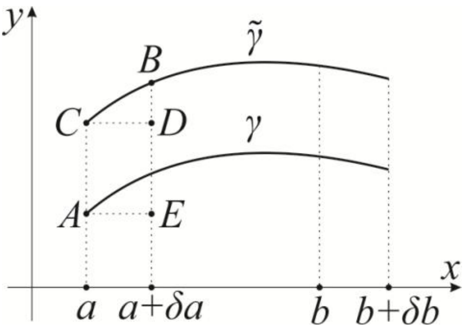

Рис. 2

На основании равенств (12) и (13) равенство (11) примет вид

$$\Delta J = \int_a^b\left[F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right]\delta y\,dx -$$

$$-\left[F\left(x,y,y'\right) - y'F_{y'}\left(x,y,y'\right)\right]_{x=a}\delta a - \left[F_{y'}\left(x,y,y'\right)\right]_{x=a}\delta y(a) +$$

$$+\left[F\left(x,y,y'\right) - y'F_{y'}\left(x,y,y'\right)\right]_{x=b}\delta b + \left[F_{y'}\left(x,y,y'\right)\right]_{x=b}\delta y(b) +$$

$$+\varepsilon\, r(\gamma,\tilde{\gamma}), \qquad (14)$$

где сумму первых пяти членов в правой части равенства (14) называют вариацией функционала (5) при переходе от кривой γ к близкой кривой $\tilde{\gamma}$.

При нахождении экстремумов функционалов в конкретных функциональных пространствах играет важную роль следующая основная лемма вариационного исчисления.

Лемма 1 (основная лемма вариационного исчисления). *Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и для любой непрерывной на $[a,b]$ функции $h(x)$ выполняется равенство*

$$\int_a^b f(x)h(x)\,dx = 0, \tag{15}$$

то $f(x) \equiv 0$.

Доказательство. Допустим, что $f(x) \not\equiv 0$, тогда существует точка $x_0 \in (a,b)$ такая, что $f(x_0) \neq 0$. Для определенности будем считать $f(x_0) > 0$. В силу непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 существует окрестность $I_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a,b)$, в которой $f(x) > 0$. Пусть $h(x)$ непрерывная и неотрицательная на $[a,b]$ функция, причем $h(x) > 0$ на I_δ и $h(x) = 0$ вне I_δ. В качестве такой функции $h(x)$ можно принять функцию

$$h(x) = \begin{cases} (x - x_0 - \delta)(x_0 + \delta - x), & x \in I_\delta, \\ 0, & x \notin I_\delta. \end{cases}$$

Тогда имеем

$$\int_a^b f(x)h(x)\,dx = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)h(x)\,dx > 0,$$

что противоречит условию (15). Следовательно, $f(x) \equiv 0$ на $[a,b]$. ■

Замечание. Доказанная лемма остается справедливой, если условие (15) выполнено для более узкого класса функций $h(x)$, например из $C^k[a,b]$, удовлетворяющих условиям

$$h^{(i)}(a) = h^{(i)}(b) = 0, \quad i = \overline{0, k-1}.$$

В этом случае за $h(x)$ можно принять

$$h(x)=\begin{cases}\left[(x-x_0-\delta)(x_0+\delta-x)\right]^{2k}, & x\in I_\delta,\\ 0, & x\notin I_\delta.\end{cases}$$

Аналогичная лемма имеет место для функции от двух и более переменных, при этом интеграл берется по некоторой замкнутой области пространства $\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$.

Также представляют интерес следующие леммы.

Лемма 2. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на* $[a,b]$ *и для всякой функции* $h(x)\in C^1[a,b]$ *выполняется равенство*

$$\int_a^b f(x)h'(x)\,dx=0,$$

то $f(x)\equiv C=\text{const}$ *на* $[a,b]$.

Доказательство. Обозначим

$$\alpha=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Отсюда получим

$$\int_a^b\left[f(x)-\alpha\right]dx=0. \tag{16}$$

За $h(x)$ примем функцию

$$h(x)=\int_a^x\left[f(t)-\alpha\right]dt,$$

которая принадлежит $C^1[a,b]$, и в силу условия леммы

$$\int_a^b f(x)\left[f(x)-\alpha\right]dx=0. \tag{17}$$

Умножая обе части равенства (16) на α и вычитая из равенства (17), получим

$$\int_a^b\left[f(x)-\alpha\right]^2dx=0.$$

Отсюда уже следует $f(x)\equiv\alpha$. ■

Лемма 3. *Если функции* $f(x)$, $g(x) \in C[a,b]$ *и для всякой функции* $h(x) \in C^1[a,b]$, $h(b) = 0$, *имеет место равенство*

$$\int_a^b \left[f(x)h(x) + g(x)h'(x) \right] dx = 0, \qquad (18)$$

то $g'(x) \equiv f(x)$.

Доказательство. Пусть

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

и интегрируем по частям интеграл

$$\int_a^b f(x)h(x)\,dx = h(x)F(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)h'(x)\,dx = -\int_a^b F(x)h'(x)\,dx.$$

С учетом этого равенство (18) примет вид

$$\int_a^b \left[g(x) - F(x) \right] h'(x)\,dx = 0.$$

Отсюда в силу леммы 2 $g(x) = F(x) + C$, т.е. $g'(x) \equiv f(x)$. ■

Лемма 4. *Пусть в выражении*

$$\alpha d + \varepsilon_\alpha$$

d *– постоянно,* α *произвольным образом стремится к нулю,* ε_α *стремится к нулю вместе с* α *так, что* $\dfrac{\varepsilon_\alpha}{\alpha} \to 0$. *Тогда, если* $\alpha d + \varepsilon_\alpha \geq 0$ *или* $\alpha d + \varepsilon_\alpha \leq 0$, *то* $d = 0$.

Доказательство. Пусть $d \neq 0$ и для определенности $d > 0$. Тогда, поскольку $\dfrac{\varepsilon_\alpha}{\alpha} \to 0$, то сумма $d + \dfrac{\varepsilon_\alpha}{\alpha} > 0$ для любых достаточно малых α. В силу этого имеем

$$\alpha d + \varepsilon_\alpha = \alpha\left(d + \frac{\varepsilon_\alpha}{\alpha} \right) > 0 \text{ при } \alpha > 0,$$

$$\alpha d + \varepsilon_\alpha = \alpha\left(d + \frac{\varepsilon_\alpha}{\alpha} \right) < 0 \text{ при } \alpha < 0,$$

что противоречит условию леммы. Значит, $d = 0$. ■

§ 2. Основные задачи вариационного исчисления. Уравнение Эйлера

1. Классификация локальных экстремумов

В определении 4 § 1 используется понятие окрестности $U(y_0)$ точки y_0 и для всех $y \in U(y_0)$. Поясним это на конкретных пространствах $C[a,b]$ и $C^k[a,b]$, $k \geq 1$. Под ε-окрестностью функции $y_0(x)$ из $C[a,b]$ понимается множество всех функций $y(x) \in C[a,b]$, удовлетворяющих неравенству

$$\| y(x) - y_0(x) \|_C < \varepsilon . \tag{1}$$

Геометрически это означает, что ε-окрестность кривой $y_0(x)$ состоит из всех кривых $y(x)$, расположенных в полосе ширины 2ε вокруг $y_0(x)$. В этом случае говорят об ε-близости нулевого порядка.

Под ε-окрестностью функции $y_0(x) \in C^k[a,b]$ понимается множество всех функций $y(x) \in C^k[a,b]$, удовлетворяющих неравенству

$$\max_{0 \leq j \leq k} \max_{a \leq x \leq b} \left| y^{(i)}(x) - y_0^{(i)}(x) \right| < \varepsilon \tag{2}$$

или

$$\left\| y(x) - y_0(x) \right\|_{C^k} < \varepsilon ,$$

из которого следует первое неравенство. Во втором случае говорят об ε-близости k-го порядка.

При рассмотрении функционала

$$J(y) = \int_a^b F\left(x, y(x), y'(x)\right) dx$$

особую роль играет пространство $C^1[a,b]$, которое при непрерывности функции F относительно y и y' обеспечивает непрерывность функционала $J(y)$.

В зависимости от рассмотрения неравенств (1) и (2) определяют два понятия локального экстремума функционала $J(y)$.

Определения. 1. *Говорят, что функционал* $J(y)$ *достигает на кривой* $y_0(x)$ *сильного локального максимума (минимума), если для всех функций* $y(x)\in C^1[a,b]$, *удовлетворяющих неравенству* (1), *имеем*

$$J(y)\le J(y_0)\quad \big(J(y)\ge J(y_0)\big). \tag{3}$$

2. *Если последнее неравенство имеет место для всех* $y(x)$, *удовлетворяющих условию* (2) *при* $k=1$, *то говорят, что функционал* $J(y)$ *на кривой* $y_0(x)$ *достигает слабого локального максимума (минимума).*

3. *Слабый локальный максимум (минимум) называется строгим, если в* (3) *равенство достигается только при* $y(x)=y_0(x)$ *на* $[a,b]$.

2. Задача с закрепленными концами

В этом пункте рассмотрим задачу об отыскании слабого локального экстремума функционала

$$J(y)=\int_a^b F\big(x,y(x),y'(x)\big)dx \tag{4}$$

в пространстве функций $C^2[a,b]$ при граничных условиях

$$y(a)=y_a\,,\quad y(b)=y_b\,, \tag{5}$$

где функция $F(x,y,y')\in C^2(\Pi)$,

$\Pi=\big\{(x,y,y')\,|\,a\le x\le b,-\infty<y,y'<+\infty\big\}$, y_a, y_b – заданные действительные числа.

Итак, будем искать стационарные точки (экстремумы) функционала (4) при указанных выше условиях.

Функции $y(x)$ дадим приращение $h(x)$, т.е. рассмотрим функционал $J\big(y(x)+h(x)\big)$. Допустимые приращения $h(x)$ должны удовлетворять условиям:

$$h(x)\in C^2[a,b] \text{ и } h(a)=0\,,\ h(b)=0\,. \tag{6}$$

Последние равенства, равные нулю, следуют из того, что

$$y(a)=y_a\,,\ \ y(a)+h(a)=y_a\,,$$

$$y(b)=y_b\,,\ \ y(b)+h(b)=y_b\,.$$

Первая вариация функционала (4) задана формулой (8) § 1. Здесь преобразуем интеграл от второго слагаемого путем интегрирования по частям

$$\int_a^b F_{y'}h'\,dx = F_{y'}h\Big|_a^b - \int_a^b h(x)\frac{d}{dx}F_{y'}\,dx\,. \tag{7}$$

Подставляя (7) в формулу (8) § 1 с учетом граничных условий (6), получим

$$\delta J(y,h)=\int_a^b\left[F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right]h(x)\,dx\,.$$

Для стационарных точек должно выполняться равенство

$$\int_a^b\left[F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right]h(x)\,dx=0 \tag{8}$$

для любого допустимого $h(x)$. Из равенства (8) в силу основной леммы вариационного исчисления вытекает, что

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0 \tag{9}$$

или

$$F_y-F_{xy'}-F_{yy'}y'-F_{y'y'}y''=0\,. \tag{10}$$

Уравнение (9) или (10) называется уравнением Эйлера для функционала (4) при условиях (5). Всякое решение уравнения Эйлера называют экстремалью функционала (4).

Из приведенных рассуждений и выкладок следует справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. *Если* $y(x)$ *является локальным экстремумом задачи с закрепленными концами* (5) *для функционала* (4)*, то функция* $y(x)$ *удовлетворяет дифференциальному уравнению Эйлера при* $a\le x\le b$ *.*

Это утверждение впервые было установлено Эйлером. Уравнение Эйлера в виде (10) при условии $F''_{y'y'}\neq 0$ представляет обыкновенное д.у. второго порядка. Обоснование существования производной y'' и доказательство единственного решения начальной задачи для д.у. $y'' = G(x, y, y')$ проведено Бернштейном С.Н. [3]. Следовательно, его общий интеграл имеет вид

$$y = f(x, C_1, C_2), \qquad (11)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. В силу этого теорему Эйлера можно сформулировать так: *если существует кривая* $y(x)$*, дающая экстремум функционалу* (4)*, то она принадлежит семейству кривых* (11)*, зависящих от двух параметров.* Если заранее мы знаем существование искомой кривой, то для фактического определения остается определить значения C_1 и C_2 исходя из граничных условий (5):

$$\begin{cases} f(a, C_1, C_2) = y_a, \\ f(b, C_1, C_2) = y_b. \end{cases}$$

Следовательно, теорема Эйлера дает только необходимое условие экстремума.

Рассмотрим пример, показывающий, что уравнение Эйлера есть только необходимое, но не достаточное условие существования экстремума функционала (4).

Пример 1. Найти экстремаль функционала

$$J(y) = \int_0^{\pi} \left(y'^2 - \alpha^2 y^2 \right) dx, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

$$y(0) = 1, \quad y(\pi) = 0, \quad \sin \alpha\pi \neq 0, \quad \alpha > 1.$$

Решение. В данном примере функция F равна $F = y'^2 - \alpha^2 y^2$. Тогда уравнение Эйлера (9) имеет вид

$$y'' + \alpha^2 y = 0.$$

Общее решение данного д.у. определяется по формуле

$$y(x) = C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x,$$

и с учетом граничных условий находим искомую экстремаль

$$y_0(x) = \frac{1}{\sin \alpha\pi} \sin \alpha(\pi - x).$$

При любой $h(x) \in C^1[0, \pi]$, $h(0) = h(\pi) = 0$, найдем разность

$$\Delta J(y_0) = J(y_0 + h) - J(y_0) = \int_0^{\pi} \left[h'^2(x) - \alpha^2 h^2(x) \right] dx.$$

Теперь выберем функцию $h = h_m(x) = \sin mx \in C^1[0, \pi]$, $m \in \mathbb{N}$, $h_m(0) = h_m(\pi) = 0$. Тогда

$$\Delta J(y_0) = \left(m^2 - \alpha^2\right)\frac{\pi}{2}.$$

Отсюда видно, что если $m \geq \alpha$, то $\Delta J(y_0) \geq 0$, а при $m < \alpha$: $\Delta J(y_0) < 0$. Следовательно, экстремаль $y_0(x)$ не является экстремумом данного функционала. ■

Таким образом, теорема 1 решение поставленной задачи об отыскании экстремалей функционала (4) эквивалентно свела к краевой задаче (9) и (5). Эта краевая задача не всегда имеет решение, если же решение существует, то оно может быть не единственным.

Рассмотрим частные случаи д.у. (6), когда оно допускает интегрирование.

1. Пусть функция F не зависит от y, т.е. $F(x, y')$. В этом случае д.у. (9) принимает вид

$$\frac{d}{dx} F_{y'} = 0,$$

откуда следует $F_{y'} = C = \text{const}$, т.е. получим д.у. первого порядка.

2. Пусть функция F не зависит от y', т.е. $F(x, y)$. Тогда д.у. (9) имеет вид

$$F_y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F = F(x).$$

Отсюда мы не сможем найти функцию $y(x)$, удовлетворяющую граничным условиям (5). Поэтому в этом случае задача (4) и (5) не имеет решения.

3. Пусть функция F не зависит от x, т.е. имеет вид $F(y, y')$. Тогда д.у. (10) имеет вид

$$F_y - F_{yy'} y' - F_{y'y'} y'' = 0. \qquad (12)$$

Д.у. (12) можно представить в виде

$$\frac{1}{y'} \frac{d}{dx}\left(F - y' F_{y'}\right) = 0.$$

Отсюда получим д.у. первого порядка

$$F - y' F_{y'} = C. \qquad (13)$$

4. Пусть $F_{y'y'} \equiv 0$. В этом случае функция F будет линейной функцией от y':

$$F(x,y,y') = P(x,y) + y'Q(x,y).$$

Тогда уравнение Эйлера примет вид

$$\frac{\partial P}{\partial y} + y'\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{d}{dx}Q = 0,$$

или после сокращений имеем

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{dQ}{dx}. \qquad (14)$$

Если данное равенство выполняется тождественно, то оно определит на плоскости $\mathbb{R}^2_{xy}$ некоторую кривую, которая, вообще говоря, может не проходить через две заданные точки A и B. Поэтому поставленная задача в общем случае не разрешима. Хотя в отдельных случаях уравнение (14) может давать решение задачи на экстремум функционала

$$J = \int_a^b \left(P + y'Q\right) dx.$$

Об этом можно прочитать в книге [13, гл. 1, § 3, с. 23].

Далее рассмотрим примеры на отыскание экстремалей функционалов.

Пример 2. Рассмотрим функционал (1) из примера 1 § 1 на множестве функций $C^2[a,b]$, удовлетворяющих условиям (5), т.е. в данном случае функционал имеет вид

$$J(y) = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx. \qquad (15)$$

Для этого функционала надо найти кривую $y(x)$, соединяющую точки $A = (a, y_a)$ и $B = (b, y_b)$, для которой функционал (15) принимает наименьшее значение.

Решение. В случае функционала (15) функция $F = \sqrt{1 + y'^2(x)}$ не зависит от y, поэтому уравнение Эйлера сводится к уравнению

$$F_{y'} = C = \text{const}$$

или после вычисления производной

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2(x)}}=C\,.$$

Отсюда находим

$$y'=C_1=\text{const}\,,$$

следовательно, $y(x)$ является линейной функцией

$$y(x)=C_1x+C_2\,.$$

Из условий $y(a)=y_a$ и $y(b)=y_b$ определим

$$C_1=\frac{y_a-y_b}{a-b}\,,\quad C_2=\frac{ay_b-by_a}{a-b}\,.$$

Тогда искомая кривая есть отрезок

$$y(x)=\frac{y_a-y_b}{a-b}\,x+\frac{ay_b-by_a}{a-b}\,,$$

соединяющий точки A и B. ■

Пример 3 или задача о наименьшей площади поверхности вращения. Среди всех кривых $y=y(x)$ $\left(y(x)\geq 0\right)$ из класса $C^2[-a,a]$ с концами в точках $A=(a,y_a)$ и $B=(-a,y_a)$, $y_a>0$, требуется найти кривую, которая при вращении ее около оси Ox образует поверхность минимальной площади.

Решение. Как известно из курса математического анализа, площадь S поверхности, образованной вращением кривой $y=y(x)\geq 0$ около оси Ox, определяется формулой

$$S(y)=2\pi\int\limits_{-a}^{a}y\sqrt{1+y'^2}\,dx\,. \qquad (16)$$

Как видим, функция $F=2\pi y\sqrt{1+y'^2}$ не зависит от x, тогда уравнение Эйлера (10) имеет вид (12) или (13):

$$F-y'F_{y'}=C=\text{const}$$

или после подстановки функции F

$$y\sqrt{1+y'^2}-y'y\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=\frac{C}{2\pi}=\alpha\,.$$

Отсюда найдем д.у.

$$y=\alpha\sqrt{1+y'^2}\ . \tag{17}$$

Искомую кривую будем искать в параметрической форме $x=x(t)$, $y=y(t)$. В д.у. (17) сделаем замену $y=\alpha\,\mathrm{ch}\,t$. Тогда из него найдем $y'=\mathrm{sh}\,t$. Для нахождения $x(t)$ имеем следующее д.у.:

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{\alpha\,\mathrm{sh}\,t\,dt}{\mathrm{sh}\,t}=\alpha\,dt\ .$$

Отсюда $x=\alpha t+\alpha_1$ и решения д.у. (17) имеют вид

$$x=\alpha t+\alpha_1\,,\quad y=\alpha\,\mathrm{ch}\,t\ .$$

Исключая из этих равенств параметр t, найдем семейство кривых

$$y(x)=\alpha\,\mathrm{ch}\frac{x-\alpha_1}{\alpha}\,, \tag{18}$$

которые называются цепными линиями. С учетом граничных условий $y(-a)=y(a)=y_a$ из формулы (18) получим равенство

$$\mathrm{ch}\frac{a-\alpha_1}{\alpha}=\mathrm{ch}\frac{-a-\alpha_1}{\alpha}\,. \tag{19}$$

Равенство (19) возможно только при

$$\frac{a-\alpha_1}{\alpha}=\frac{-a-\alpha_1}{\alpha}\ \text{ или }\ \frac{a-\alpha_1}{\alpha}=\frac{a+\alpha_1}{\alpha}\,.$$

Первое равенство только при $a=0$, а второе при $\alpha_1=0$. Следовательно, экстремали при их существовании находятся среди однопараметрического семейства кривых

$$y_0(x)=\alpha\,\mathrm{ch}\frac{x}{\alpha}\,.$$

Определим значение параметра $\alpha>0$ исходя из граничного условия

$$g(\alpha)=\alpha\,\mathrm{ch}\frac{a}{\alpha}=y_a\,.$$

Функция $g(\alpha)$ определена на интервале $(0,+\infty)$, при $\alpha\to 0$ и $\alpha\to+\infty$ $g(\alpha)\to+\infty$. Поскольку функция $g(\alpha)\in C^\infty(0,+\infty)$, то она на этом интервале достигает своего наименьшего единственного положительного значения $g_0 = g(\alpha_0)$, где $g'(\alpha_0) = 0$, $\alpha_0 < a$. Отсюда следует, что при $y_a > g_0$ уравнение $g(\alpha) = y_a$ имеет два решения α_1, α_2, пусть $\alpha_1 < \alpha_2$.

Теперь вычислим интеграл (16) от функции $y_0(x)$:

$$S(y_0) = 2\pi \int_{-a}^{a} \alpha \operatorname{ch} \frac{x}{\alpha} \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{\alpha}}\, dx =$$

$$= 2\pi\alpha \int_{-a}^{a} \alpha \operatorname{ch}^2 \frac{x}{\alpha}\, dx = \pi\alpha \left(2a + \alpha \operatorname{sh} \frac{2a}{\alpha} \right) = \varphi(\alpha).$$

Найдем производную этой функции

$$\varphi'(\alpha) = 2\pi\alpha \operatorname{sh} \frac{2a}{\alpha} + 2\pi\alpha \left(1 - \operatorname{ch} \frac{2a}{\alpha} \right) =$$

$$= 2\pi\alpha \operatorname{sh} \frac{2a}{\alpha} - 4\pi\alpha \operatorname{sh}^2 \frac{a}{\alpha} =$$

$$= 4\pi\alpha \operatorname{sh} \frac{a}{\alpha} \left(\operatorname{ch} \frac{a}{\alpha} - \frac{a}{\alpha} \operatorname{sh} \frac{a}{\alpha} \right) = 4\pi\alpha \operatorname{sh} \frac{a}{\alpha}\, g'(\alpha).$$

Отсюда следует, что функция $\varphi(\alpha)$ имеет в точке $\alpha > \alpha_0 \in (\alpha_1, \alpha_2)$ единственное наименьшее значение. В этом случае две экстремали, соответствующие значениям α_1 и α_2, доставляют минимум функционалу (16).

При $y_a = g_0$ уравнение $g(\alpha) = g_a$ имеет единственное решение, и соответствующая единственная функция $y_0(x)$ дает минимум функционалу (16).

Когда $y_a < g_0$, то уравнение $g(\alpha) = g_a$ не имеет решения, и, следовательно, не существует цепной линии, которая давала бы минимум функционалу $S(y)$. ■

Пример 4. В этом примере рассмотрим задачу о брахистохроне (см. пример 2 § 1). Пусть $A = (0,0)$ совпадает с началом координат, а точка $B = \big(b, y(b)\big) = (b, y_b)$, $b > 0$. Рассмотрим функционал (2) из § 1 на множестве функций $y(x)$ из пространства $C^2[0,b]$, удовлетворяющих граничным условиям

$$y(0)=0\,,\quad y(b)=y_b\,. \tag{20}$$

Решение. В данном случае функция F имеет вид

$$F(y,y')=\frac{1}{\sqrt{2g}}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}\,,\quad y>0\,, \tag{21}$$

она не зависит от x. Тогда уравнение Эйлера имеет вид (13). После подстановки сюда функции (21) получим

$$\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}-y'\frac{1}{2}\left(\frac{1+y'^2}{y}\right)^{-1/2}\left(\frac{1+y'^2}{y}\right)'_{y'}=C\sqrt{2g}=\alpha\,.$$

Отсюда найдем

$$y=\frac{\beta}{1+y'^2}\,,\quad \beta=\frac{1}{\alpha^2}\,. \tag{22}$$

Искомую кривую будем искать в параметрической форме $x=x(t)$, $y=y(t)$. В д.у. (22) аналогично примеру 2 проведем замену $y=\beta\cos^2 t$. Из д.у. найдем $y'=\operatorname{tg} t$. Для определения $x(t)$ получим д.у.:

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{-2\beta\cos t\sin t\,dt}{\operatorname{tg} t}=-2\beta\cos^2 t\,dt\,.$$

Отсюда находим $x(t)$ и с учетом функции $y(t)$ находим общее решение д.у. (22)

$$x(t)=-\frac{\beta}{2}\big(2t+\sin 2t\big)+C_1,\quad C_1=\mathrm{const}\,,$$

$$y(t)=\frac{\beta}{2}\big(1+\cos 2t\big)\,.$$

Здесь введем новый параметр θ: $2t=\pi-\theta$. Тогда имеем

$$\begin{cases} x=r\big(\theta-\sin\theta\big)+C, \\ y=r\big(1-\cos\theta\big), \end{cases} \tag{23}$$

где $r=\beta/2$, C – произвольные постоянные. Найденное нами семейство (23) есть семейство циклоид, образованных качением круга радиуса r по действительной оси. В силу первого условия из (20) следует, что постоянная $C = 0$. Тогда точками возраста циклоида будут точки $x = \pm 2n\pi r$ на оси Ox. Постоянная r находится исходя из второго условия из (20), т.е. из условия $y(b) = y_b$. ■

3. Задача с одним закрепленным и другим свободным концом

В этом пункте рассмотрим задачу об отыскании экстремума функционала (4) в классе $C^2[a,b]$ при условии

$$y(a) = y_a \,. \tag{24}$$

Геометрический смысл этой задачи состоит в следующем: среди всех кривых $y = y(x)$, $a \le x \le b$, выходящих из точки $A = (a, y_a)$ и оканчивающихся на прямой $y = b$, найти те, которые дают экстремум функционалу (4). В этой постановке положение второго конца кривой не фиксируется.

Теорема 2. *Если* $y = y(x)$ *доставляет локальный экстремум задаче* (4) *и* (24)*, то* $y(x)$ *удовлетворяет дифференциальному уравнению Эйлера, граничному условию* (24) *и*

$$F_{y'}\left(x, y(x), y'(x)\right)\Big|_{x=b} = 0 \,. \tag{25}$$

Доказательство. Пусть существует локальный экстремум $y(x)$ вариационной задачи (4) и (24), и пусть для определенности $y(x)$ есть точка минимума функционала $J(y)$. Обозначим $y(b) = y_b$. Тогда $y(x)$ – точка минимума функционала (4) с закрепленными концами (5). В силу теоремы 1 функция $y(x)$ удовлетворяет д.у. Эйлера и по необходимому условию экстремума первая вариация

$$\delta J(y,h) = 0 \,.$$

Тогда из равенства (7) вытекает, что

$$F_{y'} h(x)\Big|_a^b = 0 \,.$$

Отсюда, поскольку $h(b) \ne 0$, следует равенство (25). ■

Пример 5. Рассмотрим задачу о брахистохроне (см. пример 4) со свободным правым концом.

Решение. В этом случае мы получим семейство циклоид

$$x = r(\theta - \sin\theta), \quad y = r(1-\cos\theta) \tag{26}$$

с одним параметром r. Чтобы найти второе граничное условие в точке $y = b$, удовлетворим функцию

$$F(y, y') = \frac{1}{\sqrt{2g}}\left(\frac{1+y'^2}{y}\right)^{1/2}$$

условию (25). Для этого вычислим производную $F_{y'}$ и приравняем нулю при $x = b$:

$$F_{y'}\Big|_{x=b} = \frac{1}{\sqrt{2g}}\left(\frac{1+y'^2}{y}\right)^{-1/2} \frac{y'}{y}\Bigg|_{x=b} = 0.$$

Отсюда следует, что $y'(b) = 0$, это означает, что циклоида должна пересекать прямую $x = b$ перпендикулярно. На основании равенств (26) найдем

$$y'_x = \frac{y'_\theta}{x'_\theta} = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}.$$

Отсюда в силу $y'(b) = 0$ имеем

$$\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \pi + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно, точке $x = b = r\pi$ будет соответствовать точка $\left(b, \dfrac{2b}{\pi}\right)$, которая является вершиной циклоида, соответствующая экстремаль имеет параметрические уравнения

$$x = \frac{b}{\pi}(\theta - \sin\theta), \quad y = \frac{b}{\pi}(1-\cos\theta). \ \blacksquare$$

4. Задача с обоими свободными концами

В предыдущем пункте изучили вариационную задачу, когда $x = b$ был свободен. Аналогично изучается задача, когда оба конца $x = a$ и $x = b$ свободны от граничных условий.

Теорема 3. *Если* $y(x)$ *из класса* $C^2[a,b]$ *является локальным экстремумом функционала* (4), *то функция* $y(x)$ *является* *решением дифференциального уравнения Эйлера и удовлетворяет условиям*

$$F_{y'}\left(x, y(x), y'(x)\right)\Big|_{x=a} = F_{y'}\left(x, y(x), y'(x)\right)\Big|_{x=b} = 0\,. \qquad (27)$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.

Отметим, что во многих задачах из условий (27) следуют граничные условия второго рода

$$y'(a) = 0\,, \quad y'(b) = 0\,.$$

Например, для функционала (15) условия (27) перейдут в эти граничные условия.

Пример 6. Найти экстремум функционала

$$J(y) = \int_0^1 e^x\left(y'^2 + 6y^2 + 12y\right)dx\,. \qquad (28)$$

Решение. В случае функционала (28) функция $F\left(x, y, y'\right) = e^x\left(y'^2 + 6y^2 + 12y\right)$. Найдем производные

$$F_y = e^x\left(12y + 12\right), \quad F_{y'} = e^x 2y'\,.$$

В силу теоремы 3 искомая функция удовлетворяет уравнению Эйлера

$$y'' + y' - 6y = 6$$

и граничным условиям второго рода

$$y'(0) = y'(1) = 0\,.$$

Решением этой краевой задачи является функция $y_0(x) = -1$. Покажем, что функция доставляет абсолютный минимум функционалу (28). Для этого при любом $h(x) \in C^1[0,1]$ рассмотрим разность

$$J(y_0 + h) - J(y_0) =$$

$$= \int_0^1 e^x\left[\left(y_0' + h'\right)^2 + 6(y_0 + h)^2 + 12(y_0 + h)\right]dx -$$

$$-\int_0^1 e^x\left[y_0'^2 + 6y_0^2 + 12y_0\right]dx =$$

$$= \int_0^1 e^x\left(h'^2 + 6h^2 - 6\right)dx + \int_0^1 e^x 6\,dx = \int_0^1 e^x\left(h'^2 + 6h^2\right)dx \geq 0\,. \ \blacksquare$$

5. Задача с подвижной границей

Рассмотрим интеграл (4) на множестве функций из $C^2[a,b]$, для которых $y(a)=y_a$, а правая граничная точка $\big(b, y(b)\big)$ перемещается на заданной гладкой кривой Γ: $y=f(x)$, $c\le x\le d$, при этом $c>a$ и $y(b)=f(b)$. Задача состоит в отыскании экстремума $y(x)$ функционала (4) и его верхнего предела b. Такую задачу называют задачей с подвижной (правой) границей.

Теорема 4. *Если функция $y_0(x)$ является решением задачи с подвижной (правой) границей, то она удовлетворяет уравнению Эйлера и условию трансверсальности при $x=b$:*

$$\left\{F\left(x, y_0(x), y_0'(x)\right)+\left[f'(x)-y_0'(x)\right]\frac{\partial F\left(x, y_0(x), y_0'(x)\right)}{\partial y'}\right\}_{x=b}=0. \tag{29}$$

Доказательство. Рассмотрим семейство функций $y(x,t)\in C^2[a,b]$ при любом $t\in\mathbb{R}$ таких, что $y(x,0)=y_0(x)$ и $y(a,t)=y_a$. Введем собственный интеграл, зависящий от параметра t

$$\Phi(t)=\int_a^{x(t)} F\left[x, y(x,t), \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right]dx, \tag{30}$$

где $x(t)$ – произвольная непрерывно дифференцируемая функция и $x(0)=b$. В силу условий на функции $F(\cdot)$ и $x(t)$ функция (30) непрерывно дифференцируема,

$$\Phi(0)=J(y_0)$$

и

$$\Phi'(0)=\int_a^b\left[\frac{\partial F}{\partial y}h(x)+\frac{\partial F}{\partial y'}h'(x)\right]dx+F\left[b, y_0(b), y_0'(b)\right]x'(0), \tag{31}$$

где

$$h(x)=\left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}, \quad h(a)=0,$$

$$h'(x) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right)\Bigg|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right)\Bigg|_{t=0}.$$

Выражение (31) представляет собой первый дифференциал функционала $\Phi(0)$. Поскольку $y_0(x)$ является решением задачи, то $t=0$ является точкой экстремума функции (30). Тогда $\Phi'(0)=0$ при всех допустимых $h(x)$, $h(a)=0$.

Проинтегрировав по частям второе слагаемое под знаком интеграла (31) аналогично доказательству теоремы 1, получим равенство

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right]_{y=y_0(x)} h(x)\,dx + F\left[b, y_0(b), y_0'(b)\right]x'(0) +$$

$$+\frac{\partial F}{\partial y'}\left[b, y_0(b), y_0'(b)\right]h(b) = 0. \qquad (32)$$

Фиксировав правый конец $\left(b, y(b)\right)$ кривой $y_0(x)$ на заданной кривой $y = f(x)$, мы имеем задачу с закрепленными обоими концами. Тогда экстремум $y_0(x)$ по теореме 1 удовлетворяет уравнению Эйлера и из равенства (32) следует

$$F\left[b, y_0(b), y_0'(b)\right]x'(0) + \frac{\partial F}{\partial y'}\left[b, y_0(b), y_0'(b)\right]h(b) = 0. \qquad (33)$$

Рассмотрим функции $y(x,t)$ и $f(x)$ при $x = x(t)$: $y\left(x(t),t\right)$, $f\left(x(t)\right)$ и вычислим

$$\left[\frac{d}{dt}y\left(x(t),t\right)\right]_{t=0} = \left[\frac{\partial y}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial y}{\partial t}\right]_{t=0} =$$

$$= \frac{\partial y\left(x(0),0\right)}{\partial x}x'(0) + \frac{\partial y\left(x(0),0\right)}{\partial t} = y_0'(b)x'(0) + h(b). \qquad (34)$$

С другой стороны, в точке $t=0$

$$\left[\frac{d}{dt}y\left(x(t),t\right)\right]_{t=0} = \frac{df\left(x(t)\right)}{dt}\Bigg|_{t=0} =$$

$$= f'\left(x(0)\right)x'(0) = f'(b)x'(0). \qquad (35)$$

Тогда из равенств (34) и (35) найдем

$$h(b) = \left[f'(b) - y_0'(b) \right] x'(0)$$

и подставим в (40). Отсюда уже будет следовать равенство (29). ■

Замечания. 1. Отметим, что условие (29) названо трансверсальным из того, что оно устанавливает связь между угловыми коэффициентами $f'(x)$ и $y_0'(x)$ в граничной точке b.

2. Аналогично рассматривается вариационная задача с двумя подвижными границами. Рассмотрим функционал (4) на множестве кривых $y = y(x) \in C^2[a,b]$ с концами на известных линиях $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$. Тогда экстремум $y(x)$ функционала (4) удовлетворяет условиям трансверсальности

$$\begin{aligned} &\left\{ F\left(x, y(x), y'(x)\right) + \left[\varphi'(x) - y'(x)\right] F_{y'}\left(x, y(x), y'(x)\right) \right\}_{x=a} = 0, \\ &\left\{ F\left(x, y(x), y'(x)\right) + \left[\psi'(x) - y'(x)\right] F_{y'}\left(x, y(x), y'(x)\right) \right\}_{x=b} = 0. \end{aligned} \tag{36}$$

3. В частности, когда граничные точки $\left(a, y(a)\right)$ и $\left(b, y(b)\right)$ двигаются по прямым $x = a$ и $y = b$ соответственно, то условия (36) принимают вид

$$\left[F - y'(x) F_{y'} \right]_{x=a} = \left[F - y'(x) F_{y'} \right]_{x=b} = 0.$$

Пример 7. Найти расстояние ρ от точки $\left(-2, 3\sqrt{3}\right)$ до полуокружности

$$(x-1)^2 + y^2 = 1, \quad y \ge 0, \quad 0 \le x \le 2.$$

Решение. Среди кривых $y(x)$ из класса $C^2[-2,2]$ и исходящих с заданной точки $\left(-2, 3\sqrt{3}\right)$, т.е. $y(-2) = 3\sqrt{3}$, правый конец $\left(b, y(b)\right)$ которых находится на кривой $f(x) = \sqrt{1-(x-1)^2}$, найти ту, которая доставляет экстремум функционалу

$$J(y) = \int_{-2}^{b} \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

В данном случае $F = \sqrt{1+y'^2}$ и уравнение Эйлера имеет вид (см. пример 1)

$$y' = C_1.$$

Отсюда находим $y(x) = C_1 x + C_2$. Для неизвестных C_1, C_2 и b с учетом (29) получим уравнения

$$-2C_1 + C_2 = 3\sqrt{3},$$

$$C_1 b + C_2 = \sqrt{2b - b^2},$$

$$\sqrt{1 + C_1^2} + \left(\frac{1-b}{\sqrt{2b - b^2}} - C_1 \right) \frac{C_1}{\sqrt{1 + C_1^2}} = 0.$$

Решением данной системы являются $C_1 = -C_2 = -\sqrt{3}$, $b = 1/2$. Тогда искомая экстремаль определяется по формуле

$$y = -x\sqrt{3} + \sqrt{3}.$$

Она дает минимум данному функционалу, равный искомому расстоянию

$$\rho = \int_{-2}^{1/2} \sqrt{1 + \left(\sqrt{3}\right)^2}\, dx = 5. \ \blacksquare$$

6. Задача Больца

На множестве функций $y(x) \in C^2[a, b]$ рассмотрим функционал

$$J(y) = \int_a^b F\left(y, y(x), y'(x)\right) dx + f\left[y(a), y(b)\right], \qquad (37)$$

где F и f – заданные функции, $F \in C^2(\Pi)$, $f = f\left(\xi, \eta\right) \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

Задачу отыскания локального экстремума функционала (37) называют задачей Больца (Оскар Больц – немецкий математик, 12.05.1857 – 05.07.1942).

Теорема 5. *Если функция* $y_0(x) \in C^2[a, b]$ *является решением задачи Больца, т.е. доставляет экстремум функционалу* (37)*, то она удовлетворяет уравнению Эйлера и условиям трансверсальности*

$$\frac{\partial}{\partial y'}F\left(x,y_0(x),y_0'(x)\right)\Big|_{x=a}=\frac{\partial f\left[y_0(a),y_0(b)\right]}{\partial\xi},$$
$$\frac{\partial}{\partial y'}F\left(x,y_0(x),y_0'(x)\right)\Big|_{x=b}=-\frac{\partial f\left[y_0(a),y_0(b)\right]}{\partial\eta}. \qquad (38)$$

Доказательство. Введем функцию

$$\Phi(t)=J(y_0+t\,h)=\int_a^b F\left(x,y_0+t\,h,y_0'+t\,h'\right)dx+$$
$$+f\left[y_0(a)+t\,h(a),y_0(b)+t\,h(b)\right]. \qquad (39)$$

Поскольку функция $y_0(x)$ является экстремумом функционала (4), то функция (39) при $t=0$ имеет экстремум. Поэтому производная $\Phi'(t)$ в точке $t=0$ при любой $h(x)\in C^1[a,b]$

$$\Phi'(0)=\int_a^b\left[\frac{\partial F}{\partial y}h(x)+\frac{\partial F}{\partial y'}h'(x)\right]_{y=y_0(x)}dx+$$
$$+\frac{\partial f\left[y_0(a),y_0(b)\right]}{\partial\xi}h(a)+\frac{\partial f\left[y_0(a),y_0(b)\right]}{\partial\eta}h(b)=0\,.$$

Снова, интегрируя по частям второе слагаемое под знаком интеграла, из данного равенства получим

$$\int_a^b\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right]_{y=y_0(x)}h(x)\,dx+$$
$$+\left\{\frac{\partial F}{\partial y'}\left[x,y_0(x),y_0'(x)\right]\Big|_{x=b}+\frac{\partial f\left[y_0(a),y_0(b)\right]}{\partial\eta}\right\}h(b)-$$
$$-\left\{\frac{\partial F}{\partial y'}\left[x,y_0(x),y_0'(x)\right]\Big|_{x=a}-\frac{\partial f\left[y_0(a),y_0(b)\right]}{\partial\xi}\right\}h(a)=0\,. \qquad (40)$$

Формально фиксировав концы $y_0(a)$ и $y_0(b)$ кривой $y_0(x)$, мы имеем вариационную задачу с закрепленными концами. Поэтому функция $y_0(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера. Тогда в равенстве (40) интеграл будет равен нулю, и из оставшейся части в силу произвольности чисел $h(a)$ и $h(b)$ будут следовать равенства (38). ■

Пример 8. Найти экстремум функционала

$$J(y)=\int_1^2 x^2 y'^2(x)\,dx-2y(1)+y^2(2). \qquad (41)$$

Решение. В данном случае $F=x^2y'^2(x)$, $f(x,y)=-2x+y^2$. Уравнение Эйлера $F_{y'}=C$ имеет вид $y'=\dfrac{C}{2x^2}$. Отсюда находим $y(x)=\dfrac{C_1}{x}+C_2$. Из условий (38) находим $y'(1)=-1$, $4y'(2)=-y(2)$. С учетом этих граничных условий находим экстремаль $y_0(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}$. Покажем, что эта функция доставляет функционалу (41) абсолютный минимум. При любой функции $h(x)\in C^1[1,2]$ имеем

$$\Delta J=J(y_0+h)-J(y_0)=\int_1^2 x^2\left[(y_0+h)'\right]^2 dx-2\big(y(1)+h(1)\big)+$$

$$+2\big(y(2)+h(2)\big)^{1/2}-\int_1^2 x^2 y_0'^2\,dx+2y(1)-y^2(2)=$$

$$=\int_1^2 x^2\left[h'+2y_0'h'\right]dx-2h(1)+2y_0(2)h(2)+h^2(2).$$

Интегрируя по частям во втором слагаемом интеграла, используя уравнение Эйлера, получим

$$\Delta J=\int_1^2 x^2 h'^2(x)\,dx+h^2(2)\ge 0,$$

что требовалось доказать. ■

7. Инвариантность уравнения Эйлера

В целях упрощения построения решения уравнения Эйлера иногда полезно провести замену переменных в интеграле (4), пользуясь свойством инвариантности уравнения Эйлера.

Перейдем от системы координат (x,y) к системе (u,v) по формулам

$$x = \varphi(u,v)\,, \quad y = \psi(u,v) \qquad (42)$$

с якобианом

$$I = \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix} \neq 0\,,$$

где функции $\varphi, \psi \in C^2$. Кривые γ: $y = y(x)$ и γ_1: $y = y_1(x)$, $a \le x \le b$, в новых координатах x будут определяться уравнениями

$$v = v(u)\,, \quad v = v_1(u)\,.$$

Полоса (или бугорок), образованная между кривыми $y(x)$ и $y_1(x)$, $a \le x \le b$, имеющая площадь S, в новых координатах имеет площадь S_1. Тогда отношение площадей S/S_1 стремится к якобиану I при $S \to 0$.

В интеграле (4) проведем замену (42), при этом полагая $v = v(u)$. Тогда имеем

$$J(y) = J_1(v) = \int_\alpha^\beta F\left(\varphi(u,v), \psi(u,v), \frac{\psi_u + \psi_v v'}{\varphi_u + \varphi_v v'}\right)\left(\varphi_u + \varphi_v v'\right) du =$$

$$= \int_\alpha^\beta F_1\left(u, v, v'\right) du\,.$$

Если

$$\lim_{S \to 0} \frac{J(y_1) - J(y)}{S} = 0\,,$$

то в силу указанной замены

$$\lim_{S_1 \to 0} \frac{J_1(v_1) - J_1(v)}{S_1} = \lim_{S \to 0} \frac{J(y_1) - J(y)}{S} \cdot \frac{S}{S_1} = 0\,,$$

т.е. производная функционала $J_1(v)$ на кривой γ_1 обращается в нуль.

Таким образом, нами установлена следующая

Теорема 6. *Если кривая $y(x)$ является экстремумом функционала $J(y)$, то она также является экстремумом для $J_1(v)$.*

Это означает, что свойство кривой быть экстремумом инвариантно относительно преобразования переменных (42). Следовательно, уравнение Эйлера (8) эквивалентно уравнению Эйлера для функционала $J_1(v)$:

$$\frac{\partial F_1}{\partial v}-\frac{d}{du}\frac{\partial F_1}{\partial v'}=0 .$$

Уравнение Эйлера остается инвариантным, если кривые $y=y(x)$ задавать в параметрической форме $x=x(t)$, $y=y(t)$. В этом случае интеграл (1) примет вид

$$J=\int_{a_1}^{b_1} F\left(x,y,\frac{y'}{x'}\right)x'\,dt ,$$

где $y'(x)=\dfrac{y'_t}{x'_t}=\dfrac{y'}{x'}$, a_1 и b_1 – значения t, соответствующие концам a и b.

Пример 9. На множестве функций $r=r(\varphi)\in C^2[\varphi_0,\varphi_1]$ рассмотрим функционал

$$J=\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi . \tag{43}$$

Найти экстремали данного функционала.

Решение. Уравнение Эйлера имеет вид

$$\frac{r}{\sqrt{r^2+r'^2}}-\frac{d}{d\varphi}\frac{r'}{\sqrt{r^2+r'^2}}=0 , \tag{44}$$

откуда определится семейство экстремалей функционала (43). Проведем замену $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ в интеграле (43), тогда подынтегральное выражение примет вид $\sqrt{1+y'^2}\,dx$, а д.у. (44) перейдет в

$$y''=0 ,$$

общее решение которого имеет вид

$$y=C_1x+C_2 .$$

Отсюда найдем общий интеграл д.у. (44)

$$r\sin\varphi=C_1\,r\cos\varphi+C_2 ,$$

т.е. семейство экстремалей функционала (43). ■

Пример 11. В классе функций $y(x) \in C^2[0, \ln 2]$ найти экстремали функционала

$$J(y) = \int\limits_{\ln 1}^{\ln 2} \left(e^{-x} y'^2 - e^x y^2 \right) dx. \tag{45}$$

Решение. Уравнение Эйлера для данного функционала имеет вид

$$y'' - y' + e^{2x} y = 0 .$$

Непонятно, как решить полученное д.у. Поэтому в интеграле (45) проведем замену: $x = \ln u$, $y = v$. Тогда имеем

$$J_1(v) = \int\limits_1^2 \left(e^{-\ln u} u^2 v'^2 - e^{\ln u} v^2 \right) \frac{du}{u} = \int\limits_1^2 \left[v'^2 - v^2 \right] du .$$

Уравнением Эйлера для $J_1(v)$ является д.у. $v'' + v = 0$, общее решение которого можно записать в виде

$$v(u) = C_1 \cos u + C_2 \sin u = a \sin(u + b),$$

где a и b – постоянные, которые определяются через C_1 и C_2. Тогда здесь, переходя к координатам x и y, находим семейство экстремалей функционала (45):

$$y(x) = a \sin\left(e^x + b \right). \ ■$$

§ 3. Достаточные условия существования слабого локального экстремума

Как известно из курса анализа, в случае функции одного или нескольких переменных при обращении в нуль первого дифференциала для исследования знака приращения функции в точке экстремума рассматривается второй дифференциал. Это позволяет получить дополнительные необходимые условия и достаточные условия существования точек локального экстремума. Аналогичные условия можно получить и в случае функционалов.

Рассмотрим функционал

$$J(y) = \int\limits_a^b F\left(x, y(x), y'(x) \right) dx, \tag{1}$$

где функция $F(x, y, y') \in C^3(\Pi)$, на множестве функций

$$M = \left\{ y(x) \in C^1[a,b] \mid y(a) = y_a,\ y(b) = y_b \right\}$$

здесь y_a, y_b – заданные действительные числа.

Введем понятие второй вариации функционала (1). Рассмотрим функцию

$$\Phi(t) = J(y+th) = \int_a^b F\left(x, y+t\,h, y'+t\,h'\right) dx$$

при фиксированных функциях $y(x) \in M$ и $h(x) \in \overset{\circ}{C}{}^1[a,b]$, т.е. $h(a) = h(b) = 0$. По условию функция $F(\cdot) \in C^3(\Pi)$, то функция $\Phi(t)$ по известной теореме из анализа [17, с. 103] дважды непрерывно дифференцируема в окрестности точки $t = 0$ и

$$\Phi''(0) = \left. \frac{d^2 J(y+th)}{dt^2} \right|_{t=0} = \int_a^b \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} h^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial y'} h\, h' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} h'^2 \right] dx. \quad (2)$$

Выражение (2) называется второй вариацией функционала (1) и обозначается символом $\delta^2 J(y,h)$.

Преобразуем интеграл (2), проинтегрировав по частям следующий интеграл:

$$2\int_a^b F_{yy'} h(x) h'(x)\, dx = \int_a^b F_{yy'}\, dh^2(x) =$$

$$= F_{yy'} h^2(x) \Big|_a^b - \int_a^b h^2(x) \frac{d}{dx} F_{yy'}\, dx = -\int_a^b h^2(x) \frac{d}{dx} F_{yy'}\, dx. \quad (3)$$

С учетом равенства (3) из соотношения (2) получим

$$\delta^2 J(y,h) = \int_a^b \left[P(x) h'^2(x) + Q(x) h^2(x) \right] dx, \quad (4)$$

где

$$P(x) = F_{y'y'}, \quad Q(x) = F_{yy} - \frac{d}{dx} F_{yy'}.$$

Теорема 1. *Если функция* $y_0(x) \in M$ *доставляет слабый локальный минимум (максимум) функционалу* $J(y)$, *то*

$$\delta^2 J(y_0, h) \geq 0 \quad (\leq 0) \quad (5)$$

при всех $h(x) \in \overset{\circ}{C}{}^1[a,b]$.

Доказательство. Предположим противное, что $\delta^2 J(y_0,h)<0$ для некоторой функции $h(x)\in \overset{\circ}{C}{}^1[a,b]$. Введем семейство функций $y_0(x)+t\,h(x)$ от параметра $t\in\mathbb{R}$. Тогда, разлагая функцию $\Phi(t)=J(y_0+th)$ по формуле Тейлора в окрестности $t=0$, получим

$$\Delta J = J(y_0+th)-J(y_0)=$$

$$=t\,\delta J(y_0,h)+\frac{t^2}{2}\delta^2 J(y_0,h)+\alpha(t)\,r(y_0,h)\,, \qquad (6)$$

где

$$\delta J(y_0,h)=\int_a^b \left[F_y h+F_{y'}h'\right]_{y=y_0(x)}dx\,,$$

$r(y_0,h)$ – остаточный член формулы Тейлора, $\alpha(t)$ – бесконечно малая функция при $t\to 0$. По условию $y_0(x)$ дает минимум функционалу (1), тогда $\delta J(y_0,h)=0$ при любой функции $h(x)\in \overset{\circ}{C}{}^1[a,b]$. Тогда знак приращения ΔJ в равенстве (6) совпадает со знаком $\delta^2 J(y_0,h)$, т.е. $\Delta J<0$. Это противоречит условию. ■

В плане применения более удобным является следующее необходимое условие существования слабого локального экстремума функционала (1).

Теорема 2. *Если функция* $y_0(x)\in M$ *доставляет слабый локальный минимум (максимум) функционалу* (1)*, то для всех* $x\in[a,b]$ *выполняется неравенство*

$$P(x)=F_{y'y'}\Big|_{y=y_0(x)}\geq 0 \quad (\leq 0)\,. \qquad (7)$$

Доказательство. Снова предположим противное, т.е. существует точка $x_0\in(a,b)$ такая, что $P(x_0)<0$. В силу непрерывности функции $P(x)$ в точке x_0 следует, что существует $\varepsilon>0$ такое, что для всех $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset [a,b]$: $P(x) < \dfrac{1}{2} P(x_0)$. Поскольку $h(x)$ – любая функция из $\overset{\circ}{C}{}^1[a,b]$, то ее возьмем в виде

$$h_0(x) = \begin{cases} \sin^2 \pi \dfrac{x - x_0 + \varepsilon}{2\varepsilon}, & x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon], \\ 0, & x \notin [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]. \end{cases}$$

Теперь оценим вторую вариацию (4):

$$\delta^2 J(y_0, h) = \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \left[P(x) h_0'^2(x) + Q(x) h_0^2(x) \right] dx =$$

$$= \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \left[P(x) \left(\frac{\pi}{2\varepsilon} \right)^2 \sin^2 \pi \frac{x - x_0 + \varepsilon}{\varepsilon} + Q(x) \sin^4 \pi \frac{x - x_0 + \varepsilon}{2\varepsilon} \right] dx <$$

$$< \frac{P(x_0)}{2} \left(\frac{\pi}{2\varepsilon} \right)^2 \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \sin^2 \pi \frac{x - x_0 + \varepsilon}{\varepsilon} dx + \left\| Q(x) \right\|_{C[a,b]} 2\varepsilon =$$

$$= \frac{P(x_0)\pi^2}{8\varepsilon} + \left\| Q(x) \right\|_{C[a,b]} 2\varepsilon < 0,$$

если взять ε достаточно малым. Полученное неравенство противоречит условию (5). ■

Условие (7) называют условием Лежандра, а при строгом неравенстве в (7) его называют усиленным условием Лежандра (т.е. $P(x) > 0$).

Функционал

$$K(y,h) = \int_a^b \left[P(x) h'^2(x) + Q(x) h^2(x) \right] dx \tag{8}$$

называют квадратичным на множестве функций $y(x) \in M$ и $h(x) \in \overset{\circ}{C}{}^1[a,b]$. Тогда теорему 2 можно сформулировать так.

Теорема 2′. *Если квадратичный функционал* (8) *является неотрицательным (неположительным), то для всех* $x \in [a,b]$ *выполняется неравенство*

$$P(x) \geq 0 \quad (\leq 0).$$

Квадратичный функционал (8) называется положительно (отрицательно) определенным, если существует число $d > 0$ такое, что

$$K(y_0, h) \ge d\int_a^b \left[h'^2(x) + h^2(x)\right]dx$$

$$\left(K(y_0, h) \le -d\int_a^b \left[h'^2(x) + h^2(x)\right]dx\right).$$

для любых $y(x) \in M$ и $h(x) \in \overset{\circ}{C}{}^1[a,b]$.

Пример 1. Рассмотрим функционал

$$J(h) = \int_0^\pi \left[h'^2(x) - h^2(x)\right]dx, \quad h(0) = h(\pi) = 0.$$

Здесь уравнение Эйлера имеет вид

$$h''(x) + h(x) = 0, \quad 0 < x < \pi,$$

$P(x) = 1 > 0$. Тем не менее на решении $h(x) = \sin x$ уравнения Эйлера данный функционал $J(\sin x) = 0$, т.е. условие $P(x) > 0$ на $[a,b]$ недостаточно для положительной определенности функционала (8).

Теорема 3. *Если для функции* $y_0(x) \in M$ *и любых* $h(x) \in \overset{\circ}{C}{}^1[a,b]$ *дифференциал* $\delta J(y_0, h) = 0$ *и квадратичный функционал* (8) *является положительно (отрицательно) определенным, то функция* $y_0(x)$ *доставляет строгий слабый локальный минимум (максимум) функционалу* (1).

Доказательство. Разлагая функцию $F\left(x, y, y'\right)$ по формуле Тейлора, найдем приращение функционала (1) в окрестности $y = y_0(x)$:

$$\Delta J = J(y_0 + h) - J(y_0) = \int_a^b \left[F_y h(x) + F_{y'} h'(x)\right]_{y=y_0(x)} dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b \left[\overline{F}_{yy} h^2 + 2\overline{F}_{yy'} hh' + \overline{F}_{y'y'} h'^2\right]dx, \qquad (9)$$

где $\bar{F}_{yy} = F_{yy}\left(x, y_0 + \theta_1 h, y_0' + \theta_2 h'\right)$, $0 < \theta_i < 1$, $i = 1, 2$, аналогично определяются $\bar{F}_{yy'}$ и $\bar{F}_{y'y'}$. Поскольку $F \in C^2(\Pi)$, то при достаточно малом расстоянии $\rho = \rho(y_0 + h, y_0)$ имеем

$$\bar{F}_{yy} = F_{yy}\Big|_{y=y_0(x)} + \varepsilon_1, \quad \bar{F}_{yy'} = F_{yy'}\Big|_{y=y_0(x)} + \varepsilon_2,$$
$$\bar{F}_{y'y'} = F_{y'y'}\Big|_{y=y_0(x)} + \varepsilon_3,$$

где $\varepsilon_i(x) = \varepsilon_i(y_0, h) \to 0$ при $\rho \to 0$, $i = 1, 2, 3$. Тогда равенство (9) с учетом равенства $\delta J(y_0, h) = 0$ примет вид

$$\Delta J = \delta^2 J(y_0, h) + \frac{1}{2}\int_a^b \varepsilon(x)\,dx, \tag{10}$$

где $\varepsilon(x) = \varepsilon_1(x)h^2 + 2\varepsilon_2(x)hh' + \varepsilon_3(x)h'^2$. В силу известного неравенства $2ab \le a^2 + b^2$

$$2\left|\int_a^b \varepsilon_2(x)hh'\,dx\right| \le \int_a^b |\varepsilon_2(x)|\left(h^2 + h'^2\right)dx.$$

Отсюда следует, что

$$\left|\int_a^b \varepsilon(x)\,dx\right| \le 2E(h)\int_a^b \left[h^2(x) + h'^2(x)\right]dx,$$

где $E(h) = \max\limits_{a \le x \le b}\left\{ |\varepsilon_1(x)|, |\varepsilon_2(x)|, |\varepsilon_3(x)| \right\} \to 0$ при $\rho \to 0$. Поэтому существует число $d/2$ такое, что $E(h) < d/2$. Тогда из равенства (10) получим

$$\Delta J(y_0) \ge \frac{d}{2}\int_a^b \left[h^2(x) + h'^2(x)\right]dx > 0,$$

т.е. функционал $J(y)$ в точке $y = y_0(x)$ имеет строгий слабый локальный минимум. ■

Отметим, что условия теоремы 3 трудно проверяемы. Поэтому приведем более простые достаточные условия существования слабого локального экстремума функционала (1). Для этого надо найти условия знакоопределенности функционала (8). Уравнение Эйлера для него имеет вид

$$\frac{d}{dx}\left[P(x)h'(x)\right]-Q(x)h(x)=0\,. \qquad (11)$$

Уравнение (11) называют уравнением Якоби, здесь коэффициенты $P(x)$ и $Q(x)$ зависят от функций $y_0(x)$ из M .

Определения. 1. *Точка* $c\in(a,b]$ *называется сопряженной с точкой* a*, если уравнение Якоби имеет нетривиальное решение* $h(x)$ *такое, что* $h(c)=h(a)=0$*.*

2. *Говорят, что для функций* $y_0(x)\in M$ *выполнено условие Якоби, если интервал* (a,b) *не содержит точек, сопряженных с точкой* a*. Если полуинтервал* $(a,b]$ *не содержит точек, сопряженных с точкой* a*, то говорят, выполнено усиленное условие Якоби.*

Пример 2. Рассмотрим функционал

$$\tilde{J}(h)=\int\limits_0^{2\pi}\left[h'^2(x)-h^2(x)\right]dx\,,\quad h(0)=h(2\pi)=0\,.$$

Найти точку, сопряженную с точкой 0 .

Решение. Уравнение Эйлера для данного функционала имеет вид

$$h''(x)+h(x)=0\,.$$

Решением этого д.у., удовлетворяющего граничным условиям, будет функция $h(x)=\sin x$. Тогда точка $c=\pi\in(0,2\pi]$ будет сопряженной с точкой $x=0$. ■

Теорема 4. *Пусть одновременно выполнены усиленные условия Лежандра и Якоби. Тогда существует функция* $\tau(x)\in C^1[a,b]$ *такая, что при* $h(x)\in \overset{\circ}{C}{}^1[a,b]$

$$K(y_0,h)=\int\limits_a^b P(x)\left[h'(x)+\frac{\tau(x)}{P(x)}h(x)\right]^2dx\,. \qquad (12)$$

Доказательство. Прежде отметим равенство

$$\int\limits_a^b\left[\tau(x)h^2(x)\right]'dx=\tau(x)h^2(x)\Big|_a^b=0\,,$$

так как $h(a)=h(b)=0$. К интегралу (8) добавим это равенство. Тогда имеем

$$K(y_0,h)=\int\limits_a^b P(x)\left[h'^2(x)+\frac{2\tau(x)}{P(x)}h'(x)h(x)+\frac{Q(x)+\tau'(x)}{P(x)}h^2(x)\right]dx.$$

Теперь потребуем, чтобы выражение в квадратных скобках было полным квадратом. Это возможно тогда, когда дискриминант равняется нулю при всех $x\in(a,b)$, что равносильно тому, что функция $\tau(x)$ была решением д.у. Рикатти

$$P(x)\tau'-\tau^2+P(x)Q(x)=0\,,\quad a<x<b\,. \qquad (13)$$

Если такое решение $\tau(x)$ существует, то получим представление (12). Следовательно, остается доказать существование решения д.у. (13). В этом уравнении проведем замену $\tau=-\dfrac{v'}{v}P(x)$, где $v=v(x)$ – новая неизвестная функция. Тогда имеем

$$\frac{d}{dx}\left(P\frac{dv}{dx}\right)-Qv=0\,. \qquad (14)$$

Покажем, что данное д.у. имеет решение $v_0(x)\neq 0$ на $[a,b]$. Для д.у. (14) по теореме Пикара существует единственное решение $v_1(x)$ задачи Коши с начальными условиями $v_1(a)=0$ и $v_1'(a)=1$, так как $P(x)>0$ на $[a,b]$. Тогда $v_1(x)>0$ при любом $x\in(a,b]$, так как выполнено усиленное условие Якоби, т.е. нет точек из $(a,b]$, где бы $v_1(x)$ равнялась нулю. Другое решение $v_0(x)$ д.у. (14) с начальными условиями $v_0(a)=\varepsilon>0$, $v_0'(a)=1$ также существует, единственно на $[a,b]$ и непрерывно зависит от ε. Поскольку $v_1(x)>0$ на $(a,b]$, то в силу теоремы о непрерывной зависимости от начальных данных $v_0(x)>0$ на $[a,b]$. Тем самым построена такая функция $\tau(x)$ и теорема доказана. ■

Следствие. *Если выполнены условия теоремы* 4, *то квадратичная форма $K(y_0,h)$ положительно определена.*

Доказательство. В силу представления (12) $K(y_0,h)\geq 0$ при любой функции $h(x)\in \overset{\circ}{C}{}^1[a,b]$. Докажем, что $K(y_0,h)>0$ при $h(x)\not\equiv 0$. Если существует функция $h_0(x)$ такая, что

$K(y_0,h_0)=0$, то функционал $K(y_0,h)$ на $h_0(x)$ достигает абсолютного минимума. Следовательно, функция $h_0(x)$ удовлетворяет д.у. Эйлера (11). Поскольку $K(y_0,h_0)=0$ и $P(x)>0$ на $[a,b]$, то из равенства (12) следует

$$h_0'(x)+\frac{\tau(x)}{P(x)}h_0(x)=0\,,\quad a\le x\le b\,.$$

Отсюда имеем $h_0'(a)=h_0(a)=0$. Тогда по теореме единственности решения задачи Коши $h_0(x)\equiv 0$. Поэтому $K(y_0,h)>0$ при $h(x)\not\equiv 0$. Пусть $\min\limits_{a\le x\le b}P(x)=p>0$. Тогда при $h(x)\in \overset{\circ}{C}{}^1[a,b]$ справедлива оценка

$$K(y_0,h)\ge\frac{p}{2}\int_a^b h'^2(x)\,dx\,. \tag{15}$$

Действительно, для функционала

$$\tilde K(y_0,h)=\int_a^b\left[\tilde P(x)h'^2(x)+Q(x)h^2(x)\right]dx\,,$$

где $\tilde P(x)=P(x)-\frac{1}{2}p\ge\frac{1}{2}p>0$, отвечает уравнение Эйлера

$$\frac{d}{dx}\left(\tilde P(x)\frac{dh}{dx}\right)-Qh=0\,. \tag{16}$$

Тогда аналогично д.у. (14) устанавливается существование положительного на $[a,b]$ решения д.у. (16). В силу этого для функционала $\tilde K(y_0,h)$ выполнены все условия теоремы 4. Из этой теоремы следует, что $\tilde K(y_0,h)>0$ при $h(x)\not\equiv 0$. Тогда функционал $K(y_0,h)$ примет вид

$$K(y_0,h)=\tilde K(y_0,h)+\frac{1}{2}p\int_a^b h'^2(x)\,dx\ge\frac{1}{2}p\int_a^b h'^2(x)\,dx\,,$$

т.е. оценка (15) доказана. Теперь остается установить положительную определенность функционала $K(y_0,h)$. Для этого оценим правую часть неравенства (15) . При $h(a)=0$ имеем

$$h(x)=\int_a^x h'(t)\,dt\,.$$

Отсюда, используя неравенство Коши–Буняковского, получим

$$h^2(x)=\left(\int_a^x h'(t)\,dt\right)^2\le\int_a^x 1^2\,dt\cdot\int_a^x h'^2(t)\,dt\le(b-a)\int_a^b h'^2(x)\,dx\,.$$

Из этого неравенства, интегрируя его по отрезку $[a,b]$, имеем

$$\int_a^b h'^2(x)\,dx\ge\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b h^2(x)\,dx\,. \tag{17}$$

Тогда из оценок (15) и (17) следует, что

$$K(y_0,h)\ge\frac{p}{2}\int_a^b h'^2(x)\,dx\ge\frac{1}{4}\,p\int_a^b h'^2(x)\,dx+$$

$$+\frac{p}{4(b-a)^2}\int_a^b h^2(x)\,dx\ge d\int_a^b\left[h'^2(x)+h^2(x)\right]dx\,,$$

где $d=\min\left\{\dfrac{p}{2},\dfrac{p}{4(b-a)^2}\right\}$. ■

На основании доказанных теорем 1–4 и следствия можно сформулировать правило или алгоритм отыскания строго слабого локального экстремума функционала (1).

Алгоритм. *Пусть имеют место следующие условия:*

1) функция $y_0(x)$ была экстремалью, т.е. являлась решением уравнения Эйлера

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0\,;$$

2) на функции $y_0(x)$ на $[a,b]$ выполнено усиленное условие Лежандра, т.е. $P(x)=F_{y'y'}>0$ на $[a,b]$;

3) на функции $y_0(x)$ на $[a,b]$ выполнено усиленное условие Якоби, т.е. полуинтервал $(a,b]$ не содержит точек, сопряженных с точкой a.

Тогда функция $y_0(x)$ доставляет строгий слабый локальный минимум функционалу (1).

Соответствующие условия для строгого слабого локального максимума получаются изменением знаков неравенства на обратные. В случае данного алгоритма $P(x)<0$ на $[a,b]$.

Отметим, что в условиях алгоритма условие Якоби существенно, т.е. если найдется точка $c\in(a,b)$, сопряженная с точкой a, то можно доказать, что функция $y_0(x)$ не доставляет слабого локального минимума [13, с. 148].

Пример 3. Исследовать на наличие строгих слабых локальных экстремумов функционал

$$J(y)=\int_0^b\left[y'^3(x)-y'^2(x)\right]dx,\quad y(0)=0,\quad y(b)=B,\quad b>0. \qquad (18)$$

Решение. Уравнение Эйлера имеет вид

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=y''(6y'-2)=0.$$

Решением этого д.у., удовлетворяющего заданным граничным условиям, является функция $y_0(x)=\dfrac{B}{b}x$. Найдем $P(x)=F_{y'y'}=2(3y'-1)\big|_{y=y_0(x)}=\dfrac{2}{b}(3B-b)=\tilde{b}$. Отсюда видим, что при $3B>b$ функция $P(x)>0$, а при $3B<b$: $P(x)<0$, т.е. условие Лежандра выполнено при $3B\neq b$. Теперь проверим условие Якоби. Для этого составим д.у. Якоби

$$\frac{d}{dx}\left[P(x)\frac{dh}{dx}\right]-Q\,h(x)=\tilde{b}\,h''(x)=0,$$

которое при $h(0)=0$ имеет решение $h(x)=c\,x$, $c=\mathrm{const}$, которое не имеет нулей на $(0,b]$, т.е. при $3B\neq b$ выполнено усиленное условие Якоби. Тогда из алгоритма следует, что при $B>b/3$

экстремаль $y_0(x) = \dfrac{B}{b}x$ доставляет функционалу (17) строгий слабый локальный минимум, а при $3B < b$ – строгий слабый локальный максимум.

Теперь рассмотрим случай $3B = b$. В этом случае $P(x)\big|_{y=y_0(x)} \equiv 0$ и д.у. Якоби обращается в нуль, т.е. условия Лежандра и Якоби не выполняются. Рассмотрим приращение

$$\Delta J = J(y_0 + h) - J(y_0) =$$

$$= \int_a^b \Big[\left(y_0' + h'\right)^3 - \left(y_0' + h'\right)^2 \Big] dx - \int_a^b \left(y_0'^3 - y_0'^2 \right) dx =$$

$$= \int_a^b \Big[h'^3 + 3y_0'^2 h' + 3y_0' h'^2 - 2y_0' h' - h'^2 \Big] dx =$$

$$= \int_a^b \Big[h'^3 + \left(3y_0'^2 + 3y_0'\right) h' + \left(3y_0' - 1\right) h'^2 \Big] dx = \int_a^b h'^3(x)\, dx\,.$$

Если теперь возьмем $h(x) = x(b - x)$, то получим $\Delta J = 0$. Следовательно, при $3B = b$ экстремаль $y_0(x) = \dfrac{B}{b}x$ не доставляет строгого локального экстремума функционалу (18). ■

Пример 4. Рассмотрим задачу о наименьшей площади поверхности вращения (см. пример 3 § 2), т.е. задачу отыскания минимума функционала

$$J(y) = 2\pi \int_{-a}^{a} y\sqrt{1 + y'^2}\, dx\,, \quad y(-a) = y(a) = y_a > 0\,. \qquad (19)$$

Решение. В примере 3 § 2 было показано, что локальный минимум может достигаться только на семействе функций $y_0(x) = \alpha \operatorname{ch}\dfrac{x}{\alpha}$, где α – наибольший корень уравнения

$$g(\alpha) = \alpha \operatorname{ch}\frac{a}{\alpha} = y_a\,.$$

Функция $g(\alpha)$ достигает своего наименьшего значения на полуоси $\alpha > 0$ в некоторой точке α_1 и предположим, что

$g(\alpha_1) < g(\alpha_0) = y_b$. Составим уравнение Якоби, для этого с учетом тождества $y_0(x) = \alpha\sqrt{1 + y_0'^2}$ (см. пример 3 § 2, формула (14)) вычислим

$$P(x) = F_{y'y'}\Big|_{y=y_0(x)} = \frac{2\pi y_0}{(1 + y_0'^2)^{3/2}} = \frac{2\pi\alpha_0^3}{y_0^2},$$

$$Q(x) = \left[F_{yy} - \frac{d}{dx}F_{yy'}\right]_{y=y_0(x)} = -2\pi\frac{y_0''}{(1 + y_0'^2)^{3/2}} = -2\pi\alpha_0^3\frac{y_0''}{y_0^3}.$$

Тогда уравнение Якоби примет вид

$$h''(x) - \frac{2y_0'}{y_0}h'(x) + \frac{y_0''}{y_0}h(x) = 0$$

или

$$h''(x) - \frac{2}{\alpha_0}\,\mathrm{th}\,\frac{x}{\alpha_0}h'(x) + \frac{1_0}{\alpha_0^2}h(x) = 0. \qquad (20)$$

Д.у. (20) имеет два линейно независимых решения

$$h_1(x) = \mathrm{sh}\,\frac{x}{\alpha_0}, \quad h_2(x) = \mathrm{ch}\,\frac{x}{\alpha_0} - \frac{x}{\alpha_0}\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{\alpha_0}.$$

Тогда его общее решение определяется по формуле

$$h(x) = C_1h_1(x) + C_2h_2(x),$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Отсюда найдем решения, удовлетворяющие условию $h(-a) = 0$:

$$h(x) = C\left[h_2(a)h_1(x) + h_1(a)h_2(x)\right] =$$

$$= C\left[\mathrm{sh}\,\frac{a+x}{\alpha_0} - \frac{a+x}{\alpha_0}\,\mathrm{sh}\,\frac{a}{\alpha_0}\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{\alpha_0}\right]. \qquad (21)$$

Найдем производную функции (21)

$$h'(x) = \frac{C}{\alpha_0}\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{\alpha_0}\left[\mathrm{ch}\,\frac{a}{\alpha_0} - \frac{a+x}{\alpha_0}\,\mathrm{sh}\,\frac{a}{\alpha_0}\right].$$

Теперь рассмотрим функцию $g(\alpha)$, найдем ее производные

$$g'(\alpha) = \mathrm{ch}\,\frac{a}{\alpha} - \frac{a}{\alpha}\,\mathrm{sh}\,\frac{a}{\alpha}, \quad g''(\alpha) = \frac{a^2}{\alpha^3}\,\mathrm{ch}\,\frac{a}{\alpha} > 0. \qquad (22)$$

Поскольку функция $g(\alpha)$ в точке $\alpha=\alpha_0$ имеет наименьшее значение, то $g'(\alpha)<0$ при $0<\alpha<\alpha_1$ и $g'(\alpha)>0$ при $\alpha>\alpha_1$. В частности, $g'(\alpha_0)>0$, так как $\alpha_0>\alpha_1$. Тогда из равенства (22) следует

$$h'(x)=\frac{C}{\alpha_0}\operatorname{ch}\frac{x}{\alpha_0}\left(g'(\alpha_0)-\frac{x}{\alpha_0}\operatorname{sh}\frac{a}{\alpha_0}\right)>0$$

при $-a\le x\le 0$ и $\alpha=\alpha_2$, поэтому $h(x)>0$ при $-a<x\le 0$. Пусть $x\in(0,a]$. В этом случае в формуле (21) множители при $\alpha=\alpha_2$

$$h_2(a)=\operatorname{ch}\frac{a}{\alpha_0}-\frac{a}{\alpha_0}\operatorname{sh}\frac{a}{\alpha_0}=g'\left(\alpha_0\right)>0,$$

$$h_2(x)=\operatorname{ch}\frac{x}{\alpha_0}-\frac{x}{\alpha_0}\operatorname{sh}\frac{x}{\alpha_0}=g'\left(\frac{a\alpha_0}{x}\right)>0,$$

так как $\dfrac{a\alpha_0}{x}\ge\alpha_0$. Тогда $h(x)>0$ на $(0,a]$ и в силу алгоритма $y_0(x)=\alpha_0\operatorname{sh}\dfrac{x}{\alpha_0}$ доставляет строгий локальный минимум функционалу (19). ■

§ 4. Обобщение вариационной задачи на функционалы более общего вида

В этом параграфе будут рассмотрены вариационные задачи, когда

а) подынтегральная функция F содержит производные высших порядков y', y'', …, $y^{(n)}$, $n>1$;

б) функция F зависит от многих функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$, т.е. от вектор-функции $\vec{y}(x)=\left(y_1(x),y_2(x),\dots,y_n(x)\right)$;

в) функция F содержит функцию $u=u\left(x_1,x_2,\dots,x_n\right)$ от многих переменных и ее частные производные $u_{x_1},u_{x_2},\dots,u_{x_n}$.

Во всех случаях проводится постановка задачи и необходимых условий ее разрешимости.

1. Функционалы, зависящие от производных высших порядков

Рассмотрим функционал

$$J(y)=\int_a^b F\left(x,y(x),y'(x),...,y^{(n)}(x)\right)dx, \qquad (1)$$

где функция $F\left(x,y,z_1,z_2,...,z_n\right)$ – $(n+1)$ раз непрерывно дифференцируема по совокупности переменных $a\le x\le b$, $-\infty<y,z_1,z_2,...,z_n<+\infty$, на множестве функций $y(x)\in C^n[a,b]$, удовлетворяющих граничным условиям

$$y^{(i)}(a)=y_{ia}, \quad y^{(i)}(b)=y_{ib}, \quad i=\overline{0,n-1}, \qquad (2)$$

и ставится задача об отыскании слабого локального экстремума данного функционала (1) при условиях (2).

Данная задача является обобщением вариационной задачи с закрепленными концами.

Выведем формулу первой вариации функционала (1). Рассмотрим функционал $\Phi(t)=J(y+t\,h)$, где приращение $h(x)\in C^n[a,b]$ и $h^{(i)}(a)=h^{(i)}(b)=0$, $i=\overline{0,n-1}$. Функция $\Phi(t)$ является непрерывно дифференцируемой как собственный интеграл и

$$\Phi'(0)=\left.\frac{dJ(y+t\,h)}{dt}\right|_{t=0}=\int_a^b\left[\frac{\partial F}{\partial y}h+\frac{\partial F}{\partial y'}h'+...+\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}h^{(n)}\right]dx. \qquad (3)$$

Интеграл (3) называется первой вариацией функционала (1) и обозначается $\delta J(y+t\,h)$, т.е.

$$\delta J(y+th)=\int_a^b\left[\frac{\partial F}{\partial y}h+\frac{\partial F}{\partial y'}h'+...+\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}h^{(n)}\right]dx,$$

где $h(x)\in \overset{\circ}{C}{}^n[a,b]$. Интегрируя здесь по частям с учетом граничных условий относительно $h(x)$, имеем

$$\int_a^b F_{y^{(k)}}h^{(k)}(x)\,dx=(-1)^k\int_a^b h(x)\frac{d^k}{dx^k}F_{y^{(k)}}\,dx,$$

где $0\le k\le n$. Тогда первая вариация примет вид

$$\delta J(y,h)=\int_a^b h(x)\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{d^k}{dx^k}F_{y^{(k)}}\,dx\,. \qquad (4)$$

По условию $y(x)$ является экстремумом задачи (1) и (2), тогда $\delta J(y,h)=0$ для любого $h(x)\in \overset{\circ}{C}{}^n[a,b]$. Из равенства (4) в силу основной леммы вариационного исчисления сумма под знаком интеграла (4) обращается в нуль. Тем самым получаем, что функция $y(x)$ удовлетворяет на $[a,b]$ уравнению Эйлера–Пуассона

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}+\ldots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}=0 \qquad (5)$$

и граничным условиям (2).

Следовательно, нами доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Если функция* $y(x)\in C^{2n}[a,b]$ *доставляет слабый локальный экстремум функционалу* (1)*, то функция* $y(x)$ *является решением на* $[a,b]$ *дифференциального уравнения Эйлера–Пуассона* (5).

Таким образом, вариационную задачу (1), (2) свели к краевой задаче для д.у. (5) порядка $2n$ с граничными условиями (2).

Пример 1. Найти минимум вариационной задачи

$$J(y)=\int_0^1\left(y''^2+y'^2-24xy\right)dx\,, \qquad (6)$$

$$y(0)=y(1)=0\,,\quad y'(0)=2\,,\quad y'(1)=-4\,. \qquad (7)$$

Решение. Составим уравнение Эйлера

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}=-24x-2y''+2y^{IV}=0$$

или

$$y^{IV}-y''=12x\,.$$

Полученное линейное д.у. 4-го порядка имеет общее решение

$$y(x)=C_1+C_2x+C_3e^x+C_4e^{-x}-2x^3\,,$$

где C_i, $i=\overline{1,4}$, – произвольные постоянные. Удовлетворяя общее решение граничным условиям (7) найдем, $C_1=C_3=C_4=0$, $C_2=2$. Тогда находим искомую экстремаль $y_0(x)=2x\left(1-x^2\right)$.

Покажем, что она доставляет минимум функционалу (6). Для этого выясним знак приращения

$$\Delta J = J(y_0 + h) - J(y_0) = \int_a^b \left[h''^2 + h'^2 + 2y''h'' + 2y'h' - 24xh \right] dx =$$

$$= \int_0^1 \left[h''^2 + h'^2 + 2\left(y^{IV} - y'' - 12x \right) h \right] dx = \int_0^1 \left[h''^2 + h'^2 \right] dx > 0$$

для любой функции $h(x) \in \overset{\circ}{C}{}^2[0,1]$ и $h(x) \not\equiv 0$.

Следовательно, функция $y_0(x) = 2x\left(1 - x^2\right)$ доставляет абсолютный минимум функционалу (6). ■

2. Функционалы, зависящие от многих функций, т.е. от вектор-функции

Рассмотрим функционал

$$J(y) = \int_a^b F\left(x, \vec{y}(x), \vec{y}'(x)\right) dx, \tag{8}$$

где $\vec{y}(x) = \left(y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)\right)$, $F\left(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n'\right)$ – заданная дважды непрерывно дифференцируемая функция по совокупности переменных в области $a \le x \le b$, $-\infty < y_i, y_i' < +\infty$, $i = \overline{1,n}$, на множестве вектор-функций $\vec{y}(x) \in C^1[a,b]$, удовлетворяющих граничным условиям

$$\vec{y}(a) = \vec{y}_a, \quad \vec{y}(b) = \vec{y}_b, \tag{9}$$

где $\vec{y}_a = \left(y_{1a}, y_{2a}, ..., y_{na}\right)$, $\vec{y}_b = \left(y_{1b}, y_{2b}, ..., y_{nb}\right)$ – заданные постоянные векторы.

Теорема 2. *Если вектор-функция* $\vec{y}(x) \in C^2[a,b]$ *доставляет слабый локальный экстремум функционалу* (8) *при условиях* (9), *то вектор-функция* $\vec{y}(x)$ *удовлетворяет системе уравнений Эйлера*

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'} = 0, \quad i = \overline{1,n}. \tag{10}$$

Доказательство. Пусть $\vec{y}_0(x)=\left(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0\right)$ – искомая экстремаль. Рассмотрим функционал (8) на вектор-функциях вида $\left(y_1^{(0)}, \ldots, y_{i-1}^{(0)}, y_i, y_{i+1}^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}\right)$. Тогда имеем функционал, зависящий от одной неизвестной функции $y_i(x)$:

$$J(y_i)=\int_a^b F\Big(x, y_1^{(0)}(x), \ldots, y_{i-1}^{(0)}(x), y_i(x), y_{i+1}^{(0)}(x), \ldots,$$

$$y_n^0(x), y_1^{0\prime}(x), \ldots, {y_{i-1}^{0}}'(x), y_i'(x), {y_{i+1}^{0}}'(x), \ldots, y_n^{0\prime}(x)\Big)dx$$

и задачу с закрепленными концами

$$y_i(a)=y_{ia}\,, \quad y_i(b)=y_{ib}\,.$$

Пусть для определенности $\vec{y}_0(x)$ доставляет слабый локальный минимум функционалу (8). Тогда функционал $J(y_i)$ достигает своего наименьшего значения при $y_i=y_i^0(x)$ и в силу теоремы 1 § 2 выполняется уравнение Эйлера

$$F_{y_i}-\frac{d}{dx}F_{y_i'}=0$$

при $y_i=y_i^0(x)$. В силу произвольности i, $1\le i\le n$, экстремаль $\vec{y}_0(x)$ удовлетворяет системе (10).

Пример 2. Найти минимум функционала

$$J\left(y_1, y_2\right)=\int_0^{\pi/2}\left(y_1'^2+y_2'^2+2ay_1y_2+2bxy_1\right)dx \tag{11}$$

при условиях

$$y_1(0)=-1\,, \quad y_2(0)=1,\; y_1\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\,, \quad y_2\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{b}{a}\frac{\pi}{2}, \tag{12}$$

где a и b – заданные вещественные постоянные, $\sin\dfrac{\pi\sqrt{a}}{2}\neq 0$, $a>0$.

Решение. Составим систему уравнений Эйлера

$$F_{y_1}-\frac{d}{dx}F_{y_1'}=2b\,x+2a\,y_2-2y_1''=0\,,$$

$$F_{y_2}-\frac{d}{dx}F_{y_2'}=2a\,y_1-2y_2''=0\,.$$

Из второго д.у. находим $y_1=\frac{1}{a}y_2''$ и подставим в первое. Тогда получим д.у.

$$y_2^{IV}-\alpha^4 y_2=a\,b\,x\,,\quad \alpha^4=a^2\,,$$

общее решение которого определяется по формуле

$$y_2(x)=C_1e^{\alpha x}+C_2e^{-\alpha x}+C_3\cos\alpha x+C_4\sin\alpha x-\frac{b}{a}x\,,$$

здесь C_i, $i=\overline{1,4}$, – произвольные постоянные. Поскольку $y_1(x)=\frac{1}{a}y_2''$, то

$$y_1(x)=C_1e^{\alpha x}+C_2e^{-\alpha x}-C_3\cos\alpha x+C_4\sin\alpha x\,.$$

Удовлетворяя функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ граничным условиям (12), найдем $C_1=C_2=0$, $C_3=1$, $C_4=\operatorname{ctg}\frac{\alpha\pi}{2}$. Тогда пара функций

$$y_1(x)=\frac{1}{\sin\frac{\alpha\pi}{2}}\sin\alpha\left(x-\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y_2(x)=-\frac{1}{\sin\frac{\alpha\pi}{2}}\sin\alpha\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{b}{a}x$$

определяет экстремаль вариационной задачи (11) и (12). Покажем, что эта пара доставляет слабый локальный минимум функционалу (11). Составим приращение

$$\Delta J=J\left(y_1+h_1,y_2+h_2\right)-J\left(y_1,y_2\right)=$$

$$=\int\limits_0^{\pi/2}\left[h_1'^2+h_2'^2+2h_1'y_1'+2h_2'y_2'+2h_1\left(b\,x+ay_2\right)+2ay_1h_2+2ah_1h_2\right]dx\,,$$

где $h_i(x)\in C^1\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $h_i(0)=h_i\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, $i=1,2$. Здесь, интегрируя по частям в слагаемом $2h_1'y_1'$ и $2h_2'y_2'$ и учитывая систему уравнений Эйлера, получим

$$\Delta J=\int_0^{\pi/2}\left(h_1'^2+h_2'^2+2a\,h_1h_2\right)dx.$$

В силу оценки (17) § 3 имеем

$$\int_0^{\pi/2} h_i'^2(x)\,dx\geq\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi/2} h_i^2(x)\,dx.$$

Тогда

$$\Delta J\geq\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi/2}\left(h_1^2+h_2^2+2\frac{\pi^2}{4}a\,h_1h_2\right)dx=$$

$$=\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi/2}\left[\left(h_1+\frac{\pi^2a}{4}h_2\right)^2+h_2^2\,\frac{16-\pi^4a^2}{16}\right]dx>0,$$

если $a<\frac{4}{\pi^2}$. Следовательно, найдена пара функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$, которая при всех $a<\frac{4}{\pi^2}$ и любых $b\in\mathbb{R}$ доставляет абсолютный минимум функционалу (11) при условиях (12). ■

3. Функционалы от функций многих переменных

Рассмотрим функционал

$$J(u)=\int_D F\left(x_1,x_2,\ldots,x_n,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)dx, \tag{13}$$

где $u=u(x)$, $x=\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$, $dx=dx_1\,dx_2\ldots dx_n$, D – ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$, $n>1$, с гладкой границей Γ; $F(\cdot)$ – заданная дважды непрерывно дифференцируемая функция по совокупности переменных в замкнутой области $x\in\bar{D}=D\cup\Gamma$,

$-\infty < u, u_{x_1}, ..., u_{x_n} < +\infty$, во множестве функций $u(x) \in C^2(\bar{D})$, удовлетворяющих граничному условию

$$u(x)\big|_{\Gamma} = f(x), \quad x \in \Gamma. \tag{14}$$

Выведем формулу первой вариации функционала (13). Рассмотрим функцию $\Phi(t) = J(u + t\,h)$, где

$h(x) = h\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \in \overset{\circ}{C}{}^1(\bar{D})$, т.е. $h(x) \in C^1(\bar{D})$ и $h(x)\big|_{\Gamma} = 0$.

Функция $\Phi(t)$ непрерывно дифференцируема, и вычислим производную

$$\Phi'(0) = \left.\frac{dJ(u + t\,h)}{dt}\right|_{t=0} = \int_D \left[F_u h + \sum_{k=1}^{n} F_{u_{x_k}} h_{x_k} \right] dx. \tag{15}$$

Теорема 3. *Если функция* $u(x) \in C^2(\bar{D})$ *доставляет слабый локальный экстремум функционалу* (13) *с условиями* (14)*, то она в области* D *удовлетворяет уравнению Эйлера–Остроградского*

$$F_u - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} F_{u_{x_k}} = 0. \tag{16}$$

Доказательство. В интеграле (15) под знаком суммы интегрируем по частям и, используя формулу Гаусса–Остроградского, имеем

$$\int_D h_{x_k} F_{u_{x_k}}\, dx = \int_D h_{x_k} F_{u_{x_k}}\, dx_1 \cdots dx_k \cdots dx_n =$$

$$= -\int_D h \frac{\partial}{\partial x_k} F_{u_{x_k}}\, dx + \int_\Gamma h F_{u_{x_k}}\, dx_1 \cdots dx_{k-1} dx_{k+1} \cdots dx_n = -\int_D h \frac{\partial}{\partial x_k} F_{u_{x_k}}\, dx.$$

Тогда равенство (15) примет вид

$$\delta J(u, h) = \int_D \left(F_u - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} F_{u_{x_k}} \right) h\, dx. \tag{17}$$

По условию функция $u(x)$ является экстремумом функционала (13), тогда $\delta J(u, h) = 0$ при любой функции $h(x) \in \overset{\circ}{C}{}^1(\bar{D})$ и из равенства (17) получим

$$\int_D \left(F_u - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} F_{u_{x_k}} \right) h(x)\, dx = 0 .$$

Отсюда в силу основной леммы вариационного исчисления следует равенство (16), т.е. функция $u(x)$ в области D является решением д.у. в частных производных (16).

В этом случае функцию $u(x)$ также называют экстремалью вариационной задачей (13), (14). ■

Пример 3. Найти экстремаль функционала Дирихле

$$J(u) = \int_D \left(u_x^2 + u_y^2 \right) dx\, dy , \tag{18}$$

$$u\big|_\Gamma = f\left(x, y\right), \tag{19}$$

где $u = u\left(x, y\right)$, $D \subset \mathbb{R}^2_{xy}$.

Решение. Составим д.у. Эйлера–Остроградского

$$F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} = -2\left(u_{xx} + u_{yy} \right) = 0 , \tag{20}$$

т.е. уравнение Лапласа является искомым уравнением. Следовательно, экстремаль является гармонической в области D функцией с условием $u\big|_\Gamma = f\left(x, y\right)$, т.е. является решением задачи Дирихле. Как известно из курса «Уравнения математической физики», такая задача при условии $f\left(x, y\right) \in C(\bar{D})$ имеет единственное решение. Однако не при любой непрерывной функции $f\left(x, y\right)$ частные производные u_x и u_y будут непрерывны вплоть до границы Γ области D. Имеются примеры функций $f\left(x, y\right)$, при которых интеграл Дирихле от соответствующей гармонической функции расходится [19, Т. 4, часть 1, п. 106]. В случае, когда функция $u\left(x, y\right)$ из класса $C(\bar{D}) \bigcap C^2(D)$ имеет конечные производные u_x и u_y вплоть до границы Γ, вариационная задача (18), (19) и задача Дирихле (20), (19) эквивалентны. ■

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 4. *Если при заданной* $f\left(x, y\right)$ *функционал* (18) *имеет конечное значение для некоторой функции* $u\left(x, y\right)$, *то он* *имеет конечное значение и для гармонической функции* $v(x,y)$ *с тем же граничным условием* $v|_\Gamma = f(x,y)$ *и* $J(v) \le J(u)$*, причем знак равенства имеет место только в том случае, когда* $u(x,y)$ *совпадает с* $v(x,y)$*.*

Доказательство. Предположим, что гармоническая в области D функция $v(x,y)$ имеет ограниченные частные производные v_x и v_y вплоть до границы Γ. Функцию $u(x,y)$ возьмем в виде $u = v + g$, где $g(x,y)$ – любая функция из $\overset{\circ}{C}{}^1(\bar{D})$. Тогда имеем

$$J(u) = J(v+g) = J(v) + J(g) + 2\int_D \left(v_x g_x + v_y g_y\right) dx\,dy\,. \qquad (21)$$

Применим формулу Грина к последнему интегралу:

$$I = \int_D \left(v_x g_x + v_y g_y\right) dx\,dy = -\int_D g \Delta v\, dx\,dy + \int_\Gamma g \frac{\partial v}{\partial n} dS\,.$$

Отсюда, поскольку v – гармоническая функция, $g|_\Gamma = 0$, имеем интеграл $I = 0$. Тогда из (21) следует $J(u) = J(v) + J(g)$. Ясно, что $J(g) \ge 0$, причем знак равенства может быть только при $g(x,y) \equiv 0$ в D. Следовательно, $J(v) \le J(u)$ и знак равенства может иметь место только при $u \equiv v$, т.е. такая гармоническая функция доставляет функционалу (18) наименьшее значение. Доказательство этой теоремы в общем случае можно посмотреть в книге Смирнова В.И. [19, Т. 4, ч. 1, п. 106]. ■

Пример 4. Площадь гладкой поверхности $u = u(x,y)$

$$S(u) = \int_D \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}\, dx\,dy \qquad (22)$$

представляет функционал на множестве функций $C^1(D \cup \Gamma)$. Ставится задача: среди поверхностей $u = u(x,y)$, проходящих через замкнутый контур Γ, найти поверхность наименьшей площади.

Решение. Уравнение Эйлера–Остроградского в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{u_y}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}=0$$

или

$$u_{xx}\left(1+u_y^2\right)-2u_xu_yu_{xy}+u_{yy}\left(1+u_x^2\right)=0\,. \tag{23}$$

Таким образом, поставленная задача для функционала (22) свелась к краевой задаче для д.у. (23) с граничным условием $u\big|_{\Gamma}=g\left(x,y\right)$, где $g\left(x,y\right)$ – заданная достаточно гладкая функция.

Д.у. (23) представляет собой уравнение поверхностей, средняя кривизна которых равна нулю. Такие поверхности называются минимальными. Физически минимальные поверхности реализуются мыльными пленками, натянутыми на контур Γ. ■

§ 5. Условный экстремум

Из курса математического анализа известна задача на условный экстремум для функций. Восполним идею решения этой задачи.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ из $C^1(D)$, где $D\subset\mathbb{R}^n$, $n\geq 1$, $x=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$. Требуется найти экстремум функции $f(x)$ при условии $g(x)=0$.

Эта задача решается с помощью функции Лагранжа

$$L\left(x_1,x_2,...,x_n,\lambda\right)=f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)+\lambda g\left(x_1,x_2,...,x_n\right),$$

где λ – дополнительный параметр и называется множителем Лагранжа. Точки экстремума определяются из условия

$$dL=0$$

или в более подробной форме из д.у.

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=\frac{\partial f}{\partial x_1}+\lambda\frac{\partial g}{\partial x_1}=0,\ldots,\ \frac{\partial L}{\partial x_n}=\frac{\partial f}{\partial x_n}+\lambda\frac{\partial g}{\partial x_n}=0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial\lambda}=g=0\,.$$

Итак, если x_0 – точка локального экстремума функции $f(x)$ и градиент $\nabla g(x_0) \neq 0$, то существует λ_0 такое, что $dL = 0$ при $x = x_0$ и $\lambda = \lambda_0$.

Пусть заданы функционалы

$$J(y) = \int_a^b F\left(x, y, y'\right) dx, \tag{1}$$

$$K(y) = \int_a^b G\left(x, y, y'\right) dx,$$

где $F(\cdot)$ и $G(\cdot)$ – заданные дважды непрерывно дифференцируемые функции при $a \le x \le b$, $-\infty < y, y' < +\infty$. Требуется найти экстремум функционала $J(y)$ при выполнении условий

$$K(y) = l = \text{const}, \tag{2}$$

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b. \tag{3}$$

Равенство (2) называют условием связи.

Эта задача сводится к задаче на безусловный локальный экстремум для функционала

$$L(y) = J(y) + \lambda K(y) = \int_a^b \left(F + \lambda G\right) dx.$$

Теорема. *Пусть* $y(x) \in C^2[a,b]$ *доставляет слабый локальный экстремум функционалу* (1) *при условиях* (2), (3) *и пусть первая вариация* $\delta K(y,h) \not\equiv 0$ *для всех* $h(x) \in \overset{\circ}{C}{}^1[a,b]$. *Тогда существует множитель* λ *такой, что функция* $y(x)$ *удовлетворяет уравнению Эйлера для функционала* $L(y)$, *т.е. дифференциальному уравнению*

$$\left(F_y + \lambda G_y\right) - \frac{d}{dx}\left(F_{y'} + \lambda G_{y'}\right) = 0. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть $y(x)$ удовлетворяет условиям теоремы. Введем в рассмотрение функцию, близкую к $y(x)$:

$$y(x) + t_1 h_1(x) + t_2 h_2(x),$$

где t_1 и t_2 – малые параметры, $h_1(x), h_2(x) \in \overset{\circ}{C}{}^1[a,b]$, удовлетворяет граничным условиям (3). Рассмотрим функцию

$$\Phi\left(t_1,t_2\right) = J\left(y + t_1 h_1 + t_2 h_2\right),$$

и она будет иметь экстремум в точке $t_1 = t_2 = 0$ при условии, что $\Psi(0,0) = 0$, где

$$\Psi\left(t_1,t_2\right) = K\left(y + t_1 h_1 + t_2 h_2\right) - l .$$

Следовательно, имеем задачу на условный экстремум для функции $\Phi\left(t_1,t_2\right)$. Тогда

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial t_k}\right|_{t_1=t_2=0} = \int\limits_a^b \left(F_y h_k + F_{y'} h_k'\right) dx = \delta J\left(y, h_k\right), \qquad (5)$$

$$\left.\frac{\partial \Psi}{\partial t_k}\right|_{t_1=t_2=0} = \delta K\left(y, h_k\right), \quad k = 1,2 .$$

По условию теоремы существует функция $h_2(x)$ такая, что $\delta K\left(y, h_2\right) \neq 0$. В силу этого $\dfrac{\partial \Psi(0,0)}{\partial t_2} \neq 0$ при любой функции $h_1(x)$, и существует число $\lambda = \lambda_0$ такое, что $dL = 0$ при $t_1 = t_2 = 0$, $\lambda = \lambda_0$, здесь $L = \Phi + \lambda \Psi$ – функция Лежандра. На основании (5) при $t_1 = 0$, $t_2 = 0$, $\lambda = \lambda_0$ имеем

$$\frac{\partial L}{\partial t_2} = \frac{\partial \Phi}{\partial t_2} + \frac{\partial \Psi}{\partial t_2} = \delta J\left(y, h_1\right) + \lambda \delta K\left(y, h_1\right) = 0$$

для любой функции $h_1(x) \in \overset{\circ}{C}{}^1[a,b]$. В интегральной форме это тождество имеет вид

$$\int\limits_a^b \left[\left(F_y + \lambda G_y\right) h(x) + \left(F_{y'} + \lambda G_{y'}\right) h'(x)\right] dx = 0 .$$

Интегрируя здесь по частям слагаемое, содержащее $h'(x)$, и используя основную лемму вариационного исчисления, получим д.у. (4). ■

Пример 1. Среди простых и гладких кривых $y = y(x)$, $a \le x \le b$, данной длины $l > b - a$ закрепленными концами $y(a) = y(b) = 0$ найти ту, которая с отрезком $[a,b]$ оси Ox ограничивает наибольшую площадь.

Эту задачу исторически называют изопериметрической. В связи с этим в вариационном исчислении вариационные задачи типа (1) – (3) также называются изопериметрическими.

Решение. Для данной задачи функционалы $J(y)$ и $K(y)$ имеют вид

$$J(y) = \int_a^b f(x)\,dx\,, \quad K(y) = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx = l\,.$$

Составим д.у. Эйлера (4):

$$1 - \lambda \frac{y''}{\left(1 + y'^2\right)^{3/2}} = 0\,.$$

Умножим обе части на y' и проинтегрируем. Тогда получим

$$y = C_1 - \frac{\lambda}{\left(1 + y'^2\right)^{1/2}}\,. \tag{6}$$

Введем новую переменную $y' = \operatorname{tg} t$. Тогда из уравнения (6) найдем

$$y = C_1 - \lambda \cos t\,. \tag{7}$$

Дифференцируя это соотношение по x, имеем

$$y_x = \lambda \sin t \frac{dt}{dx} = \operatorname{tg} t\,.$$

Для определения $x(t)$ имеем д.у.

$$dx = \frac{dy}{y'_x} = \frac{\lambda \sin t\,dt}{\operatorname{tg} t} = \lambda \cos t\,dt\,.$$

Отсюда находим

$$x(t) = \lambda \sin t + C_2\,. \tag{8}$$

Таким образом, получили семейство кривых (7), (8), заданных параметрически. Исключая из равенств (7) и (8) параметр t, получим семейство окружностей

$$\left(x - C_2\right)^2 + \left(y - C_1\right)^2 = \lambda^2\,. \tag{9}$$

Три параметра C_1, C_2 и λ найдутся из граничных условий $y(a)=0$, $y(b)=0$ и $K(y)=l$. Действительно, из (9) найдем

$$y = C_1 + \sqrt{\lambda^2 - \left(x - C_2\right)^2}$$

и удовлетворим отмеченным условиям

$$C_1 + \sqrt{\lambda^2 - \left(a - C_2\right)^2} = 0, \quad C_1 + \sqrt{\lambda^2 - \left(b - C_2\right)^2} = 0,$$

$$\int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \lambda \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{\lambda^2 - \left(x - C_2\right)^2}} = \lambda \arcsin \frac{x - C_2}{\lambda}\Bigg|_a^b = l.$$

Из первых двух уравнений найдем $C_2 = \dfrac{a+b}{2}$. Из последнего равенства получим уравнение относительно λ

$$\arcsin \frac{b-a}{2\lambda} = \frac{l}{2\lambda},$$

которое имеет единственное решение $\lambda = \lambda_0$. Тогда находим постоянную

$$C_1 = -\sqrt{\lambda_0^2 - \frac{1}{4}(b-a)^2}.$$

Таким образом, если искомая кривая существует, то она есть ее дуга окружности

$$y_0(x) = -\sqrt{\lambda_0^2 - \frac{1}{4}(b-a)^2} + \sqrt{\lambda_0^2 - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}.$$

Вычислим эту площадь

$$J(y) = \int_a^b y_0(x)\, dx = \lambda_0^2 \arcsin \frac{b-a}{2\lambda_0} = \frac{\lambda_0 l}{2}. \blacksquare$$

Пример 2. Найти минимум интеграла

$$J(y) = \int_0^\pi y'^2\, dx, \quad y(0) = y(\pi) = 0, \tag{10}$$

при условии

$$K(y) = \int_0^\pi y^2(x)\, dx = 1. \tag{11}$$

Решение. Составим вспомогательный функционал

$$L(y)=\int_0^{\pi}\left(y'^2+\lambda y^2\right)dx$$

и найдем для него уравнение Эйлера

$$2\lambda y-\frac{d}{dx}\left(2y'\right)=0 \quad \text{или} \quad y''-\lambda y=0. \qquad (12)$$

Характеристическое уравнение $k^2-\lambda=0$ или $k_{1,2}=\pm\sqrt{\lambda}$. Параметр λ должен быть меньше нуля, так как если допустить, что $\lambda>0$, то общее решение д.у. (12) будет иметь вид

$$y=C_1e^{\sqrt{\lambda}x}+C_2e^{-\sqrt{\lambda}x}$$

и граничные условия из (10) будут удовлетворяться только при $C_1=0$, $C_2=0$, т.е. в этом случае $y(x)\equiv 0$. Но тогда не будет выполняться условие (11). В случае $\lambda=0$ решением уравнения Эйлера (12) является функция $y(x)=C_1x+C_2$. Удовлетворим граничным условиям (10), снова получим $y(x)\equiv 0$. Следовательно, $\lambda=-\alpha^2<0$, $\alpha=\mathrm{const}>0$. Тогда корни $k_{1,2}=\pm i\alpha=\pm\sqrt{-\lambda}i$ и общим решением уравнения (12) будет

$$y(x)=C_1\sin\alpha x+C_2\cos\alpha x.$$

Условие $y(0)=0$ дает $C_2=0$, а из условия $y(\pi)=0$ получим $\alpha=k$ ($k=1,2,\ldots$). Итак

$$y(x)=C_1\sin kx,$$

где C_1 пока не определено. Воспользовавшись условием связи (11), найдем

$$\int_0^{\pi}C_1^2\sin^2 kx\,dx=1.$$

Отсюда $C_1=\pm\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$. Значит

$$y(x)=\pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin kx. \qquad (13)$$

Условию Якоби удовлетворяют обе функции (13). На этих экстремалях выполняется условие (11). ■

Пример 3. Найти минимум задачи

$$J(y)=\int_0^{\pi} y'^2\,dx,\quad K(y)=\int_0^{\pi} y\sin x\,dx=1,$$

$$y(0)=y(\pi)=0.$$

Решение. Уравнение Эйлера имеет вид

$$\lambda\sin x-2y''=0.$$

Отсюда находим общее решение

$$y(x)=-\frac{\lambda}{2}\sin x+C_1x+C_2.$$

Из граничных условий и условия связи находим $C_1=C_2=0$, $\lambda=-4/\pi$. Тогда искомая экстремаль имеет вид

$$y_0(x)=\frac{2}{\pi}\sin x.$$

Покажем, что $y_0(x)$ дает абсолютный минимум данному функционалу $J(y)$. Для этого найдем приращение

$$\Delta J=J(y_0+h)-J(y_0)=\int_0^{\pi}\left[\left(y_0'+h'\right)^2-y_0'^2\right]dx=$$

$$=\int_0^{\pi}\left(h'^2+2y_0'h'\right)dx=\int_0^{\pi}\left(h'^2-2y_0''h\right)dx=$$

$$=\int_0^{\pi}h'^2(x)\,dx+\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}h(x)\sin x\,dx=\int_0^{\pi}h'^2(x)\,dx>0$$

для любой функции $h(x)\in\mathring{C}^1[0,\pi]$, $h(x)\not\equiv 0$ и $\int_0^{\pi}h(x)\sin x\,dx=0$. ■

Замечания. 1. Поставленная вариационная задача (1) – (3) обобщается на случай нескольких условий связи

$$K_j'(y)=\int_a^b G_i\left(x,y,y'\right)dx=l_j,\quad j=\overline{1,n},$$

и на случай функционалов $J(y)$, зависящих от вектор-функций $\vec{y}(x)=\left(y_1(x),y_2(x),...,y_n(x)\right)$.

2. Вариационная задача (1) – (3) обладает свойством взаимности, т.е. можно рассмотреть задачу для функционала $K(y)$ при выполнении условия связи $J(y)=l$.

§ 6. Задача Лагранжа

В этом параграфе будут заданы условия не интегрального типа, а функционального вида, зависящие от неизвестных функций и производных первого порядка этих функций.

Задача Лагранжа. Среди всех кривых $y=y(x)$, $z=z(x)$, $a\le x\le b$, лежащих на поверхности

$$S:\ g\left(x,y(x),z(x)\right)=0 \tag{1}$$

и закрепленных концами

$$y(a)=y_a,\quad y(b)=y_b,\quad z(a)=z_a,\quad z(b)=z_b, \tag{2}$$

найти те, которые дают экстремум функционалу

$$J\left(y,z\right)=\int_a^b F\left(x,y,z,y',z'\right)dx, \tag{3}$$

при этом концы кривых лежат на поверхности (1):

$$g\left(a,y_a,z_a\right)=g\left(b,y_b,z_b\right)=0, \tag{4}$$

$F(\cdot)$ – заданная дважды непрерывно дифференцируемая функция по совокупности переменных: $a\le x\le b$, $-\infty<y',z'<+\infty$; $g(\cdot)$ – также заданная непрерывно дифференцируемая функция при $a\le x\le b$, $-\infty<y,z<+\infty$ и

$$\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2>0,\quad a\le x\le b, \tag{5}$$

т.е. касательная плоскость к поверхности S ни в одной точке не становится перпендикулярной к оси Ox.

Уравнение (1) называют условием связи для неизвестных функций $y(x)$ или $z(x)$.

Поставленная задача нетрудно сводится к вариационной задаче с одной неизвестной функцией. Действительно, в силу условия (5) уравнение (1) можно решить относительно y или z для определенности относительно $z = z(x, y)$. Вставляя выражения z и z' в функцию F, мы получим под знаком интеграла функцию, зависящую от x, y, y'. Такой подход на практике трудно реализуем. Поэтому аналогично § 5 используют метод неопределенных множителей Лагранжа. Составим функцию Лагранжа

$$L = F\left(x, y, z, y', z'\right) + \lambda(x) g\left(x, y, z\right),$$

где $\lambda(x)$ – любая функция из $C[a,b]$, называется неопределенным множителем Лагранжа.

Теорема 1. *Если кривая* $\gamma:\ y = y(x),\ z = z(x),\ a \le x \le b$, *является решением задачи Лагранжа* (1) – (4) *при условии* (5)*, то существует функция* $\lambda(x)$ *такая, что кривая* γ *дает экстремум функционалу* $\int\limits_a^b \left(F + \lambda g\right) dx$, *т.е. выполняется система уравнений Эйлера*

$$\begin{cases} F_y + \lambda(x) g_y - \dfrac{d}{dx} F_{y'} = 0, \\ F_z + \lambda(x) g_z - \dfrac{d}{dx} F_{z'} = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Доказательство. В силу условия (5) по крайней мере одна из производных g_y или g_z отлична от нуля. Пусть для определенности $g_z \ne 0$ на $[a,b]$. Тогда по теореме неявной функции уравнение (1) однозначно разрешимо относительно $z = f(x, y)$ и $f_y = -\dfrac{g_y}{g_z}$. Функцию $z = f(x, y)$ подставим в функционал (3):

$$J\left(y, f\right) = \int\limits_a^b F\Big[x, y(x), f\left(x, y(x)\right), y'(x), f_x\left(x, y(x)\right) +$$

$$+ f_y\left(x, y(x)\right) y'(x)\Big] dx = \int\limits_a^b G\left(x, y, y'\right) dx.$$

В результате получим функционал, для которого функция $y(x)$ является экстремумом. Тогда функция $y(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера

$$0 = G_y - \frac{d}{dx} G_{y'} = F_y + F_z f_y + F_{z'}\left(f_{xy} + f_{yy} y'\right) - \frac{d}{dx}\left[F_{y'} + F_{z'} f_y\right]. \quad (7)$$

Предварительно вычислим

$$\frac{d}{dx}\left(F_{z'} f_y\right) = f_y \frac{d}{dx} F_{z'} + F_{z'}\left(f_{yx} + f_{yy} y'\right).$$

Тогда из равенства (7) получим

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + f_y\left(F_z - \frac{d}{dx} F_{z'}\right) = 0.$$

Отсюда с учетом равенства $f_y = -\dfrac{g_y}{g_z}$ найдем равенство

$$\frac{1}{g_y}\left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}\right) = \frac{1}{g_z}\left(F_z - \frac{d}{dx} F_{z'}\right). \quad (8)$$

Обе части этого равенства зависят от x, следовательно, они равны некоторой функции $\lambda(x)$. Тогда из равенства (8) получим систему (6). ■

Отметим, что доказательство теоремы приведено в случае, когда уравнение (1) разрешимо относительно $z = f(x, y)$ на целом отрезке $[a, b]$, хотя теорема о неявной функции имеет локальный характер. В общем случае доказательство этой теоремы можно посмотреть в [13, с. 104], [15, с. 327-329].

Пример 1 (задача об отыскании геодезических линий). Среди всех кривых $y = y(x)$, $z = z(x)$, $a \le x \le b$, лежащих на поверхности (1) и соединяющих две точки $\left(a, y(a), z(a)\right)$ и $\left(b, y(b), z(b)\right)$ этой поверхности, найти ту, которая имеет наименьшую длину.

Такие линии называют геодезическими.

Решение. Эта задача сводится к нахождению минимума интеграла

$$J(y, z) = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx$$

при условиях (1), (2), (4). Составим систему уравнений Эйлера (6):

$$\lambda(x)g_y = \frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\,, \tag{9}$$

$$\lambda(x)g_z = \frac{d}{dx}\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\,. \tag{10}$$

Чтобы выяснить основное геометрическое свойство геодезических линий, продифференцируем уравнение (1) полным образом по x:

$$g_x + g_y y' + g_z z' = 0\,. \tag{11}$$

Умножая обе части (11) на $\lambda(x)$ и подставляя вместо λg_y и λg_z из выражения (9) и (10), после преобразований получим

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} - \lambda g_x = 0\,. \tag{12}$$

Отметим, что дроби, стоящие под знаком производной по x в (9), (10) и (12), равны направляющим косинусам касательных к искомой геодезической линии. Поэтому их можем переписать в виде

$$\frac{d\cos\alpha}{dx} = \lambda g_x\,,\quad \frac{d\cos\beta}{dx} = \lambda g_y\,,\quad \frac{d\cos\gamma}{dx} = \lambda g_z\,.$$

Далее, пользуясь формулой $\dfrac{dx}{ds} = \cos\alpha$, можем заменить дифференцирование по x на s. Тогда имеем

$$\frac{d\cos\alpha}{ds} = \mu g_x\,,\quad \frac{d\cos\beta}{ds} = \mu g_y\,,\quad \frac{d\cos\gamma}{ds} = \mu g_z\,, \tag{13}$$

где $\mu = \lambda\cos\alpha$. Левые части уравнений (13) пропорциональны направляющим косинусам главной нормали к кривой, а правые части – направляющим косинусам нормали к поверхности (1). Отсюда получаем следующий результат: вдоль геодезической линии главная нормаль к линии будет одновременно и нормалью к поверхности (1). ■

Замечание. Отметим, задача Лагранжа обобщается на случай функционалов, зависящих от $n \geq 2$ неизвестных функций и $m < n$ уравнений связи. При этом условия связи могут содержать и производные первого порядка от неизвестных функций. Связь (1) называется голономной, в случае, когда уравнение (1) дополнительно содержит производные первого порядка y' и z', такая связь называется неголономной.

Например, требуется найти экстремум интеграла (3), когда искомая кривая γ: $y = y(x)$, $z = z(x)$, удовлетворяет д.у.:

$$g\left(x, y, z, y', z'\right) = 0 \tag{14}$$

и на концах $x = a$ и $x = b$ условиям (2).

В этом случае справедлива следующая

Теорема 2. *Если кривая* γ *дает экстремум функционалу* (3) *при условии связи* (14) *и вдоль кривой* γ *одна из производных* $g_{y'}$ *и* $g_{z'}$ *не равна нулю, то существует функция* $\lambda(x)$ *такая, что* γ *будет интегральной кривой системы дифференциальных уравнений Эйлера*

$$H_y - \frac{d}{dx} H_{y'} = 0, \quad H_z - \frac{d}{dx} H_{z'} = 0,$$

где $H = F + \lambda g$ *.*

Указанные выше задачи распространяются также на задачи более общие. Требуется найти экстремум интеграла

$$\int_a^b F\left(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n'\right) dx, \tag{15}$$

когда искомая кривая γ: $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, …, $y_n = y_n(x)$, $a \le x \le b$, удовлетворяет системе дифференциальных соотношений

$$g_j\left(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n'\right) = 0, \quad j = \overline{1, k}, \tag{16}$$

и некоторым условиям на концах $x = a$ и $x = b$ в количестве $2n + k$.

Теорема 3. *Если кривая* γ *дает экстремум функционалу* (15) *при условиях связей* (16) *и вдоль кривой* γ *один из главных определителей функциональной матрицы* $\dfrac{\partial g_j}{\partial y_i'}$, $j = \overline{1, k}$, $i = \overline{1, n}$, *отличен от нуля, то кривая* γ *является интегральной кривой системы* n *дифференциальных уравнений Эйлера*

$$H_{y_i} - \frac{d}{dx} H_{y_i'} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \tag{17}$$

и k *уравнений связи* (16)*, где* $H = F + \sum\limits_{j=1} \lambda_j(x) g_j$.

Пример 2 (задача Чаплыгина С.А.). По какой замкнутой кривой плоскости $\mathbb{R}^2_{xy}$ должен двигаться самолет, имеющий собственную скорость v_0, чтобы за промежуток времени T облететь наибольшую площадь. При этом предполагаются постоянное направление и постоянная величина скорости ветра.

Решение. Пусть направление скорости ветра совпадает с осью Ox и α – угол между продольным направлением самолета и осью Ox. Обозначим через $x(t)$ и $y(t)$ координаты положения самолета в момент времени t. Скорость v самолета есть геометрическая сумма собственной скорости v_0 и скорости ветра v_1. Поскольку компоненты v равны x' и y', то имеем уравнения

$$x'(t) = v_0 \cos\alpha(t) + v_1, \quad y'(t) = v_0 \sin\alpha(t). \tag{18}$$

Площадь, ограниченная замкнутой траекторией самолета, определяется интегралом

$$S = \frac{1}{2}\int_0^T \left(xy' - yx'\right) dx. \tag{19}$$

Задача состоит в отыскании максимума интеграла (19) при двух условиях связи (18). Для этого надо найти безусловный экстремум функционала

$$\int_0^T H\left(x, y, x', y', \alpha\right) dt,$$

где $H = xy' - yx' + \lambda_1\left(x' - v_0\cos\alpha - v_1\right) + \lambda_2\left(y' - v_0\sin\alpha\right)$ зависит от трех неизвестных функций $x(t)$, $y(t)$ и $\alpha(t)$. Составим систему д.у. Эйлера (17):

$$H_x - \frac{d}{dt}H_{x'} = 0, \quad H_y - \frac{d}{dt}H_{y'} = 0, \quad H_\alpha - \frac{d}{dt}H_{\alpha'} = 0.$$

После подстановки функции H имеем

$$y' - \frac{d}{dt}\left(-y + \lambda_1\right) = 0, \quad -x' - \frac{d}{dt}\left(x + \lambda_2\right) = 0, \tag{20}$$

$$\lambda_1 \sin\alpha - \lambda_2 \cos\alpha = 0. \tag{21}$$

Из д.у. (20) найдем

$$2y + C_1 = \lambda_1, \quad 2x + C_2 = -\lambda_2. \tag{22}$$

За счет параллельного переноса начала координат в (22) можно добиться, что $C_1 = C_2 = 0$. Тогда

$$x = -\frac{\lambda_2}{2}, \quad y = \frac{\lambda_1}{2}. \tag{23}$$

Далее перейдем к полярным координатам: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, r – радиус-вектор и φ – аргумент точки (x, y), изображающий положение самолета в момент времени t. Поскольку

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x},$$

то из (23) имеем

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}. \tag{24}$$

Из уравнения (21) следует, что

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}. \tag{25}$$

Тогда из равенств (24) и (25) получим, что

$$\alpha = \varphi + \frac{\pi}{2}, \tag{26}$$

это означает направление самолета ортогонально радиус-вектору. Найденное α по формуле (26) подставим в условия связи (18). Тогда получим систему д.у.

$$x' = -v_0 \sin\varphi + v_1, \quad y' = v_0 \cos\varphi.$$

Первое из этих д.у. умножим на x, а второе на y и почленно сложим. В результате получим

$$xx' + yy' = v_1 x = v_1 r\cos\varphi = v_1 r\sin\alpha$$

или

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(x^2 + y^2\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(r^2\right) = r\frac{dr}{dt} = v_1 r\sin\alpha.$$

На сновании (18) $\sin\alpha = \frac{1}{v_0} y'(t)$. Тогда $\frac{dr}{dt} = \frac{v_1}{v_0}\frac{dy}{dt}$. Отсюда

$$r = \frac{v_1}{v_0} y + C. \tag{27}$$

Уравнение (27) представляет уравнение конического сечения с фокусом в начале координат. Поскольку $\frac{v_1}{v_0} < 1$ (скорость самолета должна быть больше, чем скорость ветра), то уравнение (27) дает нам эллипс с эксцентриситетом $\frac{v_1}{v_0}$ и большой осью, направленной вдоль оси Oy.

Следовательно, кривой максимальной площади облета является эллипс с большой осью, ортогональной направлению ветра с эксцентриситетом, равным отношению скорости ветра к скорости самолета, при этом направление самолета перпендикулярно радиус-вектору эллипса. ■

§ 7. Необходимые и достаточные условия сильного локального экстремума

Рассмотрим функционал

$$J(y) = \int_a^b F\left(x, y, y'\right) dx, \tag{1}$$

где $F\left(x, y, y'\right) \in C^2(\Pi)$ (см. п. 2 § 2), на множестве $Q^1[a,b]$ кусочно гладких функций, т.е. во множестве всех непрерывных на $[a,b]$ функций, имеющих на $[a,b]$ непрерывную производную, за исключением конечного числа точек из $[a,b]$, где производная терпит разрыв первого рода, и удовлетворяющих граничным условиям

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b.$$

Напомним определение понятия сильного локального экстремума (см. п. 1 § 2).

Определение 1. *Говорят, что функционал* (1) *достигает на кривой* $y_0(x)$ *из* $Q^1[a,b]$ *сильного локального минимума (максимума), если существует число* $\varepsilon > 0$ *такое, что для любой функции* $y(x) \in Q^1[a,b]$, *удовлетворяющей неравенству*

$$\|y(x)-y_0(x)\|_{C[a,b]}<\varepsilon,$$

выполняется неравенство

$$J(y)\ge J(y_0) \quad \left(J(y)\le J(y_0)\right).$$

Сильный локальный экстремум геометрически отличается от слабого локального экстремума для функционала (1) тем, что для сильного экстремума рассматриваются кривые на $[a,b]$, близкие по ординатам к кривой $y_0(x)$, а для слабого экстремума требуется близость кривых $y(x)$ на $[a,b]$ к $y_0(x)$ как по ординатам, так и по угловым коэффициентам касательных к кривым $y(x)$ и $y_0(x)$.

Поскольку множество $Q^1[a,b]$ шире, чем $C^1[a,b]$, то если $y_0(x)\in C^1[a,b]$ доставляет сильный экстремум функционалу (1), то $y_0(x)$ дает и слабый экстремум (1). Поэтому для таких функций необходимое условие слабого локального экстремума является необходимым и для сильного локального экстремума. А достаточное условие для сильного экстремума является достаточным условием для слабого экстремума.

Пример 1. Исследовать на слабый и сильный экстремум функционал

$$J(y)=\int_0^1 y'^3(x)\,dx, \quad y(0)=0, \quad y(1)=1. \tag{2}$$

Решение. Уравнение Эйлера имеет вид $y'y''(x)=0$. Отсюда $y(x)=C_1x+C_2$. Единственная экстремаль $y_0(x)=x$ дает слабый локальный минимум функционалу (2). Действительно, для любой функции $h(x)\in \overset{\circ}{C}{}^1[0,1]$ составим приращение

$$\Delta J=J\left(y_0+h\right)-J\left(y_0\right)=\int_0^1\left[\left(y_0'+h'\right)^3-y_0'^3\right]dx=$$

$$=\int_0^1\left(h'^3+3h'^2y_0'+3h'y_0'^2\right)dx=\int_0^1\left(h'^3+3h'^2+3h'\right)dx=$$

$$=\int_0^1 h'^2\left(3+h'\right)dx\ge 0,$$

если взять $\|h\|_{C^1[0,1]}<3$, тогда $3+h'>0$ на $[0,1]$.

Теперь возьмем функции $h_n(x) \in Q^1[0,1]$ такие, что

$$h_n(x) = \int_0^x \theta_n(t)\,dt ,$$

где

$$\theta_n(x) = \begin{cases} -\sqrt{n}, & 0 \le x \le \dfrac{1}{n}, \\ 0, & \dfrac{1}{n} < x < \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{2}{\sqrt{n}}, & \dfrac{1}{2} \le x \le 1. \end{cases}$$

Отсюда видим, что $\|h_n(x)\|_{C[0,1]} \to 0$ при $n \to \infty$. Рассмотрим функции $y_n(x) = y_0(x) + h_n(x) \to y_0(x)$ в $C[0,1]$ при $n \to \infty$. При этом

$$J(y_n) = \int_0^1 \left(y_0' + h_n'\right)^3 dx = \int_0^1 \left(1 + h_n'\right)^3 dx =$$

$$= \int_0^{1/n} \left(1 - \sqrt{n}\right)^3 dx + \int_{1/n}^{1/2} 1^3\,dx + \int_{1/2}^1 \left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right)^3 dx =$$

$$= \frac{1}{n}\left(1 - \sqrt{n}\right)^3 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right)^3 \to -\infty ,$$

т.е. функция $y_0(x) = x$ не доставляет сильного локального минимума функционалу (2). ■

Пример 2. Рассмотрим функционал

$$J(y) = \int_{-1}^1 y^2 \left(1 - y'\right)^2 dx , \quad y(-1) = 0 , \quad y(1) = 1 . \tag{3}$$

Исследовать на слабый и сильный экстремум.

Решение. Этот функционал определен для всех кривых $y(x) \in C^1[-1,1]$, соединяющих точки $A = (-1,0)$ и $B = (1,1)$, и $J(y) > 0$. Если возьмем ломаную

$$y_0(x)=\begin{cases}0, & -1\le x\le 0,\\ x, & 0\le x\le 1,\end{cases}$$

то для нее интеграл имеет смысл и он равен нулю. Если эту ломаную закруглить в точке $(0,0)$, то получится кривая из класса $C^1[-1,1]$ и значение функционала (4) как угодно будет близко к нулю. Следовательно, нижняя точная граница функционала (3) в классе $C^1[-1,1]$ равна нулю и на этом множестве она не достигается. Если функционал (3) рассмотреть на множестве Q^1, то эта нижняя граница достигается и вариационная задача (3) имеет сильный минимум, равный нулю. ■

Определение 2. *Функцией Вейерштрасса для функционала* (1) *называют функцию вида*

$$E(x,y,\xi,\eta)=F(x,y,\eta)-F(x,y,\xi)-(\eta-\xi)F_{y'}(x,y,\xi). \quad (4)$$

Теорема 1. *Если кривая $y_0(x)$ из класса $Q^1[a,b]$ доставляет сильный локальный минимум (максимум) функционалу* (1)*, то вдоль кривой $y_0(x)$ при любых значениях η выполняется неравенство*

$$E(x,y,y',\eta)\ge 0 \quad (\le 0). \quad (5)$$

Эта теорема была установлена Вейерштрассом, и условие (5) называется необходимым условием Вейерштрасса для сильного локального экстремума.

Прежде чем сформулировать достаточное условие существования сильного экстремума, введем следующие понятия.

Пусть имеются семейство $\{\gamma\}$ дуг γ кривых из класса C^1 и односвязная область G, обладающие следующими свойствами:

1) концы дуг семейства $\{\gamma\}$ лежат на границе области G;

2) через каждую точку G проходит единственная дуга семейства $\{\gamma\}$.

При этих условиях говорят, что семейство $\{\gamma\}$ образует поле и оно покрывает область G. Если дуги γ являются экстремалями (1) и образуют поле, то такое поле называют полем экстремалей.

Пусть имеется однопараметрическое семейство дуг $\{\gamma\}$ экстремалей функционала (1), уравнение которых имеет вид

$$y=\varphi(x,\alpha), \quad \alpha_1 \le \alpha \le \alpha_2, \quad a(\alpha) \le x \le b(\alpha). \tag{6}$$

Семейство (6) называют **собственным полем** экстремалей, если выполнены следующие условия:

1) концы дуг описывают кривые Γ_1 и Γ_2 из класса C^1;

2) при $\alpha_1 \le \alpha \le \alpha_2$, $a(\alpha) \le x \le b(\alpha)$ функция φ имеет непрерывные производные первого порядка φ_x, φ_α и смешанную производную $\varphi_{x\alpha}$, причем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} > 0.$$

Говорят, что экстремаль γ_0 окружена полем экстремалей, если существует поле экстремалей $\{\gamma\}$, обладающее следующими свойствами:

1) экстремаль γ_0 является одной из дуг поля $\{\gamma\}$;

2) экстремаль γ_0 строго лежит внутри области, покрытой полем.

Теорема 2. *Для того чтобы экстремаль γ_0 можно было окружить полем экстремалей, достаточно, чтобы*

1) вдоль экстремали γ_0 (включая ее концы) выполнялось неравенство $F_{y'y'} > 0$ (или соответственно $F_{y'y'} < 0$);

2) дуга γ_0 вместе с одним из его концов не содержала точки, сопряженной другому концу.

Пусть экстремаль $y_0(x)$ функционала (1) в классе $Q^1[a,b]$ можно окружить собственным полем $\{\gamma\}$ экстремалей, покрывающим некоторую область G, и вдоль экстремалей поля $F_{y'y'}\left(x,y,y'\right) \ne 0$. Через каждую точку $C(x,y) \in G$ можно провести экстремаль γ_C нашего поля: $y = y_C(x)$. Обозначим через $u(C) = u(x,y)$ угловой коэффициент касательной к γ_C в точке C:

$$u(C) = u(x,y) = \frac{d}{dx} y_C(x).$$

Согласно условиям поля $\{\gamma\}$ функция $u(x,y)$ определена во всей области G и $u(x,y)\in C^1(G)$. Функция $u(x,y)$ называется функцией наклона поля $\{\gamma\}$. Для данной экстремали $y_0(x)$: $u\left(x, y_0(x)\right)=y_0'(x)$.

Теорема 3. *Для того чтобы экстремаль* γ_0: $y=y_0(x)\in Q^1[a,b]$ *давала сильный локальный минимум (максимум) функционалу* (1)*, достаточно, чтобы*

1) γ_0 *можно было окружить собственным полем* $\{\gamma\}$*;*

2) существовала окрестность экстремали γ_0*, в каждой точке* (x,y) *которой при любом значении* η *имело место неравенство*

$$E\left(x,y,u(x,y),\eta\right)\ge 0 \quad \left(\le 0\right), \tag{7}$$

где $u(x,y)$ *– функция наклона поля экстремалей* $\{\gamma\}$*.*

Доказательство теорем 1 – 3 можно найти в книге [13, § 32, 33].

Разложим разность $F\left(x,y,\eta\right)-F\left(x,y,\xi\right)$ из функции Вейерштрасса (4) по формуле Тейлора со вторым остаточным членом

$$F\left(x,y,\eta\right)-F\left(x,y,\xi\right)=\left(\eta-\xi\right)F_{y'}\left(x,y,\eta\right)+\frac{1}{2}\left(\eta-\xi\right)^2 F_{y'y'}\left(x,y,\bar{\eta}\right).$$

Отсюда с учетом того, что производная $F_{y'}\left(x,y,\eta\right)$ равна нулю на экстремуме функции $y(x)$, имеем

$$E\left(x,y,\xi,\eta\right)=\frac{1}{2}\left(\eta-\xi\right)^2 F_{y'y'}\left(x,y,\bar{\eta}\right), \tag{8}$$

где $\bar{\eta}$ лежит между ξ и η. Из равенства (8) следует, что для неотрицательности функции Вейерштрасса достаточно, чтобы при любом $\bar{\eta}$ имело место неравенство

$$F_{y'y'}\left(x,y,\bar{\eta}\right)\ge 0. \tag{9}$$

Отметим, что при $\eta\to y'$ переменная $\bar{\eta}\to y'$, поэтому неравенство (9) переходит в известное нам неравенство Лежандра

$$F_{y'y'}\left(x,y,y'\right)\ge 0.$$

Таким образом, чтобы кривая γ_0: $y = y_0(x)$ доставляла сильный локальный минимум (максимум), необходимо, чтобы вдоль γ_0 выполнялось условие Вейерштрасса, т.е. неравенство (5); достаточно, чтобы существовала окрестность экстремали γ_0, в каждой точке (x, y) которой при любом значении η имело место неравенство

$$E\left(x, y, u(x, y), \eta\right) \geq 0 \quad \left(\leq 0\right),$$

где $u(x, y)$ есть наклон поля, окружающего γ_0.

Пример 3. Снова рассмотрим задачу о брахистохроне (см. пример 2 § 1, пример 4 § 2). В этой задаче

$$F\left(x, y, y'\right) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \left(\frac{1 + y'^2}{y}\right)^{1/2}.$$

Отсюда найдем

$$F_{y'y} = \frac{1}{\sqrt{2gy}} \frac{1}{\left(1 + y'^2\right)^{3/2}} > 0$$

при любом $y > 0$ и y'. Как видим, условия Лежандра и Якоби выполнены. Поэтому экстремаль γ_0 из циклоид (20) § 2 можно окружить полем экстремалей и выполнено условие Вейерштрасса. Тогда экстремаль γ_0 доставляет сильный локальный минимум. ■

§ 8. Глобальный экстремум для квадратичных функционалов

В § 1 было введено понятие абсолютного (глобального) экстремума функционала. Здесь рассмотрим некоторый класс функционалов, для которых можно установить достаточные условия существования глобального экстремума.

Рассмотрим квадратичный функционал вида

$$J(y) = \int_a^b \left[p(x) y'^2 + q(x) y^2 + 2 f(x) y \right] dx, \tag{1}$$

где $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ – заданные из $C[a,b]$ функции, при этом $p'(x) \in C[a,b]$ и

$$p(x) > 0, \quad q(x) \geq 0 \quad \text{на} \quad [a,b]. \tag{2}$$

Функционал (1) рассмотрим в классе функций $y(x) \in C^1[a,b]$, удовлетворяющих граничным условиям

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b. \tag{3}$$

Требуется найти ту функцию из данного класса, которая доставляет глобальный минимум функционалу (1).

Д.у. Эйлера для функционала (1)

$$Ly = \frac{d}{dx}\left(py'\right) - q(x)y = f(x), \quad a \le x \le b. \tag{4}$$

Далее, докажем, что при выполнении указанных выше условий гладкости относительно функций $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ и (2) д.у. (4) имеет на $[a,b]$ единственное решение, удовлетворяющее граничным условиям (3).

Отметим, что однородная краевая задача $Ly = 0$, $y(a) = y(b) = 0$ при выполнении условий (2) имеет только нулевое решение [17, гл. 3, § 11].

Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – два ненулевых решения однородного д.у. $Ly = 0$, удовлетворяющего начальным условиям

$$y_1(a) = 0, \quad y_1'(a) = 1, \quad y_2(b) = 0, \quad y_2'(b) = 1.$$

Такие решения существуют и определяются единственным образом в силу теоремы существования и единственности решения начальной задачи, и решения определены на всем промежутке $[a,b]$. При этом $y_2(a) \ne 0$ и $y_1(b) \ne 0$. В противном случае функции $y_1(x) = y_2(x) \equiv 0$ на $[a,b]$. Тогда общее решение д.у. (4) определяется по формуле

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + g(x), \tag{5}$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, $g(x)$ – некоторое частное решение д.у. (4). Удовлетворив общее решение (5) граничным условиям (3), получим систему

$$C_2 y_2(a) + g(a) = y_a, \quad C_1 y_1(b) + g(b) = y_b,$$

из которой C_1 и C_2 определяются единственным образом: $C_1 = C_{10}$ и $C_2 = C_{20}$.

Покажем, что построенное решение краевой задачи (4), (3)

$$y_0(x) = C_{10} y_1(x) + C_{20} y_2(x) + g(x)$$

доставляет глобальный минимум функционалу (1). Пусть $y(x) = y_0(x) + h(x)$, $h(x) \in C^1[a,b]$, $h(a) = h(b) = 0$. Составим приращение

$$\Delta J = J\left(y_0 + h\right) - J\left(y_0\right) = \int_a^b \left[p(x)h'^2 + q(x)h^2 \right] dx +$$

$$+2\int_a^b \left[p(x)y_0'h' + q(x)y_0h + f(x)h \right] dx = J_1 + J_2 .$$

Во втором интеграле интегрируем по частям. Тогда имеем

$$J_2 = 2\int_a^b \left[-\frac{d}{dx}\left(p\,y_0'\right) + q(x)y_0 + f(x) \right] h(x)\,dx + p(x)y_0'h\Big|_a^b = 0 .$$

Отсюда следует, что

$$\Delta J = \int_a^b \left[p(x)h'^2(x) + q(x)h^2(x) \right] dx \ge p_0 \int_a^b h'^2(x)\,dx \ge$$

$$\ge \frac{p_0}{(b-a)^2} \int_a^b h^2(x)\,dx \ge 0 ,$$

причем знак равенства будет иметь место только при $h(x) \equiv 0$, здесь $p_0 = \min\limits_{a \le x \le b} p(x) > 0$.

Таким образом, нами доказано следующее утверждение.

Теорема. *Если* $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$, $f(x) \in C[a,b]$ *и* $p(x) > 0$, $q(x) \ge 0$ *на* $[a,b]$, *то функционал* (1) *на множестве функций* $y(x) \in C^1[a,b]$, *удовлетворяющих условиям* $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$, *имеет глобальный минимум.*

Отметим, что условия (2) в этой теореме существенны. Покажем это в следующих примерах.

Пример 1. Рассмотрим вариационную задачу для функционала

$$J(y) = \int_{-1}^{1} x^2 y'^2(x)\,dx , \tag{6}$$

$$y(-1) = y_a , \quad y(1) = y_b , \tag{7}$$

где $y_a \ne y_b$, $p(x) = x^2 \ge 0$ на $[-1,1]$.

Решение. Из вида функционала (6) следует, что $J(y)>0$ для любой функции $y(x)$ из $C^1[-1,1]$, отличной от постоянной, удовлетворяющей условиям (7). Покажем, что функционал (6) имеет точную нижнюю границу, равную нулю. При любом $\varepsilon>0$ функции

$$y_\varepsilon(x)=\frac{y_a+y_b}{2}+\frac{y_b-y_a}{2}\frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{\varepsilon}}{\operatorname{arctg}\frac{1}{\varepsilon}} \qquad (8)$$

принадлежат $C^1[-1,1]$ и удовлетворяют условиям (7). Найдем

$$y'_\varepsilon(x)=\frac{y_b-y_a}{2\operatorname{arctg}\frac{1}{\varepsilon}}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+x^2}$$

и вычислим функционал (6) от функций (8):

$$J\left(y_\varepsilon\right)<\int_{-1}^{1}\left(x^2+\varepsilon^2\right)y'^2_\varepsilon(x)\,dx=$$

$$=\frac{\varepsilon^2\left(y_b-y_a\right)^2}{4\operatorname{arctg}^2\frac{1}{\varepsilon}}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2+\varepsilon^2}=\frac{\varepsilon\left(y_b-y_a\right)^2}{2\operatorname{arctg}\frac{1}{\varepsilon}}.$$

Как видим, правая часть стремится к нулю при $\varepsilon\to 0$. Отсюда следует, что точная нижняя граница функционала (6) равна нулю, так как указанный класс функций относительно $y(x)$ не содержит постоянной. Следовательно, в этом классе функционал (6) не имеет наименьшего значения. ■

Пример 2. Исследовать на экстремум функционал

$$J(y)=\int_0^{\pi}\left(y'^2-\alpha^2y^2\right)dx,$$

$$y(0)=1,\quad y(\pi)=0,$$

$$\sin\alpha\pi\neq 0,\quad \alpha=\text{const}>1.$$

Решение. В этом примере $q(x)=-\alpha^2<0$. В примере 1 § 2 показано, что поставленная задача не имеет экстремума.

§ 9. Прямые методы вариационного исчисления

1. Метод разложения в ряды

К задачам вариационного исчисления можно применить методы, которые обходят применение д.у. Эти методы основаны на разложении искомой функции в ряды. Покажем это на решении задачи из примера 4 § 1.

Пример 1. Среди всех простых гладких замкнутых кривых заданной длины l найти ту, которая охватывает наибольшую площадь.

Решение. Пусть искомая кривая задана параметрически

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad 0 \le s \le l, \tag{1}$$

где s – длина дуги этой кривой и

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1. \tag{2}$$

Из курса анализа известно, что площадь S области, ограниченной кривой (1), определяется криволинейным интегралом

$$S = \int_0^l x(s)\frac{dy}{ds}ds. \tag{3}$$

Разложим функции (1) в ряд Фурье

$$x(s) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\mu_n s + b_n \sin\mu_n s, \tag{4}$$

$$y(s) = \frac{1}{2}c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\mu_n s + d_n \sin\mu_n s, \tag{5}$$

где a_n, b_n, c_n и d_n – неизвестные коэффициенты, $\mu_n = \dfrac{2\pi n}{l}$. Отсюда вычислим

$$\frac{dx}{ds} = \sum_{n=1}^{\infty} -\mu_n a_n \sin\mu_n s + \mu_n b_n \cos\mu_n s, \tag{6}$$

$$\frac{dy}{ds} = \sum_{n=1}^{\infty} -\mu_n c_n \sin\mu_n s + \mu_n d_n \cos\mu_n s. \tag{7}$$

Теперь ряды (4) и (7) подставим в интеграл (3). Тогда с учетом ортогональности тригонометрической системы $\{1, \cos\mu_n s, \sin\mu_n s\}$ на промежутке $[0, l]$ получим

$$S = \pi\sum_{n=1}^{\infty} n\left(a_n d_n - c_n d_n\right). \tag{8}$$

Из теории рядов Фурье известно равенство

$$\frac{2}{l}\int_0^l f^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_n^2 + \beta_n^2 , \tag{9}$$

где α_n и β_n – коэффициенты Фурье l периодической функции $f(x)$.

Далее в силу равенства (2) имеем

$$\int_0^l \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 ds = l .$$

Данное равенство в силу (6), (7) и (9) примет вид

$$l = \frac{2\pi^2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2\right). \tag{10}$$

Теперь, пользуясь полученными формулами (8) и (10), вычислим разность между площадью круга, ограниченного окружностью длины l, и площадью S

$$\frac{l^2}{4\pi} - S = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2\right) - \pi\sum_{n=1}^{\infty} n\left(a_n d_n - b_n c_n\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(na_n - d_n\right)^2 + \left(nb_n + c_n\right)^2 + \left(n^2 - 1\right)\left(c_n^2 + d_n^2\right)\right] \geq 0 .$$

Здесь знак равенства достигается только при $a_1 - d_1 = 0$, $b_1 + c_1 = 0$, $a_n = b_n = c_n = d_n = 0$ при $n = 2, 3, \ldots$. Тогда из рядов (4) и (5) имеем

$$x = \frac{1}{2}a_0 + a_1\cos\frac{2\pi}{l}s + b_1\sin\frac{2\pi}{l}s ,$$

$$y = \frac{1}{2}c_0 - b_1\cos\frac{2\pi}{l}s + a_1\sin\frac{2\pi}{l}s .$$

Отсюда, исключая параметр s, получим

$$\left(x-\frac{a_0}{2}\right)^2+\left(y-\frac{c_0}{2}\right)^2=a_1^2+b_1^2=\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2.$$

Следовательно, искомая кривая есть окружность. Тем самым здесь дано полное решение примера 4 из § 1. ■

Указанный метод решения задачи можно обобщить. Пусть $J(y)$ – некоторый функционал, который задан на некотором множестве M функций $y(x)$, удовлетворяющих определенным граничным условиям. Требуется найти для определенности минимум этой вариационной задачи. Искомую функцию будем искать в виде суммы ряда

$$y(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varphi_n(x) \tag{11}$$

с неизвестными коэффициентами a_n, здесь $\{\varphi_n(x)\}$ – некоторая известная линейно независимая ортогональная система функций, удовлетворяющих указанным выше граничным условиям.

Рассмотрим n-частичную сумму ряда (11)

$$y_n(x)=\sum_{k=1}^{n}a_k\varphi_k(x).$$

Для функций $y_n(x)$ функционал $J(y)$ представляет функцию от $a_1, a_2,..., a_n$:

$$J\left(y_n\right)=\Phi\left(a_1,a_2,...,a_n\right).$$

Будем теперь искать среди функций $y_n(x)$ ту, которая обращает $J\left(y_n\right)$ в минимум, т.е. будем искать последовательность из n коэффициентов $a_1^{(n)}, a_2^{(n)},..., a_n^{(n)}$, дающих минимум функции $\Phi\left(a_1,a_2,...,a_n\right)$. Эти числа $a_k^{(n)}$, $k=\overline{1,n}$, найдутся как решения системы n уравнений с n неизвестными

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha_k}=0,\quad k=\overline{1,n}.$$

По найденным коэффициентам составим функцию

$$\tilde{y}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k^{(n)} \varphi_k(x). \tag{12}$$

В пределе

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{y}_n(x) = \tilde{y}(x)$$

должны получить функцию $\tilde{y}(x)$, реализующую минимум функционала $J(y)$. Но это требует решения следующих задач:

1) исследовать сходимость последовательности $\tilde{y}_n(x)$ в указанном классе функций M;

2) в случае сходимости $\tilde{y}_n(x)$ к $\tilde{y}(x)$ доказать, что предельная функция $\tilde{y}(x)$ доставляет минимум функционалу $J(y)$;

3) если в качестве приближения к искомой функции $\tilde{y}(x)$ взять одну из функций $\tilde{y}_n(x)$, то надо оценить погрешность

$$\left\| \tilde{y}(x) - \tilde{y}_n(x) \right\|_M.$$

Последовательность (12) называют минимизирующей последовательностью. Если удастся таким путем решить вариационную задачу до конца, то этот метод приведет и к решению краевой задачи для д.у. Эйлера, которое выражает необходимое условие экстремума функционала $J(y)$. На указанном выше подходе основан известный метод Ритца, который был изложен в статье, опубликованной в 1908 году.

Существование глобального минимума функционала

$$J(y) = \int_a^b F\left(x, y, y'\right) dx \tag{13}$$

в классе функций

$$M = \left\{ y(x) \in C^1[a,b],\ y(a) = y_a,\ y(b) = y_b \right\}$$

и достижение этого минимума путем построения минимизирующей последовательности функций $\varphi_n(x)$ обеспечиваются выполнением следующих условий [2, п. 28]:

1) функции $F(x,y,z)$, $F_z(x,y,z)$ непрерывны в $G \times \mathbb{R}$, $F_z(x,y,z)$ – неубывающая функция от $z \in \mathbb{R}$;

2) существуют константы $\alpha > 0$, $p > 1$, β, для которых при всех $(x, y) \in G$ и при любом $z \in (-\infty, +\infty)$ выполняется неравенство

$$F(x, y, z) \geq \alpha |z|^p + \beta ,$$

где через G обозначена замкнутая область плоскости $\mathbb{R}^2_{xy}$, где лежат кривые $y_n(x)$, концы которых принадлежат границе G.

Указанные условия 1) и 2), например, выполняются для функционала (13), когда $F(x, y, y') = p(x)y'^2 + q(x)y^2 + 2f(x)y$, где $p(x) \geq p_0 = \text{const} > 0$, $p'(x)$, $q(x) \geq 0$ и $f(x)$ – известные непрерывные на $[a, b]$ функции.

Пример 2. Найти приближенное решение вариационной задачи

$$J(y) = \int_0^1 \left(y'^2 + y^2 + 2xy \right) dx , \quad y(0) = y(1) = 0 . \qquad (14)$$

Решение. В качестве последовательности $\varphi_n(x)$ возьмем функции

$$\varphi_1(x) = x^2 - x , \quad \varphi_2(x) = x^3 - x^2 , \ldots , \ \varphi_n(x) = x^{n+1} - x^n , \ldots .$$

Пусть $n = 2$. Тогда приближенное решение задачи (14) будем искать в виде

$$y_2(x) = a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) ,$$

где a_1 и a_2 – неизвестные коэффициенты. Функцию $y_2(x)$ подставим в интеграл

$$J\left(y_2\right) = \Phi\left(a_1, a_2\right) = \frac{11}{30}a_1^2 + \frac{11}{30}a_1 a_2 + \frac{1}{7}a_2^2 - \frac{1}{6}a_1 - \frac{1}{10}a_2 .$$

С учетом условий $\dfrac{\partial\Phi}{\partial a_1} = \dfrac{\partial\Phi}{\partial a_2} = 0$ найдем систему

$$\frac{11}{15}a_1 + \frac{11}{30}a_2 = \frac{1}{6} ,$$

$$\frac{11}{30}a_1 + \frac{2}{7}a_2 = \frac{1}{10} .$$

Отсюда найдем

$$a_1 = \frac{69}{473}, \quad a_2 = \frac{7}{43}$$

и искомое приближенное решение

$$y_2(x) = \frac{1}{473}\left(77x^3 - 8x^2 - 69x\right).$$

В этой задаче нетрудно построить и точное решение

$$y_0(x) = \frac{e}{e^2 - 1}\left(e^x - e^{-x}\right) - x.$$

Следующая таблица дает сопоставление точного и приближенного решения:

x	$y_0(x)$	$y_2(x)$
$0,0$	$0,0000$	$0,0000$
$0,2$	$-0,0287$	$-0,0285$
$0,4$	$-0,0505$	$-0,0506$
$0,5$	$-0,0566$	$-0,0568$
$0,6$	$-0,0583$	$-0,0585$
$0,8$	$-0,0444$	$-0,0442$
1	$0,0000$	$0,0000$

Отсюда имеем погрешность вычислений по указанной таблице

$$\left|y_0(x) - y_2(x)\right| \le 2 \cdot 10^{-4}. \blacksquare$$

2. Метод конечных разностей

Этот метод, впервые примененный Эйлером, состоит в том, что функционал

$$J(y) = \int_a^b F\left(x, y, y'\right) dx$$

рассматривается на ломаных, составленных из заданного числа n прямолинейных звеньев с заданными абсциссами вершин. При этом функционал превращается в функцию ординат вершин указанных ломаных и дальнейшая процедура минимизации проводится так же, как и в методе Ритца.

Пример 3. Найти минимум функционала

$$\int_0^1 \left(y'^2 + y^2 + 2xy \right) dx , \quad y(0) = y(1) = 0 .$$

Решение. Пусть $\Delta x = \dfrac{1-0}{5} = 0,2$. Тогда имеем

$$y(0) = 0 , \quad y_1 = y(0,2) , \quad y_2 = y(0,4) , \quad y_3 = y(0,6) ,$$

$$y_4 = y(0,8) , \quad y_5 = y(1) = 0 .$$

В качестве приближенных значений производных принимаем

$$y'(0) = \frac{y_1 - 0}{0,2} , \quad y'(0,2) = \frac{y_2 - y_1}{0,2} , \quad y'(0,4) = \frac{y_3 - y_2}{0,2} ,$$

$$y'(0,6) = \frac{y_4 - y_3}{0,2} , \quad y'(0,8) = \frac{0 - y_4}{0,2} .$$

Данный функционал заменяем суммой по формуле прямоугольников и превращается в функцию четырех переменных

$$\Phi\left(y_1, y_2, y_3, y_4 \right) = \left[\left(\frac{y_1}{0,2} \right)^2 + \left(\frac{y_2 - y_1}{0,2} \right)^2 + y_1^2 + 0,4 y_1 + \right.$$

$$+ \left(\frac{y_3 - y_2}{0,2} \right)^2 + y_2^2 + 0,8 y_2 + \left(\frac{y_4 - y_3}{0,2} \right)^2 +$$

$$\left. + y_3^2 + 1,2 y_3 + \left(\frac{y_4}{0,2} \right)^2 + y_4^2 + 1,6 y_4 \right] 0,2 .$$

Отсюда составим уравнения

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_1} = \frac{2 y_1}{0,04} - \frac{2(y_2 - y_1)}{0,04} + 2 y_1 + 0,4 = 0 ,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_2} = \frac{2(y_2 - y_1)}{0,04} - \frac{2(y_3 - y_2)}{0,04} + 2 y_2 + 0,8 = 0 ,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_3} = \frac{2(y_3 - y_2)}{0,04} - \frac{2(y_4 - y_3)}{0,04} + 2 y_3 + 1,2 = 0 ,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_4} = \frac{2(y_4 - y_3)}{0,04} + \frac{2 y_4}{0,04} + 2 y_4 + 1,6 = 0$$

и находим значения искомой функции

$$y_1 = -0,0286, \quad y_2 = -0,0503, \quad y_3 = -0,0580, \quad y_4 = -0,0442$$

с точностью 10^{-4}. ■

§ 10. Параметрическая форма вариационной задачи

При нахождении экстремума функционала

$$J = \int_a^b F\left(x, y, y'\right) dx \tag{1}$$

требование, чтобы искомая функция $y = y(x)$ имела явный вид, сужает поставленную задачу. Это по той причине, что прямые, параллельные оси Oy, могут пересекать искомую кривую, дающую решение задачи более чем в одной точке.

Пусть искомая кривая задана параметрически $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_0 \le t \le t_1$. Тогда интеграл (1) примет вид

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F\left(x, y, \frac{y'}{x'}\right) x'\, dt, \tag{2}$$

где $x' = x'(t)$, $y' = y'(t)$, $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Отметим, что подынтегральная функция в (2) не содержит явно независимую переменную t и является однородной функцией первой степени от x' и y'.

Далее рассмотрим более общий интеграл

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F\left(x, y, x', y'\right) dt, \tag{3}$$

где функция F не содержит явно переменную t и является однородной функцией первой степени от x' и y'. В силу теоремы Эйлера об однородных функциях [19, Т. 1, п. 154, с. 372] имеем равенство

$$F\left(x, y, x', y'\right) = x' F_{x'} + y' F_{y'}. \tag{4}$$

Вспомним, что при определении близости для кривых, заданных в явной форме (см. § 2, п. 1), мы требовали близости ординат кривых, соответствующих одинаковым абсциссам. В случае параметрического задания кривой близость определяется независимо от выбора параметра t, а так: кривая L находится в ε-близости нулевого порядка от кривой L_0, если между точками L и L_0 можно установить такое взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие, при котором расстояние между соответствующими точками не превосходит ε. Аналогично определяется ε-близость первого или более высокого порядка.

Перейдем к выводу необходимого условия экстремума интеграла (3). Предположим, что функция $F\left(x,y,x',y'\right)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно по своим аргументам и является однородной функцией первой степени относительно x' и y'. Пусть некоторая кривая γ: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_0 \le t \le t_1$, с концами в точках $A_0 = \left(x(t_0), y(t_0)\right)$ и $A_1 = \left(x(t_1), y(t_1)\right)$ доставляет экстремум интегралу (3). Рассмотрим близкую кривую $x(t) + \alpha\, h(t)$, $y(t) + \beta\, h(t)$, где α и β – малые параметры, $h(t) \in C^2[t_0, t_1]$, $h(t_0) = h(t_1) = 0$. Подставляя это в интеграл (3) приравнивая нулю производные по α и β при $\alpha = \beta = 0$ и используя основную лемму вариационного исчисления, получим систему двух уравнений Эйлера

$$F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} = 0, \quad F_y - \frac{d}{dt} F_{y'} = 0. \tag{5}$$

Эти уравнения явно не содержат переменную t, поэтому по существу определяют одно уравнение. Действительно, из равенства (4) дифференцируя по x' и y', имеем

$$x'F_{x'x'} + y'F_{x'y'} = 0, \quad x'F_{x'y'} + y'F_{y'y'} = 0, \tag{6}$$

а производные по x и y равны

$$F_x = x'F_{xx'} + y'F_{xy'}, \quad F_y = x'F_{x'y} + y'F_{yy'}. \tag{7}$$

Из равенств (6) следует

$$\frac{F_{x'x'}}{y'^2} = -\frac{F_{x'y'}}{x'y'} = \frac{F_{y'y'}}{x'^2} = F_1, \tag{8}$$

где через $F_1 = F_1\left(x,y,x',y'\right)$ обозначена общая величина написанных трех отношений. Из формул (5) с учетом (7), (8) следует

$$F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} =$$

$$= x' F_{xx'} + y' F_{xy'} - \left(x' F_{xx'} + y' F_{yx'} + x'' F_{x'x'} + y'' F_{x'y'} \right) =$$

$$= y' \left[F_{xy'} - F_{x'y} + F_1 \left(x' y'' - x'' y' \right) \right] = 0 . \qquad (9)$$

Аналогично получим

$$F_y - \frac{d}{dt} F_{y'} = x' \left[F_{xy'} - F_{x'y} + F_1 \left(x' y'' - x'' y' \right) \right] = 0 . \qquad (10)$$

Поскольку обе производные x' и y' не могут одновременно обращаться в нуль, то два уравнения (9) и (10) сводятся к одному

$$F_{xy'} - F_{x'y} + F_1 \left(x' y'' - x'' y' \right) = 0 . \qquad (11)$$

Полученное д.у. (11) называют вейерштрассовой формой уравнения Эйлера. Эту форму, используя выражение радиуса кривизны плоской кривой [19, Т. 1, п. 71, с. 169], записывают в виде

$$\frac{1}{r} = \frac{F_{xy'} - F_{x'y}}{\left(x'^2 + y'^2 \right)^{3/2} F_1} , \qquad (12)$$

где величина r обратная кривизне k кривой является ее радиусом, а k определяется по формуле

$$k = \frac{\left| x y'' - y' x'' \right|}{\left(x'^2 + y'^2 \right)^{3/2}} .$$

Из результатов § 3 следует, что необходимым условием минимума (максимума) функционала (3) является знакоопределенность второй вариации, что, в свою очередь, определяется знакоопределенность квадратичной формы

$$\Phi = F_{x'x'} h^2 + 2 F_{x'y'} h h' + F_{y'y'} h'^2 . \qquad (13)$$

Из равенств (8) получим

$$\Phi = F_1 \left(y' h - x' h' \right)^2 .$$

Отсюда следует утверждение

Теорема 1 (аналог условия Лежандра)**.** *Необходимым условием минимума (максимума) функционала* (3) *является неравенство*

$$F_1 \geq 0 \ \ (\leq 0).$$

На основании § 5 можно получить необходимые условия экстремума для изопериметрической задачи в параметрической форме. Пусть помимо функционала (3) задан функционал

$$K=\int_{t_0}^{t_1} G\left(x,y,x',y'\right)dt=l=\mathrm{const}\,. \tag{14}$$

Как и раньше, предполагаем, что функции F и G удовлетворяют условиям однородности и дифференцируемости. Тогда справедливо утверждение, аналогичное теореме § 5.

Теорема 2. *Пусть кривая* γ *доставляет слабый локальный экстремум функционалу* (3) *при условии* (14)*. Тогда существует постоянное число* λ *такое, что кривая* γ *является экстремалью для функционала*

$$J_1=\int_{t_0}^{t_1}\left(F+\lambda G\right)dt\,.$$

Рассмотрим следующий пример.

Пример. Среди всех замкнутых кривых, ограничивающих фигуру, заданную одной и той же площадью S, найти ту, длина которой минимальна.

Решение. Пусть $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t_0\le t\le t_1$, $x(t_0)=x(t_1)$, $y(t_0)=y(t_1)$ – уравнения произвольной замкнутой кривой. Тогда задача сводится к отысканию экстремума функционала

$$J=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt \tag{15}$$

при условии, что площадь

$$K=\int_{t_0}^{t_1}\left(xy'-yx'\right)dt=S=\mathrm{const}\,.$$

Введем функцию

$$F(x,y)=\sqrt{x'^2+y'^2}+\lambda\left(xy'-yx'\right)$$

и вычислим

$$F_{xy'}-F_{yx'}=\lambda\,,\quad F_1=\frac{F_{x'y'}}{-x'y'}=\left(x'^2+y'^2\right)^{-3/2}.$$

Тогда равенство (12) принимает вид

$$\frac{1}{r} = 2\lambda \, .$$

Как видим, кривизна вдоль искомой замкнутой кривой постоянна. Следовательно, она есть окружность. Поскольку при $\lambda > 0$ функция $F_1 > 0$, то квадратичная форма (13) строго положительно определена, поэтому на этой окружности функционал (15) достигает своего наименьшего значения. ■

Все здесь записанное переносится на кривые в n-мерном пространстве, т.е. на функционалы вида

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F\left(x_1, x_2, ..., x_n, x_1', x_2', ..., x_n'\right) dt \, . \qquad (16)$$

Необходимые условия экстремума функционала (16) имеют вид системы уравнений Эйлера

$$F_{x_i} - \frac{d}{dt} F_{x_i'} = 0 \, , \quad i = \overline{1, n} \, , \qquad (17)$$

или в развернутом виде

$$F_{x_i} - \sum_{j=1}^{n} x_j' F_{x_i' x_j} - \sum_{j=1}^{n} x_j'' F_{x_i' x_j'} = 0 \, , \quad i = \overline{1, n} \, . \qquad (18)$$

При этом n уравнений систем (17) или (18) независимы. Они связаны следующим равенством:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i' \left(F_{x_i} - \frac{d}{dt} F_{x_i'} \right) = \sum_{i=1}^{n} x_i' F_{x_i} - \sum_{i,j=1}^{n} x_i' x_j' F_{x_i' x_j} - \sum_{i,j=1}^{n} x_i' x_j'' F_{x_i' x_j'} = 0 \, . \qquad (19)$$

Равенство (19) является следствием условий однородности функции $F\left(x_1, x_2, ..., x_n, x_1', x_2', ..., x_n'\right)$ относительно $x_1', x_2', ..., x_n'$:

$$F = \sum_{i=1}^{n} x_i' F_{x_i'} \, .$$

§ 11. Разрывные вариационные задачи

Экстремаль $y = y(x)$ функционала

$$J(y) = \int_a^b F\left(x, y, y'\right) dx \qquad (1)$$

является дважды непрерывно дифференцируемой функцией, если производная $F_{y'y'}(x, y, y') \neq 0$. Встречаются вариационные задачи, в которых экстремум достигается на кусочно-гладкой кривой и когда функция $F(x, y, y')$ терпит разрыв первого рода.

1. Разрывные задачи первого рода

Рассмотрим задачу о нахождении экстремума функционала (1), считая, что допустимые кривые удовлетворяют граничным условиям

$$y(a) = y_a\,, \quad y(b) = y_b \tag{2}$$

и могут иметь излом в некоторой точке c ($a < c < b$). Этот излом возможен лишь там, где $F_{y'y'} = 0$.

Предварительно рассмотрим один пример.

Пример 1. Пусть задан функционал

$$J(y) = \int_{-1}^{1} y^2(x)\left(1 - y'^2(x)\right)dx$$

и граничные условия

$$y(-1) = 0\,, \quad y(1) = 1\,.$$

Исследовать этот функционал на экстремум.

Решение. Данный функционал определен для всех функций $y(x) \in C^1[-1,1]$ и для таких функций $J(y) > 0$. Если возьмем ломаную

$$y(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x \le 0, \\ x, & 0 \le x \le 1, \end{cases}$$

то для нее интеграл имеет смысл и равен нулю. Если эту ломаную в точке $x = 0$ закруглить, то получится функция из класса $C^1[-1,1]$, для которой значение функционала J как угодно близко к нулю. Значит, нижняя граница значений $J(y)$ на функциях из $C^1[-1,1]$ равна нулю, но на этом множестве она не достигается. А на множестве кусочно-гладких функций эта нижняя граница достигается и равна нулю. В данном случае $F_{y'y'} = -2y^2$ обращается в нуль при $y(x) = 0$. ■

Имеет место следующее утверждение.

Теорема. *Пусть кусочно-гладкая кривая* $\gamma: \ y = y(x)$*, соединяющая точки* $A = (a, y_a)$ *и* $B = (b, y_b)$ *доставляет экстремум функционалу* (1)*. Тогда искомая ломаная экстремаль* γ *состоит из конечного числа гладких дуг экстремалей и в каждой точке излома* $c \in (a,b)$ *выполняются следующие условия сопряжения:*

$$\left(F - y'F_{y'}\right)\Big|_{x=c-0} = \left(F - y'F_{y'}\right)\Big|_{x=c+0}, \tag{3}$$

$$F_{y'}\Big|_{x=c-0} = F_{y'}\Big|_{x=c+0}. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть для определенности одна точка $C = (c, y(c))$ излома экстремали $\gamma: \ y = y(x)$, $a \le x \le b$, т.е. в точке $x = c$ производная $y'(x)$ терпит разрыв первого рода. Обозначим через γ_1 и γ_2 дуги экстремали γ

$$\gamma_1: \ y_1 = y_1(x), \ a \le x \le c, \quad \gamma_2: \ y_2 = y_2(x), \ c \le x \le b,$$

где $y_1(c) = y_2(c) = y(c)$.

Теперь построим кусочно-гладкую кривую $\tilde{\gamma}$, полученную из γ заменой дуг γ_1 и γ_2 двумя близкими кривыми $\tilde{\gamma}_1$ и $\tilde{\gamma}_2$ с концами соответственно в точках A и B . Рассмотрим приращение

$$\Delta J = J(\tilde{\gamma}) - J(\gamma) = \int_a^c \left[F\left(x, \tilde{y}, \tilde{y}'\right) - F\left(x, y, y'\right)\right] dx +$$

$$+\int_c^b \left[F\left(x, \tilde{y}, \tilde{y}'\right) - F\left(x, y, y'\right)\right] dx.$$

Каждому интегралу в правой части данного равенства применим формулу (11) из § 1. Обозначая через Δc и $\Delta y(c)$ приращения координат точки излома C и с учетом того, что $\Delta a = \Delta y(a) = \Delta b = \Delta y(b) = 0$, получим

$$\Delta J = \left[F - y'F_{y'}\right]_{x=c-0} \Delta c + \left[F_{y'}\right]_{x=c-0} \Delta y(c) + \varepsilon_1 r\left(\gamma_1, \tilde{\gamma}_1\right) -$$

$$-\left[F - y'F_{y'}\right]_{x=c+0} \Delta c - \left[F_{y'}\right]_{x=c+0} \Delta y(c) + \varepsilon_2 r\left(\gamma_2, \tilde{\gamma}_2\right),$$

где ε_1, $\varepsilon_2 \to 0$ при $r \to 0$. Выбираем дуги $\tilde{\gamma}_1$ и $\tilde{\gamma}_2$ так, чтобы приращения Δc и $\Delta y(c)$ были порядка r. Тогда на основании леммы 4 § 1 получаем, что знак приращения ΔJ может сохраняться лишь при условии обращения в нуль коэффициентов при Δc и $\Delta y(c)$, т.е. в случае экстремума функционала (1) справедливы (3) и (4). ■

Пример 2. Найти ломаные экстремали функционала

$$J(y) = \int_a^b \left(y'^4 - 6y'^2 \right) dx , \tag{5}$$

$$y(0) = 0 , \quad y(2) = 0 , \tag{6}$$

допуская, что y' может иметь одну точку разрыва, отвечающую абсциссе $x = c \in (0, 2)$.

Решение. Для функционала (5) $F_{y'y'} = 12y'^2 - 12$ может обращаться в нуль и поэтому возможно наличие изломов экстремали. В данном примере уравнение Эйлера имеет вид

$$y''\left(y'^2 - 1 \right) = 0 .$$

Следовательно, экстремалями являются прямые

$$y = ax + b ,$$

где a и b – постоянные. Пусть искомые экстремали имеют вид

$$\begin{aligned} y_1(x) &= C_1 x + C_2, \quad 0 \le x < c, \\ y_2(x) &= C_3 x + C_4, \quad c \le x \le 2. \end{aligned} \tag{7}$$

Удовлетворяя линейные функции граничным условиям (6), найдем $C_2 = 0$, $C_4 = -2C_3$. Тогда

$$y_1(x) = C_1 x , \quad y_2(x) = C_3(x - 2) . \tag{8}$$

Из условия непрерывности экстремалей $y_1(x)$ и $y_2(x)$ в точке $x = c$ имеем

$$C_1 \cdot c = C_3(c - 2) . \tag{9}$$

Далее воспользуемся условиями сопряжения (3) и (4). Для этого вычислим

$$F_{y'} = 4y'^3 - 12y' , \quad F - y'F_{y'} = -3y'^4 + 6y'^2 .$$

Поскольку $y_1'(x) = C_1$, $y_2'(x) = C_3$, то получаем систему неизвестных C_1 и C_3

$$\begin{cases} 4C_1^3 - 12C_1 = 4C_3^2 - 12C_3, \\ -3C_1^4 + 6C_1^2 = -3C_3^4 + 6C_3^2 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \left(C_1 - C_3\right)\left(C_1^2 + C_1C_3 + C_3^2 - 3\right) = 0, \\ \left(C_1^2 - C_3^2\right)\left(C_1^2 + C_3^2 - 2\right) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Из второго уравнения системы (10) получаем, что $C_1 = C_3$ или $C_1 = -C_3$ или $C_1^2 + C_3^2 - 2 = 0$. Решение $C_1 = C_3$ должно быть отброшено, так как при этом экстремали имеют непрерывную производную, а из условия (9) получаем, что $C_1 = 0$, экстремаль – отрезок оси Ox.

Таким образом, решение системы (10) сводится к решению следующих систем уравнений:

$$\begin{cases} C_1 = -C_3, \\ C_1^2 + C_1C_3 + C_3^2 = 3 \end{cases} \tag{11}$$

и

$$\begin{cases} C_1^2 + C_3^2 = 2, \\ C_1^2 + C_1C_3 + C_3^2 = 3. \end{cases} \tag{12}$$

Решением системы (11) являются числа $C_1 = \sqrt{3}$, $C_3 = -\sqrt{3}$ и $C_1 = -\sqrt{3}$, $C_3 = \sqrt{3}$. А решение системы (12) дает $C_1 = C_3 = \pm 1$ и должно быть отброшено. Итак, $C_1 = -C_3$ и из условия непрерывности (9) получим $c = 1$.

Таким образом, искомые экстремали представляют ломаные

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x) = \sqrt{3}x, & 0 \le x < 1, \\ y_2(x) = -\sqrt{3}(x-2), & 1 \le x \le 2, \end{cases}$$

и

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x) = -\sqrt{3}x, & 0 \le x < 1, \\ y_2(x) = \sqrt{3}(x-2), & 1 \le x \le 2. \end{cases} \quad \blacksquare$$

2. Разрывные задачи второго рода

Разрывными задачами второго рода называют задачи на отыскание экстремума функционала

$$J(y)=\int_a^b F\left(x,y,y'\right)dx\,, \tag{13}$$

$$y(a)=y_a\,,\quad y(b)=y_b\,, \tag{14}$$

в котором подынтегральная функция $F\left(\cdot\right)$ разрывна.

Пусть, например, $F\left(x,y,y'\right)$ терпит разрыв вдоль линии $y=f(x)$ и пусть $F\left(x,y,y'\right)$ равна $F_1\left(x,y,y'\right)$ по одну сторону линии $y=f(x)$ и равна $F_2\left(x,y,y'\right)$ по другую.

В случае существования ломаной экстремали последняя состоит из кусков экстремалей $y=y_1(x)$ и $y=y_2(x)$, имеющих общую точку $\left(c,f(c)\right)$ на линии разрыва, т.е. $y_1(c)=y_2(c)=f(c)$, где $c\in(a,b)$. Для определения ломаной экстремали получаем два дифференциальных уравнения Эйлера, общие решения которых содержат четыре произвольные постоянные C_1, C_2, C_3, C_4. Для нахождения этих постоянных имеем следующие условия:

1) граничные условия (14);

2) два условия, требующие, чтобы ординаты концов экстремалей в точке стыке были равны ординате кривой $y=f(x)$;

3) условие на стыке подвижной границы

$$\left(F_1+(f'-y')F_{1y'}\right)\Big|_{x=c-0}=\left(F_2+(f'-y')F_{2y'}\right)\Big|_{x=c+0}\,. \tag{15}$$

Пример 3 (Задача о преломлении луча света). В среде I свет распространяется с постоянной скоростью v_1, в среде II – с постоянной скоростью v_2. Среда I отделена от среды II кривой $y=f(x)$. Вывести закон преломления луча света, идущего из точки A среды I в точку B среды II, зная, что луч проходит этот путь в наименьший промежуток времени.

Решение. Пусть s – длина кривой $y = y(x)$. Тогда вдоль этой кривой скорость света $v = \frac{ds}{dt}$, где $ds = \sqrt{1+y'^2(x)}\,dx$. Отсюда

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx}{v}.$$

Согласно принципу Ферма, путь света между двумя точками в однородной среде является отрезком прямой. Ввиду постоянства скорости света в однородной среде этот принцип можно выразить словами: путь света между двумя точками в однородной среде сообщает наименьшее значение времени движения. В неоднородных средах этот принцип требует минимума для функционала времени. Задача сводится к нахождению минимума интеграла

$$J = t_1(y) + t_2(y) = \int_a^c \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v_1}\,dx + \int_c^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v_2}\,dx, \qquad (16)$$

так как первый и второй интегралы в (16) дают время, нужное для перехода луча из точки A до линии раздела и от линии раздела до точки B.

Имеем разрывную задачу второго рода: здесь

$$F_1 = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v_1}, \quad F_2 = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v_2}.$$

Нахождение кусков экстремалей сводится к разысканию экстремалей функционала вида

$$F_1 = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

которые, как известно, суть прямые. Следовательно,

$$y_1(x) = C_1x + C_2, \quad y_2(x) = C_3x + C_4.$$

Для проверки условия (15) предварительно вычислим

$$F_1 - y_1' \frac{\partial F_1}{\partial y_1'} = \frac{\sqrt{1+y_1'^2}}{v_1} - \frac{y_1'^2}{v_1\sqrt{1+y_1'^2}} = \frac{1}{v_1\sqrt{1+y_1'^2}},$$

$$F_2 - y_2' \frac{\partial F_2}{\partial y_2'} = \frac{1}{v_2\sqrt{1+y_2'^2}}.$$

Подставляя эти выражения в (15), найдем

$$\frac{1+f'y_1'}{v_1\sqrt{1+y_1'^2}}=\frac{1+f'y_2'}{v_2\sqrt{1+y_2'^2}}\,. \tag{17}$$

Пусть γ – угол, образованный касательной к линии раздела в точке c с осью Ox, α – угол левого луча с осью Ox, β – угол правого луча (см. рис. 3).

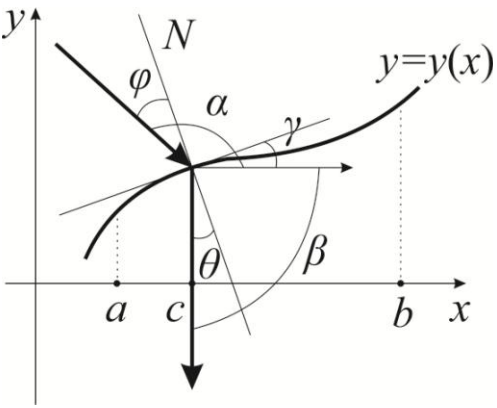

Рис. 3

Тогда $f'=\operatorname{tg}\gamma$, $y_1'=\operatorname{tg}\alpha$, $y_2'=\operatorname{tg}\beta$ и условие (17) примет вид

$$\frac{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma}{v_1\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{1+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}{v_2\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}}$$

или

$$\frac{\cos(\gamma-\alpha)}{v_1}=\frac{\cos(\gamma-\beta)}{v_2}\,,$$

где $\gamma-\alpha$ и $\gamma-\beta$ – углы между лучами и касательной к линии раздела. Вводя вместо них углы φ и θ между нормалью N к линии раздела и лучами, падающим и преломленным, получаем известный закон преломления луча света

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}=\frac{v_1}{v_2}=\text{const}\,. \quad ■$$

§ 12. Принцип Гамильтона–Остроградского или принцип наименьшего действия

Вариационное исчисление играет важную роль при выводе основных уравнений механики и математической физики. Эти уравнения получаются из некоторого вариационного принципа с помощью понятия энергии.

1. Вывод уравнений движения механической системы из материальных точек

Пусть имеется система n материальных точек с массами m_k, $k=\overline{1,n}$, и координатами (x_k, y_k, z_k) в пространстве $\mathbb{R}^3$. Пусть движение системы подчинено условиям связи

$$g_j = 0, \quad j=\overline{1,m}, \tag{1}$$

и происходит под действием силы, действующей на k-ю точку с компонентами:

$$X_k = \frac{\partial U}{\partial x_k}, \quad Y_k = \frac{\partial U}{\partial y_k}, \quad Z_k = \frac{\partial U}{\partial z_k}, \tag{2}$$

где g_j и U – заданные функции от $3n$ координат всех точек и времени t, при этом U – потенциальная энергия системы.

Кинетическая энергия нашей системы определяется по формуле

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} m_k \left(x_k'^2 + y_k'^2 + z_k'^2\right).$$

Пусть наша система из положения A в момент времени $t=t_0$ переместилась в другое положение B к моменту времени $t=t_1$. Рассмотрим все возможные движения системы из положения A в положение B за промежуток времени $[t_0, t_1]$ с учетом условий связи (1). Среди таких движений (траекторий) найти такую, движение по которой отвечает наименьшее действие.

Для этого рассмотрим функцию Лагранжа

$$L = T - U$$

и интеграл

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L\,dt\,, \tag{3}$$

который называют действием и представляет собой функционал вида (15) § 6.

Принцип Гамильтона–Остроградского утверждает, что указанная траектория выделяется из всех движений с учетом условий связи (1) тем, что она удовлетворяет необходимому условию $\delta J = 0$ экстремума функционала (3) при заданных положениях системы при $t = t_0$ и $t = t_1$.

Замечание. Изложенный принцип был опубликован В. Гамильтоном в 1834-1835 гг. в случае стационарных, т.е. не зависящих от времени, связей. Независимо от него и в более общем случае нестационарных связей этот принцип был сформулирован М.В. Остроградским в 1948 г. Поэтому этот принцип называется принципом Гамильтона–Остроградского.

Для решения этой задачи согласно теореме 3 § 6 составим функцию

$$H = T - U + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t) g_j$$

и напишем д.у. Эйлера. В данном случае предварительно вычислим

$$H_{x_k} = -U_{x_k} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t) \frac{\partial g_j}{\partial x_k}, \quad H_{x'_k} = m_k x'_k\,,$$

и аналогично – для координат y_k и z_k. Тогда д.у. Эйлера с учетом (2) имеют вид

$$m_k x''_k + X_k - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t) \frac{\partial g_j}{\partial x_k} = 0\,,$$

$$m_k y''_k + Y_k - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t) \frac{\partial g_j}{\partial y_k} = 0\,,$$

$$m_k z''_k + Z_k - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t) \frac{\partial g_j}{\partial z_k} = 0\,,$$

т.е. они совпадают с д.у. движения материальной системы из механики.

2. Вывод уравнения колебаний струны

Пусть гибкая струна, натянутая вдоль отрезка $[0,l]$ оси Ox, совершает плоско-поперечные колебания на плоскости (x,u), где $u(x,t)$ – смещение точки x струны в момент времени t. Кинетическая энергия такой струны определяется формулой

$$T=\frac{1}{2}\int_0^l \rho u_t^2\,dx,$$

где $\rho=\rho(x)$ – линейная плотность струны, и будем считать, что $\rho(x)\in C[0,l]$. Теперь вычислим потенциальную энергию U. По условию струна тонкая, не сопротивляется изгибу, но сопротивляется растяжению. Потенциальная энергия есть работа сил натяжения T_0 струны: $T_0\left(ds-dx\right)$, где ds – длина дуги струны в момент времени t. Поскольку $ds=\sqrt{1+u_x^2}\,dx$, то

$$\sqrt{1+u_x^2}-1=\frac{1}{2}u_x^2-\frac{1}{8}u_x^4+\frac{1}{16}u_x^6-\ldots\approx\frac{1}{2}u_x^2,$$

так как производные u_x^4, u_x^6, … – бесконечно малые величины более высокого порядка, чем u_x^2, то потенциальная энергия элемента dx приближенно равна

$$T_0\left(ds-dx\right)=\frac{1}{2}T_0u_x^2.$$

Тогда потенциальная энергия всей струны в момент времени t определяется интегралом

$$U(t)=\frac{1}{2}\int_0^l T_0u_x^2(x,t)\,dx.$$

В случае непрерывной внешней силы $F(x,t)$, рассчитанной на единицу длины струны, нам надо добавить к потенциальной энергии еще слагаемое

$$-\int_0^l F(x,t)\,dx.$$

Согласно принципу Гамильтона–Остроградского составим функционал действия

$$S=\int_{t_0}^{t_1}\left[T(t)-U(t)\right]dt=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\left(\rho u_t^2-T_0u_x^2+2Fu\right)dx\,dt\,. \qquad (4)$$

В случае закрепленной на концах струны мы имеем граничные условия

$$u(0,t)=u(l,t)=0\,,\quad 0\le t\le T\,.$$

Теперь на основании теоремы 3 § 4 составим д.у. Эйлера для функционала (4). В этом случае

$$H\left(x,t,u_x,u_t\right)=\frac{1}{2}\left(\rho u_t^2-T_0u_x^2+2Fu\right).$$

Отсюда найдем

$$H_u=F\,,\quad H_{u_x}=-T_0u_x\,,\quad H_{u_t}=\rho u_t\,.$$

Тогда д.у. Эйлера имеет вид

$$T_0u_{xx}-\rho(x)u_{tt}+F(x,t)=0\,,$$

который совпадает с уравнением вынужденных колебаний струны из курса УМФ [18, § 2].

3. Вывод уравнения колебаний мембраны

Пусть тонкая пленка, которая не сопротивляется изгибу, но сопротивляется растяжению, натянута на область D плоскости $\mathbb{R}^2_{xy}$ и T_0 – сила ее растяжения, рассчитанная на единицу площади мембраны. Тогда, рассуждая аналогично п. 2, найдем

$$T(t)=\frac{1}{2}\iint_D\rho u_t^2\,dx\,dy\,,$$

$$U(t)=\frac{1}{2}T_0\iint_D\left(u_x^2+u_y^2\right)dx\,dy\,.$$

Искомый функционал действия имеет вид

$$S=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\iint_D\left[\rho u_t^2-T_0\left(u_x^2+u_y^2\right)+2Fu\right]dx\,dy\,dt$$

при условии

$$u\big|_{\partial D}=0\,.$$

Тогда д.у. Эйлера имеет вид

$$T_0\left(u_{xx}+u_{yy}\right)-\rho(x,y)u_{tt}+F(x,y,t)=0\,.$$

Это и есть д.у. малых вынужденных колебаний мембраны.

4. Вывод уравнения колебаний балки

Под балкой или стержнем понимают тело линейных размеров длины l, которое допускает изгибные колебания. Возникающую при деформации (растяжения) потенциальную энергию будем считать прямо пропорциональной квадрату кривизны кривой $u(x,t)$ в точке $x \in (0,l)$ в момент времени t:

$$d\Pi(t) = \frac{\mu}{2} k^2(x)\, dx = \frac{\mu}{2} \frac{u_{xx}^2}{1+u_x^2}\, dx,$$

где μ – заданный коэффициент пропорциональности. В случае малых колебаний можно считать, что $u_x^2(x,t) \ll 1$. Тогда

$$d\Pi(t) = \frac{\mu}{2} u_{xx}^2\, dx$$

и потенциальная энергия всей балки в момент времени t определяется интегралом

$$\Pi(t) = \frac{\mu}{2} \int_0^l u_{xx}^2(x,t)\, dt.$$

А кинетическая энергия $T(t)$ определяется по формуле

$$T(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \rho(x) u_t^2\, dx,$$

где $\rho(x)$ – плотность балки. Аналогично п. 2 составим функционал действия

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t} \int_0^l \left(\rho u_t^2 - \mu u_{xx}^2 + 2Fu \right) dx\, dt.$$

Для данного функционала уравнение Эйлера имеет вид

$$H_u - \frac{\partial}{\partial x} H_{u_x} - \frac{\partial}{\partial t} H_{u_t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} H_{u_{xx}} = 0, \qquad (5)$$

так как

$$H\left(x,t,u_x,u_t,u_{xx}\right) = \frac{1}{2}\left(\rho u_t^2 - \mu u_{xx}^2 + 2Fu \right).$$

Отсюда находим производные

$$H_u = F, \quad H_{u_t} = \rho u_t, \quad H_{u_x} = 0, \quad H_{u_{xx}} = -\mu u_{xx}$$

и подставим в д.у. (5). Тогда д.у. (5) примет вид

$$\rho u_{tt} + \mu u_{xxxx} = F(x,t).$$

5. Вывод уравнения колебаний пластины

Будем считать, что потенциальная энергия пластины, которая в естественном состоянии имеет форму плоской области Ω плоскости $\mathbb{R}^2_{xy}$, представляет собой однородную квадратичную функцию величин, обратных главным радиусам кривизны R_1 и R_2 пластины в деформированном состоянии. Тогда потенциальная энергия всей пластины определяется интегралом [19, Т. IV, ч. 1, п. 103, с. 292]

$$\Pi(t) = \iint\limits_{\Omega} \left[a\left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} \right) + \frac{2b}{R_1 R_2} \right] dx\, dy , \tag{6}$$

где $\dfrac{1}{R_1}$ – кривизна нормального сечения, касающегося оси Ox, а $\dfrac{1}{R_2}$ – кривизна нормального сечения, касающегося оси Oy, a и b – некоторые положительные постоянные. Для кривизны главных нормальных сечений R_1 и R_2 из курса дифференциальной геометрии имеет место уравнение

$$\left(EG - F^2\right)\frac{1}{R_i^2} + \left(2FM - EN - GL\right)\frac{1}{R_i} + \left(LN - M^2\right) = 0 ,\ i = 1,2 , \tag{7}$$

в случае явного задания уравнения поверхности колебаний пластины $u = u(x, y, t)$ в момент времени t

$$E = 1 + u_x^2 ,\quad F = u_x \cdot u_y ,\quad G = 1 + u_y^2 ,$$

$$L = \frac{u_{xx}}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} ,\quad M = \frac{u_{xy}}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} ,\quad N = \frac{u_{yy}}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} .$$

Предполагая, что колебания пластины малы, можно пренебречь квадратами u_x^2, u_y^2 и произведением $u_x \cdot u_y$. Тогда

$$E = G = 1 ,\quad F = 0 ,\quad L = u_{xx} ,\quad M = u_{xy} ,\quad N = u_{yy} .$$

В силу этого из уравнений (7) найдем

$$\frac{1}{R_1 R_2} = u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 ,\quad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = u_{xx} + u_{yy} ,$$

$$\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_2^2}=\left(u_{xx}+u_{yy}\right)^2-2\left(u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2\right)=u_{xx}^2+u_{yy}^2+2u_{xy}^2 .$$

Подставляя это в интеграл (6), получим

$$\Pi(t)=\frac{D}{2}\iint\limits_{\Omega}\left[u_{xx}^2+u_{yy}^2+2\nu u_{xx}u_{yy}+2(1-\nu)u_{xy}^2\right]dx\,dy ,$$

где D и ν составлены через a и b. Коэффициент $D=Eh^3/12(1-\nu^2)$ называется жесткостью пластины на изгиб, а ν – известный коэффициент Пуассона, E – модуль упругости, h – толщина пластины.

Кинетическая энергия колебаний пластины определяется по формуле

$$K(t)=\frac{h}{2}\iint\limits_{\Omega}\rho u_t^2\,dx\,dy ,$$

где $\rho=\rho(x,y)$ – плотность пластины. Тогда функционал действия с учетом внешней силы имеет вид

$$S=\int\limits_{t_0}^{t_1}\left[K(t)-\Pi(t)\right]dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\iint\limits_{\Omega}\left[h\rho u_t^2-D\left(u_{xx}^2+u_{yy}^2+2\nu u_{xx}u_{yy}+2(1-\nu)u_{xy}^2\right)+2Fu\right]dxdy\,dt ,$$

где $F(x,y,t)$ – внешняя сила, действующая на единицу площади пластины. В этом случае функция

$$H\left(x,y,u_x,u_y,u_t,u_{xx},u_{xy},u_{yy}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[h\rho u_t^2-D\left(u_{xx}^2+u_{yy}^2+2\nu u_{xx}u_{yy}+2(1-\nu)u_{xy}^2\right)+2Fu\right] \qquad (8)$$

и д.у. Эйлера имеет вид

$$H_u-\frac{\partial}{\partial t}H_{u_t}-\frac{\partial}{\partial x}H_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}H_{u_y}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}H_{u_{xx}}+$$

$$+2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}H_{u_{xy}}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}H_{u_{yy}}=0 . \qquad (9)$$

Из формулы (8) вычислим производные

$$H_u=F ,\quad H_{u_x}=H_{u_y}=0 ,\quad H_{u_t}=h\rho u_t ,\quad H_{u_{xx}}=-Du_{xx}-\nu u_{yy} ,$$

$$H_{u_{yy}} = -Du_{yy} - \nu u_{xx}\,, \quad H_{u_{xy}} = -D(1-\nu)u_{xy}$$

и подставим в д.у. (9). Тогда получим

$$F - h\rho u_{tt} - Du_{xxxx} - \sigma u_{yyxx} - Du_{yyyy} - \sigma u_{xxyy} - 2D(1-\nu)u_{xxyy} = 0$$

или

$$h\rho u_{tt} + D\,\Delta(\Delta u) = F\left(x, y, t\right), \tag{10}$$

где $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ – оператор Лапласа.

Д.у. (10) есть уравнение вынужденных колебаний пластины.

§ 13. Оптимальное управление. Принцип максимума Понтрягина

1. Постановка задачи оптимального управления

Пусть имеется некоторый объект, состояние которого в момент времени t определяется заданием вектор-функции $\vec{x}(t) = \left(x_1(t), \dots, x_n(t)\right)$. Движение объекта описывается системой д.у.

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i\left(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t)\right), \quad i = \overline{1, n}\,, \tag{1}$$

или в векторной форме

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}\left(\vec{x}(t), \vec{u}(t)\right).$$

Отметим, что система (1) автономна, т.е. правые части не зависят явно от времени t. Движением объекта можно управлять через управляющие параметры (функции) $\left(u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)\right) = \vec{u}(t)$.

Примером управляемого объекта может служить любое транспортное средство (самолет, автомобиль, поезд и т.д.). В качестве $u_1, u_2, \dots, u_r$ могут служить количество подаваемого в двигатель топлива, температура и т.д. По смыслу эти параметры должны удовлетворять определенным ограничениям.

Предположим, что функции $f_i\left(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t)\right)$ непрерывны по совокупности всех r аргументов и непрерывно дифференцируемы по совокупности фазовых координат $x_1, x_2, \dots, x_n$. Если задать (обычно кусочно-непрерывные) функции $\left(u_1(t), u_2(t), \ldots, u_r(t)\right)$ со значениями из $U \subset \mathbb{R}^r$, то при заданных начальных условиях

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \tag{2}$$

система (1) имеет единственное решение.

Наряду с системой (1) рассмотрим интегральный функционал

$$J\left(\vec{x}, \vec{u}\right) = \int_{t_0}^{t_1} f_0\left(\vec{x}(t), \vec{u}(t)\right) dt \tag{3}$$

с граничными условиями

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 , \quad \vec{x}(t_1) = \vec{x}_1 , \tag{4}$$

где $\vec{x}_0 = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$, $\vec{x}_1 = \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}\right)$ – заданные постоянные векторы, функция $f_0\left(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t)\right)$ и ее частные производные f_{0x_i}, $i = \overline{1, n}$, непрерывны по совокупности всех аргументов при $t_0 \le t \le t_1$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{u} \in U$.

Допустимым управлением называют вектор-функцию $\vec{u}(t)$ со значениями во множестве U, которая кусочно непрерывна на сегменте $[t_0, t_1]$. Сама вектор-функция $\vec{x}(t)$ предполагается непрерывной и кусочно гладкой на $[t_0, t_1]$.

Основная задача оптимального управления ставится так: *в фазовом пространстве X вектор-функций $\left(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\right)$ заданы две точки $\vec{x}_0$ и $\vec{x}_1$; среди всех допустимых управлений $\vec{u}(t)$, переводящих точку из положения $\vec{x}_0$ в положение $\vec{x}_1$, найти такое, для которого функционал $J\left(\vec{x}, \vec{u}\right)$ принимает наименьшее возможное значение.*

Здесь $\vec{x}(t)$ – решение начальной задачи (1) и (2) соответствующему управлению $\vec{u}(t)$, а t_1 – момент прохождения этого решения через точку $\vec{x}_1$. Значения t_0 и t_1 здесь не задаются, а находятся из условий (4).

Управление $\vec{u}(t)$, дающее решение этой задачи, называют оптимальным управлением, а соответствующую траекторию в фазовом пространстве – оптимальной траекторией.

Пару $\left(\vec{x}(t),\vec{u}(t)\right)$, на которой достигает минимум функционала (3) при условиях (4), называют оптимальным процессом.

Важным примером задачи оптимального управления является задача о быстродействии. В этом случае $f_0\left(\vec{x},\vec{u}\right)\equiv 1$, $J\left(\vec{x},\vec{u}\right)=t_1-t_0$. Здесь оптимальность управления $\vec{u}(t)$ означает минимальность времени перехода из положения $\vec{x}_0$ в положение $\vec{x}_1$. Если ввести функцию $x_0(t)$ так, что

$$\frac{dx_0}{dt}=f_0\left(\vec{x},\vec{u}\right),\quad x_0(t_0)=0,$$

то получающаяся при этом система д.у.

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i\left(\vec{x},\vec{u}\right),\quad i=0,1,\ldots,n, \tag{5}$$

и функционал

$$J_1\left(\vec{u}\right)=\int_{t_0}^{t_1} f_0\left(\vec{x},\vec{u}\right)dt=x(t_1)$$

позволяет формулировать указанную задачу о быстродействии как задачу о нахождении управления $\vec{u}(t)$, при котором решение системы (5) при начальных условиях $x_i(t_0)=x_i^{(0)}$, $i=\overline{1,n}$, $x_0(t_0)=0$ дает наименьшее значение функционалу $J_1\left(\vec{u}\right)=x_0(t_1)$.

Теория оптимального управления была создана в пятидесятые годы 20-го столетия трудами Л.С. Понтрягина и его учеников В.Г. Болтянского, Г.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко и др. [14]. Она имеет большое значение для решения задач автоматического регулирования и в других областях науки и техники.

2. Принцип максимума Понтрягина

Если выбрано допустимое управление $\vec{u}(t)$ и найдена соответствующая траектория $\vec{x}(t)$ как решение задачи Коши для системы (5) с условием $\vec{x}(t_0)=\vec{x}_0$, то система д.у.

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\sum_{\alpha=0}^{n} \frac{\partial f_\alpha\left(\vec{x}(t),\vec{u}(t)\right)}{\partial x_i}\psi_\alpha(t), \quad i=\overline{0,n}, \tag{6}$$

имеет единственное решение $\vec{\psi}(t) = \left(\psi_0(t), \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)\right)$ при любых начальных условиях относительно $\psi_i(t)$, $i=\overline{0,n}$.

Теперь объединим системы (5) и (6) одной записью. Для этого строится функция

$$H\left(\vec{\psi},\vec{x},\vec{u}\right) = \left(\vec{\psi}, \vec{f}(x,u)\right) = \sum_{\alpha=0}^{n} \psi_\alpha f_\alpha\left(\vec{x},\vec{u}\right). \tag{7}$$

Исходя из равенства (7) можно получить гамильтонову систему

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \psi_i}, \quad i=\overline{0,n}, \tag{8}$$

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i=\overline{0,n}. \tag{9}$$

Обозначим через $M\left(\vec{\psi},\vec{x}\right)$ функцию

$$M\left(\vec{\psi},\vec{x}\right) = \sup_{\vec{u}\in U} H\left(\vec{\psi},\vec{x},\vec{u}\right).$$

Теорема 1 (Необходимые условия оптимальности управления). *Пусть $\vec{u}(t)$, $t_0 \le t \le t_1$, такое допустимое управление, что соответствующая ему траектория $\vec{x}(t)$, исходящая в момент t_0 из точки $\vec{x}_0$, проходит в момент t_1 через точку $\vec{x}_1$. Для оптимальности управления $\vec{u}(t)$ и траектории $\vec{x}(t)$ необходимо существование такой ненулевой непрерывной вектор-функции $\vec{\psi}(t)$, соответствующей функциям $\vec{u}(t)$ и $\vec{x}(t)$, что:*

1) при любом $t \in \left[t_0, t_1\right]$ функция $H\left(\vec{\psi}(t),\vec{x}(t),\vec{u}(t)\right)$ переменного $\vec{u} \in U$ достигает в точке $\vec{u} = \vec{u}(t)$ максимума

$$H\left(\vec{\psi}(t),\vec{x}(t),\vec{u}(t)\right) = M\left(\vec{\psi}(t),\vec{x}(t)\right), \tag{10}$$

2) в конечный момент t_1 выполнены соотношения

$$\psi_0(t_1) \le 0, \quad M\left(\vec{\psi}(t_1),\vec{x}(t_1)\right) = 0. \tag{11}$$

Замечание. Если функции $\vec{\psi}(t)$, $\vec{x}(t)$ и $\vec{u}(t)$ удовлетворяют системам (8) и (9) и условию 1) данной теоремы, то функции $\psi_0(t)$ и $M\left(\vec{\psi}(t),\vec{x}(t)\right)$ переменного t являются постоянными и поэтому условия (11) можно проверить в любой точке сегмента $\left[t_0,t_1\right]$.

Теперь из теоремы 1 нетрудно получить необходимые условия для оптимальности по быстродействию. В этом случае в теореме 1 надо положить $f_0\left(\vec{x},\vec{u}\right)=1$. Функция H принимает вид

$$H\left(\vec{\psi},\vec{x}(t),\vec{u}(t)\right)=\psi_0+\sum_{\alpha=1}^{n}\psi_\alpha f_\alpha\left(\vec{x},\vec{u}\right).$$

Если ввести новые функции

$$\tilde{H}\left(\vec{\psi},\vec{x},\vec{u}\right)=\sum_{\alpha=1}^{n}\psi_\alpha f_\alpha\left(\vec{x},\vec{u}\right),$$

$$\tilde{M}\left(\vec{\psi},\vec{x}\right)=\sup_{\vec{u}\in U}H\left(\vec{\psi},\vec{x},\vec{u}\right),$$

то имеем

$$\tilde{H}\left(\vec{\psi},\vec{x},\vec{u}\right)=H\left(\vec{\psi},\vec{x}(t),\vec{u}(t)\right)-\psi_0(t),$$

$$\tilde{M}\left(\vec{\psi},\vec{x}\right)=M\left(\vec{\psi},\vec{x}\right)-\psi_0(t).$$

Тогда условия (10) и (11) принимают вид

$$\tilde{H}\left(\vec{\psi}(t),\vec{x}(t),\vec{u}(t)\right)=M\left(\vec{\psi}(t),\vec{x}(t)\right)-\psi_0(t)$$

и имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Для оптимальности (по быстродействию) управления $\vec{u}(t)$ и траектории $\vec{x}(t)$ необходимо существование такой ненулевой непрерывной вектор-функции $\vec{\psi}(t)=\left(\psi_1(t),\psi_2(t),...,\psi_n(t)\right)$, соответствующей функциям $\vec{u}(t)$ и $\vec{x}(t)$, что:*

1) при всех $t\in\left[t_0,t_1\right]$ функция $\tilde{H}\left(\vec{\psi}(t),\vec{x}(t),\vec{u}(t)\right)$ переменного $\vec{u}\in U$ достигает в точке $\vec{u}=\vec{u}(t)$ максимума

$$\tilde{H}\left(\vec{\psi}(t),\vec{x}(t),\vec{u}(t)\right)=\tilde{M}\left(\vec{\psi}(t),\vec{x}(t)\right),$$

2) в конечный момент t_1 выполнено неравенство

$$\tilde{M}\left(\vec{\psi}(t_1),\vec{x}(t_1)\right)\geq 0.$$

Справедливо также указанное выше замечание относительно теоремы 2.

Проиллюстрируем принцип максимума Понтрягина на следующем примере из [14, с. 29].

Пример. Рассмотрим д.у.

$$\frac{dx^2}{dt^2} = u\,, \tag{12}$$

где u – управляющий вещественный параметр, подчиненный условию $|u| \le 1$. В фазовых координатах $x_1 = x$, $x_2 = \frac{dx}{dt}$ д.у. (12) записывается в виде системы

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2\,, \quad \frac{dx_2}{dt} = u\,. \tag{13}$$

Рассмотрим для фазовой точки $\vec{x}(t) = \left(x_1(t), x_2(t)\right)$, движущейся по закону (13), задачу о быстрейшем попадании в начало координат $\vec{x}_1 = (0,0)$ из заданного начального состояния $\vec{x}_0$.

Решение. В данном примере функция $\tilde{H}$ имеет вид

$$\tilde{H}\left(\vec{\psi}(t), \vec{x}(t), \vec{u}\right) = \psi_1(t)x_2(t) + \psi_2(t)u(t)\,,$$

а для вспомогательных функций ψ_1 и ψ_2 имеем д.у.

$$\frac{d\psi_1}{dt} = 0\,, \quad \frac{d\psi_2}{dt} = -\psi_1\,.$$

Отсюда $\psi_1(t) = C_1 = \mathrm{const}$, $\psi_2(t) = C_2 - C_1 t$. Функция $\tilde{H}$ линейна относительно u, поэтому ее наибольшее значение достигается при $u = 1$ или $u = -1$. Причем $u = -1$, когда $\psi_2(t) < 0$, и $u = 1$, когда $\psi_2(t) > 0$. Это значит, что

$$u(t) = \operatorname{sign}\psi_2(t) = \operatorname{sign}\left(C_2 - C_1 t\right). \tag{14}$$

Тем самым найдено оптимальное управление (14), это кусочно-постоянная функция с двумя интервалами постоянства, на которых $u(t)$ принимает значения -1 и $+1$, не более одного раза меняет знак на отрезке $\left[t_0, t_1\right]$.

Если $u = 1$, то $\dfrac{dx_2}{dt} = u \equiv 1 > 0$ и $x_2(t)$ есть возрастающая функция от t. Поскольку $\dfrac{dx_1}{dt} = x_2 = t + a_1$, то

$$x_1 = \frac{t^2}{2} + a_1 t + a_2 = \frac{1}{2}\left(t + a_1\right)^2 + a_2 - \frac{1}{2}a_1^2 = \frac{1}{2}x_2^2 + a\ , \qquad (15)$$

где a_1 и a_2 – произвольные постоянные. Это означает, что на фазовой плоскости $\left(x_1, x_2\right)$ траектории представляют семейство парабол, заданных по формуле (15). По этим параболам фазовые точки движутся снизу вверх, так как $x_2'(t) = 1 > 0$.

Аналогично при $u = -1$, $\dfrac{dx_2}{dt} = u = -1 < 0$, имеем

$$x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2 + \tilde{a}\ , \qquad (16)$$

т.е. на плоскости $\left(x_1, x_2\right)$ траектории представляют семейство парабол, заданных по формуле (16). По параболам (16) фазовые точки движутся сверху вниз, так как $x_2(t) = -1 < 0$.

Если задать начальную точку $\vec{x}_0$ (начальное условие), то постоянные a и $\tilde{a}$ в формулах (15) и (16) определятся однозначно.

Поскольку оптимальное управление $u(t)$ – кусочно-постоянная функция с двумя интервалами постоянства, то искомая траектория состоит из двух кусков парабол, примыкающих друг к другу, причем второй из этих кусков лежит на той из парабол (16), которая проходит через начало координат, так как искомая траектория должна вести в начало координат по условию задачи.

Таким образом, в силу теоремы 2 только описанные выше траектории могут быть оптимальными. Из каждой точки $\vec{x}_0$ фазовой плоскости исходит только одна траектория, ведущая в начало координат. Обоснование существования оптимальных траекторий для линейных систем оптимального быстродействия можно найти в [14, с. 147]. ■

3. Принцип максимума Понтрягина и вариационное исчисление

Из принципа максимума Понтрягина могут быть получены все необходимые условия экстремума вариационных задач: уравнение Эйлера, условия Лежандра и Вейерштрасса, метод множителей для задачи Лагранжа. Ниже дадим краткий вывод условия Вейерштрасса для функционала, зависящего от вектор-функции

$$J\left(\vec{x}\right)=\int\limits_{t_0}^{t_1} f_0\left(\vec{x}(t),\vec{x}'(t)\right)dt=\int\limits_{t_0}^{t_1} f_0\left(\vec{x}(t),\vec{u}(t)\right)dt\,, \tag{17}$$

где $\vec{x}(t)=\left(x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t)\right)$, $\vec{u}(t)=\left(u_1(t),u_2(t),\ldots,u_n(t)\right)$, $u_i(t)=\dfrac{dx_i}{dt}$, $i=\overline{1,n}$.

Для функционала (17) функция Понтрягина (7) имеет вид

$$H\left(\vec{\psi},\vec{x},\vec{u}\right)=\psi_0 f_0\left(\vec{x},\vec{u}\right)+\sum_{\alpha=1}^{n}\psi_\alpha(t)u_\alpha(t)\,.$$

Эту функцию на основании формулы Тейлора разложим в окрестности точки $\vec{u}=\vec{x}'$:

$$H\left(\vec{\psi},\vec{x},\vec{u}\right)=H\left(\vec{\psi},\vec{x},\vec{x}'\right)+\sum_{\alpha=1}^{n}\left(u_\alpha-x'_\alpha\right)\frac{\partial H}{\partial u_\alpha}\ + \tag{18}$$
$$+\ \text{члены второго порядка.}$$

Отсюда без учета членов второго порядка имеем

$$H\left(\vec{\psi},\vec{x},\vec{u}\right)-H\left(\vec{\psi},\vec{x},\vec{x}'\right)-\sum_{\alpha=1}^{n}\left(u_\alpha-x'_\alpha\right)\frac{\partial H}{\partial u_\alpha}=$$
$$=\psi_0 f_0\left(\vec{x},\vec{u}\right)-\psi_0 f_0\left(\vec{x},\vec{x}'\right)+$$
$$+\sum_{\alpha=1}^{n}\psi_\alpha\left(u_\alpha-x'_\alpha\right)-\sum_{\alpha=1}^{n}\left(u_\alpha-x'_\alpha\right)\left(\psi_0 f_{0x'_\alpha}+\psi_\alpha\right)=$$
$$=\psi_0 f_0\left(\vec{x},\vec{u}\right)-\psi_0 f_0\left(\vec{x},\vec{x}'\right)-\psi_0\sum_{\alpha=1}^{n}\left(u_\alpha-x'_\alpha\right)f_{0x'_\alpha}=$$
$$=\psi_0\left[f_0\left(\vec{x},\vec{u}\right)-f_0\left(\vec{x},\vec{x}'\right)-\sum_{\alpha=1}^{n}\left(u_\alpha-x'_\alpha\right)f_{0x'_\alpha}\right]=\psi_0 E\left(\vec{x},\vec{u},\vec{x}'\right),$$

где $E\left(\vec{x},\vec{u},\vec{x}'\right)$ – функция Вейерштрасса для функционала (17) (см. § 7).

Если функция H достигает максимума во внутренней точке $\vec{u}=\vec{x}'$ множества U, то в этой точке

$$\frac{\partial H}{\partial u_\alpha}=0, \quad \alpha=\overline{1,n},$$

и с учетом того, что $\psi_0 \le 0$ (см. (11)), из неравенства

$$H\left(\vec{\psi},\vec{x},\vec{u}\right)-H\left(\vec{\psi},\vec{x},\vec{x}'\right)=\psi_0 E\left(\vec{x},\vec{u},\vec{x}'\right)\le 0$$

следует, что вдоль оптимальной траектории

$$E\left(\vec{x},\vec{u},\vec{x}'\right)\ge 0.$$

Это есть необходимое условие Вейерштрасса. Из данного вывода следует, что если множество U допустимых значений управления $\vec{u}(t)$ открыто, то принцип максимума Понтрягина совпадает с необходимым условием Вейерштрасса. Если же оптимальное управление попадает на границу замкнутого множества U, то там производные $\dfrac{\partial H}{\partial u_\alpha}$, вообще говоря, не обращаются в нуль. Поэтому из разложения (18) невозможно вывести условие Вейерштрасса, тем не менее принцип максимума Понтрягина работает.

§ 14. Решение прикладных задач

Пример 1. Определить форму твердого тела, движущегося в потоке газа с наименьшим сопротивлением.

Решение. Для простоты рассмотрим тело, образованное вращением вокруг оси Ox кривой $y=y(x)$, $x\in\left[0,l\right]$ (рис. 4).

Будем считать, что плотность газа достаточно мала и молекулы отражаются от поверхности тела зеркально. Тогда нормальная составляющая давления определяется по формуле [1, с. 265]

$$p=2\rho v^2\sin^2\varphi,$$

где ρ – плотность газа, v – скорость газа относительно тела, φ – угол между скоростью и ее тангенциальной составляющей.

Давление перпендикулярно к поверхности, тогда сила в точке x по оси Ox, действующая на кольцо шириной $\sqrt{1+y'^2}dx$ и радиусом $y(x)$, определяется равенством

$$dF = pdS = 2\rho v^2 \sin^2\varphi\left[2\pi y(x)\sqrt{1+y'^2(x)}\right]\sin\varphi\, dx .$$

Интегрируя данное равенство по x от нуля до l, найдем полную силу, действующую на тело вращения вдоль оси Ox:

$$F = 4\pi\rho v^2\int_0^l \sin^3\varphi\, y(x)\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx . \qquad (1)$$

Предположим, что угол наклона φ настолько мал, что можно пренебречь y'^2, т.е. $y'^2 \ll 1$. Тогда

$$\sin\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \approx y' .$$

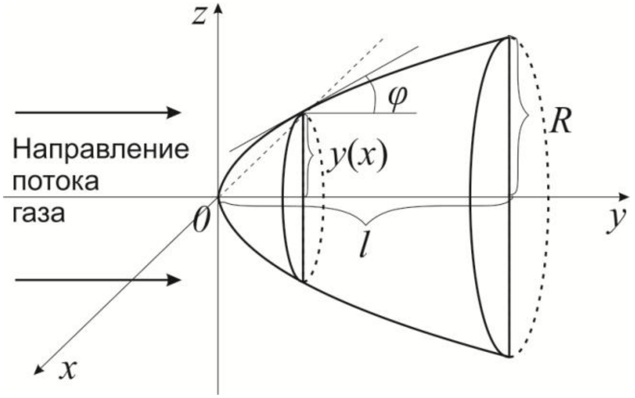

Рис. 4

В силу этого интеграл (1) примет вид

$$F = 4\pi\rho v^2\int_0^l y'^3(x)\,y(x)\,dx . \qquad (2)$$

Теперь задача состоит в том, чтобы найти функцию $y(x)$ такую, при которой функционал (2) принимает наименьшее значение при граничных условиях

$$y(0)=0 , \quad y(l)=R . \qquad (3)$$

Согласно § 2, для функционала (2) напишем уравнение Эйлера

$$y'^3 - \frac{d}{dx}\left(3yy'^2\right) = 0,$$

которое после дифференцирования принимает вид

$$y'^3 + 3yy'y'' = 0.$$

Умножим обе части этого равенства на y'. Тогда получим д.у. в полных дифференциалах

$$y'y'^3 + 3yy'^2y'' = \left(yy'^3\right)' = 0.$$

Интегрируя, найдем

$$y'^3 y = C_1^3.$$

Отсюда имеем д.у. с разделяющимися переменными

$$y' = \frac{C_1}{\sqrt[3]{y}}.$$

Интегрируя его, находим

$$y = \left(C_1 x + C_2\right)^{3/4}. \qquad (4)$$

Удовлетворяя функцию (4) граничным условиям (3), найдем неизвестные постоянные C_1 и C_2:

$$C_1 = \frac{R^{4/3}}{l}, \quad C_2 = 0.$$

Тогда функция (4) примет вид

$$y(x) = R\left(\frac{x}{l}\right)^{3/4}. \qquad (5)$$

Теперь покажем, что функционал (2) на функции (5) достигает наименьшего значения. Для этого на основании теоремы 3 § 3 покажем положительную определенность интеграла

$$K(y,h) = \int_0^l \left[P(x)h'^2(x) + Q(x)h^2(x)\right]dx.$$

В нашем примере

$$P(x) = F_{y'y'} = 6yy', \quad Q(x) = -6y'y''.$$

Тогда интеграл $K(y,h)>0$. Следовательно, функционал (2) на кривой (5) принимает наименьшее значение, т.е. кривая, при которой сопротивление тела минимально, является параболой степени $3/4$. ■

Пример 2 (Задача Эйлера). Стержень длиною l опирается своими концами на две жесткие стенки $x=0$ и $x=l$ и подвержен давлению P (см. рис. 5). При определенном значении P (критическая сила Эйлера) происходит продольный изгиб стержня. Требуется определить наименьшую величину силы P, дающую продольный изгиб.

Решение. Как известно из теории упругости, потенциальная энергия стержня в деформированном состоянии прямо пропорциональна интегралу от квадрата его кривизны. Если примем за независимую переменную длину дуги стержня s и обозначим через $\theta(s)$ угол между касательной к стержню и осью Ox (см. рис. 5), то кривизна равняется $\theta'(s)$. При этом

$$x=x(s), \quad y=y(s), \quad 0\le s\le l,$$

$$\frac{dx}{ds}=\cos\theta, \quad \frac{dy}{ds}=\sin\theta.$$

Тогда потенциальная энергия за счет упругости стержня определяется по формуле

$$\Pi_1=\frac{EI}{2}\int_0^l \theta'^2(s)\,ds,$$

где E – модуль упругости, I – наименьший момент инерции поперечных сечений стержня. За счет работы внешних сил потенциальная энергия стержня уменьшается на

$$\Pi_2=\int_0^l P(ds-dx)=\int_0^l P\left(1-\cos\theta\right)ds=Pl-P\int_0^l \cos\theta\,ds.$$

Если потенциальная энергия до деформации была равна нулю, то после деформации она выразится формулой

$$\Pi=\Pi_1-\Pi_2=\int_0^l\left(\frac{EI}{2}\theta'^2+P\cos\theta\right)ds-Pl.$$

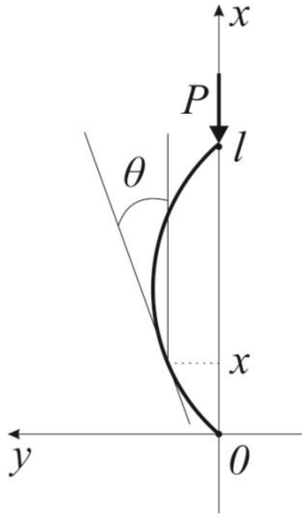

Рис. 5

В случае малых колебаний: $\cos\theta \approx 1 - \dfrac{\theta^2}{2}$, тогда

$$\Pi \approx \frac{1}{2}\int_0^l \left[EI\,\theta'^2 - P\theta^2 \right] ds .$$

В случае равновесия потенциальная энергия принимает минимальное значение. Следовательно, решение задачи сводится к определению минимума интеграла

$$J[\varphi] = \int_0^l \left[EI\,\theta'^2(x) - P\theta^2(x) \right] dx .$$

В данном случае

$$F\left(x, \theta, \theta'\right) = EI\,\theta'^2(x) - P\theta^2(x)$$

и д.у. Эйлера

$$F_\theta - \frac{d}{dx} F_{\theta'} = 0$$

принимает вид

$$\theta''(x) + \alpha^2 \theta(x) = 0 ,$$

где $\alpha^2 = \dfrac{P}{EI}$. Общее решение этого д.у. определяется формулой

$$\theta(x) = C_1 \sin\alpha x + C_2 \cos\alpha x\,,$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. При малых колебаниях $\operatorname{tg}\theta \approx \theta$ и, кроме того, $\operatorname{tg}\theta = y'$, тогда

$$y'(x) = C_1 \sin\alpha x + C_2 \cos\alpha x\,.$$

Отсюда

$$y(x) = -\frac{C_1 \cos\alpha x}{\alpha} + \frac{C_2 \sin\alpha x}{\alpha} + C_3\,. \tag{6}$$

Если нижний конец стержня шарнирно закреплен, то $y(0) = y''(0) = 0$, тогда, удовлетворяя функцию (6) этим условиям, находим $C_1 = C_3 = 0$. Тогда

$$y(x) = \frac{C_2}{\alpha} \sin\alpha x = C \sin\alpha x\,. \tag{7}$$

Проверим выполнение условий Лежандра и Якоби. Необходимое условие Лежандра выполнено, так как из § 3

$$P(x) = F_{\theta'\theta'} = 2EI > 0\,.$$

Составим уравнение Якоби (см. § 3)

$$\frac{d}{dx}\big[P(x)h'(x)\big] - Q(x)h(x) = 0\,,$$

где $Q(x) = -2P$. Тогда оно примет вид

$$2EIh'' + Ph = 0 \quad \text{или} \quad h'' + \alpha^2 h = 0\,,$$

причем $h(0) = 0$. Решение уравнения Якоби имеет вид

$$h(x) = A\sin\alpha x\,, \quad A = \text{const} \neq 0\,.$$

Функция $h(x)$ обращается в нуль при $x_m = \dfrac{\pi m}{\alpha}$ ($m = 1, 2, \ldots$). Тогда условие Якоби будет выполнено, если $l \geq \dfrac{\pi}{\alpha}$. Отсюда найдем оценку для уравнения

$$P \geq \frac{\pi^2}{l^2} EI\,.$$

Следовательно, наименьшее значение критической силы Эйлера равно

$$P_{\min} = \frac{\pi^2}{l^2} EI .$$

При этом функция (7) определяет искомую кривую изгиба.

Отметим, что критическая сила $F_{кр}$ – это такая нагрузка на стержень, превышение которой вызывает потерю устойчивости первоначальной формы (положения) стержня. При достижении силой F критического состояния $F = F_{кр}$ стержень находится в безразличном состоянии и ему присущи две формы равновесия: прямолинейная и криволинейная. В таких случаях говорят, что происходит ветвление или бифуркация равновесных состояний. При $F > F_{кр}$ стержень продолжает деформироваться в направлении данного ему отклонения и после удаления внешнего воздействия, он в исходное состояние не возвращается. В этом случае говорят, что произошла потеря устойчивости.

Задачу о критической нагрузке сжатого стержня с учетом возможности осуществления двух форм равновесия при одном и том же значении силы решил Л. Эйлер в 1744 году. ■

Пример 3 (Задача Кельвина). Пусть плоскость $\mathbb{R}^2_{xy}$ покрыта массой с непрерывной плотностью $\rho(x, y)$, на плоскости дана кусочно-гладкая кривая Γ и на ней две точки A_1 и A_2 (рис. 6). Среди всех кривых заданной длины l, соединяющих точки A_1 и A_2, найти ту, которая вместе с дугой A_1A_2 и кривой Γ ограничивает область G с максимальной массой.

Решение. Введем вспомогательную функцию

$$W(x, y) = \int_0^x \rho(x, y)\, dx .$$

Тогда, согласно формуле Грина,

$$\iint_G \rho(x, y)\, dxdy = \iint_G \frac{\partial W}{\partial x} dxdy = \oint_S W(x, y)\, dy , \qquad (8)$$

где граница S состоит из искомой кривой L и участка A_2A_1 данной кривой Γ. По условию интеграл вдоль кривой A_2A_1 имеет известное значение A. Зададим кривую L параметрически

$$x = x(t)\,, \quad y = y(t)\,, \quad t_0 \le t \le t_1\,.$$

Тогда интеграл (8) примет вид

$$\iint\limits_G \rho(x,y)\,dxdy = \int\limits_L W(x,y)\,dy + \int\limits_{A_2A_1} W(x,y)\,dy =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} W(x,y)\,y'(t)\,dt + A\,.$$

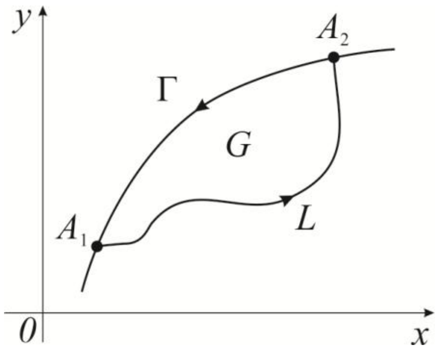

Рис. 6

Таким образом, задача свелась к нахождению условного максимума функционала

$$J = \int\limits_{t_0}^{t_1} W(x,y)\,y'(t)\,dt \qquad (9)$$

при условии, что длина кривой L равна l:

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt = l\,. \qquad (10)$$

Введем вспомогательную функцию Лагранжа

$$F(x,y) = Wy' + \lambda\sqrt{x'^2 + y'^2}$$

и воспользуемся вейерштрассовой формой (12) уравнения Эйлера (см. § 10):

$$\frac{1}{r}=\frac{F_{xy'}-F_{x'y}}{\left(x'^2+y'^2\right)^{3/2}}, \tag{11}$$

где r – радиус кривизны искомой кривой. В нашем случае

$$F_{xy'}=W_x, \quad F_{yx'}=0, \quad F_1=\frac{F_{x'x'}}{y'^2}=\frac{\lambda}{\left(x'^2+y'^2\right)^{3/2}}.$$

Подставляя эти производные в уравнение (11), получим, что уравнение Эйлера в форме Вейерштрасса будет иметь вид

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\lambda}W_x.$$

Отсюда, с учетом выражения функции $W(x,y)$, имеем

$$\frac{1}{r}=\frac{\rho(x,y)}{\lambda}.$$

Как видим, если $\rho(x,y)=\mathrm{const}$, то получаем, что кривизна искомой кривой постоянна. Следовательно, экстремалями вариационной задачи (9) и (10) являются окружности, так как только они имеют постоянную кривизну, равную радиусу окружности. На этой окружности функционал (9) при условии (10) достигает наименьшего значения, так как в силу результатов § 10 $F_1>0$ при $\lambda>0$ и соответствующая квадратичная форма Φ положительно определена. ■

Пример 4. Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2_{xy}$ распространяются световые лучи со скоростью $v(x,y)$. Пусть заданы две $A=(a,y_a)$ и $B=(b,y_b)$ и кривая $y=y(x)$, соединяющая эти точки. Найти уравнение движения лучей света вдоль этой кривой.

Решение. Вдоль этой кривой скорость света $v\big(x,y(x)\big)=\dfrac{ds}{dt}$, $ds=\sqrt{1+y'^2}dx$ – дифференциал длины дуги кривой $y=y(x)$. Тогда вдоль кривой $y=y(x)$

$$dt=\frac{ds}{v\big(x,y(x)\big)}=\frac{\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx}{v\big(x,y(x)\big)}.$$

Интегрируя данное равенство по промежутку $[a,b]$, получим

$$t(y)=\int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx}{v\big(x,y(x)\big)}\,. \qquad (12)$$

Согласно принципу Ферма: из всех кривых, соединяющих точки A и B, траектория луча есть линия, по которой свет проходит из A в B за кратчайшее время. Следовательно, задача определения траектории луча света сводится к отысканию кривой $y=y(x)$, $a\le x\le b$, для которой функционал (12) принимает наименьшее значение. При выводе уравнения Эйлера для удобства вводят величину $n(x,y)=\dfrac{v_0}{v\big(x,y(x)\big)}$, которая называется коэффициентом преломления, где $v_0=v\big(x_0,y(x_0)\big)$, $a<x_0<b$. Тогда функционал (12) принимает вид

$$t(y)=\frac{1}{v_0}\int_a^b n(x,y)\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx\,.$$

Уравнение Эйлера имеет вид

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=\frac{1}{v_0}\left[n_y\sqrt{1+y'^2}-\frac{d}{dx}\frac{ny'}{\sqrt{1+y'^2}}\right]=$$

$$=\frac{1}{v_0}\left[n_y\sqrt{1+y'^2}-\frac{n_xy'^2}{\sqrt{1+y'^2}}-\frac{n_yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}}-\frac{ny''}{\sqrt{1+y'^2}}+\frac{ny'^2y''}{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}\right]=0$$

.

Отсюда получаем уравнение для определения траектории луча света

$$n_y-n_xy'-\frac{ny''}{1+y'^2}=0\,. \qquad (13)$$

Если $n(x,y)=\mathrm{const}>0$, то из д.у. (13) имеем

$$y''(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad y(x)=ax+b\,,$$

где a и b постоянные, т.е. в этом случае траекторией луча является отрезок, соединяющий точки A и B. ■

Пример 5 (Задача Дидоны). Среди замкнутых кривых длины $2l$ найти ту, которая ограничивает наибольшую площадь.

Решение. Рассматриваемая кривая должна быть выпуклой. Действительно, в противном случае существовала бы прямая (рис. 7) такая, что если симметрично отразить в ней кусок границы BCD относительно прямой a, то получим область большей площади, чем первоначальная, при той же длине границы.

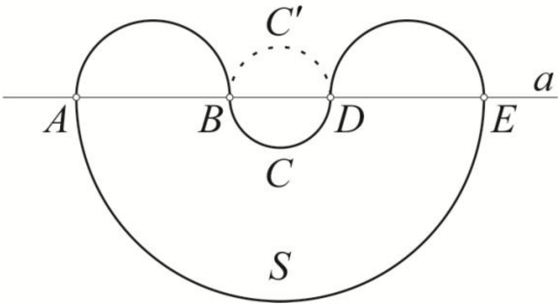

Рис. 7

Заметим, что всякая прямая b, которая делит пополам замкнутую кривую, ограничивающую наибольшую площадь, будет делить пополам и саму эту площадь. Действительно, предположим противное, пусть прямая b не обладает этим свойством. Отразив тогда симметрично относительно прямой b ту часть фигуры, которая имеет большую площадь, мы получили бы кривую той же длины, но ограничивающую большую площадь.

Выбирая за ось Ox любую из прямых, делящих кривую пополам, получаем пример 1 § 5.

Найти линию $y = y(x)$, $y(x) > 0$ при $x \in (-a, a)$, $y(-a) = y(a) = 0$, которая при заданной длине $l > 2a$ ограничивает вместе с отрезком $-a \le x \le a$ оси Ox наибольшую площадь. Таким образом, задача свелась к разысканию экстремума функционала

$$J(y) = \int_{-a}^{a} y(x)\,dx\,, \quad y(-a) = y(a) = 0\,, \qquad (14)$$

при дополнительном условии, что

$$K(y)=\int_{-a}^{a}\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx=l \quad (l>2a). \tag{15}$$

Введем функцию

$$H\left(x,y,y'\right)=F+\lambda G=y(x)+\lambda\sqrt{1+y'^2(x)}$$

и рассмотрим функционал

$$L(y)=\int_{-a}^{a}H\left(x,y,y'\right)dx\,.$$

Составим уравнение Эйлера для данного функционала

$$H_y-\frac{d}{dx}H_{y'}=1-\frac{d}{dx}\left(\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)=0\,.$$

Отсюда, интегрируя, получим

$$\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}=x+C_1\,.$$

Разрешая последнее уравнение относительно y', имеем

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+C_1}{\sqrt{\lambda^2-(x+C_1)^2}}\,.$$

Интегрируя его, найдем семейство окружностей

$$\left(x+C_1\right)^2+\left(y-C_2\right)^2=\lambda^2 \tag{16}$$

радиуса λ с центром в точке $\left(-C_1,C_2\right)$. Постоянные C_1, C_2 и параметр λ определим из граничных условий $y(-a)=y(a)=0$ и изопериметрического условия (15). Удовлетворяя уравнение (16) граничным условиям, получим систему

$$\begin{cases}C_2^2=\lambda^2-\left(C_1-a\right)^2,\\ C_2^2=\lambda^2-\left(C_1+a\right)^2.\end{cases}$$

Отсюда находим $C_1=0$, $C_2=\sqrt{\lambda^2-a^2}$. Тогда уравнение (16) примет вид

$$y=\sqrt{\lambda^2-x^2}-\sqrt{\lambda^2-a^2}\,.$$

Исходя из условия (15) найдем λ:

$$l = \int_{-a}^{a} \sqrt{1+y'^2(x)}\,dx = \int_{-a}^{a} \frac{\lambda\,dx}{\sqrt{1+y'^2(x)}} =$$

$$= \lambda \arcsin \frac{x}{\lambda}\bigg|_{x=-a}^{x=a} = 2\lambda \arcsin \frac{a}{\lambda}.$$

Отсюда

$$\frac{a}{\lambda} = \sin \frac{l}{2\lambda}. \qquad (17)$$

Трансцендентное уравнение (17) относительно λ имеет единственное решение $\lambda = \lambda_0$. После этого находим постоянную $C_2 = \sqrt{\lambda_0^2 - a^2}$.

Покажем, что уравнение (17) всегда имеет решение. Действительно, полагая $\frac{l}{2\lambda} = t$, сведем это уравнение к виду $\sin t = \frac{2a}{l} t$, где в силу условия задачи $\frac{2a}{l} = \alpha < 1$. Функция $y = \sin t$ имеет в точке $t = 0$ наклон касательной $\frac{\pi}{4}$, а функция $y = \alpha t$ имеет меньший наклон. Следовательно, графики этих функций имеют, кроме точки $O(0,0)$, еще одну точку пересечения. ■

С помощью закона взаимности из задачи Дидоны получаем следующий результат: *среди всех замкнутых линий, ограничивающих заданную площадь, линией минимальной длины является окружность.*

Задачи для самостоятельной работы

1. Решить вариационную задачу:

$$J(y)=\int_1^2\left(3x^3y'-x^2y^2+\frac{6y}{x}\right)dx\,,\quad y(1)=0\,,\quad y(2)=\frac{1}{8}\,.$$

Ответ: $y=-\dfrac{9x^3-6}{2x^3}$.

2. Найти экстремали функционалов:

а) $J(y)=\int\limits_0^{2\pi}\left(y'^2-y^2\right)dx$, $\quad y(0)=1$, $\quad y(2\pi)=1$,

б) $J(y)=\int\limits_{-1}^{0}\left(12xy-y'^2\right)dx$, $\quad y(-1)=1$, $\quad y(0)=0$,

в) $J(y)=\int\limits_1^2\left(y'^2+2yy'+y^2\right)dx$, $\quad y(1)=1$, $\quad y(2)=0$,

г) $J(y)=\int\limits_1^2 yy'^2\,dx$, $\quad y(0)=1$, $\quad y(1)=\sqrt[3]{4}$,

д) $J(y)=\int\limits_0^{\pi}\left(4y\cos x+y'^2-y^2\right)dx$, $\quad y(0)=0$, $\quad y(\pi)=0$,

е) $J(y)=\int\limits_0^1\left(y'^2-y^2-y\right)e^{2x}\,dx$, $\quad y(0)=0$, $\quad y(1)=e^{-1}$,

ж) $J(y)=\int\limits_{-1}^{1}\left(y'^2-2xy\right)dx$, $\quad y(-1)=-1$, $\quad y(1)=1$,

з) $J(y)=\int\limits_{-1}^{0}\left(y'^2-2xy\right)dx$, $\quad y(-1)=0$, $\quad y(0)=2$,

и) $J(y)=\int\limits_1^e\left(xy'^2+yy'\right)dx$, $\quad y(1)=0$, $\quad y(e)=1$.

Ответы:

а) $y=\cos x+C\sin x$, C – произвольная постоянная, б) $y=-x^3$,

в) $y=\dfrac{\operatorname{sh}(2-x)}{\operatorname{sh}1}$,

г) $y_1=\sqrt[3]{(x+1)^2}$, $y_2=\sqrt[3]{(3x-1)^2}$,

д) $y=(C+x)\sin x$, C – произвольная постоянная,

е) $y=\dfrac{1}{2}\left[e^{-x}+(1+e)xe^{-x}-1\right]$,

ж) $y=\dfrac{7}{6}x-\dfrac{1}{6}x^3$,

з) $y=\dfrac{13}{6}x-\dfrac{1}{6}x^3+2$,

и) $y=\ln x$.

3. Найти экстремали функционалов, зависящих от производных высших порядков:

а) $J(y)=\int\limits_0^1\left(y^2+2y'^2+y''^2\right)dx$, $y(0)=0$, $y(1)=0$, $y'(0)=1$, $y'(1)=-\operatorname{sh}1$,

б) $J(y)=\int\limits_{-1}^0\left(240y-y'''^2\right)dx$, $y(-1)=1$, $y(0)=0$, $y'(-1)=-4{,}5$, $y'(0)=0$, $y''(-1)=16$, $y''(0)=0$,

в) $J(y)=\int\limits_a^b\left(y+y''\right)dx$, $y(a)=y_0$, $y(b)=y_1$, $y'(a)=y'_0$, $y'(b)=y'_1$,

г) $J(y)=\int\limits_a^b\left(y'^2+yy''\right)dx$, $y(a)=A_1$, $y'(a)=A_2$, $y(b)=B_1$, $y'(b)=B_2$, д) $J(y)=\int\limits_0^1\left(y'^2+y''^2\right)dx$, $y(0)=0$, $y(1)=\operatorname{sh}1$, $y'(0)=1$, $y'(1)=\operatorname{ch}1$.

Ответы:

а) $y=(1-x)\operatorname{sh}x$,

б) $y=\dfrac{x^3}{6}\left(x^3+6x+1\right)$,

в) экстремали нет,

г) функционал на всех кривых принимает постоянное значение,

д) $y=\operatorname{sh}x$.

4. Найти экстремали функционалов, зависящих от нескольких функций:

а) $J(y,z)=\int\limits_0^{\pi/4}\left(2z-4y^2+y'^2-z'^2\right)dx$, $y(0)=0$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1$, $z(0)=0$, $z\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1$,

б) $J(y,z)=\int\limits_{-1}^1\left(2xy-y'^2+\dfrac{z'^3}{3}\right)dx$, $y(1)=0$, $y(-1)=2$, $z(1)=1$, $z(-1)=-1$,

в) $J(y,z)=\int\limits_0^{\pi/2}\left(y'^2+z'^2-2yz\right)dx$, $y(0)=0$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$, $z(0)=0$, $z\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$,

г) $J(y,z)=\int\limits_0^1\left(y'^2+z'^2+2y\right)dx$, $y(0)=1$, $y(1)=\dfrac{3}{2}$, $z(0)=0$, $z(1)=1$,

д) $J(y,z)=\int\limits_{1/2}^1\left(y'^2-2xyz'\right)dx$, $y\left(\dfrac{1}{2}\right)=2$, $z\left(\dfrac{1}{2}\right)=15$, $y(1)=1$, $z(1)=1$.

Ответы:

а) $\begin{cases} y(x) = \sin 2x, \\ z(x) = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{32+\pi^2}{8\pi} x, \end{cases}$

б) $\begin{cases} y(x) = -\dfrac{1}{6}\left(x^3 + 5x - 6\right), \\ z(x) = x, \end{cases}$

в) $\begin{cases} y(x) = \sin x, \\ z(x) = \sin x, \end{cases}$

г) $\begin{cases} y(x) = \dfrac{x^2}{2} + 1, \\ z(x) = 1, \end{cases}$

д) $\begin{cases} y(x) = \dfrac{1}{x}, \\ z(x) = \dfrac{2}{x^3} - 1. \end{cases}$

5. Написать уравнения Эйлера–Остроградского для следующих функционалов:

а) $J(u) = \iint\limits_D \left(u_x^4 + u_y^4 + 12u\, f(x,y)\right) dxdy$,

б) $J(u) = \iint\limits_D \left(u_x^2 - u_y^2\right) dxdy$,

в) $J(u) = \iint\limits_D \left(u_x^2 + u_y^2 + 2u\,\varphi(x,y)\right) dxdy$.

Ответы:

а) $u_x^2 u_{xx} + u_y^2 u_{yy} = f(x,y)$,

б) $u_{xx} - u_{yy} = 0$,

в) $u_{xx} + u_{yy} = \varphi(x,y)$.

6. Найти экстремали функционалов, воспользовавшись инвариантностью уравнения Эйлера:

а) $J(y)=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r\sin\varphi\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi$ (*Указание:* в уравнении Эйлера перейти от полярных координат к декартовым),

б) $J(y)=\int\limits_a^b \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+y'^2}\,dx$.

Ответы:

а) $r\cos\varphi+C_2=C_1\ln\left|r\sin\varphi+\sqrt{r^2\sin^2\varphi-C_1^2}\right|$,

б) $x^2\cos C_2-y^2\cos C_2-2xy\sin C_2=C_1$.

7. (Задача о положении равновесия тяжелой однородной нити под действием силы тяжести). Среди всех плоских линий длины l, концы которых лежат в заданных точках $M_0(x_0,y_0)$ и $M_1(x_1,y_1)$, найти ту, у которой ордината центра тяжести минимальна.

Указание. Семейство экстремалей $y(x)=C_1\operatorname{ch}\dfrac{x-C_2}{C_1}-\lambda$.

Произвольные постоянные C_1 и C_2 и параметр λ определяются из условий

$$y_0=C_1\operatorname{ch}\frac{x_0-C_2}{C_1}-\lambda,\quad y_1=C_1\operatorname{ch}\frac{x_1-C_2}{C_1}-\lambda,$$

$$\int\limits_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx=C_1\left(\operatorname{sh}\frac{x_1-C_2}{C_1}-\operatorname{sh}\frac{x_0-C_2}{C_1}\right)=l.$$

8. Среди всех кривых на сфере радиуса R, соединяющих данные ее две точки, найти кривую кратчайшей длины (геодезическую кривую).

Указание. Задача сводится к нахождению минимума интеграла

$$J(\varphi,\theta) = R\int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{1+\sin^2\theta\cdot\varphi'^2(\theta)}\,d\theta,$$

где φ – долгота, θ – широта точки на сфере, $\varphi=\varphi(\theta)$ – уравнение искомой кривой.

9. Исследовать на экстремум функционалы:

а) $J(y)=\int_0^1 e^x\left(y^2+\frac{1}{2}y'^2\right)dx$, $y(0)=1$, $y(1)=e$,

б) $J(y)=\int_0^1 e^y y'^2\,dx$, $y(0)=0$, $y(1)=\ln 4$,

в) $J(y)=\int_1^2 \frac{x^3}{y'^2}dx$, $y(1)=1$, $y(2)=4$,

г) $J(y)=\int_0^a \frac{dx}{y'}$, $y(0)=0$, $y(a)=b$,

д) $J(y)=\int_0^1 (1+x)y'^2\,dx$, $y(0)=0$, $y(1)=1$,

е) $J(y)=\int_0^{\pi/2}\left(y^2-y'^2\right)dx$, $y(0)=1$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

Ответы:

а) на кривой $y=e^x$ достигается сильный минимум,

б) на кривой $y=2\ln(x+1)$ достигается сильный минимум,

в) на кривой $y=x^2$ достигается слабый минимум,

г) на кривой $y=\frac{b}{a}x$ достигается слабый минимум,

д) на кривой $y=\frac{\ln(x+1)}{\ln 2}$ достигается сильный минимум,

е) на кривой $y=\cos x+\sin x$ достигается сильный максимум.

10. Используя условие Лежандра, исследовать на экстремум функционалы:

а) $J(y)=\int\limits_0^1\left(y'^2+x^2\right)dx$, $y(0)=-1$, $y(1)=1$,

б) $J(y)=\int\limits_2^3\frac{x^3}{y'^2}dx$, $y(2)=4$, $y(3)=9$,

в) $J(y)=\int\limits_1^2\left(xy'^4-2yy'^3\right)dx$, $y(1)=0$, $y(2)=1$,

г) $J(y)=\int\limits_0^a\left(1-e^{-y'^2}\right)dx$, $y(0)=0$, $y(a)=b$, $a>0$,

д) $J(y)=\int\limits_0^1 yy'^2\,dx$, $y(0)=p>0$, $y(1)=q>0$.

Ответы:

а) на кривой $y=2x-1$ достигается сильный минимум,

б) на кривой $y=x^2$ достигается сильный минимум,

в) на кривой $y=x-1$ достигается слабый минимум,

г) при $|b|<\frac{a}{\sqrt{2}}$ на прямой $y=\frac{b}{a}x$ достигается слабый минимум, а при $|b|>\frac{a}{\sqrt{2}}$ – слабый максимум, при $|b|=\frac{a}{\sqrt{2}}$ экстремума нет,

д) на кривой $y=\sqrt[3]{\left[\left(q^{3/2}-p^{3/2}\right)x+p^{3/2}\right]^2}$ при $p\neq q$ достигается слабый минимум, при $p=q$ на прямой $y=p$ достигается слабый минимум.

11. Найти допустимую экстремаль и выяснить, при каких значениях параметра a на ней достигается минимум функционала

$$J(y)=\int\limits_0^1\left[x+x^2+y^2+a\left(y'\right)^2\right]dx,\quad y(0)=0,\quad y(1)=1.$$

Указание. Необходимо воспользоваться необходимыми и достаточными условиями экстремума функционала.

12. Каким необходимым граничным условиям удовлетворяет функция, дающая минимум функционалу

$$J(y)=\int_a^b\left[\left(y'\right)^2+f(x,y)\right]dx+2y(a)\cdot y(b),$$

если $f(x,y)$ – заданная дважды непрерывно дифференцируемая функция на всей плоскости x, y?

Ответ: $y'(a)=-y(b)$, $y'(b)=-y(a)$.

13. Найти кратчайшее расстояние:

а) от точки $A(1,0)$ до эллипса $4x^2+9y^2=36$,

б) от точки $A(-1,5)$ до параболы $x=y^2$,

в) между окружностью $x^2+y^2=1$ и прямой $x+y=4$,

г) от точки $A(-1,3)$ до прямой $y=1-3x$.

Ответы:

а) $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$, б) $\sqrt{20}$, в) $2\sqrt{2}-1$, г) $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

14. Найти экстремали в изопериметрических задачах:

а) $J(y)=\int_0^1 y'^2\,dx$, $y(0)=1$, $y(1)=6$ при условии

$$\int_0^1 y(x)\,dx=3,$$

б) $J(y)=\int_0^1\left(x^2+y'^2\right)dx$, $y(0)=0$, $y(1)=0$ при условии

$$\int_0^1 y^2(x)\,dx=2,$$

в) $J(y)=\int_0^1 y'^2\,dx$, $y(0)=0$, $y(1)=\dfrac{1}{4}$ при условии

$$\int_0^1 \left(y-y'^2\right)dx=\frac{1}{12}.$$

Ответы:

а) $y=3x^2+2x+1$,

б) $y=\pm 2\sin \pi nx$, $n\in\mathbb{Z}$,

в) $y=\dfrac{1}{4}\left(2x-x^2\right)$.

15. Поверхностью Лиувилля называется поверхность, на которой дифференциал дуги можно представить в виде

$$ds=\sqrt{\varphi(u)+\psi(v)}\sqrt{du^2+dv^2}.$$

Найти уравнение геодезических линий на поверхности Лиувилля.

Указание. Задача состоит в нахождении экстремалей функционала

$$J(v)=\int \sqrt{\varphi(u)+\psi(v)}\sqrt{1+v'^2}\,du.$$

16. Найти приближенные решения следующих задач о минимуме функционалов и сравнить с точным решением:

а) $J(y)=\int_0^1 \left(y'^2-y^2+2xy\right)dx$, $y(0)=y(1)=0$,

б) $J(y)=\int_0^1 \left(y'^2+2y\right)dx$, $y(0)=y(1)=0$,

в) $J(y)=\int_0^1 \left(2xy+y^2+y'^2\right)dx$, $y(0)=y(2)=0$.

Ответы:

а) точное решение $y(x)=x-\dfrac{\sin x}{\sin 1}$,

б) точное решение $y(x)=\dfrac{1}{2}\left(x^2-x\right)$, в) точное решение $y(x) = \dfrac{2\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 2} - x$.

17. Найти экстремали с угловой точкой для функционала

$$J(y) = \int_0^2 y'^2 \left(y' - 1\right)^2 dx, \quad y(0) = 0, \quad y(2) = 1.$$

Ответ: Ломаные линии, составленные из отрезков прямых $y = x$ или отрезков прямых $y = 0$ и $y = x - 1$, дают абсолютный минимум. Прямая $y = \dfrac{1}{2}x$ дает слабый максимум.

18. Найти решение с одной угловой точкой в задаче о минимуме функционала

$$J(y) = \int_0^4 \left(y' - 1\right)^2 \left(y' + 1\right)^2 dx, \quad y(0) = 0, \quad y(4) = 2.$$

Ответ: $y = -x$ при $0 \le x \le 1$, $y = x - 2$ при $1 < x \le 4$ и $y = x$ при $0 \le x \le 3$.

19. Найти решение с угловой точкой в задаче об экстремуме функционала

$$J(y) = \int_{-a}^{a} y^2 \left(4 - y'^2\right) dx, \quad y(-a) = 0, \quad y(a) = 1.$$

Ответ: $y = \begin{cases} 0, & -a \le x \le 0, \\ 2x, & 0 \le x \le a. \end{cases}$

Список литературы

1. *Альтшуль А.Д., Киселев П.Г.* Гидравлика и аэродинамика (Основы механики жидкости): учебное пособие для вузов, изд. 2-е перераб. и доп. М.: Стройиздат, 1975. 323 с.

2. *Ахиезер Н.И.* Лекции по вариационному исчислению. М.: Гостехиздат, 1955. 248 с.

3. *Бернштейн С.Н.* Об уравнениях вариационного исчисления // УМН. 1941. Вып. 8. С. 32–74.

4. *Блисс Г.А.* Лекции по вариационному исчислению. М.: ИЛ, 1950. 348 с.

5. *Буслаев В.С.* Вариационное исчисление. Л.: Изд-во ЛГУ, 1980. 288 с.

6. *Ванько В.И., Ермошина О.В., Кувыруин Г.Н.* Вариационное исчисление и оптимальное управление. М.: Изд. МГТУ им. Баумана, 2006. 488 с. (изд. 3).

7. *Васильева А.Б., Медведев Г.Н., Тихонов Н.А., Уразгильдина Т.А.* Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах. М.: Физматлит, 2005. 432 с. (2 изд.)

8. *Гюнтер Н.М.* Курс вариационного исчисления. СПб.: Изд-во «Лань», 2009. 320 с. (изд. 2).

9. *Дмитриев В.И.* Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: КДУ, 2008. 220 с.

10. *Карташев А.П., Рождественский Б.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. М.: Наука, 1980. 288 с.

11. *Конягин С.В.* Вариационное исчисление и оптимальное управление. М.: МГУ, 2005. 62 с. (курс лекций).

12. *Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселев А.И.* Вариационное исчисление (задачи и упражнения). М.: Наука, 1973. 192 с.

13. *Лаврентьев М.А., Люстерник Л.А.* Курс вариационного исчисления. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 296 с.

14. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Г.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.

15. *Романко В.К.* Курс дифференциальных уравнений и вариационное исчисление. М.: Лаборатория Базовых знаний, 2006. 344 с. (изд. 2).

16. *Савельев И.В.* Курс общей физики. Т. 1. Механика. Молекулярная физика: учебное пособие. 2-е изд., перераб. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. 432 с.

17. *Сабитов К.Б.* Функциональные, дифференциальные и интегральные уравнения. М.: Высшая школа, 2005. 671 с.

18. *Сабитов К.Б.* Уравнения математической физики. – М.: Лаборатория знаний, 2024. 569 с. (изд. 3).

19. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. М.: Физматгиз, 1962. Т. 1. 478 с.; М.: Наука, 1974. Т. 4, ч. 1. 336 с.

20. *Федорюк М.В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985. 448 с.

21. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424 с.

22. *Цлаф Л.Я.* Вариационное исчисление и интегральные уравнения. М.: Наука, 1966. 176 с.

Учебное пособие для вузов

Сабитов Камиль Басирович
Сидоров Станислав Николаевич

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ
И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Редактор *Л.В. Филиппова*
Компьютерная верстка *С.Н. Сидоров*

Подписано в печать 25.03.2026 г.
Формат 60х90/16. Гарнитура «Arial». Печать офсетная.
Усл.-печ. л. 9,3. Уч.-изд. л. 8,6.
Тираж 200 (1-й завод – 57) экз. Заказ № 207/26.

ФГБУ «Издательство «Наука»
121099, Москва, Шубинский пер., д. 6, стр. 1

E-mail: info@naukapublishers.ru
https://naukapublishers.ru
https://naukabooks.ru

Отпечатано в редакционно-издательском секторе
Стерлитамакского филиала УУНиТ:
453103, г. Стерлитамак, пр. Ленина, 49.

E-mail: sf@struust.ru
https://str.uust.ru/
Тел.: 8(3473)33-98-50

САБИТОВ Камиль Басирович

САБИТОВ Камиль Басирович – доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент Академии наук Республики Башкортостан, главный научный сотрудник Стерлитамакского филиала УУНиТ и Института механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, известный специалист по теории краевых задач для дифференциальных уравнений, автор более 300 научных работ.

СИДОРОВ Станислав Николаевич

СИДОРОВ Станислав Николаевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Физика» Уфимского государственного нефтяного технического университета, известный специалист по теории краевых задач для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа, автор более 30 научных работ.

Основной задачей вариационного исчисления является отыскание наибольших и наименьших значений функционалов, выражаемых определенными интегралами от функции и ее частных производных. Такая задача аналогична задаче курса дифференциального исчисления об отыскании наибольших и наименьших значений функции. Как мы знаем, такая задача решается путем разыскания точек экстремума функции на основании производной. Аналогичным образом рассматриваются задачи и для функционалов. Методы вариационного исчисления широко используются во многих задачах математики, механики и физики

ISBN 978-5-02-041660-4

9 785020 416604