ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И АВТОМАТИЗАЦИИ КБНЦ РАН

ОСНОВЫ ДРОБНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ И ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Нальчик – 2020

УДК 517.91; 517.95
ББК 22.161.6
Б 73

Рецензент:
кандидат физико-математических наук
М.О. Мамчуев

Богатырева Ф.Т., Гадзова Л.Х., Эфендиев Б.И. Основы дробного интегрирования и дифференцирования: Методическое пособие. – Нальчик: Издательство КБНЦ РАН, 2020. - 46 с.

В пособии приводятся определения и основные свойства операторов дробного порядка (дробный интеграл и производная Римана – Лиувилля, дробная производная Капуто, оператор дробного дифференцирования Джрбашяна – Нерсесяна и др.), специальных функций, возникающих при решении дифференциальных уравнений дробного порядка, а также методы решения простейших интегральных и дифференциальных уравнений дробного порядка.

Издание будет полезно для студентов, аспирантов и всех интересующихся дробным исчислением.

ISBN 978-5-6045584-2-3

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Дробное исчисление является обобщением классического исчисления, связанного с операциями интегрирования и дифференцирования нецелого (дробного) порядка. Развитию дробного исчисления способствовали работы Г.В. Лейбница, Л. Эйлера, Н.Х. Абеля, Ж. Лиувилля, Б. Римана, А. Грюнвальда, А.В. Летникова и многих других. Подробную информацию об истории возникновения и развитии дробного исчисления и систематическое изложение теории можно найти в работах А.М. Нахушева [11-13], I. Poblubny [34], K.S. Miller, B. Ross [32], K.B. Oldham, J. Spanier [33] и С.Г. Самко, А.А. Килбаса, О.А. Маричева [16].

Начиная с XIX века теория дробного исчисления быстро развивалась, в основном как основа для ряда прикладных дисциплин, включая дифференциальные уравнения дробного порядка, дробную динамику. В настоящее время дробное исчисление находится в процессе бурного развития и в теоретическом и в практическом планах. В первую очередь это обусловлено многочисленными эффективными приложениями дробного интегро-дифференцирования при описании широкого класса физических и химических процессов, протекающих во фрактальных средах, при математическом моделировании экономических и социально-биологических явлений. Дробное исчисление эффективно применяется в моделировании, потому что новые модели дробного порядка часто более точны, чем целочисленные модели, то есть в модели дробного порядка больше степеней свободы, чем в соответствующей классической. Одна из особенностей этих моделей заключается в том, что дробные производные и интегралы не являются локальными величинами. Все дробные операторы учитывают всю историю рассматриваемого процесса, таким образом, способны моделировать нелокальные и распределенные эффекты, часто встречающиеся в природных и технических явлениях. А.М. Нахушевым было замечено, что «дробное (дифференциальное и интегральное) исчисление в теории фракталов и систем с памятью приобретает такое же важное значение, как и классический анализ в физике (механике) сплошных сред» [12].

Основой большинства математических моделей, описывающих указанные явления, являются дифференциальные уравнения дробного порядка.

Поэтому развитие аналитического аппарата теории дифференциальных уравнений дробного порядка является весьма актуальной и важной задачей.

В данном пособии приводятся определения и основные свойства операторов дробного порядка (дробный интеграл и производная Римана – Лиувилля, дробная производная Капуто, оператор дробного дифференцирования Джрбашяна – Нерсесяна и др.), специальных функций, возникающих при решении дифференциальных уравнений дробного порядка, а также методы решения простейших интегральных и дифференциальных уравнений дробного порядка.

1. Вводные сведения

1.1. Гамма-функция

1. Функция комплексного переменного z, которая определяется несобственным интегралом первого рода

$$\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0 \tag{1}$$

называется *гамма-функцией Эйлера.*

Одним из основных свойств гамма-функции является следующее равенство

$$z\Gamma(z) = \Gamma(z+1). \tag{2}$$

После n-кратного применения формулы (2), имеем

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)...(z+n-1)} = \frac{\Gamma(z+n)}{(z)_n},$$

где $(z)_n$ – *символ Похгаммера*, определяемый равенством

$$(z)_n = z(z+1)(z+2)...(z+n-1), \quad (z)_0 = 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

2. Справедливы следующие свойства гамма-функции:

- функция $\Gamma(z)$ является аналитической в комплексной плоскости z всюду, кроме точек $z = -n$, $n = 0, 1, 2, ...$, в которых имеет полюсы первого порядка;
- $\Gamma(z) \neq 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$;
- функция $[\Gamma(z)]^{-1}$ является целой функцией, то есть аналитической во всей комплексной плоскости z, причем
$$\left[\frac{1}{\Gamma(z)}\right]_{z=-k} = 0, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\};$$

- $(-z)_n\Gamma(z+1-n) = (-1)^n\Gamma(z+1), \quad n \in \mathbb{N}\cup\{0\};$
- $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin \pi z}, \quad \Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi};$
- $\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \Gamma(1) = \Gamma(2) = 1.$

3. При $|z| \to \infty$, $|\arg\ z| \le \pi - \varepsilon < \pi$ имеет место асимптотическая формула Стирлинга

$$\Gamma(z+1) = \sqrt{2\pi z}\left(\frac{z}{e}\right)^z\left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right).$$

4. Для любых значений $z \in \mathbb{C}$ имеет место формула Ханкеля

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma(r,\omega\pi)} e^p p^{-z} dp,$$

где $\gamma(r,\omega\pi)$ – контур Ханкеля, состоящий из дуги окружности $|p| = r$, $|\arg p| \le \omega\pi$ и двух лучей $|p| \ge r > 0$, $\arg p = \pm\omega\pi$:

$$\gamma(r,\omega\pi) = \{p:\ |p| = r,\ |\arg p| \le \omega\pi\} \cup \{p:\ |p| \ge r,\ \arg p = \pm\omega\pi\},$$

$1/2 < \omega \le 1$. Направление обхода выбрано в сторону неубывания $\arg p$.

1.2. Бета-функция

5. Функция комплексных переменных α и β, определяемая интегралом

$$B(\alpha,\beta) = \int\limits_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt, \quad \mathrm{Re}\,\alpha > 0, \quad \mathrm{Re}\,\beta > 0$$

называется *бета-функцией.*

Связь гамма-функции с бета-функцией выражается формулой

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \quad \alpha,\beta \in \mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,...\}$$

и позволяет продолжить бета-функцию на все комплексные значения α и β, за исключением нуля и целых отрицательных точек действительной оси.

1.3. Функция Миттаг-Леффлера

6. Целая функция комплексного переменного z, определяемая рядом

$$E_{\alpha,\mu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \mu)}, \quad \alpha > 0, \quad \mu \in \mathbb{C}, \quad z \in \mathbb{C}$$

называется *функцией Миттаг-Леффлера.*

7. В терминах функции Миттаг-Леффлера могут быть выражены некоторые элементарные функции

$$e^z = E_{1,1}(z);$$

$$\sin z = zE_{2,2}(-z^2); \quad \cos z = E_{2,1}(-z^2);$$

$$\operatorname{sh} z = zE_{2,2}(z^2); \quad \operatorname{ch} z = E_{2,1}(z^2).$$

8. Для функции Миттаг-Леффлера справедлива *формула автотрансформации*:

$$E_{\alpha,\mu}(z) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} + zE_{\alpha,\alpha+\mu}(z).$$

9. Имеет место *интегральное представление функции Миттаг-Леффлера*:

Если $\frac{\pi\alpha}{2} < |\arg z| < \pi$, $\alpha \in]0, 2[$, то справедлива формула

$$E_{\alpha,\mu}(z) = \frac{1}{2\alpha\pi i} \int\limits_{\gamma(r,\omega\pi)} \frac{e^{q^{\frac{1}{\alpha}}} q^{\frac{\alpha-\mu}{\alpha}}}{q-z} dq, \quad \forall\, r > 0, \quad \omega > \frac{\alpha}{2}.$$

Если $|\arg z| < \frac{\pi\alpha}{2}$, $\alpha \in]0, 2[$, то

$$E_{\alpha,\mu}(z) = \frac{1}{\alpha} z^{\frac{1-\mu}{\alpha}} e^{z^{\frac{1}{\alpha}}} + \frac{1}{2\alpha\pi i} \int\limits_{\gamma(r,\omega\pi)} \frac{e^{q^{\frac{1}{\alpha}}} q^{\frac{\alpha-\mu}{\alpha}}}{q-z} d\xi.$$

10. Имеет место *асимптотическое разложение функции Миттаг-Леффлера*:

Если $|\arg z| \le \frac{\alpha\pi}{2}$, $\alpha \in]0,2[$, то справедлива формула

$$E_{\alpha,\mu}(z) = \frac{1}{\alpha} z^{\frac{1-\mu}{\alpha}} e^{z^{\frac{1}{\alpha}}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{z^{-k}}{\Gamma(\mu - \alpha k)} + O\left(|z|^{-n-1}\right), \quad |z| \to \infty.$$

Если же $\frac{\pi\alpha}{2} < |\arg z| \le \pi$, $\alpha \in]0,2[$, то

$$E_{\alpha,\mu}(z) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{z^{-k}}{\Gamma(\mu - \alpha k)} + O\left(|z|^{-n-1}\right), \quad |z| \to \infty.$$

1.4. Функция Райта

11. Целая функция вида

$$\phi(\alpha,\beta;z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0, \quad \beta \in \mathbb{C}$$

называется *функцией Райта.*

12. Справедлива формула дифференцирования функции Райта

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n \phi(\alpha,\beta;z) = \phi(\alpha,\alpha+n\beta;z), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Имеет место равенство

$$\int\limits_0^{\infty} t^{\nu-1}\phi(-\alpha,\beta;-z)dt = \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(\alpha\nu+\beta)}.$$

13. Для любых $\alpha \in]0,1[$, $\beta \in \mathbb{R}$, $x > 0$ и $y > 0$, справедливо неравенство

$$\left|y^{\beta-1}\phi(-\alpha,\beta;-xy^{-\alpha})\right| \le Cx^{-\theta}y^{\beta+\alpha\theta-1}, \quad \theta \ge \begin{cases} 0, & (-\beta) \notin \mathbb{N}\cup\{0\}, \\ -1, & (-\beta) \in \mathbb{N}\cup\{0\}. \end{cases}$$

Функция Райта положительна:

$$\phi(-\alpha,\beta;-z) > 0 \quad \text{при} \quad \alpha \in]0,1[,\ \beta \ge 0, \quad z > 0,$$

и имеет асимптотическое разложение

$$\phi(-\alpha,\beta;-z) = Y^{\frac{1}{2}-\beta}e^{-Y}\left[\sum_{j=0}^{M-1} A_j Y^{-j} + O\left(Y^{-M}\right)\right] \quad \text{при} \quad z\to\infty,$$

где $\alpha \in]0,1[, Y = (1-\alpha)\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} z^{\frac{1}{1-\alpha}}$, а коэффициенты A_J зависят лишь от α и β.

Пусть $(-\beta) \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Тогда справедлива формула

$$\lim_{z\to 0}\frac{1}{z}\phi(-\alpha,\beta;z) = \frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha)}. \tag{3}$$

1.5. Функция типа Райта

14. *Функцией типа Райта* называется функция $e^{\mu,\delta}_{\alpha,\beta}(z)$, определяемая контурным интегралом

$$e^{\mu,\delta}_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma(r,\,\omega\pi)} e^t t^{-\delta} E_{\alpha,\mu}\left(zt^{\beta}\right) dt,$$

где $\gamma(r,\,\omega\pi)$ – контур Ханкеля, значение ω выбирается таким, что

$$1-\omega\beta > \frac{\alpha}{2}, \quad \frac{1}{2} < \omega \le 1. \tag{4}$$

Неравенства (4) всегда выполняются при

$$0<\alpha<2, \;\; 0<\alpha+\beta<2, \;\; \beta<1, \;\; \delta+\beta>0. \tag{5}$$

15. При $\alpha > \beta$, $\alpha > 0$ для любого $z \in \mathbb{C}$ для функции типа Райта справедливо представление в виде ряда

$$e^{\mu,\delta}_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\mu)\Gamma(\delta-\beta n)}, \quad \mu\in\mathbb{C}, \quad \delta\in\mathbb{C}.$$

При $\alpha=\mu=1$ она совпадает с функцией Райта:

$$e^{1,\delta}_{1,\beta}(z) = \phi(-\beta,\delta,z),$$

16. Для функции типа Райта справедлива следующая *формула автотрансформации*

$$e^{\mu-\alpha,\delta+\beta}_{\alpha,\beta}(z) = z e^{\mu,\delta}_{\alpha,\beta}(z) + \frac{1}{\Gamma(\mu-\alpha)\Gamma(\delta+\beta)}.$$

Для любого $z \in \mathbb{C}$ справедливо соотношение

$$\frac{1}{\alpha} e^{\mu-1,\delta}_{\alpha,\beta}(z) + \frac{1}{\beta} e^{\mu,\delta-1}_{\alpha,\beta}(z) = \left[\frac{\mu-1}{\alpha} + \frac{\delta-1}{\beta}\right] e^{\mu,\delta}_{\alpha,\beta}(z).$$

17. Предельные соотношения. Если $\pi \geq |\arg z| > \pi(\alpha+\beta)/2+\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $k = 0, 1, 2, ...$, то справедливы следующие предельные соотношения при больших по модулю значениях z:

$$\lim_{|z|\to\infty} e^{\mu,\delta}_{\alpha,\beta}(z) = 0,$$
$$\lim_{|z|\to\infty} z e^{\mu,\delta}_{\alpha,\beta}(z) = -\frac{1}{\Gamma(\mu-\alpha)\Gamma(\delta+\beta)},$$
$$\lim_{|z|\to\infty} z^2 e^{\alpha-k,\delta}_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\Gamma(-k-\alpha)\Gamma(\delta+2\beta)},$$
$$\lim_{|z|\to\infty} z^2 e^{\mu,-\beta-k}_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\Gamma(\mu-2\alpha)\Gamma(-k+\beta)},$$

и при $z \to 0$:

$$\lim_{z\to 0} \frac{1}{z} e^{-k,\delta}_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-k)\Gamma(\delta-\beta)},$$
$$\lim_{z\to 0} \frac{1}{z} e^{\mu,-k}_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\Gamma(\mu+\alpha)\Gamma(-k-\beta)}.$$

1.6. Свертка Лапласа

18. *Сверткой Лапласа* функций $f(x)$ и $g(x)$ называется интеграл

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(t) g(x-t) dt.$$

19. Свертка Лапласа обладает следующими свойствами:

$$(f * g)(x) = (g * f)(x) - \text{ коммутативность,}$$
$$[f * (g * h)](x) = [(f * g) * h](x) - \text{ ассоциативность.}$$

20. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывно дифференцируемы, то справедливо равенство

$$\frac{d}{dx}(f * g)(x) = (f' * g)(x) + f(0)g(x) = (g' * f)(x) + g(0)f(x). \qquad (6)$$

Если же $f(x)$ и $g(x)$ n раз непрерывно дифференцируемы, то имеет место соотношение

$$\frac{d^n}{dx^n}(f * g)(x) = \left(f^{(n)} * g\right)(x) + \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0)g^{(n-k-1)}(x) =$$

$$= \left(f * g^{(n)}\right)(x) + \sum_{k=0}^{n-1} f^{(n-k-1)}(x)g^{(k)}(0).$$

Равенство (6) вытекает из формулы дифференцирования интеграла с переменными пределами

$$\frac{d}{dx}\int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,t)dt \;=\; \beta'(x)\cdot f[x,\beta(x)] - \alpha'(x)\cdot f[x,\alpha(x)] + \int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f'_x(x,t)dt.$$

21. Свертка двух степенных функций находится по формуле

$$\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * \frac{x^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} = \frac{x^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \quad \alpha,\beta > 0.$$

22. Для свертка функции Миттаг-Леффлера со степенной функцией имеет место равенство

$$\frac{x^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} * x^{\mu-1}E_{\alpha,\mu}(x^{\alpha}) = x^{\mu+\beta-1}E_{\alpha,\mu+\beta}(x^{\alpha}), \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \mu > 0.$$

23. Для свертки двух функций Райта справедлива формула

$$x^{\delta-1}e_{1,\beta}^{1,\delta}\left(-\frac{a}{x^\beta}\right) * x^{\varepsilon-1}e_{1,\beta}^{1,\varepsilon}\left(-\frac{b}{x^\beta}\right) = x^{\delta+\varepsilon-1}e_{1,\beta}^{1,\delta+\varepsilon}\left(-\frac{a+b}{x^\beta}\right), \quad a,b>0.$$

1.7. Преобразование Лапласа

24. *Преобразованием Лапласа* функции вещественной переменной $f(x)$, $x>0$, называется функция $F(p)$ комплексной переменной $p=\sigma+i\omega$, которая определяется формулой

$$F(p) = \mathcal{L}\{f(x);p\} = \int\limits_0^\infty e^{-px}f(x)dx. \tag{7}$$

Функцию $f(x)$ в этом случае называют *оригиналом* в преобразовании Лапласа, а $F(p)$ соответственно изображением. Для того, чтобы функция $f(x)$ могла быть оригиналом достаточно, чтобы выполнялись условия

a) $f(x)$ интегрируема на любом конечном интервале оси x (локально интегрируема),

b) для всех отрицательных x $f(x)=0$,

c) $f(x)$ с ростом x возрастает (по модулю) не быстрее показательной функции, т. е. существуют такие постоянные $C>0$ и λ, что для всех x имеет место неравенство

$$|f(x)| \le Ae^{\lambda x}.$$

Тот факт, что функция $F(p)$ является преобразованием Лапласа функции $f(x)$ иногда обозначают формулой $f(x) \risingdotseq F(p)$.

Далее приведем некоторые свойства преобразования Лапласа. В пп. 25–29, предполагается, что функции к которым применяются преобразование являются оригиналами, и, в частности, $f(x) \risingdotseq F(p)$.

25. Если $f(x)$ непрерывно дифференцируема и выполнено равенство (7), то

$$\mathcal{L}\{f'(x);p\} = pF(p) - f(0),$$

а если $f(x)$ n раз непрерывно дифференцируема и выполнено равенство (7), то

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(x);p\} = p^n F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0)p^{n-k-1}.$$

26. Имеет место формула

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^x f(t)dt;p\right\} = \frac{F(p)}{p}.$$

27. Преобразованием Лапласа от свертки двух оригиналов является произведение изображений этих оригиналов:

$$\mathcal{L}\{(f*g)(x);p\} = F(p)G(p).$$

28. Если $\mu > 0$, то

$$\mathcal{L}\{x^{\mu-1};p\} = p^{-\mu}\Gamma(\mu),$$

или же

$$\mathcal{L}^{-1}\{p^{-\mu}\} = \frac{x^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}.$$

29. Справедливы формулы преобразования Лапласа функции Миттаг-Леффлера

$$\mathcal{L}\{x^{\mu-1}E_{\alpha,\mu}(\lambda x^\alpha);p\} = \frac{p^{\alpha-\mu}}{p^\alpha - \lambda}; \quad |\lambda| < |p|^\alpha, \quad \alpha > 0, \quad \mu > -1$$

и функции типа Райта

$$\mathcal{L}\{x^{\delta-1}e^{\mu,\delta}_{\alpha,\beta}\left(-cx^{-\beta}\right);p\} = p^{-\delta}E_{\alpha,\mu}\left(-cp^\beta\right), \quad c > 0, \tag{8}$$

для произвольных μ и α, β и δ, удовлетворяющих (5).

2. Интегралы и производные дробного порядка

2.1. Оператор интегро-дифференцирования Римана – Лиувилля

30. Обозначим через I интегральный оператор, который действует на функцию $f(x)$ следующим образом

$$If = \int_0^x f(t)dt.$$

Если применить оператор I к функции $f(x)$ n раз последовательно, будем иметь

$$I^2 f = \int_0^x \int_0^t f(s)dsdt = \int_0^x f(s)(x-s)ds,$$

$$\dots$$

$$I^n f = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x f(s)(x-s)^{n-1}ds. \qquad (9)$$

Заменив $(n-1)!$ на $\Gamma(n)$, значение n в (9) может быть и нецелым, и мы приходим в определению интеграла дробного порядка.

31. Пусть $f(x) \in L[a,b]$, выражение вида

$$D_{ax}^{-\alpha} f(x) = \frac{\operatorname{sign}(x-a)}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)dt}{|x-t|^{1-\alpha}}, \quad \alpha > 0$$

называется *дробным интегралом Римана – Лиувилля* порядка α с началом в точке a и с концом в точке x.

32. Для функции $f(x)$ заданной на отрезке $[a,b]$ выражение вида

$$D_{ax}^{\alpha} f(x) = \operatorname{sign}^n(x-a) \frac{d^n}{dx^n} D_{ax}^{\alpha-n} f(x),$$

называется *дробной производной Римана – Лиувилля* порядка α, $\alpha \in \,]n-1, n]$, $n \in \mathbb{N}$.

33. В терминах свертки операторы дробного интегро-дифференцирования с началом в точке $a = 0$ могут быть представлены следующим образом:

$$D_{0x}^{-\alpha}u(x) = u(x) * \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad \alpha > 0,$$

$$D_{0x}^{\alpha}u(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left(u(x) * \frac{x^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)}\right), \quad \alpha \in]n-1, n], \quad n \in \mathbb{N}.$$

34. Справедлива формула дробного дифференцирования свертки двух функций

$$D_{0x}^{\alpha}(f * g)(x) = \left(D_{0x}^{\alpha}g * f\right)(x) + f(x)\lim_{x\to 0} D_{0x}^{\alpha-1}g(x), \quad 0 < \alpha \le 1.$$

35. Известно, что если $G(p)$ является преобразованием Лапласа функции $g(x)$, то

$$\mathcal{L}\left\{D_{0x}^{-\alpha}g(x); p\right\} = p^{-\alpha}G(p), \quad \alpha > 0. \tag{10}$$

Поэтому, если $0 < \alpha \le 1$, то

$$\mathcal{L}\left\{D_{0x}^{\alpha}g(x); p\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dx}D_{0x}^{\alpha-1}g(x); p\right\} = p^{\alpha}G(p) - \lim_{x\to 0} D_{0x}^{\alpha-1}g(x), \tag{11}$$

а в случае $n - 1 < \alpha \le n$

$$\mathcal{L}\left\{D_{0x}^{\alpha}g(x); p\right\} = p^{\alpha}G(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^k \left[D_{0x}^{\alpha-k-1}g(x)\right]_{x=0}.$$

2.2. Дробная производная Капуто

36. *Дробной производной Капуто* называется выражение вида

$$\partial_{ax}^{\alpha}f(x) = \operatorname{sign}^n(x-a) D_{ax}^{\alpha-n}\frac{d^n}{dx^n}f(x), \tag{12}$$

где $\alpha \in]n-1, n]$, $n \in \mathbb{N}$.

Отметим, что оператор (12) также известен под названием оператора Герасимова – Капуто.

37. Производную Капуто можно представить в виде свертки Лапласа

$$\partial_{0x}^{\alpha} f(x) = f^{(n)}(x) * \frac{x^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)}, \quad \alpha \in]n-1, n], \quad n \in \mathbb{N}.$$

38. Преобразование Лапласа от производной Капуто имеет вид

$$\mathcal{L}\left\{\partial_{0x}^{\alpha} g(x); p\right\} = p^{\alpha} G(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{\alpha-k-1} g^{(k)}(0), \ \alpha \in]n-1, n].$$

2.3. Оператор дробного дифференцирования Джрбашяна – Нерсесяна

39. *Оператор Джрбашяна – Нерсесяна* порядка α, ассоциированный с последовательностью

$$\{\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_n\}, \tag{13}$$

определяется соотношением

$$D_{ax}^{\{\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n\}} f(x) = D_{ax}^{\gamma_n - 1} D_{ax}^{\gamma_{n-1}} ... D_{ax}^{\gamma_1} D_{ax}^{\gamma_0} f(x), \tag{14}$$

где

$$\gamma_k \in]0, 1], \quad k = 0, 1, ..., n, \quad \alpha = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k - 1 > 0,$$

$D_{ax}^{\gamma_n - 1}$, $D_{ax}^{\gamma_k}$ – операторы дробного интегрирования и дифференцирования Римана – Лиувилля, соответственно.

Заметим, что оператор (14), ассоциированный с последовательностями $\{\alpha - n + 1, 1, ..., 1\}$ и $\{1, ...1, \alpha - n + 1\}$ совпадает с оператором Римана – Лиувилля и с оператором Капуто, соответственно, т.е.

$$D_{ax}^{\{\alpha-n+1,1,...,1\}} = D_{0x}^{\alpha}, \quad \text{и} \quad D_{ax}^{\{1,...,1,\alpha-n+1\}} = \partial_{0x}^{\alpha}.$$

40. Оператор Джрбашяна – Нерсесяна выражается через оператор Римана – Лиувилля в следующем виде

$$D_{ax}^{\{\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n\}} f(x) = D_{ax}^{\alpha} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|x-a|^{\mu_k - 1}}{\Gamma(\mu_k)} f_k \right],$$

где

$$f_k = \lim_{x\to 0} D_{ax}^{\{\gamma_0,\gamma_1,\dots,\gamma_k\}} f(x) \quad \text{и} \quad \mu_k = \sum_{j=0}^{k} \gamma_j.$$

41. Справедлива формула дробного дифференцирования Джрбашяна – Нерсесяна свертки

$$D_{ax}^{\{\gamma_0,\gamma_1,\dots,\gamma_k\}}(f*h)(x) = \left(D_{ax}^{\{\gamma_0,\gamma_1,\dots,\gamma_k\}} f * h\right)(x) +$$

$$+ \quad \sum_{i=1}^{k} D_{ax}^{\{\gamma_i,\dots,\gamma_k\}} h(x) \lim_{x\to 0} D_{ax}^{\{\gamma_0,\dots,\gamma_{i-1}\}} f(x).$$

2.4. Оператор интегро-дифференцирования сегментного порядка

42. *Оператор интегро-дифференцирования сегментного (континуального) порядка* определяется как интеграл производной (интеграла) Римана – Лиувилля по порядку дифференцирования (интегрирования):

$$D_{ax}^{[\alpha,\beta]} f(x) = \int_{\alpha}^{\beta} D_{ax}^{\gamma} f(x) d\gamma, \quad \alpha < \beta. \tag{15}$$

43. *Регуляризованный оператор дифференцирования континуального порядка* представляется как интеграл регуляризованной производной по порядку дифференцирования:

$$\partial_{ax}^{[\alpha,\beta]} f(x) = \int_{\alpha}^{\beta} \partial_{ax}^{\gamma} f(x) d\gamma, \quad 0 \le \alpha < \beta. \tag{16}$$

44. Из определений (15) и (16) следуют формулы

$$D_{0x}^{[\alpha,\beta]} f(x) = f(x) * \frac{1}{x} Vi(-\beta, -\alpha, x), \quad \alpha < \beta \le 0,$$

$$D_{0x}^{[\alpha,\beta]} f(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left[f(x) * \frac{1}{x} Vi(n-\beta, n-\alpha, x)\right], \;\; n-1 < \beta \le n, \;\; n \in \mathbb{N},$$

$$\partial_{0x}^{[\alpha,\beta]} f(x) = f^{(n)}(x) * \frac{1}{x} Vi(n-\beta, n-\alpha, x), \quad n-1 < \beta \leq n, \ n \in \mathbb{N},$$

где

$$Vi(\sigma, \delta, x) = \int\limits_{\sigma}^{\delta} \frac{x^t}{\Gamma(t)} dt, \quad x \geq 0, \quad \delta \geq \sigma \geq 0.$$

Верны соотношения

$$\frac{d^m}{dx^m} Vi(\sigma, \delta, x) = Vi(\sigma - m, \delta - m, x), \quad \sigma - m \geq 0, \quad m \in \mathbb{N}.$$

45. *Оператором дискретно распределенного дифференцирования* называется выражение вида

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \frac{\partial^{\sigma_k}}{\partial y^{\sigma_k}}.$$

Его можно интерпретировать как оператор дробного дифференцирования распределенного (сегментного) порядка

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} \left(\lambda(y,t) \frac{\partial^t}{\partial y^t} \right) d\mu(t)$$

с мерой сосредоточенной на дискретном множестве.

2.5. Дифференцирование и интегрирование специальных функций

46. Пусть $\mu \in \mathbb{R}$, $\nu > 0$, если $(-\mu) \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $\nu \in \mathbb{R}$, если $(-\mu) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда

$$D_{ax}^{-\mu} \frac{|x-a|^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} = \frac{|x-a|^{\nu+\mu-1}}{\Gamma(\nu+\mu)}.$$

В качестве примера приведем доказательство формулы интегро-дифференцирования степенной функции

$$D_{0x}^{\mu} \frac{x^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} = \frac{x^{\nu-\mu-1}}{\Gamma(\nu-\mu)}, \ \nu > 0, \ \mu \in \mathbb{R}.$$

$\triangleleft$ a) Пусть $\mu < 0$. Тогда из определений оператора Римана – Лиувилля и свертки Лапласа имеем

$$D_{0x}^{\mu}\frac{x^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}=\frac{x^{-\mu-1}}{\Gamma(-\mu)}*\frac{x^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}=\frac{x^{\nu-\mu-1}}{\Gamma(\nu-\mu)}.$$

b) При $\mu>0$, $\mu\in]n-1,n], n\in\mathbb{N}$ имеем

$$D_{0x}^{\mu}\frac{x^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}=\frac{d^n}{dx^n}D_{0x}^{\mu-n}\frac{x^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}=\frac{d^n}{dx^n}\frac{x^{\nu-\mu+n-1}}{\Gamma(\nu-\mu+n)}=$$

$$=\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1}(\nu-\mu+n-1)\frac{x^{\nu-\mu+n-2}}{\Gamma(\nu-\mu+n)}=$$

$$=\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1}\frac{x^{\nu-\mu+n-2}}{\Gamma(\nu-\mu+n-1)}=$$

$$=\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-2}\frac{x^{\nu-\mu+n-3}}{\Gamma(\nu-\mu+n-2)}=...=\frac{x^{\nu-\mu-1}}{\Gamma(\nu-\mu)}. \quad \triangleright$$

Отметим, что в частности, если $\nu=1$ и $\mu>0$, то дробная производная Римана – Лиувилля постоянной, вообще говоря не равна нулю:

$$D_{ax}^{\mu}1=\frac{|x-a|^{-\mu}}{\Gamma(1-\mu)}.$$

С другой стороны, для $k=1,2,\ldots,[\mu]+1$ из предыдущего пункта вытекает формула

$$D_{ax}^{\mu}(x-a)^{\mu-k}=0.$$

47. Пусть $\beta\in\mathbb{R}$, $\operatorname{Re}\mu>0$, если $\beta\notin\mathbb{N}\cup\{0\}$ и $\mu\in\mathbb{C}$, если $\beta\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Тогда

$$D_{ax}^{\beta}\,|x-a|^{\mu-1}\,E_{\alpha,\mu}(\lambda\,|x-a|^{\alpha})=|x-a|^{\mu-\beta-1}\,E_{\alpha,\mu-\beta}(\lambda\,|x-a|^{\alpha}).$$

48. Справедливы следующие формулы дробного интегрирования и дифференцирования функции типа Райта.

Если $c>0$ и $\delta+\beta>0$, то

$$D_{0y}^{\nu}y^{\delta-1}e_{\alpha,\beta}^{\mu,\delta}\left(-cy^{-\beta}\right)=y^{\delta-\nu-1}e_{\alpha,\beta}^{\mu,\delta-\nu}\left(-cy^{-\beta}\right), \tag{17}$$

а при $\delta + \beta = 0$

$$D_{0y}^{\nu} y^{\beta-1} e_{\alpha,\beta}^{\mu,-\beta}\left(-cy^{-\beta}\right) = y^{-\beta-\nu-1} e_{\alpha,\beta}^{\mu,-\beta-\nu}\left(-cy^{-\beta}\right) - \frac{y^{-\nu-1}}{c\Gamma(\mu-\alpha)\Gamma(-\nu)}.$$

Если $\mu = \alpha - k$, $k = 0, 1, 2, ...$, то для справедливости соотношения (17) вместо условия $\delta + \beta > 0$ достаточно выполнения условия $\delta + 2\beta > 0$. Если же $\alpha = \mu = 1$, то на δ не нужно накладывать ограничений, то есть для любого $\delta \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$D_{0y}^{\nu} y^{\delta-1} e_{1,\beta}^{1,\delta}\left(-cy^{-\beta}\right) = y^{\delta-\nu-1} e_{1,\beta}^{1,\delta-\nu}\left(-cy^{-\beta}\right).$$

При $\nu = n \in \mathbb{N}$ формула (17) имеет место для любых δ и $c \in \mathbb{C}$

$$\frac{d^n}{dy^n} y^{\delta-1} e_{\alpha,\beta}^{\mu,\delta}\left(cy^{-\beta}\right) = y^{\delta-n-1} e_{\alpha,\beta}^{\mu,\delta-n}\left(cy^{-\beta}\right).$$

Пусть $c \in \mathbb{C}$. Если $\mu > 0$, то

$$D_{0x}^{\nu} x^{\mu-1} e_{\alpha,\beta}^{\mu,\delta}(cx^{\alpha}) = x^{\mu-\nu-1} e_{\alpha,\beta}^{\mu-\nu,\delta}(cx^{\alpha}). \tag{18}$$

Если $\mu = 0$, то справедлива формула

$$D_{0x}^{\nu} \frac{1}{x} e_{\alpha,\beta}^{0,\delta}(cx^{\alpha}) = x^{-\nu-1} e_{\alpha,\beta}^{-\nu,\delta}(cx^{\alpha}) - \frac{x^{-\nu-1}}{\Gamma(-\nu)\Gamma(\delta)}.$$

При $\nu = n \in \mathbb{N}$ формула (18) справедлива для любых $\mu \in \mathbb{R}$

$$\frac{d^n}{dx^n} x^{\mu-1} e_{\alpha,\beta}^{\mu,\delta}(cx^{\alpha}) = x^{\mu-n-1} e_{\alpha,\beta}^{\mu-n,\delta}(cx^{\alpha}).$$

49. Имеют место равенства

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{1}{t} e_{\alpha,\beta}^{0,\delta}(-\lambda t)dt = -\frac{\alpha}{\Gamma(\delta)}, \qquad \int\limits_0^{\infty} \frac{1}{t} e_{\alpha,\beta}^{\mu,0}(-\lambda t)dt = \frac{\beta}{\Gamma(\mu)}.$$

50. Справедливы формулы дифференцирования функции типа Райта

$$\frac{d}{dz} e_{\alpha,\beta}^{\mu,\delta}(z) = \frac{1}{\alpha z}\left[e_{\alpha,\beta}^{\mu-1,\delta}(z) + (1-\mu) e_{\alpha,\beta}^{\mu,\delta}(z)\right],$$

$$\frac{d}{dz}e^{\mu,\delta}_{\alpha,\beta}(z) = -\frac{1}{\beta z}\left[e^{\mu,\delta-1}_{\alpha,\beta}(z) + (1-\delta)e^{\mu,\delta}_{\alpha,\beta}(z)\right].$$

2.6. Законы композиции

51. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \leq 0$. Тогда имеет место равенство

$$D^{\alpha}_{ax}D^{\beta}_{ax}f(x) = D^{\alpha+\beta}_{ax}f(x).$$

$\triangleleft$ a) Пусть $\alpha < 0$. Тогда

$$D^{\alpha}_{0x}D^{\beta}_{0x}f(x) = \left(f * \frac{x^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} * \frac{x^{-\beta-1}}{\Gamma(-\beta)}\right)(x) = D^{\alpha+\beta}_{0x}f(x).$$

b) Пусть теперь $\alpha > 0$, $\alpha \in]n-1, n], n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$D^{\alpha}_{0x}D^{\beta}_{0x}f(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{n} D^{\alpha-n}_{0x}D^{\beta}_{0x}f(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{n} D^{\alpha+\beta-n}_{0x}f(x).$$

Отсюда следуют следующие три случая:
если $\alpha + \beta = 0$, то

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{n} D^{-n}_{0x}f(x) = f(x);$$

если $\alpha + \beta < 0$, то

$$D^{\alpha+\beta-n}_{0x}f(x) = D^{-n}_{0x}D^{\alpha+\beta}_{0x}f(x),$$

следовательно

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{n} D^{-n}_{0x}D^{\alpha+\beta}_{0x}f(x) = D^{\alpha+\beta}_{0x}f(x);$$

если существует число $m \in \mathbb{N}$, такое что $m-1 < \alpha+\beta \leq m$, $n-1 < \alpha \leq n$ $\Rightarrow m \leq n$, то

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{m}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-m} D^{m-n}_{0x}D^{\alpha+\beta-m}_{0x}f(x) =$$

$$= \left(\frac{d}{dx}\right)^{m} D^{\alpha+\beta-m}_{0x}f(x) = D^{\alpha+\beta}_{0x}f(x). \quad \triangleright$$

При $\alpha = n \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{R}$

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n D_{0x}^{\beta} f(x) = D_{0x}^{\beta+n} f(x).$$

52. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in]n-1, n]$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда справедлива формула

$$D_{ax}^{\alpha} D_{ax}^{\beta} f(x) = D_{ax}^{\alpha+\beta} f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{|x-a|^{-\alpha-k}}{\Gamma(1-\alpha-k)} \left[D_{ax}^{\beta-k} f(x)\right]_{x=a}. \tag{19}$$

Формула (19) называется *обобщенной формулой Ньютона – Лейбница.*

$\triangleleft$ Пусть $\alpha < 0$ нецелое число. Тогда имеем

$$D_{ax}^{\alpha} D_{ax}^{\beta} u(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^x \frac{(x-t)^{-\alpha-1}}{\Gamma(n-\beta)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_0^t (t-s)^{n-\beta-1} u(s) ds dt =$$

$$= \frac{1}{(n-\alpha)(n-\beta)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_0^t u(s) ds dt =$$

$$= \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left[\left(\frac{(x-t)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} D_{0t}^{\beta-1} u(t) \right) \Bigg|_{t=0}^{t=x} \right] +$$

$$+ \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_0^x \frac{(x-t)^{n-\alpha-2}}{\Gamma(n-\alpha-1)} \left(\frac{d}{dt}\right)^{n-1} D_{0t}^{\beta-n} u(t) dt +$$

$$+ \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left[-\frac{x^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} \left[D_{0t}^{\beta-1} u(t)\right]_{t=0} - \frac{x^{n-\alpha-2}}{\Gamma(n-\alpha-1)} \left[D_{0t}^{\beta-2} u(t)\right]_{t=0} \right] +$$

$$+ \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_0^x \frac{(x-t)^{n-\alpha-3}}{\Gamma(n-\alpha-2)} \left(\frac{d}{dt}\right)^{n-2} D_{0t}^{\beta-n} u(t) dt =$$

$$= \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left[-\sum_{k=1}^{n} \frac{x^{n-\alpha-k}}{\Gamma(n-\alpha-k+1)} \left[D_{0t}^{\beta-k} u(t)\right]_{t=0} \right] +$$

$$+ \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_0^x \frac{(x-t)^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} D_{0t}^{\beta-n} u(t) dt =$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^{-\alpha-k}}{\Gamma(-\alpha-k+1)} \left[D_{0t}^{\beta-k} u(t)\right]_{t=0} + \left(\frac{d}{dx}\right)^{n} D_{0x}^{\alpha+\beta-n} u(x) =$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^{-\alpha-k}}{\Gamma(-\alpha-k+1)} \left[D_{0t}^{\beta-k} u(t)\right]_{t=0} + D_{0x}^{\alpha+\beta} u(x).$$

Пусть теперь $\alpha > 0$. Тогда найдется такое $m \in \mathbb{N}$, что $\alpha \in]m-1, m]$.

$$D_{0x}^{\alpha} D_{0x}^{\beta} u(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{m} D_{0x}^{\alpha-m} D_{0x}^{\beta} u(x) =$$

$$= \left(\frac{d}{dx}\right)^{m} \left[-\sum_{k=1}^{m} \frac{x^{m-\alpha-k}}{\Gamma(m-\alpha-k+1)} \left[D_{0x}^{\beta-k} u(t)\right]_{x=0}\right] +$$

$$+ \left(\frac{d}{dx}\right)^{m} D_{0x}^{\alpha+\beta-m} u(x) = D_{0x}^{\alpha+\beta} u(x) - \sum_{k=1}^{m} \frac{x^{-\alpha-k}}{\Gamma(-\alpha-k+1)} \left[D_{0x}^{\beta-k} u(t)\right]_{x=0}. \ \triangleright$$

53. Справедливы аналоги формулы Ньютона – Лейбница для операторов континуального интегрирования и дифференцирования

$$D_{0x}^{-[\alpha,\beta]} D_{0x}^{[\alpha,\beta]} f(x) = f(x),$$

$$D_{0x}^{[\alpha,\beta]} D_{0x}^{-[\alpha,\beta]} f(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x} Vi(1-\beta-k, 1-\alpha-k) \lim_{x\to 0} D_{0x}^{-[\alpha+k,\beta+k]} f(x),$$

где $\alpha < \beta \leq 0$, $-n < \beta \leq -n+1, n \in \mathbb{N}$;

$$D_{0x}^{[\alpha,\beta]} D_{0x}^{-[\alpha,\beta]} f(x) = f(x),$$

$$D_{0x}^{-[\alpha,\beta]} D_{0x}^{[\alpha,\beta]} f(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{n} x^{\beta-k} \mathcal{E}^{0} \frac{1}{\beta-\alpha} Vi(x; \beta-k+1) \lim_{x\to 0} D_{0x}^{[\alpha-k,\beta-k]} f(x),$$

где $0 \leq \alpha < \beta$, $n-1 < \beta \leq n, n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{E}_{\frac{1}{\gamma}}^{\mu}(x;\delta) = \frac{\partial}{\partial\mu} x^{\mu} E_{\gamma,\delta+\mu}(x^{\gamma}).$$

2.7. Связь производных Римана – Лиувилля и Капуто

54. По определению имеем

$$\partial_{ax}^{\alpha} f(x) = D_{ax}^{\alpha-n} \left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x) = D_{ax}^{\alpha-n} D_{ax}^n f(x) =$$

$$= D_{ax}^{\alpha} f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{|x-a|^{n-\alpha-k}}{\Gamma(n-\alpha-k+1)} \left[\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-k} f(x)\right]_{x=a} =$$

$$= D_{ax}^{\alpha} f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{|x-a|^{j-\alpha}}{\Gamma(j-\alpha+1)} \left[f^{(j)}(a)\right] =$$

$$= \left| \frac{|x-a|^{j-\alpha}}{\Gamma(j-\alpha+1)} = D_{ax}^{\alpha} \frac{|x-a|^{j}}{\Gamma(j+1)} \right| = D_{ax}^{\alpha} \left[f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{|x-a|^{j}}{j!} f^{(j)}(a) \right].$$

55. Пусть $\alpha \in]n-1, n]$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\partial_{ax}^{\alpha} f(x) = D_{ax}^{\alpha} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|x-a|^{k}}{k!} f^{(k)}(a) \right].$$

56. Пусть $\alpha \in]n-1, n]$, $n \in \mathbb{N}$ и функция $f(x)$ такова, что

$$\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^{k} f(x)\right]_{x=a} = 0, \quad k = \overline{0, n-1}.$$

Тогда

$$\partial_{ax}^{\alpha} f(x) = D_{ax}^{\alpha} f(x).$$

В случае, когда порядок дифференцирования $\alpha = n$ является целым имеет место соотношение

$$D_{ax}^{n} u(x) = \partial_{ax}^{n} u(x) = \operatorname{sign}^n(x-a) \frac{d^n}{dx^n} u(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

57. Справедливы *формулы дробного и континуального интегрирова-*

ния по частям

$$\int\limits_a^b g(s)D_{as}^{\alpha}h(s)ds = \int\limits_a^b h(s)D_{bs}^{\alpha}g(s)ds, \quad \alpha \le 0, \tag{20}$$

$$\int\limits_a^b g(s)D_{as}^{[\alpha,\beta]}h(s)ds = \int\limits_a^b h(s)D_{bs}^{[\alpha,\beta]}g(s)ds, \quad \alpha < \beta \le 0.$$

2.8. Принцип экстремума

58. Если функция $f(x) \in C^1[x_0 - \varepsilon, x_0]$ и справедливо неравенство $f(x_0) \ge f(x)$, для любого $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0]$, то производная $f'(x_0) \ge 0$.

Функция $f(x)$ удовлетворяет условию Гельдера порядка ε, если $f(x) \in H^{\varepsilon}(\Omega)$, если $\exists\, A > 0$, $\forall x, y \in \Omega$ и имеет место неравенство

$$|f(x) - f(y)| \le A|x - y|^{\varepsilon}, \quad \varepsilon \in]0, 1],$$

и пишут $f(x) \in H^{\varepsilon}(\Omega)$.

59. Для оператора дробного дифференцирования порядка $\alpha < 1$ справедлив следующий принцип экстремума:

Пусть неубывающая, неотрицательная и отличная от тождественного нуля функция $\omega(t)$ вместе с функцией $u(t)$ принадлежит классу $C(a \le t \le x)$, и в сколь угодно малой полуокрестности $\delta \le t \le x$ $(\delta > a)$ точки $t = x$ произведение $\omega(t)u(t)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $h > \alpha$. Тогда, если на сегменте $a \le t \le x$ функция $u(t)$ достигает положительного максимума (отрицателльного минимума) в точке $t = x$, то $D_{ax}^{\alpha}\omega u > 0 (< 0)$ для любого $\alpha \in]0, 1[$.

60. Для оператора интегро-дифференцирования континуального порядка справедлив следующий *принцип экстремума*:

Пусть $0 \le \alpha < \beta \le 1$ и функция $u(x) \in L[0, a]$ удовлетворяет следующим свойствам:

1) $u(x) \ge u(t)$, $t \in]0, x[$;

2) $|u(x) - u(t)| \le C(x - t)^{\mu}$, $\mu > \beta$, $t \in]x - \varepsilon, x[$.

Тогда, если $u(t) \not\equiv const$, $t \in]0, x[$, то

$$D_{0x}^{[\alpha,\beta]} u(x) > u(x) \frac{1}{x} Vi(1-\beta, 1-\alpha, x),$$

и если $u(x) \geq 0$, то

$$D_{0x}^{[\alpha,\beta]} u(x) > 0.$$

3. Интегральные уравнения дробного порядка

3.1. Интегральное уравнение Абеля первого рода

61. Интегральное уравнение

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^x \frac{u(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = f(x), \quad x > a, \tag{21}$$

где $0 < \alpha < 1$, называется *интегральным уравнением Абеля первого рода.*

62. Будем рассматривать это уравнение на конечном отрезке $[a, b]$. Построим решение следующим образом. Поменяем в уравнении (21) x на t и t на s соответственно, умножим обе части равенства на $(x-t)^{-\alpha}$ и проинтегрируем от a до x. Тогда получим

$$\int\limits_a^x \frac{dt}{(x-t)^{\alpha}} \int\limits_a^t \frac{u(s)ds}{(t-s)^{1-\alpha}} = \Gamma(\alpha) \int\limits_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha}}.$$

Поменяв порядок интегрирования в левой части, придем к равенству

$$\int\limits_a^x u(s)ds \int\limits_s^x \frac{dt}{(x-t)^{\alpha}(t-s)^{1-\alpha}} = \Gamma(\alpha) \int\limits_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha}}.$$

Внутренний интеграл легко вычислить заменой $t = s + \tau(x-s)$

$$\int\limits_s^x (x-t)^{-\alpha}(t-s)^{\alpha-1}dt = \int\limits_0^1 \tau^{\alpha-1}(1-\tau)^{-\alpha}d\tau = B(\alpha, 1-\alpha) = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha).$$

Поэтому

$$\int_a^x u(s)ds = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^\alpha}.$$

Отсюда после дифференцирования последнего равенства получаем

$$u(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^\alpha}. \tag{22}$$

Таким образом, если решение уравнения (21) существует, то оно имеет вид (22) и, следовательно, единственно.

63. Хорошо известно, что уравнение Абеля (21) с правой частью $f(x) \in L[a,b]$, имеет и при том единственное решение, тогда и только тогда, когда

$$D_{ax}^{\alpha-1} f(x) \in AC[a,b] \text{ и } \lim_{x \to a} D_{ax}^{\alpha-1} f(x) = 0.$$

Здесь $AC[a,b]$ – класс абсолютно непрерывных на сегменте $[a,b]$ функций $\varphi(x)$, который совпадает с классом преобразованных от суммируемых по Лебегу функций:

$$\varphi(x) \in AC[a,b] \;\Leftrightarrow\; \varphi(x) = \text{const} + D_{ax}^{-1}\psi(t), \quad \psi(x) \in L[a,b].$$

3.2. Интегральное уравнения Абеля второго рода

64. Уравнение вида

$$u(x) - \lambda D_{ax}^{-\alpha} u(x) = f(x), \quad x \in]a,b[, \tag{23}$$

где $\alpha > 0$, $\lambda-$ произвольное число, *называется интегральным уравнением Абеля второго рода.*

Найдем решение уравнения (23) двумя методами.

65. *Метод последовательных приближений.* Суть метода последовательных приближений для вычисления интегральных уравнений заключается в следующем: пусть дано уравнение

$$u = f + Ku, \tag{24}$$

где K – заданный оператор, $f \in D(K)$. Подставляя в правую часть (24) вместо u выражение $f + Ku$ каждый раз, получим

$$u = f + Ku = f + Kf + K^2u = f + Kf + K^2f + K^3u = \ldots = \\ = f + Kf + K^2f + \ldots + K^nf + K^{n+1}u,$$

то есть

$$u = \sum_{i=0}^{n} K^i f + K^{n+1}u.$$

Пусть предел $\lim\limits_{n\to\infty} K^{n+1}u = 0$. Тогда представление

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} K^n f$$

есть ряд Неймана решения уравнения (24).

66. Для уравнения (23) интегральный оператор K имеет вид $K = \lambda D_{ax}^{-\alpha}$. Тогда

$$K^2 = \lambda^2 D_{ax}^{-\alpha} D_{ax}^{-\alpha} = \lambda^2 D_{ax}^{-2\alpha}, \quad K^n = \lambda^n D_{ax}^{-\alpha n},$$

или же

$$K^n u = \lambda^n D_{ax}^{-\alpha n} u(x) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(\alpha n)} \int\limits_a^x (x-t)^{n\alpha - 1} u(t) dt.$$

При $n \to \infty$ с помощью формулы Стирлинга получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} K^n u = \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda^n}{\Gamma(\alpha n)} \int\limits_a^x (x-t)^{n\alpha-1} u(t) dt = 0.$$

Поэтому ряд Неймана в этом случае запишется в виде

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n D_{ax}^{-\alpha n} f(x). \tag{25}$$

Преобразовав ряд (25) окончательно получим решение уравнения (23) в виде

$$u(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^x f(t)(x-t)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(x-t)^\alpha)dt. \tag{26}$$

Так как $f(x) \in L[a,b]$, то и $u(x) \in L[a,b]$.

67. *Метод преобразования Лапласа.* В силу формулы (10) преобразование Лапласа уравнения (23) будет иметь вид

$$U(p) - \lambda p^{-\alpha} U(p) = F(p).$$

Отсюда находим, что

$$U(p) = \frac{F(p)}{1-\lambda p^{-\alpha}} = F(p) \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k p^{-\alpha k} = F(p) + \lambda F(p) \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k p^{-\alpha k - \alpha} \risingdotseq$$

$$\risingdotseq f(x) + \lambda \left[f(x) * \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \frac{x^{\alpha k + \alpha - 1}}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} \right] = f(x) + \lambda \left[f(x) * x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda x^\alpha) \right].$$

4. Дифференциальные уравнения дробного порядка

68. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$D_{0x}^{\alpha} u(x) - \lambda u(x) = f(x), \quad x \in]0, a[, \tag{27}$$

где $\alpha > 0$, $\alpha \in]n-1, n]$, $n \in \mathbb{N}$, $f(x) \in L[0,a] \cap C]0,a[$.

4.1. Общее представление решения линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка

69. *Регулярным решением* уравнения (27) называется функция $u = u(x)$, которая удовлетворяет свойствам:
a) $u \in L[0,a]$, $D_{0x}^{\alpha-n} u(x) \in C^n]0,a[$,
b) $u(x)$ удовлетворяет уравнению (27) во всех точках интервала $]0,a[$.

Принимая во внимание формулу композиции дробных операторов и равенство

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n D_{0x}^{-n} f(x) = f(x),$$

перепишем уравнение (27) в виде

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n \left[D_{0x}^{\alpha-n}u(x) - \lambda D_{0x}^{-n}u(x) - D_{0x}^{-n}f(x)\right] = 0.$$

После n кратного интегрирования имеем

$$D_{0x}^{\alpha-n}u(x) - \lambda D_{0x}^{-n}u(x) = D_{0x}^{-n}f(x) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{x^k}{\Gamma(k+1)},$$

где c_k- постоянные интегрирования.

Подействуем на обе части последнего равенства оператором $D_{0x}^{n-\alpha}$. Тогда, получим

$$u(x) - \lambda D_{0x}^{-\alpha}u(x) = D_{0x}^{-\alpha}f(x) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{x^{\alpha-n+k}}{\Gamma(\alpha-n+k+1)}, \tag{28}$$

так как

$$D_{0x}^{n-\alpha}\frac{x^k}{\Gamma(k+1)} = \frac{x^{\alpha-n+k}}{\Gamma(\alpha-n+k+1)}.$$

Таким образом мы доказали следующее.

70. Любое регулярное решение уравнения (27) является решением интегрального уравнения (28). И обратно: решение уравнения (28) есть регулярное решение уравнения (27).

71. Перепишем уравнение (28) в виде

$$u(x) - \lambda D_{0x}^{-\alpha}u(x) = F(x),$$

где

$$F(x) = D_{0x}^{-\alpha}f(x) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{x^{\alpha-n+k}}{\Gamma(\alpha-n+k+1)}.$$

В силу представления (26) имеем

$$u(x) = F(x) + \lambda F(x) * x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda x^{\alpha})$$

или же

$$u(x) = D_{0x}^{-\alpha} f(x) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{x^{\alpha-n+k}}{\Gamma(\alpha-n+k+1)} + \lambda D_{0x}^{-\alpha} f(x) * x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda x^\alpha) +$$

$$+\lambda \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{x^{\alpha-n+k}}{\Gamma(\alpha-n+k+1)} * x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda x^\alpha). \qquad (29)$$

После элементарных преобразований

$$a)\quad D_{0x}^{-\alpha} f(x) + \lambda D_{0x}^{-\alpha} f(x) * x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda x^\alpha) = f(x) * \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} +$$

$$+\lambda f(x) * \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda x^\alpha) = f(x) * x^{\alpha-1} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} + \lambda x^\alpha E_{\alpha,2\alpha}(\lambda x^\alpha) \right] =$$

$$= f(x) * x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda x^\alpha);$$

$$b)\quad \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda x^\alpha) = x^{2\alpha-1} E_{\alpha,2\alpha}(\lambda x^\alpha);$$

$$c)\quad \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{x^{\alpha-n+k}}{\Gamma(\alpha-n+k+1)} + \lambda \sum_{k=0}^{n-1} c_k x^{2\alpha-n+k} E_{\alpha,2\alpha-n+k+1}(\lambda x^\alpha) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} c_k \left[\frac{x^{\alpha-n+k}}{\Gamma(\alpha-n+k+1)} + \lambda x^{2\alpha-n+k} E_{\alpha,2\alpha-n+k+1}(\lambda x^\alpha) \right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} c_k x^{\alpha-n+k} E_{\alpha,\alpha-n+k+1}(\lambda x^\alpha) = \sum_{k=1}^{n} c_{n-k} x^{\alpha-k} E_{\alpha,\alpha-k+1}(\lambda x^\alpha)$$

из равенства (29) имеем, что

$$u(x) = f(x) * x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda x^\alpha) + \sum_{k=1}^{n} c_{n-k} x^{\alpha-k} E_{\alpha,\alpha-k+1}(\lambda x^\alpha). \qquad (30)$$

Из вышеизложенного следует утверждение.

72. Любое регулярное решение уравнения (27) имеет вид (30).

4.2. Задача Коши

73. Рассмотрим уравнение

$$D_{0x}^{\alpha}u(x) - \lambda u(x) = f(x), \qquad (31)$$

где $x \in]0, a[$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha \in]n-1, n]$, $n \in \mathbb{N}$, и для него сформулируем задачу.

74. Задача Коши: *Найти регулярное решение уравнения (31), удовлетворяющее условиям:*

$$\lim_{x\to 0} D_{0x}^{\alpha-k}u(x) = a_k, \quad k = 1, 2, ...n. \qquad (32)$$

75. Пусть $f(x) \in C]0, a[\cap L[0, a]$. Тогда существует единственное регулярное решение задачи (31), (32). Решение имеет вид:

$$u(x) = f(x) * x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda x^{\alpha})dt + \sum_{k=1}^{n} a_k x^{\alpha-k}E_{\alpha,\alpha-k+1}(\lambda x^{\alpha}). \qquad (33)$$

$\triangleleft$ Из формулы (30) следует существование решения уравнения (31) и, что это решение имеет вид (33). Докажем, что решение (33) удовлетворяет условию (32).

Обозначим через $e_{\alpha,\mu}(x) = x^{\mu-1}E_{\alpha,\mu}(\lambda x^{\alpha})$ и рассмотрим выражение

$$D_{0x}^{\alpha-k}u(x) = D_{0x}^{\alpha-k}(f * e_{\alpha,\alpha})(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i D_{0x}^{\alpha-k}e_{\alpha,\alpha-i+1}(x). \qquad (34)$$

Рассмотрим первое слагаемое в правой части

$$D_{0x}^{\alpha-k}(f * e_{\alpha,\alpha})(x) = D_{0x}^{n-k}D_{0x}^{\alpha-n}(f * e_{\alpha,\alpha})(x) = D_{0x}^{n-k}\left[f * D_{0x}^{\alpha-n}e_{\alpha,\alpha}\right](x) =$$

$$= D_{0x}^{n-k}\left(f * e_{\alpha,n}\right)(x).$$

Возвращаясь к уравнению (34) имеем

$$D_{0x}^{\alpha-k}u(x) = D_{0x}^{n-k}\left(f * e_{\alpha,n}\right)(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i e_{\alpha,k-i+1}(x),$$

из которого при $x \to 0$ получим

$$\lim_{x\to 0} D_{0x}^{\alpha-k}u(x) = \lim_{x\to 0} D_{0x}^{n-k}\left(f * e_{\alpha,n}\right)(x) + \lim_{x\to 0}\sum_{i=1}^{n} a_i e_{\alpha,k-i+1}(x). \tag{35}$$

1) При $k > i$

$$\lim_{x\to 0} x^{k-i}E_{\alpha,k-i+1}(\lambda x^{\alpha}) = 0.$$

$E_{\alpha,k-i+1}(\lambda x^{\alpha})-$ непрерывная функция в нуле, поэтому

$$E_{\alpha,k-i+1}(0) = \frac{1}{\Gamma(k-i+1)}.$$

2) При $k = i$

$$\lim_{x\to 0} E_{\alpha,1}(\lambda x^{\alpha}) = \frac{1}{\Gamma(1)} = 1.$$

3) При $k < i$

$$\lim_{x\to 0} x^{k-i}E_{\alpha,k-i+1}(\lambda x^{\alpha}) = \lim_{x\to 0}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j x^{\alpha j+k-i}}{\Gamma(\alpha j+k-i+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{x^{k-i}}{\Gamma(k-i+1)} + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda^j x^{\alpha j+k-i}}{\Gamma(\alpha j+k-i+1)}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^{m+1}x^{\alpha m+\alpha+k-i}}{\Gamma(\alpha m+\alpha+k-i+1)} =$$

$$= \lambda\lim_{x\to 0} x^{\alpha+k-i}E_{\alpha,\alpha+k-i+1}(x) = \left|\begin{array}{c} \alpha+k-i>0 \\ E_{\alpha,\alpha+k-i+1}(0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+k-i+1)} \end{array}\right| = 0.$$

Значит, последнее слагаемое формулы (35) дает

$$\lim_{x\to 0}\sum_{i=1}^{n} a_i e_{\alpha,k-i+1}(x) = a_k.$$

Далее, принимая во внимание формулу дифференцирования свертки, имеем

$$\lim_{x\to 0} D_{0x}^{n-k}\left(f * e_{\alpha,n}\right)(x) = \lim_{x\to 0} D_{0x}^{n-k}\left(f * e_{\alpha,n-1}\right) = \lim_{x\to 0}\left(f * e_{\alpha,k}\right)(x) = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0} D_{0x}^{\alpha-k} u(x) = a_k. \ \triangleright$$

Задача Коши для дифференциального уравнения (27), при $0 < \alpha < 1$, впервые была решена в работе [20].

4.3. Уравнение с производной Капуто

76. Рассмотрим

$$\partial_{0x}^{\alpha} u(x) - \lambda u(x) = f(x), \quad x \in]0, a[, \tag{36}$$

$\lambda \in \mathbb{R},\ \alpha > 0,\ \alpha \in]n-1, n]$.

Решение $u(x)$ уравнения (36) ищется в классе функций $u^{(n)}(x) \in L[0, a]$, так как по определению

$$\partial_{0x}^{\alpha} u(x) = D_{0x}^{\alpha-n} u^{(n)}(x).$$

77. Решение задачи Коши

$$u^{(k-1)}(0) = u_k, \quad k = 1, 2, ..., n$$

для уравнения (36) имеет вид:

$$u(x) = f * x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda x^{\alpha}) + \sum_{k=1}^{n} u_k x^{k-1} E_{\alpha,k}(\lambda x^{\alpha}). \tag{37}$$

4.4. Данные Коши в локальной и нелокальной постановках

79. Пусть:

1) A – оператор, область определения $D(A)$ которого представляет собой множество отображений u с единой областью определения $D(u)$;

2) μ – множество операций μ_α с $D(\mu) = D(A)$;

3) $\mu_\alpha u = \mu_\alpha \circ u$ – композиция отображений μ_α и u.

Оператор A с областью определения $D(A)$ назовем локальным в $D(u)$

относительно множества операций μ, если для любого оператора $u \in D(A)$ образ любой точки $x \in D(u)$ при отображении $A \circ u$ однозначно определяется значением $u(x)$ оператора u на элементе x или же значениями $\mu_\alpha u(x)$ операторов $\mu_\alpha u, \mu_\alpha \in \mu$ на этом же элементе x.

Если для любого $u \in D(A)$ образ любой точки $x \in D(u)$ при отображении $A \circ u$ однозначно определяется значением оператора u на элементе x, то, по определению, оператор A является локальным в $D(A)$ относительно пустого множества ($\mu = \oslash$).

Оператор A назовем *нелокальным* относительно множества операций μ, если он не является локальным относительно μ.

80. Пусть $0 < \alpha < 1$ и функция $u(x)$ представима в виде

$$u(x) = x^{-\mu} u_0(x), \quad u_0(x) \in C[0, a].$$

Тогда

$$\lim_{x\to 0} D_{0x}^{\alpha-1} u(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{u(t)dt}{(x-t)^\alpha} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x u_0(t)(x-t)^{-\alpha} t^{-\mu} dt =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 u_0(xs) x^{1-\alpha-\mu} (1-s)^{-\alpha} s^{-\mu} ds =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^{1-\alpha-\mu}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 u_0(xs) s^{-\mu} (1-s)^{-\alpha} ds.$$

Пусть $\mu = 1 - \alpha$. Тогда

$$\lim_{x\to 0} D_{0x}^{\alpha-1} u(x) = \frac{u_0(0)}{\Gamma(1-\alpha)} B(\alpha, 1-\alpha) = u_0(0)\Gamma(\alpha).$$

Так как $u_0(x) = x^{1-\alpha} u(x)$, то

$$\lim_{x\to 0} D_{0x}^{\alpha-1} u(x) = \Gamma(\alpha) \lim_{x\to 0} x^{1-\alpha} u(x).$$

81. Пусть $x^{1-\alpha}u(x) \in C[0,a]$. Тогда

$$\lim_{x\to 0} D_{0x}^{\alpha-1}u(x) = \Gamma(\alpha)\lim_{x\to 0} x^{1-\alpha}u(x). \tag{38}$$

Из существования предела справа следует существование предела слева.

Если $\alpha \in]n-1, n]$, то из (38) получаем

$$\lim_{x\to 0} D_{0x}^{\alpha-n}u(x) = \Gamma(\alpha-n+1)\lim_{x\to 0} x^{n-\alpha}u(x).$$

82. Начальные условия, задаваемые в форме $\lim\limits_{x\to 0} x^{n-\alpha}u(x) = u_k$, $k=\overline{1,n}$ принято называть начальными данными в локальной постановке, в то время как условия вида $\lim\limits_{x\to 0} D_{0x}^{\alpha-k}u(x) = u_k$, $k=\overline{1,n}$, называют данными в нелокальной постановке.

4.5. Уравнение в частных производных порядка, не превосходящего единицу

83. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$D_{0x}^{\alpha}u(x,y) + \lambda D_{0y}^{\beta}u(x,y) = f(x,y), \tag{39}$$

где $0 < \alpha, \beta \le 1,\ \alpha\beta < 1$.

Через D обозначим область, целиком лежащую в первом квадранте, $D \subset \{(x,y) : x > 0, y > 0\}$, и обладающую тем свойством, что вместе с любой точкой $(x,y) \in D$ она содержит интервалы с концами в точках $(x,y),\ (0,y)$ и $(x,y),\ (x,0)$.

84. *Регулярным решением* уравнения (39) в области D назовем функцию $u = u(x,y)$ из класса $x^{1-\alpha}y^{1-\beta}u(x,y) \in C(\overline{D}),\ D_{0x}^{\alpha}u,\ D_{0y}^{\beta}u \in C(D)$, удовлетворяющую уравнению (39) во всех точках $(x,y) \in D$.

85. Пусть $u(x,y)$ – регулярное решение уравнения (39), а функция $v(x,y,s,t)$ для любых фиксированных $(x,y) \in D$ удовлетворяет уравнению

$$D_{xs}^{\alpha}v(x,y,s,t) + \lambda D_{yt}^{\beta}v(x,y,s,t) = 1 \tag{40}$$

как функция переменных s и t в области $\{(s,t) : s \in (0;x),\ t \in (0;y)\}$.

Пусть также выполнены условия

$$v(x,y,s,y)=0,\ s\in(0;x),\ v(x,y,x,t)=0,\ t\in(0;y). \tag{41}$$

С помощью аналога формулы Ньютона – Лейбница (19) и с учетом (41) получаем

$$D_{0s}^{-\alpha}D_{0s}^{\alpha}u(s,t)=u(s,t)-\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\lim_{s\to 0}D_{0s}^{\alpha-1}u(s,t),$$

$$D_{xs}^{-\alpha}D_{xs}^{\alpha}v(x,y,s,t)=v(x,y,s,t). \tag{42}$$

Поэтому с учетом формулы дробного интегрирования по частям (20) имеем

$$\int\limits_0^x\int\limits_0^y v(x,y,s,t)D_{0s}^{\alpha}u(s,t)dtds=\int\limits_0^x\int\limits_0^y D_{xs}^{-\alpha}D_{xs}^{\alpha}v(x,y,s,t)\cdot D_{0s}^{\alpha}u(s,t)dtds=$$

$$=\int\limits_0^x\int\limits_0^y D_{xs}^{\alpha}v(x,y,s,t)\cdot D_{0s}^{-\alpha}D_{0s}^{\alpha}u(s,t)dtds=\int\limits_0^x\int\limits_0^y u(s,t)D_{xs}^{\alpha}v(x,y,s,t)dtds-$$

$$-\int\limits_0^y\varphi(t)\left[D_{xs}^{-\alpha}D_{xs}^{\alpha}v(x,y,s,t)\right]_{s=0}dt.$$

Здесь $\varphi(t)=\lim\limits_{s\to 0}D_{0s}^{\alpha-1}u(s,t)$. С учетом (42) приходим к соотношению

$$\int\limits_0^x\int\limits_0^y v(x,y,s,t)D_{0s}^{\alpha}u(s,t)dtds=$$

$$=\int\limits_0^x\int\limits_0^y u(s,t)D_{xs}^{\alpha}v(x,y,s,t)dtds-\int\limits_0^y\varphi(t)v(x,y,0,t)dt.$$

Аналогично получаем

$$\int\limits_0^x\int\limits_0^y v(x,y,s,t)D_{0t}^{\beta}u(s,t)dtds=$$

$$= \int_0^x \int_0^y u(s,t) D_{yt}^{\beta} v(x,y,s,t)\,dt\,ds - \int_0^x \psi(s) v(x,y,s,0)\,ds,$$

где $\psi(s) = \lim\limits_{t\to 0} D_{0t}^{\beta-1} u(s,t)$. Складывая последние два равенства, умножив второе на λ, учитывая (39) и (40) имеем

$$\int_0^x \int_0^y u(s,t)\,dt\,ds = \int_0^y \varphi(t) v(x,y,0,t)\,dt +$$

$$+\lambda \int_0^x \psi(s) v(x,y,s,0)\,ds + \int_0^x \int_0^y v(x,y,s,t) f(s,t)\,dt\,ds.$$

Дифференцируя по x и по y последнее равенство, получаем, что решение уравнения (39) имеет вид

$$u(x,y) = \int_0^y \varphi(t) w(x,y,0,t)\,dt + \lambda \int_0^x \psi(s) w(x,y,s,0)\,ds +$$

$$+ \int_0^x \int_0^y w(x,y,s,t) f(s,t)\,dt\,ds,$$

где $w(x,y,s,t) = v_{xy}(x,y,s,t)$.

Далее найдем функцию $v(x,y,s,t)$. Будем предполагать, что $\lambda > 0$ и что функция $v(x,y,s,t)$ представляется как функция разности аргументов x, s и $y, t : v(x,y,s,t) = v(x-s, y-t)$. Тогда из (40), (41) следует, что $v = v(x,y)$ является решением следующей задачи:

$$D_{0x}^{\alpha} v + \lambda D_{0y}^{\beta} v = 1, \quad v(0,y) = 0, \quad v(x,0) = 0. \tag{43}$$

Применим преобразование Лапласса по переменной y к обеим частям уравнения (43). С учетом соотношения (11) и $\mathcal{L}\{1;p\} = 1/p$ получаем

$$D_{0x}^{\alpha} V(x,p) + \lambda p^{\beta} V(x,p) = \frac{1}{p}, \quad V(x,p) = \mathcal{L}\{v(x,\cdot);p\}. \tag{44}$$

Так как $v(0, y) = 0$, то $V(0, p) = 0$, и, очевидно, $D_{0x}^{\alpha-1}V(x, p)\big|_{x=0} = 0$. Поэтому решение уравнения (44) имеет вид

$$V(x, p) = \frac{1}{p}\int\limits_0^x t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(-\lambda p^\beta t^\alpha\right)dt = \frac{x^\alpha}{p}E_{\alpha,\alpha+1}\left(-\lambda p^\beta t^\alpha\right). \qquad (45)$$

Из формулы (8) окончательно получаем, что

$$v(x, y, s, t) = x^\alpha e_{\alpha,\beta}^{\alpha+1,1}\left(-\lambda\frac{x^\alpha}{y^\beta}\right).$$

Литература

[1] Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований: Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. Том 1. М.: Наука, 1969. 344 с.

[2] Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. 296 с.

[3] Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений. М.: Наука, 1982. 304 с.

[4] Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 672 с.

[5] Джрбашян М.М., Нерсесян А.Б. Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка // Изв. Акад. Наук Арм. ССР. 1968. **3**:1. С. 3–29.

[6] Килбас А.А Теория и приложения дифференциальных уравнений дробного порядка (курс лекций). Методологическая школа-конференция “Математическая физика и нанотехнологии”. Самара, 2009. 121 с.

[7] Краснов М.Л. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1975. 304 с.

[8] Кузнецов Д.С. Специальные функции. М.: Высшая школа. 1965. 424 с.

[9] Летников А.В. Теория интегрирорвания с произвольным указателем // Мат. сб. 1868. Т. 3. С. 1–68.

[10] Мамчуев М.О. Краевые задачи для уравнений систем уравнений с частными производными дробного порядка. Российская акад. наук,

Кабардино-Балкарский центр, Науч.-исслед. ин-т прикладной математики и автоматизации. Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2013. 199 с.

[11] Нахушев А.М. К теории дробного исчисления // Дифференц. уравнения. 1988. **24**:2. С. 313–324.

[12] Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высш. шк., 1995. 301 с.

[13] Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

[14] Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.

[15] Псху А.В. Краевая задача для уравнения в частных производных первого порядка с оператором дробного дискретно распределенного дифференцирования // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52, № 12. С. 1682–1694.

[16] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск.: Наука и техника, 1987. 688 с.

[17] Учайкин В.В. Метод дробных производных. Ульяновск: Изд. «Артишок». 2008. 512 с.

[18] Abel N. H. Auflösung einer mechanischen Aufgabe. J. für reine und angew, Math., 1826, bd 1, pp. 153–157.

[19] Atanackovič T.M., Pilipovič S., Stankovič B., Zorica D. Fractional calculus with applications in mechanics: vibrations and diffusion processes, 2014. 315 p.

[20] Barrett J.H. Differential equations of non-integer order // Canadian J. Math. 1954, vol. 6, № 4, pp. 529–541.

[21] Caputo M. Elasticita e dissipazione. Zanichelli, Bologna, 1969. (in Italian).

[22] Eidelman S.D., Kochubei A.N. Cauchy problem for fractional diffusion equations // Journal of Differential Equations, 2004, **199**, pp. 211–255.

[23] Euler L. De progressionibvs transcendentibvs, sev qvarvm termini generales algebraice dari neqvevnt/ L. Eulero // Comment. Acad. Sci. Imperialis petropolitanae, 1738, vol. 5, pp. 38-57.

[24] Jiao Z., Chen Y.-Qu., Podlubny I. Distributed-order dynamic systems: stability, simulation, applications and perspectives. London, 2012.

[25] Grünwald A. K. Uber "begrenzte" Derivationen und deren Anwendung. Z. angew. Math. und Phys., 1867, bd 12, pp. 441–480

[26] Hilfer R. Applications of fractional calculus in physics. World Scientific, River Edge, NJ, USA, 2000.

[27] Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. North-Holland Math. Stud., Elsevier, Amsterdam, 2006, vol. 204.

[28] Kilbas A.A., Saigo M., Trujillo J.J. On a generalized Wright function // J. Fractional Calculus and Applied Analysis, 2002, vol. 5, №4, pp. 437–460.

[29] Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations // North-Holland Math. Stud., Elsevier, Amsterdam, 2006, vol. 204.

[30] Lavrent'ev M.A., Shabat B.V. Methods of the complex function theory. Moscow: Nauka, 1987.

[31] Leibniz G.W. Leibniz an Wallis (Letter, may 28, 1697) Leibnizens mathematische schriften. Hildesheim: Olms Verl., 1962, bd. 4, pp. 23-29.

[32] Mainardi F. Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity: An Introduction to Mathematical Models, World Scientific, Singapore, 2010.

[33] Miller K.S., Ross B. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. Wiley, 1993.

[34] Oldham K.B., Spanier J. The fractional calculus. N.-Y.; L.: Acad. press, 1974.

[35] Podlubny I. Fractional differential equations. ACADEMIC PRESS, 1999, vol. 198.

[36] Pskhu A.V. Solution of the first boundary value problem for a fractional order diffusion equation // Differ. Equ., 2003, vol. 39, № 9, pp. 1359–1363.

[37] Pskhu A.V. Solution of boundary value problems for the fractional diffusion equation by the Green function method // Differ. Equ., 2003, vol. 39, № 10, pp. 1509–1513.

[38] Pskhu A.V. The fundamental solution of a diffusion-wave equation of fractional order // Izv.: Mathematics, 2009, vol. 73, № 2, pp. 351–392.

[39] Riemann B. Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation. Gesammelte Mathematisch WEerke. Leipzig: Teubner, 1876, pp. 331–344.

[40] Stanković B. On the function of E.M. Wright // Publications de L'institut Mathématique, 1970, tome 10(24), pp. 113–124.

[41] Wright E. M. On the coefficients of power series having exponential singularities // J. London Math. Soc, 1933, vol. 8, № 29, pp. 71–79.

[42] Wright E.M. The asymptotic expansion of the generalized Bessel function // Proc. London Math. Soc. Ser. II, 1934, vol. 38, pp. 257–270.

[43] Wright E.M. The generalized Bessel function of order greater than one // Quart. J. Math., Oxford Ser., 1940, **11**, pp. 36–48.

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Богатырева Фатима Тахировна
Гадзова Луиза Хамидбиевна
Эфендиев Беслан Игорьевич

ОСНОВЫ ДРОБНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ И ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

ISBN 978-5-6045584-2-3

9 785604 558423

Лицензия ИД № 040940 от 04.02.1999

Подписано в печать 01.12.2020
Бумага офсетная. Формат 60×84 1/16. Гарнитура «Таймс».
Объем 2,68 усл. печ. л. Тираж 300 экз. Заказ №17

Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленного оригинал-макета в редакционно-издательском отделе КБНЦ РАН

360002, г. Нальчик, ул. Балкарова, 2
Тел. (8662) 42-04-87