

К.Б. САБИТОВ, С.Н. СИДОРОВ

**ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ
ГЛАВЫ К КУРСУ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ**



НАУКА

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**СТЕРЛИТАМАКСКИЙ ФИЛИАЛ
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
БЮДЖЕТНОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«УФИМСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ НАУКИ И ТЕХНОЛОГИЙ»**

К. Б. САБИТОВ, С. Н. СИДОРОВ

Дополнительные главы к курсу дифференциальных уравнений



МОСКВА НАУКА 2025

УДК 517.97
ББК 22.1
С 12

Рецензенты:

Псху А.В., доктор физ.-мат. наук, профессор (Институт прикладной математики
и автоматизации КБНЦ РАН, г. Нальчик),
Юмагулов М.Г., доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой
дифференциальных уравнений (Уфимский университет науки и технологий, г. Уфа)

Сабитов К.Б., Сидоров С.Н.

С 12 Дополнительные главы к курсу дифференциальных уравне-
ний: Учеб. пособие для вузов. М.: Наука, 2025. 128 с.

ISBN 978-5-02-041657-4

В учебном пособии изложены дифференциальные уравнения с дробны-
ми производными, обратные задачи для дифференциальных уравнений
и приложения дифференциальных уравнений. Предназначено для студен-
тов и аспирантов физических, математических, механико-математических
факультетов, а также факультетов естественно-научных и технических дис-
циплин.

УДК 517.97
ББК 22.1

ISBN 978-5-02-041657-4

© Сабитов К.Б., Сидоров С.Н., 2025
© ФГУП Издательство «Наука»,
редакционно-издательское
оформление, 2025
© Стерлитамакский филиал УУНиТ, 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	4
Список некоторых обозначений и сокращений	6
Латинский и греческий алфавиты	7
Глава 1. Дифференциальные уравнения с дробными производными	8
§ 1. Дробные интегралы и производные и их свойства	8
§ 2. Обыкновенные дифференциальные уравнения с дробными производными. Задача типа Коши	18
§ 3. Краевые задачи для дифференциального уравнения второго порядка с дробными производными	28
Глава 2. Обратные задачи для дифференциальных уравнений	37
§ 4. Обратная задача определения правой части линейного дифференциального уравнения	37
§ 5. Обратная задача по отысканию коэффициентов линейного дифференциального уравнения	44
§ 6. Обратные задачи для линейных дифференциальных уравнений с параметром	45
1. Обратные задачи для дифференциальных уравнений первого порядка	45
2. Обратная задача Тихонова А.Н.	49
§ 7. Обратные спектральные задачи Штурма–Лиувилля	59
§ 8. Обратная задача Ильгамова М.А. об определении длины подводного трубопровода при подъеме сосредоточенной силой	67
Глава 3. Приложения дифференциальных уравнений	72
§ 9. Явление бифуркации в решениях уравнений	72
§ 10. Аттракторы в динамических системах. Аттрактор Лоренца	79
§ 11. Эллиптические функции Якоби и функции Вейерштрасса, связанные с ними нелинейные дифференциальные уравнения....	88
1. Эллиптические функции Якоби и их свойства	88
2. Обращение определенного интеграла	96
3. Свободные колебания маятника	97
4. Функции Вейерштрасса	100
5. Изгиб кругового бруса	110
§ 12. Автомодельные решения	115
Список литературы	122

Предисловие

В известных книгах по курсу обыкновенных дифференциальных уравнений или просто дифференциальных уравнений:

1) Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Гостехиздат, 1953. 468 с. (издание 6).

2) Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1964. 272 с. (издание 5).

3) Еругин Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. – Минск: Наука и техника, 1970. 572 с.

4) Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1970. 352 с.

и других (см. обширный список литературы книги Треногина В.А. [30]) изложены классические разделы теории дифференциальных уравнений и ее приложения, полученные до начала 20-го столетия. В 20-ом столетии появились новые направления в теории дифференциальных уравнений: обратные задачи для дифференциальных уравнений, дифференциальные уравнения с дробными производными, групповые методы решения дифференциальных уравнений и новые виды приложений, связанные с понятиями бифуркации и аттрактора в динамических системах.

Целью данного учебного пособия является знакомство читателей с некоторыми указанными выше направлениями теории дифференциальных уравнений.

Пособие состоит из трех глав и списка литературы.

В первой главе изучаются краевые задачи для дифференциальных уравнений с дробными производными. Предварительно излагаются основные сведения о дробных интегралах и производных и их свойства.

Во второй главе изучаются обратные задачи по отысканию правой части и коэффициентов линейных дифференциальных уравнений первого и второго порядка.

В третьей главе рассмотрены вопросы, связанные с явлениями бифуркации и аттрактора в решениях дифференциальных уравнений. Здесь также изучены эллиптические функции Якоби и Вейерштрасса и связанные с ними нелинейные дифференциальные уравнения. Эти уравнения возникают при математическом моделировании колебательных процессов.

Отметим, что групповой подход исследования дифференциальных уравнений изложен в книге Егорова А.И. [8, гл. 10].

Данное учебное пособие предназначено для студентов и аспирантов физических, математических, механико-математических факультетов, а также факультетов естественно-научных и технических дисциплин.

Данный курс нужен и очень полезен в плане подготовки специалистов по математике, информатике и физике высокой квалификации.

Авторы благодарны проф. Денисову А.М., прочитавшему главу 2, а также рецензентам профессорам Псху А.В. и Юмагулову М.Г. за указанные опечатки и ценные замечания, а также профессору Ляхову Л.Н. и его ученикам кандидатам физико-математических наук Рощупкину С.А., Булатову Ю.Н. за оказание финансовой помощи при издании данной книги.

Авторы будут благодарны всем, кто пришлет свои замечания и пожелания на электронные адреса: sabitov_fmfm@mail.ru, sts-id@mail.ru.

Список некоторых обозначений и сокращений

\mathbb{N} – множество натуральных чисел

\mathbb{R} – множество действительных чисел

$k = \overline{1, n}$ – число k принимает последовательно все натуральные значения от 1 вплоть до n

$x \in X$ – элемент x принадлежит множеству X

$x \notin X$ – элемент x не принадлежит множеству X

$Y \subset X$ – множество Y является собственным подмножеством множества X

$Y \subseteq X$ – множество $Y \subset X$ или $X = Y$

$\langle a, b \rangle$ – промежуток на числовой прямой, означает либо сегмент $[a, b]$, либо интервал (a, b) , либо полуинтервал $[a, b)$ или $(a, b]$

$\max_D f(x)$ – максимальное (наибольшее) значение функции $f(x)$

по множеству D

$\min_D f(x)$ – минимальное (наименьшее) значение $f(x)$ по множеству D

$\frac{df(x)}{dx}$ или $f'(x)$, $\frac{d^k f(x)}{dx^k}$ или $f^{(k)}(x)$ – производная функции

$f(x)$ k -го порядка

$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$, $f_x(x, y)$ – частная производная функции $f(x, y)$ по переменной x

$C(D)$ – множество всех непрерывных функций, заданных на множестве D , $C^k(D)$ – множество k раз непрерывно дифференцируемых функций, заданных на множестве D , причем $C^0(D) \equiv C(D)$

$Q^1(D)$ – множество кусочно-гладких функций на множестве D

$L_p[a, b]$ – множество всех функций, модуль p -ой степени которых интегрируем по Лебегу на сегменте $[a, b]$, $L_1[a, b] = L[a, b]$

l_2 – множество всех числовых последовательностей x_n таких, что

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ сходится

\bar{D} – замыкание множества D

∂D – граница множества D

д.у. – дифференциальное уравнение

т.е. – то есть

■ – конец доказательства леммы или теоремы, решения примера

Латинский алфавит

A, a	– а	N, n	– эн
B, b	– бэ	O, o	– о
C, c	– цэ	P, p	– пэ
D, d	– дэ	Q, q	– ку
E, e	– е/э	R, r	– эр
F, f	– эф	S, s	– эс
G, g	– жэ	T, t	– тэ
H, h	– ха/аш	U, u	– у
I, i	– и	V, v	– вэ
J, j	– йот/жи	W, w	– дубль-вэ
K, k	– ка	X, x	– икс
L, l	– эль	Y, y	– игрек
M, m	– эм	Z, z	– зед

Греческий алфавит

A, α	– альфа	N, ν	– ню
B, β	– бета	Ξ, ξ	– кси
Γ, γ	– гамма	O, o	– омикрон
Δ, δ	– дельта	Π, π	– пи
E, ϵ	– эпсилон	P, ρ	– ро
Z, ζ	– дзета	Σ, σ	– сигма
H, η	– эта	T, τ	– тау
Θ, θ	– тета	Y, υ	– ипсилон
I, ι	– йота	Φ, ϕ	– фи
K, κ	– каппа	X, χ	– хи
Λ, λ	– лямбда	Ψ, ψ	– пси
M, μ	– мю	Ω, ω	– омега
$\wp(x)$	– читают «пе от x »		

ГЛАВА 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Данная глава посвящена вопросам обобщения операций дифференцирования и интегрирования функций одной переменной с целых порядков на дробные и приложениям в теории д.у. Изучены аналоги задач типа Коши и начально-граничных задач для д.у. с дробными производными.

Отметим, теория дробного интегро-дифференцирования находит применение при обращении интегральных уравнений Вольтерра первого рода с подвижной особенностью, в теории д.у. смешанного типа, в механике и других областях науки.

§ 1. Дробные интегралы и производные и их свойства

Как известно, при интегрировании д.у.

$$y^{(n)} = f(x), \quad x \in \langle a, b \rangle,$$

возникла формула для вычисления n -кратного интеграла

$$\begin{aligned} \int_a^x dt_n \int_a^{t_n} \dots \int_a^{t_2} f(t_1) dt_1 &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t_1)^{n-1} f(t_1) dt_1 = \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt. \end{aligned} \quad (1)$$

Определение 1. Пусть $f(x) \in C(a, b) \cap L[a, b]$. Тогда интегралы вида

$$(I_{a+}^\alpha f)(x) = I_{a+}^\alpha f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad x > a, \quad (2)$$

$$(I_{b-}^\alpha f)(x) = I_{b-}^\alpha f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt, \quad x < b, \quad (3)$$

где $\alpha > 0$, называются интегралами дробного порядка α . Первый из них называют левосторонним, а второй – правосторонним. Операторы I_{a+}^α , I_{b-}^α называют интегральными операторами дробного порядка. Интегралы (2) и (3) также называют дробными интегралами Римана – Лиувилля – Летникова.

Справедлива формула

$$\int_a^b f(x) \left(I_{a+}^\alpha g \right) (x) dx = \int_a^b g(x) \left(I_{b-}^\alpha f \right) (x) dx,$$

называемая формулой дробного интегрирования по частям, она имеет место, когда $f(x) \in L_p[a, b]$, $g(x) \in L_q[a, b]$ при $1/p + 1/q \leq 1 + \alpha$, $p \geq 1$, $q \geq 1$, но когда $p \neq 1$, $q \neq 1$ при $1/p + 1/q = 1 + \alpha$.

Дробное интегрирование обладает свойством

$$I_{a+}^\alpha I_{a+}^\beta f = I_{a+}^{\alpha+\beta} f, \quad I_{b-}^\alpha I_{b-}^\beta f = I_{b-}^{\alpha+\beta} f,$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Эти равенства имеют место, когда $f(x) \in C[a, b]$.

Далее отметим действия интегральных операторов дробного порядка. Для этого напомним определения некоторых классов функций. Говорят, что функция $f(x)$, заданная на промежутке $\langle a, b \rangle$, принадлежит классу $H^\lambda \langle a, b \rangle$, если она удовлетворяет условию Гельдера

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq A |x_1 - x_2|^\lambda,$$

где $x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle$, $A > 0$ – постоянная, $0 < \lambda \leq 1$.

Пусть $\lambda = m + \sigma$, $m = 0, 1, 2, \dots$, $0 < \sigma \leq 1$, и $k = \text{const} > 0$. Говорят, что функция $f(x)$, заданная на промежутке $\langle a, b \rangle$, принадлежит классу $H^{\lambda, k} \langle a, b \rangle$, если $f(x) \in C^m \langle a, b \rangle$ и

$$|f^{(m)}(x+h) - f^{(m)}(x)| \leq A |h|^\sigma \left(\ln \frac{1}{|h|} \right)^k, \quad |h| < \frac{1}{2}.$$

Через $L_p[a, b]$ обозначается множество всех суммируемых на $[a, b]$ функций $f(x)$, для которых интеграл в смысле Лебега (в частности в смысле Римана) сходится:

$$\int_a^b |f(x)|^p dx < +\infty.$$

Норма в этом пространстве определяется по формуле

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int_a^b f(x)^p dx \right)^{1/p}.$$

Теорема 1. Если функция $f(x) \in H^\lambda[a, b]$, $0 < \lambda \leq 1$, $0 < \alpha < 1$, то дробный интеграл (2) имеет представление

$$I_{a+}^\alpha f = \frac{f(a)}{\Gamma(1+\alpha)} (x-a)^\alpha + \psi(x),$$

где $\psi(x) \in H^{\lambda+\alpha}[a, b]$ при $\lambda + \alpha \neq 1$, $\psi(x) \in H^{\lambda+\alpha, 1}[a, b]$ при $\lambda + \alpha = 1$, при этом имеет место оценка

$$|\psi(x)| \leq A(x-a)^{\lambda+\alpha}.$$

Из данной теоремы видно, что дробное интегрирование улучшает порядок гельдеровости λ на порядок α дробного интеграла.

Следствие. Если $f(x) \in C[a, b]$, то $(I_{a+}^\alpha f)(x) \in H^\alpha[a, b]$.

Теорема 2. Если $f(x) \in L_p[a, b]$, то оператор (2) при $1 \leq p \leq \frac{1}{\alpha}$ ограниченно действует из пространства $L_p[a, b]$ в пространство $L_r[a, b]$, $r < q = p(1 - \alpha p)$, а при $p > \frac{1}{\alpha}$ ограниченно действует из $L_p[a, b]$ в $H^{\alpha - \frac{1}{p}}(a, b)$ при $\alpha - \frac{1}{p} \neq 1, 2, \dots$, и $H^{\alpha - \frac{1}{p}, \frac{1}{p}}(a, b)$ при $\alpha - \frac{1}{p} = 1, 2, \dots$. Кроме того, имеет место представление

$$(I_a^\alpha f)(x) = o\left((x-a)^{\alpha - \frac{1}{p}} \right), \quad x \rightarrow a.$$

Доказательство теорем 1 и 2 приведено в монографии [25, с. 56-66].

Дробное дифференцирование вводится как операция, обратная дробному интегрированию.

Определение 2. Для функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$, каждое из выражений

$$(D_{a+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}} dt, \quad (4)$$

$$(D_{b-}^{\alpha} f)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha}} dt, \quad (5)$$

называется производным дробного порядка α , $0 < \alpha < 1$, соответственно левосторонним и правосторонним.

Дробные производные (4) и (5) также называют дробными производными Римана–Лиувилля–Летникова.

Приведем примеры вычисления дробных производных.

Пример 1. Если $f(x) = (x-a)^{-\mu}$, $0 < \mu < 1$, то

$$D_{a+}^{\alpha} (x-a)^{-\mu} = \frac{\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(1-\mu-\alpha)} (x-a)^{-\mu-\alpha},$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера.

Решение. На основании (4) вычислим

$$\begin{aligned} D_{a+}^{\alpha} (x-a)^{-\mu} &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} (t-a)^{-\mu} dt = \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} x^{1-\alpha-\mu} \int_0^1 (1-y)^{-\alpha} y^{-\mu} dy = \\ &= \frac{(1-\alpha-\mu)}{\Gamma(1-\alpha)} x^{-\alpha-\mu} B(1-\mu, 1-\alpha) = \\ &= \frac{(1-\alpha-\mu)}{\Gamma(1-\alpha)} x^{-\alpha-\mu} \frac{\Gamma(1-\mu)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(2-\mu-\alpha)} = \frac{\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(1-\mu-\alpha)} x^{-\alpha-\mu}, \end{aligned}$$

где $B(\cdot)$ – бета-функция Эйлера. ■

Пример 2. Если $f(x) = (x-a)^{\alpha-1}$, то $D_{a+}^{\alpha} (x-a)^{\alpha-1} \equiv 0$.

В этом примере $\mu = 1 - \alpha$, тогда $\Gamma(1 - \mu - \alpha) = \Gamma(0) = \infty$. Поэтому дробная производная от этой функции равна нулю.

Теорема 3. Если $f(x) \in C[a, b] \cap C^1(a, b)$, $f'(x) \in L[a, b]$, то существуют дробные производные (4) и (5) и справедливы представления

$$(D_{a+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{f(a)}{(x-a)^{\alpha}} + \int_a^x \frac{f'(t) dt}{(x-t)^{\alpha}} \right], \quad (6)$$

$$(D_{b-}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{f(b)}{(b-x)^{\alpha}} + \int_x^b \frac{f'(t) dt}{(x-t)^{\alpha}} \right]. \quad (7)$$

При этом $D_{b+}^{\alpha} f, D_{b-}^{\alpha} f \in L_r[a, b], 1 \leq r < \frac{1}{\alpha}$.

Доказательство. Для примера докажем справедливость равенства (6). В интеграле выражения (4) предварительно проинтегрируем по частям

$$\begin{aligned} \int_a^x \frac{f(x) dt}{(x-t)^{\alpha}} &= \left| \begin{array}{l} u = f(t) \\ dv = (x-t)^{-\alpha} dt \end{array} \right| = \\ &= \frac{f(t)(x-t)^{1-\alpha}}{-(1-\alpha)} \Big|_a^x + \frac{1}{1-\alpha} \int_a^x (x-t)^{1-\alpha} f'(t) dt = \\ &= \frac{f(a)}{1-\alpha} (x-a)^{1-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \int_a^x (x-t)^{1-\alpha} f'(t) dt. \end{aligned}$$

Теперь найдем производную от полученного равенства. В результате получим формулу (6).

Аналогично показывается справедливость равенства (7).

В силу теоремы 2 производные $D_{a+}^{\alpha} f$ и $D_{b-}^{\alpha} f$ принадлежат $L_r[a, b]$. ■

С учетом определения 1 дробные производные (4) и (5) можно представить

$$(D_{a+}^{\alpha} f)(x) = \frac{d}{dx} I_{a+}^{1-\alpha} f, \quad (D_{b-}^{\alpha} f)(x) = -\frac{d}{dx} I_{b-}^{\alpha} f.$$

Далее определим понятие дробной производной высокого порядка $\alpha, \alpha \geq 1$. В этом случае число α представим в виде $\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}$, где $[\alpha]$ – целая часть, $\{\alpha\}$ – дробная часть числа α . Если α – целое число, то под производной порядка α понимается обычная производная

$$D_{a-}^{\alpha} \stackrel{def}{=} \left(\frac{d}{dx} \right)^{\alpha} = \frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}, \quad D_{b-}^{\alpha} \stackrel{def}{=} \left(-\frac{d}{dx} \right)^{\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \dots$$

Когда α – нецелое число, то

$$D_{a+}^{\alpha} f \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{d}{dx} \right)^{[\alpha]} D_{a+}^{(\alpha)} f = \left(\frac{d}{dx} \right)^n I_{a+}^{1-(\alpha)} f,$$

$$D_{b-}^{\alpha} f \stackrel{\text{def}}{=} \left(-\frac{d}{dx} \right)^{[\alpha]} D_{b-}^{(\alpha)} f = \left(-\frac{d}{dx} \right)^n I_{b-}^{1-(\alpha)} f,$$

где $n = [\alpha] + 1$.

С учетом интегральных операторов (2) и (3) отсюда имеем

$$D_{a+}^{\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} = \left(\frac{d}{dx} \right)^n I_{a+}^{n-\alpha} f, \quad (8)$$

$$D_{b-}^{\alpha} f = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_x^b \frac{f(t) dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}} = (-1)^n \left(\frac{d}{dx} \right)^n I_{b-}^{n-\alpha} f. \quad (9)$$

Пример 3. Пусть $f(x) = (x-a)^{\alpha-k}$, $k = \overline{1, n}$, $n = [\alpha] + 1$, $\alpha \geq 1$.

Показать, что $D_{a+}^{\alpha} (x-a)^{\alpha-k} \equiv 0$.

Решение. На основании формулы (8) вычислим

$$\begin{aligned} D_{a+}^{\alpha} (x-a)^{\alpha-k} &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} (t-a)^{\alpha-k} dt = \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} x^{n-k} B(1+\alpha-k, n-\alpha) = \\ &= \frac{\Gamma(1+\alpha-k)}{\Gamma(n+1-k)} \frac{d^n}{dx^n} x^{n-k} = 0. \blacksquare \end{aligned}$$

Если функция $f(x) \in C^{n-1}[a, b]$, $f^{(n)}(x) \in C(a, b) \cap L[a, b]$, то на основании формулы Тейлора справедливо представление

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt. \quad (10)$$

Теорема 4. Если $f(x) \in C^{n-1}[a, b]$, $f^{(n)}(x) \in C(a, b) \cap L[a, b]$, $n = [\alpha] + 1$, $\alpha > 0$ – нецелое число, то производная $D_{a+}^{\alpha} f$ существует и справедливо представление

$$D_{a+}^{\alpha} f = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(1+k-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t) dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}. \quad (11)$$

Доказательство. Для вывода формулы (11) представление (10) подставим в интеграл формулы (8). Предварительно вычислим интегралы

$$\begin{aligned} & \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^k}{k!} dt = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} (t-a)^k dt = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{n+k-\alpha}}{\Gamma(k+1)} \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(n+k+1-\alpha)} = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{n+k-\alpha} \Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(n+k+1-\alpha)}, \\ & \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} \left(\frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t-s)^{n-1} f^{(n)}(s) ds \right) dt = \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x f^{(n)}(s) \left(\int_s^x (x-t)^{n-\alpha-1} (t-s)^{n-1} dt \right) ds = \\ &= \frac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(2n-\alpha)} \int_a^x (x-s)^{2n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds. \end{aligned}$$

Теперь, применив оператор $\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n}$ к вычисленным интегралам, найдем формулу (11). ■

Известно из курса анализа, что обычное дифференцирование $\frac{d}{dx}$ и интегрирование $\int_a^x \dots dt$ являются взаимно обратными операциями:

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x),$$

однако

$$\int_a^x f'(t) dt = f(x) - f(a) \neq f(x).$$

Аналогичная ситуация и здесь:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx}\right)^n I_{a+}^n f &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t) dt = f(x), \\ I_{a+}^n f^{(n)} &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt = \\ &= f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!} (x-a) - \dots - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} (x-a)^{n-1}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что только при $f^{(k-1)}(a) = 0$, $k = \overline{1, n}$, имеет место равенство

$$\left(I_{a+}^n f^{(n)}\right)(x) = f(x).$$

Теорема 5. Если $f(x) \in C(a, b) \cap L[a, b]$, то справедливо равенство

$$\left(D_{a+}^\alpha I_{a+}^\alpha f\right)(x) = f(x), \quad (12)$$

если $f(x) \in C^{n-1}[a, b]$, $f^{(n)}(x) \in C(a, b) \cap L[a, b]$, $n = [\alpha] + 1$, $\alpha > 0$ – нецелое число, то

$$\left(I_{a+}^\alpha D_{a+}^\alpha f\right)(x) = f(x). \quad (13)$$

Доказательство. На основании формул (2) и (8) найдем

$$\begin{aligned} D_{a+}^\alpha I_{a+}^\alpha f &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{dt}{(x-t)^{\alpha-n-1}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{f(s) ds}{(t-s)^{1-\alpha}} = \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x f(s) \int_s^x (x-t)^{n-\alpha-1} (t-s)^{\alpha-1} dt ds = \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x f(s) (x-s)^{n-1} \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(n)} ds = \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x (x-s)^{n-1} f(s) ds. \end{aligned}$$

Отсюда в силу формулы (1) получим (12).

Теперь рассмотрим композицию $I_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} f$. Здесь $D_{a+}^{\alpha} f$ заменим представлением (11). Тогда будем иметь

$$I_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} f = I_{a+}^{\alpha} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(1+k-\alpha)} \right) + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} I_{a+}^{\alpha} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t) dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} = J_1 + J_2. \quad (14)$$

По отдельности вычислим интегралы J_1 и J_2 :

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(1+k-\alpha)} dt = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^{k-\alpha} dt = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{\Gamma(1+k-\alpha)} \frac{\Gamma(1+k-\alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(1+k)} = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}} ds dt = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x f^{(n)}(s) \int_a^t (x-t)^{\alpha-1} (t-s)^{n-\alpha-1} dt ds = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x f^{(n)}(s)(x-s)^{n-1} \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(n)} ds = \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-s)^{n-1} f^{(n)}(s) ds. \end{aligned}$$

Подставляя значения интегралов J_1 и J_2 в (14), с учетом (10) получим (13). ■

Теорема 6. Если $f(x) \in L[a, b]$ имеет суммируемую производную $D_{a+}^\alpha f$ (это означает, что $f_{n-\alpha}(x) = I_{a+}^{n-\alpha} f \in C^{n-1}[a, b]$, $(f_{n-\alpha}(x))^{(n)} \in L[a, b]$), то равенство (13) следует заменить на

$$I_{a+}^\alpha D_{a+}^\alpha f = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{\alpha-k-1}}{\Gamma(n-k)} f_{n-\alpha}^{(n-k-1)}(a), \quad (15)$$

где $n = [\alpha] + 1$, $\alpha > 0$ – нецелое число. В частности, когда $0 < \alpha < 1$,

$$I_{a+}^\alpha D_{a+}^\alpha f = f(x) - \frac{f_{1-\alpha}(a)}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\alpha-1}. \quad (16)$$

Доказательство. Рассмотрим снова композицию $I_{a+}^\alpha D_{a+}^\alpha f$, здесь $D_{a+}^\alpha f$ заменим (8). Тогда имеем

$$\begin{aligned} J = I_{a+}^\alpha D_{a+}^\alpha f &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t \frac{f(s) ds}{(t-s)^{\alpha-n+1}} = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f_{n-\alpha}^{(n)}(t) dt, \end{aligned}$$

здесь будем интегрировать по частям $n-1$ раз. Тогда получим

$$\begin{aligned} J &= -\frac{(x-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f_{n-\alpha}^{(n-1)}(a) - \frac{(x-a)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} f_{n-\alpha}^{(n-2)}(a) - \dots - \\ &- \frac{(x-a)^{\alpha-n+1}}{\Gamma(\alpha-n+2)} f_{n-\alpha}^{(1)}(a) + \frac{1}{\Gamma(\alpha-n+1)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-n} f_{n-\alpha}'(t) dt. \end{aligned} \quad (17)$$

Рассмотрим последний интеграл

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-n+1)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-n} f_{n-\alpha}'(t) dt = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-n+2)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-t)^{\alpha-n+1} df_{n-\alpha}(t) = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-n+2)} \frac{d}{dx} \left[(x-t)^{\alpha-n+1} f_{n-\alpha}(t) \right]_a^x + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +(\alpha - n + 1) \int_a^x (x-t)^{\alpha-n} f_{n-\alpha}(t) dt \Big] = \\
 & = -\frac{(x-a)^{\alpha-n}}{\Gamma(\alpha-n+1)} f_{n-\alpha}(a) + \frac{1}{\Gamma(\alpha-n+1)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-t)^{\alpha-n} f_{n-\alpha}(t) dt.
 \end{aligned}$$

Теперь вычислим интеграл

$$\begin{aligned}
 J_2 & = \int_a^x (x-t)^{\alpha-n} f_{n-\alpha}(t) dt = \\
 & = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-n} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds dt = \\
 & = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x f(s) \int_s^x (x-t)^{\alpha-n} (t-s)^{n-\alpha-1} dt ds = \\
 & = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x f(s) \int_0^1 (1-y)^{\alpha-n} y^{n-\alpha-1} dy = \Gamma(\alpha-n+1) \int_a^x f(s) ds.
 \end{aligned}$$

Тогда интеграл J_1 примет вид

$$J_1 = -\frac{(x-a)^{\alpha-n}}{\Gamma(\alpha-n+1)} f_{n-\alpha}(a) + f(x).$$

Подставляя это в равенство (17), получим (15). ■

§ 2. Обыкновенные дифференциальные уравнения с дробными производными. Задача типа Коши

Функциональные уравнения, в которых неизвестная функция $y(x)$ входит под знаком производной дробного порядка, т.е. уравнения вида

$$F \left[x, y(x), D_{a_1}^{\alpha_1} \omega_1 y(x), D_{a_2}^{\alpha_2} \omega_2(x) y(x), \dots, D_{a_n}^{\alpha_n} \omega_n(x) y(x) \right] = 0, \quad (1)$$

где $D_{a_i}^{\alpha_i} = D_{a_{i+}}^{\alpha_i}$ или $D_{a_i}^{\alpha_i} = D_{a_{i-}}^{\alpha_i}$, $\omega_i(x)$ – известные функции, $i = \overline{1, n}$, называют обыкновенными д.у. дробного порядка.

По аналогии с классической теорией д.у. среди д.у. с дробными производными (1) выделяют линейные однородные и неоднородные д.у. с постоянными и переменными коэффициентами.

Приведем пример линейного неоднородного д.у. с дробными производными

$$D_{a_n}^{\alpha_n} y(x) + \sum_{i=1}^{n-1} a_i(x) D_{a_{n-i}}^{\alpha_{n-i}} y(x) + a_n(x) y(x) = f(x), \quad (2)$$

где $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$, $a_i(x)$, $i = \overline{1, n}$, – коэффициенты, $f(x)$ – правая часть или свободный член уравнения (2).

Рассмотрим начальную или задачу типа Коши для уравнения

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} y(x) = f(x, y), \quad n-1 < \alpha \leq n, \quad (3)$$

где $\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} = D_{0+}^\alpha$, $n \in \mathbb{N}$, $f(x, y)$ – заданная функция в некоторой области $G \subset R_{xy}^2$, содержащей в себе начало координат, с начальными условиями

$$\left. \frac{d^{\alpha-k}}{dx^{\alpha-k}} y(x) \right|_{x=0+} = y_k, \quad k = \overline{1, n}, \quad (4)$$

здесь α , y_k – заданные действительные числа.

Обозначим через $G_n \subset G$ следующую область:

$$G_n = \left\{ (x, y) \in G \mid 0 < x \leq h, \left| x^{n-\alpha} y(x) - \frac{y_n}{\Gamma(\alpha-n+1)} \right| \leq a \right\},$$

$$a > \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^{n-k} |y_k|}{\Gamma(\alpha-k+1)},$$

где a , h , y_0 – определенные постоянные.

Теорема 1. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна, ограничена в области G и по переменной y удовлетворяет условию Липшица

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K |y_1 - y_2|, \quad (5)$$

где $K = \text{const} > 0$. Тогда существует единственное решение задачи (3), (4) при $n=1$ в области G_1 , которое принадлежит классу $C[0, h]$.

Теорема 2. Пусть функция $f(x, y)$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Тогда существует единственное решение задачи (3), (4) при $n > 1$ в области G_n , которое принадлежит классу $C[0, h]$.

Здесь приведем **доказательство теоремы 1**.

Применим интегральный оператор I_{0+}^α к уравнению (3):

$$I_{0+}^\alpha \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} y(x) = I_{0+}^\alpha D_{0+}^\alpha y(x) = I_{0+}^\alpha f(x, y).$$

Отсюда в силу теоремы 6 (см. формулу (16)) и определения 1 § 1 получим

$$y(x) = y_1 \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{f(t, y)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt. \quad (6)$$

Следовательно, задача Коши (3), (4) при $n = 1$, как и в классическом случае [22, гл. 3, § 3], сводится к однозначной разрешимости нелинейного интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода (6). Покажем обратно, что если непрерывная функция $y(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению (6), то она является решением задачи Коши (3), (4) при $n = 1$. В самом деле, применяя к равенству (6) дифференциальный оператор $\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}$, получим

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} y(x) = \frac{y_1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} x^{\alpha-1} + \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} I_0^\alpha f(x, y).$$

Отсюда получим д.у. (3), так как

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} x^{\alpha-1} &= D_{0+}^\alpha x^{\alpha-1} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{t^{\alpha-1}}{(x-t)^\alpha} dt = \\ &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^1 (1-y)^{-\alpha} y^{\alpha-1} dy = 0. \end{aligned}$$

Теперь проверим выполнение начального условия (4) при $n = 1$.

Для этого применим оператор $\frac{d^{\alpha-1}}{dx^{\alpha-1}}$ к равенству (6):

$$\begin{aligned} \frac{d^{\alpha-1}}{dx^{\alpha-1}} y(x) &= \frac{y_1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d^{\alpha-1}}{dx^{\alpha-1}} x^{\alpha-1} + \frac{d^{\alpha-1}}{dx^{\alpha-1}} I_{0+}^{\alpha} f(x, y) = \\ &= y_1 + I_{0+}^{1-\alpha} I_{0+}^{\alpha} f(x, y) = y_1 + \int_0^x f(t, y(t)) dt, \end{aligned}$$

так как

$$\frac{d^{\alpha-1}}{dx^{\alpha-1}} x^{\alpha-1} = I_{0+}^{1-\alpha} x^{\alpha-1} = \Gamma(\alpha),$$

$$I_{0+}^{1-\alpha} I_{0+}^{\alpha} f(x, y) = I_{0+}^1 f(x, y) = \int_0^x f(t, y(t)) dt.$$

Итак, мы показали, что задача типа Коши (3), (4) эквивалентна интегральному уравнению (5). Доказательство существования решения интегрального уравнения (5) проведем методом последовательных приближений. Пусть

$$\begin{aligned} y_0(x) &= y_1 \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \\ y_m(x) &= y_0(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, y_{m-1}(t)) dt. \end{aligned} \quad (7)$$

По условию существует $\sup_G |f(x, y)|$, его примем за y_0 , т.е. положим, что $y_0 = \sup_G |f(x, y)|$. Тогда точки $(x, y_m(x)) \in G_1$, если

$$\begin{aligned} \left| x^{1-\alpha} y_m(x) - \frac{y_1}{\Gamma(\alpha)} \right| &= \left| \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} |f(t, y_{m-1}(t))| dt \right| \leq \\ &\leq \frac{y_0}{\Gamma(\alpha) \alpha} = \frac{y_0 x}{\Gamma(1+\alpha)} \leq \frac{y_0 h}{\Gamma(1+\alpha)} < a. \end{aligned} \quad (8)$$

Далее оценим разность $|y_m(x) - y_n(x)|$. В силу неравенства (8) из (7) имеем

$$|y_1(x) - y_0(x)| < \frac{y_0 x^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} \leq \frac{y_0 h^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}.$$

На основании (7) с учетом условия (5) оценим

$$\begin{aligned}
 |y_2(x) - y_1(x)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} [f(t, y_1(t)) - f(t, y_0(t))] dt \right| \leq \\
 &\leq \frac{K}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} |y_1(t) - y_0(t)| dt \leq \\
 &\leq \frac{K}{\Gamma(\alpha)} \frac{y_0}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^\alpha dt = \\
 &= \frac{K y_0 x^{2\alpha}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)} B(1+\alpha, \alpha) \leq \frac{K y_0 h^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}.
 \end{aligned}$$

Повторив m раз такие оценки, получим

$$|y_m(x) - y_{m-1}(x)| \leq \frac{K^{m-1} y_0 h^{m\alpha}}{\Gamma(m\alpha+1)}, \quad m = 1, 2, \dots$$

На основании этой оценки нетрудно доказать равномерную сходимость последовательности $y_n(x)$ на $(0, h]$ к предельной функции $y(x)$, для которой справедливо неравенство

$$\left| x^{1-\alpha} y(x) - \frac{y_1}{\Gamma(\alpha)} \right| \leq a.$$

Оно следует из оценки (8) в пределе $m \rightarrow +\infty$, т.е. оно означает, что точка $(x, y(x)) \in G_1$. Теперь, переходя к пределу в равенстве (7) при $m \rightarrow +\infty$, получим, что предельная функция $y(x)$ является решением интегрального уравнения (6).

Далее докажем единственность такого решения при

$$\frac{K h^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} < 1. \quad (9)$$

Пусть существуют два решения $y(x)$ и $\tilde{y}(x)$ интегрального уравнения (6). Тогда для их разности имеем оценку

$$|y(x) - \tilde{y}(x)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} [f(t, y(t)) - f(t, \tilde{y}(t))] dt \leq$$

$$\leq \frac{K}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} |y(t) - \tilde{y}(t)| dt. \quad (10)$$

Допустим, что разность $v(x) = |y(x) - \tilde{y}(x)| \neq 0$ на $[0, h]$. Тогда она имеет положительный $\max_{0 < x \leq h} v(x) = v(x_0) = v_0 > 0$, где $x_0 \in (0, h]$.

Тогда из неравенства (10) получим

$$v_0 \leq \frac{K v_0 x^\alpha}{\Gamma(\alpha)\alpha} \leq \frac{K v_0 h^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$$

или

$$1 \leq \frac{K h^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)},$$

что противоречит условию (9). ■

Отметим, что теорема 2 доказывается аналогично теореме 1, в этом случае надо полагать

$$y_0(x) = \sum_{k=1}^n \frac{y_n x^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}. \quad (11)$$

Рассмотрим примеры решения задачи типа Коши для конкретных уравнений.

Пример 1. Построить решение задачи типа Коши для уравнения

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} y(x) = \lambda y(x), \quad x > 0, \quad n-1 < \alpha \leq n, \quad (12)$$

с начальными условиями

$$\left. \frac{d^{\alpha-k}}{dx^{\alpha-k}} y(x) \right|_{x=0+} = y_k, \quad k = \overline{1, n}. \quad (13)$$

Отметим, что задача (12), (13) названа задачей типа Коши, так как при $\alpha = n$ она переходит в задачу Коши. При $n-1 < \alpha < n$ эта задача относится к классу задач с нелокальными условиями.

Решение. Решение задачи (12) и (13) на основании теорем 1 и 2 будем строить методом последовательных приближений:

$$y_m(x) = y_0(x) + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} y_{m-1}(t) dt, \quad (14)$$

где $y_0(x)$ определяется по формуле (11). Исходя из формул (14) и (11) найдем

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= y_0(x) + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} y_0(t) dt = \\
&= y_0(x) + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=1}^n \frac{y_k}{\Gamma(\alpha-k+1)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^{\alpha-k} dt = \\
&= y_0(x) + \lambda \sum_{n=1}^n \frac{y_k x^{2\alpha-k}}{\Gamma(2\alpha-k+1)}, \\
y_2(x) &= y_1(x) + \lambda^2 \sum_{n=1}^n \frac{y_k x^{3\alpha-k}}{\Gamma(3\alpha-k+1)}, \dots, \\
y_m(x) &= y_{m-1}(x) + \lambda^m \sum_{n=1}^n \frac{y_k x^{(m+1)\alpha-k}}{\Gamma((m+1)\alpha-k+1)}.
\end{aligned}$$

Складывая эти равенства, найдем

$$\begin{aligned}
y_m(x) &= y_0(x) + \lambda \sum_{n=1}^n y_k \frac{x^{2\alpha-k}}{\Gamma(2\alpha-k+1)} + \\
&+ \lambda^2 \sum_{n=1}^n y_k \frac{x^{3\alpha-k}}{\Gamma(3\alpha-k+1)} + \dots + \lambda^m \sum_{n=1}^n y_k \frac{x^{(m+1)\alpha-k}}{\Gamma((m+1)\alpha-k+1)} = \\
&= \sum_{n=1}^n y_k \sum_{i=1}^{m+1} \lambda^{i-1} \frac{x^{i\alpha-k}}{\Gamma(i\alpha-k+1)}, \quad m=0,1,2,\dots
\end{aligned}$$

Переходя здесь к пределу при $m \rightarrow +\infty$, получим искомое решение задачи типа Коши (12) и (13)

$$y(x) = \sum_{n=1}^n y_k \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda^{i-1} \frac{x^{i\alpha-k}}{\Gamma(i\alpha-k+1)} = \sum_{n=1}^n y_k x^{\alpha-k} E_{\alpha,1+\alpha-k}(\lambda x^\alpha), \quad (15)$$

где $E_{\alpha,\beta}(z)$ – функция типа Миттаг–Леффлера [6, гл. III].

В частном случае, когда $n=1$, решение задачи (12), (13) определяется по формуле

$$y(x) = y_1 x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda x^\alpha).$$

Если же $\alpha=n=1$, то из формулы (15) получим известное решение задачи Коши

$$y(x) = y_1 \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda^{i-1} \frac{x^{i-1}}{\Gamma(i)} = y_1 e^{\lambda x},$$

так как $\Gamma(i) = (i-1)!$.

Напомним читателям здесь короткую информацию о функции типа Миттаг-Леффлера. Функцией Миттаг-Леффлера называют сумму степенного ряда

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0. \quad (16)$$

А функцией типа Миттаг-Леффлера называют сумму ряда

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0. \quad (17)$$

При $\beta = 1$: $E_{\alpha,1}(z) \equiv E_{\alpha}(z)$.

Для функции $E_{\alpha,\beta}(z)$ справедливы следующие формулы:

$$E_{1,1}(z) = e^z, \quad E_{1,2}(z) = \frac{e^z - 1}{z},$$

$$E_{2,1}(z) = \operatorname{ch} \sqrt{z}, \quad E_{2,2}(z) = \frac{\operatorname{sh} \sqrt{z}}{\sqrt{z}},$$

$$E_{2,2}(-z^2) = \frac{\sin z}{z}, \quad E_{2,1}(-z^2) = \cos z,$$

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + z E_{\alpha,\beta+\alpha}(z),$$

$$\frac{d^m}{dz^m} \left[z^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(z^{\alpha}) \right] = z^{\beta-m-1} E_{\alpha,\beta-m}(z^{\alpha}),$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(t^{\alpha} z) dt = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1,$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(t^{\alpha}) dt = \frac{p^{\alpha-\beta}}{p^{\alpha}-1}, \quad \operatorname{Re} p > 1,$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} E_{\alpha}(t^{\alpha}) dt = \frac{1}{p-p^{1-\alpha}}, \quad \operatorname{Re} p > 1,$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^z (z-t)^{\gamma-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda t^{\alpha}) t^{\beta-1} dt = \\ & = z^{\beta+\gamma-1} E_{\alpha,\beta+\gamma}(\lambda z^{\alpha}), \quad \beta > 0, \quad \gamma > 0. \end{aligned}$$

Для больших значений $|z|$ и при любых целых $p \geq 1$ справедливы асимптотические формулы:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\alpha} z^{(1-\beta)/\alpha} e^{z^{1/\alpha}} - \sum_{k=1}^p \frac{z^{-k}}{\Gamma(\beta - \alpha k)} + O\left(\frac{1}{|z|^{p+1}}\right),$$

$$|\arg z| \leq \alpha_1 \pi;$$

$$E_{\alpha,\beta}(z) = -\sum_{k=1}^p \frac{z^{-k}}{\Gamma(\beta - \alpha k)} + O\left(\frac{1}{|z|^{p+1}}\right), \quad \alpha_1 \pi < |\arg z| \leq \pi,$$

где $0 < \alpha < 2$, $\frac{\pi}{2} \alpha < \alpha_1 < \min\{\pi, \alpha\pi\}$.

Когда $\alpha \geq 2$ справедлива формула

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\alpha} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} z_m^{1-\beta} e^{z_m} - \sum_{k=1}^p \frac{z^{-k}}{\Gamma(\mu - \alpha x)} + O\left(\frac{1}{|z|^{p+1}}\right),$$

где $z_m = z^{1/\alpha} e^{i2\pi m/\alpha}$, $|\arg z + 2\pi m| \leq \frac{\pi}{2} \alpha$.

Функция $E_{2,\beta}(z)$ на полуоси $(-\infty, 0]$ имеет счетное множество нулей $\{-r_k\}_{k \geq k_0}$ и справедливо представление

$$\sqrt{r_k} = \pi k - \frac{\pi}{2} \beta + \alpha_k, \quad k \geq k_0,$$

где $\alpha_k = O(1)$ при $k \rightarrow +\infty$, $k_0 \gg 1$.

Функция $E_{\alpha,\beta}(z)$ при $0 < \alpha < 2$ на комплексной плоскости имеет также счетное множество нулей, а на действительной оси может иметь лишь конечное число нулей за исключением случая, когда $\alpha = \beta = 1$, $E_{1,1}(z) = e^z$.

Доказательство указанных выше формул и утверждений можно найти в монографии [6, с. 117-146].

Пример 2. Построить решение задачи типа Коши для неоднородного д.у.

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} y(x) - \lambda y(x) = f(x), \quad x > 0, \quad n-1 < \alpha \leq n, \quad (18)$$

с условиями (13), где $f(x)$ – заданная непрерывная функция.

Решение. По аналогии с примером 1 решение задачи (18), (13) будем искать методом последовательных приближений:

$$y_m(x) = y_0(x) + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} y_{m-1}(t) dt + \\ + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt .$$

Отсюда аналогично примеру 1 найдем

$$y_m(x) = \sum_{k=1}^n y_k \sum_{i=1}^{m+1} \lambda^{i-1} \frac{x^{\alpha i - k}}{\Gamma(\alpha i - k + 1)} + \\ + \sum_{i=1}^m \frac{\lambda^{i-1}}{\Gamma(\alpha i)} \int_0^x (x-t)^{\alpha i - 1} f(t) dt = \\ = \sum_{k=1}^n y_k \sum_{i=1}^{m+1} \lambda^{i-1} \frac{x^{\alpha i - k}}{\Gamma(\alpha i - k + 1)} + \\ + \int_0^x f(t) \left(\sum_{i=1}^m \frac{\lambda^{i-1} (x-t)^{\alpha(i-1)}}{\Gamma(\alpha(i-1) + \alpha)} \right) (x-t)^{\alpha-1} dt .$$

Переходя здесь к пределу при $m \rightarrow +\infty$ с учетом формул (16) и (17), получим решение задачи (18), (13)

$$y(x) = \sum_{k=1}^n y_k x^{\alpha-k} E_{\alpha, 1+\alpha-k}(\lambda x^\alpha) + \\ + \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}[\lambda(x-t)^\alpha] f(t) dt . \quad (19)$$

Если $n = 1$, т.е. $0 < \alpha \leq 1$, то решение задачи (18), (13) определяется из формулы (19):

$$y(x) = y_1 x^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda x^\alpha) + \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}[\lambda(x-t)^\alpha] f(t) dt .$$

Если же $\alpha = n = 1$, то $E_{1,1}(z) = e^z$ и из последней формулы получим решение задачи Коши для д.у. первого порядка

$$y(x) = y_1 e^{\lambda x} + \int_0^x e^{\lambda(x-t)} f(t) dt . \quad \blacksquare$$

Отметим, из примеров 1 и 2 видно, что функцию типа Миттаг–Леффлера можно было определить как решение д.у. с дробной производной порядка $\alpha \in (0,1)$ по формуле

$$y(x) = y_1 x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda x^\alpha).$$

В общем случае, когда $n-1 < \alpha \leq n$, формулу (15) можно представить как общее решение д.у. (12), так как она представляет линейную комбинацию n линейно независимых частных решений $E_{\alpha,1+\alpha-k}(\lambda x^\alpha)$, $k = \overline{1, n}$, д.у. (12).

§ 3. Краевые задачи для дифференциального уравнения второго порядка с дробными производными

Рассмотрим д.у. 2-го порядка

$$Ly \equiv y''(x) + a_0(x)y'(x) + \sum_{k=1}^n a_k(x)D_{0+}^{\alpha_k}(\omega_k(x)y(x)) + a_{n+1}(x)y(x) = f(x), \quad 0 < x < l, \quad (1)$$

где $0 < \alpha_k < 1$, $a_0(x)$, $a_{n+1}(x)$, $a_k(x)$, $\omega_k(x)$, $k = \overline{1, n}$, $f(x)$ – заданные и непрерывные на $[0, l]$ функции, и поставим следующие задачи.

Краевая задача 1. Найти функцию $y(x)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$y(x) \in C^2(0, l) \cap C[0, l], \quad (2)$$

$$Ly(x) \equiv f(x), \quad 0 < x < l, \quad (3)$$

$$y(0) = y(l) = 0. \quad (4)$$

Краевые задачи 2 и 3. Найти функцию из класса $C^2[0, l]$, удовлетворяющую условию (3) и одному из следующих граничных условий:

$$y'(0) = y'(l) = 0, \quad (5)$$

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad y'(l) + Hy(l) = 0, \quad (6)$$

где h и H – заданные положительные числа.

Прежде чем исследовать поставленные задачи, установим экстремальные свойства решений д.у. (1).

Теорема 1 (Теорема Нахушева [17, с. 113]). Пусть неубывающая, неотрицательная функция и отличная от тождествен-

ного нуля функция $\omega(t)$ вместе с функцией $y(t)$ непрерывны на $[a, x]$ и их произведение $\omega(x)y(x)$ удовлетворяет условию Гельдера на $(a, x]$ с показателем $h > \alpha$. Тогда, если функция $y(t)$ на сегменте $[a, x]$ достигает положительного максимума (отрицательного минимума) в точке $t = x$, то $(D_{ax}^\alpha \omega y)(x) > 0$ (< 0) при любом $\alpha \in (0, 1)$.

Доказательство. Пусть $\tilde{\omega}(t) = \omega(t)y(t)$. Рассмотрим

$$\begin{aligned} \Gamma(1-\alpha)D_{ax}^\alpha \tilde{\omega}(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x} \int_a^{x-\varepsilon} \frac{\tilde{\omega}(t) dt}{(x-t)^\alpha} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\tilde{\omega}(x-\varepsilon)}{\varepsilon^\alpha} - \alpha \int_a^{x-\varepsilon} \frac{\tilde{\omega}(t) dt}{(x-t)^{\alpha+1}} \right] = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\tilde{\omega}(x-\varepsilon) - \tilde{\omega}(x)}{\varepsilon^\alpha} + \frac{\tilde{\omega}(x)}{(x-a)^\alpha} + \alpha \int_a^{x-\varepsilon} \frac{\tilde{\omega}(x) - \tilde{\omega}(t)}{(x-t)^{\alpha+1}} dt \right] = \\ &= \frac{\tilde{\omega}(x)}{(x-a)^\alpha} + \alpha \int_a^x \frac{\tilde{\omega}(x) - \tilde{\omega}(t)}{(x-t)^{\alpha+1}} dt > 0, \end{aligned}$$

так как

$$|\tilde{\omega}(x-\varepsilon) - \tilde{\omega}(x)| \leq A\varepsilon^h, \quad |\tilde{\omega}(x) - \tilde{\omega}(t)| \leq A(x-t)^h,$$

где $A = \text{const} > 0$, $h > \alpha$ и $\tilde{\omega}(x) > 0$, $\tilde{\omega}(x) - \tilde{\omega}(t) \geq 0$. ■

Теорема 2. Пусть возрастающие и положительные на $[0, l]$ функции $\omega_k(x)$, $k = \overline{1, n}$, удовлетворяют на $[0, l]$ условию Гельдера с показателем $h_n > \alpha_k$; $a_k(x) \in C[0, l]$, $a_k(x) \leq 0$, $0 < x < l$, $k = \overline{1, n+1}$. Если всюду на интервале $(0, l)$ один из коэффициентов $a_n(x)$, $k = \overline{1, n+1}$, строго меньше нуля (больше нуля) и $f(x) \geq 0$ (≤ 0), то любое решение $y(x)$ д.у. (1) из класса $C^2(0, l) \cap C[0, l]$ не может достигать на $(0, l)$ своего наибольшего (наименьшего отрицательного) значения. Эти значения достигаются только на концах сегмента $[0, l]$.

Доказательство. Пусть $\max_{0 \leq x \leq l} y(x) = y(x_0) > 0$ и $x_0 \in (0, l)$.

Тогда $y'(x_0) = 0$, $y''(x_0) \leq 0$, в силу теоремы 1 $(D_{0+}^\alpha \omega_k y)(x_0) > 0$ и

$$Ly(x_0) = y''(x_0) + \sum_{k=1}^n a_k(x_0) (D_{0+}^{\alpha_k} \omega_k y)(x_0) + a_{n+1}(x_0) y(x_0) < 0, \quad (7)$$

что противоречит неравенству $Ly(x_0) = f(x_0) \geq 0$. ■

Теорема 3. Пусть: 1) выполнены условия теоремы 2; 2) $y(x)$ – решение д.у. (1) из класса $C^2[0, l]$; 3) $\max_{0 \leq x \leq l} y(x) = y(x_0) > 0$ ($\min_{0 \leq x \leq l} y(x) = y(x_0) < 0$). Тогда $y'(l) > 0$ (< 0), если $x_0 = l$; $y'(0) < 0$ (> 0), если $x_0 = 0$.

Доказательство. Пусть $\max_{0 \leq x \leq l} y(x) = y(x_0) > 0$. В силу теоремы 2 точка $x_0 \notin (0, l)$ и $x_0 = 0$ или $x_0 = l$. Для определенности пусть $x_0 = l$. Ясно, что $y'(l) \geq 0$. Покажем, что $y'(l) > 0$. Допустим противное, что $y'(l) = 0$. Тогда из соотношения (7) получим

$$Ly(l-0) = y''(l-0) + \sum_{k=1}^n a_k(l-0) (D_{0+}^{\alpha_k} \omega_k y)(l-0) + a_{n+1}(l-0) y(l-0) < 0,$$

что противоречит неравенству $Ly(l-0) = f(l-0) \geq 0$. ■

На основании теорем 2 и 3 докажем единственность решения краевых задач 1-3.

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда если существуют решения краевых задач 1 – 3, то они определяются единственным образом.

Доказательство. Пусть существуют, например, два решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ краевой задачи 3. Рассмотрим их разность $y(x) = y_1(x) - y_2(x)$, которая является решением однородного уравнения $Ly(x) = 0$ на $(0, l)$. Покажем, что $y(x) \equiv 0$ на $(0, l)$. Допустим, это не так, что существует точка $x_1 \in (0, l)$, где $y(x_1) \neq 0$ и для определенности пусть $y(x_1) > 0$. Тогда

$\max_{0 \leq x \leq l} y(x) = y(x_0) > 0$ и в силу теоремы 1 $x_0 = 0$ или $x_0 = l$. Пусть $x_0 = 0$. Тогда из граничного условия (6) имеем $y'(0) = hy(0) > 0$, что в силу теоремы 3 противоречит неравенству $y'(0) < 0$. ■

Аналогично доказываются единственности решений краевых задач с граничными условиями (4) и (5).

Теорема 5. Пусть выполнены условия теоремы 2 и $a_0(x) \equiv 0$, $a_k(x) \in C^1[0, l]$, $k = \overline{1, n}$. Тогда существует единственное решение первой краевой задачи, т.е. задачи (2) – (4).

Доказательство. Д.у. (1) при $a_0(x) \equiv 0$ перепишем в следующем виде:

$$y''(x) = -u(x), \quad 0 < x < l, \quad (8)$$

где

$$u(x) = \sum_{k=1}^n a_k(x) D_{0+}^{\alpha_k} (\omega_k(x) y(x)) + a_{n+1} y(x) - f(x), \quad (9)$$

$$y(0) = y(l) = 0. \quad (10)$$

Для любой функции $u(x) \in C[0, l]$ единственное решение краевой задачи (8) и (10) определяется по формуле [22, гл. 3, § 11]

$$y(x) = \int_0^l G_1(x, t) u(t) dt, \quad (11)$$

где $G_1(x, t)$ – функция Грина задачи (8), (10)

$$G_1(x, t) = \frac{1}{l} \begin{cases} x(l-t), & x \leq t, \\ (l-x)t, & x \geq t. \end{cases}$$

Следовательно, краевая задача 1 эквивалентно сведена к интегральному уравнению

$$y(x) + \int_0^l G_1(x, t) a_{n+1}(t) y(t) dt + \sum_{k=1}^n A_k(y) = F(x), \quad (12)$$

где

$$F(x) = \int_0^l G_1(x, t) f(t) dt, \quad A_k(y) = \int_0^l G_1(x, t) a_k(t) (D_{0+}^{\alpha_k} \omega_k y)(t) dt.$$

При условии $a_k(t) \in C^1[0, l]$ выражение $A_k(y)$ представим в виде

$$\begin{aligned}
 A_k(y) &= \int_0^l G_1(x, t) a_k(t) (D_{0+}^{\alpha_k} \omega_k y)(t) dt = \\
 &= \int_0^l G_1(x, t) a_k(t) \frac{d}{dt} (I_{0+}^{1-\alpha_k} \omega_k y)(t) dt = \\
 &= \int_0^x G_1(x, t) a_k(t) \frac{d}{dt} (I_{0+}^{1-\alpha_k} \omega_k y)(t) dt + \\
 &+ \int_x^l G_1(x, t) a_k(t) \frac{d}{dt} (I_{0+}^{1-\alpha_k} \omega_k y)(t) dt = \\
 &= - \int_0^l (G_1(x, t) a_k(t))' (I_{0+}^{1-\alpha_k} \omega_k y)(t) dt = \\
 &= - \int_0^l (G_1(x, t) a_k(t))' \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_k)} \int_0^t \frac{\omega_k(s) y(s) ds}{(t-s)^{\alpha_k}} dt = \\
 &= - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_k)} \int_0^l \omega_k(s) y(s) \int_s^l (G_1(x, t) a_k(t))' (t-s)^{-\alpha_k} dt ds = \\
 &= \int_0^l y(s) H_k(x, s) ds,
 \end{aligned}$$

где

$$H_k(x, s) = - \frac{\omega_k(s)}{\Gamma(1-\alpha_k)} \int_s^l (G_1(x, t) a_k(t))' (t-s)^{-\alpha_k} dt.$$

Тогда интегральное уравнение (12) примет вид

$$y(x) + \int_0^l K(x, s) y(s) ds = F(x), \quad (13)$$

здесь

$$K(x, s) = G_1(x, s) a_{n+1}(s) + H(x, s),$$

$$H(x, s) = \sum_{k=1}^n H_k(x, s).$$

Уравнение (13) является интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода с ядром $K(x, t)$ и правой частью $F(x)$. При этом ядро $K(x, t)$ непрерывно на квадрате $0 \leq x, s \leq l$, по переменной x имеет производные любого порядка, а $F(x)$ на $[0, l]$ имеет также производные любого порядка.

Соответствующее однородное интегральное уравнение, т.е. уравнение (13) при $f(x) \equiv 0$, в силу теоремы 4 имеет только нулевое решение. Тогда в силу альтернативы Фредгольма [22, с. 460] интегральное уравнение (13) однозначно разрешимо в классе $C[0, l]$. Поскольку функции $K(x, t)$ и $F(x)$ по x гладкие, то решение $y(x)$ интегрального уравнения (12) принадлежит классу $C^2(0, l)$. ■

Теорема 6. Пусть выполнены условия теоремы 2 и $a_0(x) \equiv 0$. Тогда существует единственное решение третьей краевой задачи, т.е. задачи (2), (3), (6).

Доказательство. Следуя доказательству теоремы 5, рассмотрим краевую задачу (8), (6):

$$y''(x) = -u(x), \quad 0 < x < l, \\ y'(0) - h y(0) = 0, \quad y'(l) + H y(l) = 0.$$

Единственное решение этой краевой задачи определяется по формуле [22, гл. 3, § 11]

$$y(x) = \int_0^l G_3(x, t) u(t) dt, \quad (14)$$

где

$$G_3(x, t) = \frac{1 + Hl}{h + H + hHl} \begin{cases} (1 + hx) \left(1 - \frac{H}{1 + Hl} t \right), & x \leq t, \\ \left(1 - \frac{H}{1 + Hl} x \right) (1 + ht), & x \geq t, \end{cases}$$

является функцией Грина задачи (8) и (6).

Аналогично на основании формулы (14) решение третьей краевой задачи (2), (3), (6) эквивалентно сводится к однозначной разрешимости интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода (13), где функцию $G_1(x, t)$ следует заменить на $G_3(x, t)$, а ядро $K(x, s)$ имеет вид

$$K(x, s) = G_3(x, s) + H(x, s),$$

$$H(x, s) = \sum_{k=1}^n \left[H_k(x, s) + \frac{a_k(l)}{\Gamma(1-\alpha_k)} \frac{\omega_k(s)G_3(x, l)}{(l-s)^{\alpha_k}} \right],$$

$$H_k(x, s) = -\frac{\omega_k(s)}{\Gamma(1-\alpha_k)} \int_s^l (G_3(x, t) a_k(t))' (t-s)^{-\alpha_k} dt.$$

Далее, рассуждая аналогично концовке доказательства теоремы 5, получим существование единственного решения задачи (2), (3) и (6). ■

Теперь изучим краевую задачу 2. Для этого рассмотрим задачу (8), (5):

$$\begin{aligned} y''(x) &= -u(x), \quad 0 < x < l, \\ y'(0) &= y'(l) = 0. \end{aligned}$$

Как видим, соответствующая однородная краевая задача имеет ненулевое решение $y_0(x) = \text{const} = \frac{1}{\sqrt{l}}$. Поэтому решение неоднородной краевой задачи существует лишь тогда, когда правая часть $u(x)$ удовлетворяет условию ортогональности [32, гл. 4, § 2]

$$\int_0^l u(x) y_0(x) dx = 0. \quad (15)$$

В этом случае вместо обычной функции Грина строят обобщенную функцию Грина $G_2(x, t)$. Для этого согласно теории найдем частное решение д.у.

$$y'' = -y_0(x)y_0(t) = -\frac{1}{l}.$$

В качестве такого решения возьмем

$$\tilde{y}(x) = -\frac{x^2}{2l}.$$

Нам нужно найти еще одно решение однородного д.у. $y''(x) = 0$, не удовлетворяющее граничным условиям (5). Например, $y_1(x) = x$. Тогда согласно определению обобщенной функции Грина, ее будем искать в виде

$$G_2(x, t) = \frac{x^2}{2l} - \begin{cases} C_1 x + C_2 \frac{1}{\sqrt{l}}, & x \leq t, \\ C_3 x + C_4 \frac{1}{\sqrt{l}}, & x \geq t, \end{cases}$$

где C_i , $i = \overline{1, 4}$, – пока неизвестные функции, не зависящие от переменной x . Их найдем на основании свойств обобщенной функции Грина.

Удовлетворяя граничным условиям $G'_{2x}(0, t) = G'_{2x}(l, t) = 0$, найдем

$$C_1 = 0, \quad C_3 = 1.$$

Условие непрерывности функции $G_2(x, t)$ при $x = t$ приводит к уравнению

$$\frac{1}{\sqrt{l}} C_2 = t + \frac{1}{\sqrt{l}} C_4,$$

а соотношение скачка производной G'_{2x} при $x = t$ дает равенство

$$-C_3 + C_1 = -1.$$

Тогда функция $G_2(x, t)$ принимает вид

$$G_2(x, t) = \frac{x^2}{2l} - \begin{cases} t + C_4 \frac{1}{\sqrt{l}}, & x \leq t, \\ x + C_4 \frac{1}{\sqrt{l}}, & x \geq t. \end{cases} \quad (16)$$

Функцию C_4 найдем из условия ортогональности функций $G_2(x, t)$ и $y_0(x)$:

$$\int_0^l G_2(x, t) y_0(x) dx = 0.$$

Подставляя сюда функцию (16), найдем

$$C_4 = -\frac{1}{\sqrt{l}} \left(\frac{t^2}{2} + \frac{l^2}{3} \right)$$

и подставим в соотношение (16). В результате построили функцию

$$G_2(x,t) = \frac{x^2}{2l} - \begin{cases} t - \frac{t^2}{2} - \frac{l^2}{3}, & x \leq t, \\ x - \frac{t^2}{2} - \frac{l^2}{3}, & x \geq t. \end{cases}$$

Тогда решение краевой задачи (8), (5) определяется по формуле

$$y(x) = \int_0^l G_2(x,t)u(t) dt \quad (17)$$

при условии (15).

Полученная формула (17) аналогично краевым задачам 1 и 3 позволяет свести условную разрешимость краевой задачи 2 к однозначной разрешимости интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода.

Необходимое и достаточное условие (15) однозначной разрешимости задачи (8), (5) с учетом (9) имеет вид

$$\int_0^l y(s) \left\{ a_{n+1}(s) + \sum_{k=1}^n \frac{\omega_k(s)}{\Gamma(1-\alpha_k)} \left[a_k(l)(l-s)^{-\alpha_k} - \int_0^l a'_k(x)(x-s)^{-\alpha_k} dx \right] \right\} ds = \int_0^l f(s) ds. \quad (18)$$

Таким образом, нами доказано следующее утверждение.

Теорема 7. Пусть выполнены условия теоремы 2 и $a_0(x) \equiv 0$. Тогда существует единственное решение второй краевой задачи, т.е. задачи (2), (3) и (5) при выполнении условия (18).

Замечание. В теоремах 5 – 7 условие $a_0(x) \equiv 0$ можно заменить на $a_0(x) = \text{const} = \alpha \neq 0$. В этом случае в качестве д.у. (8) следует взять уравнение

$$y''(x) + \alpha y'(x) = -u(x), \quad 0 < x < l,$$

и аналогично построить соответствующие функции Грина. Предлагается читателям это сделать самостоятельно.

Отметим, что данная глава написана с использованием результатов монографий [25, § 2,3, 42], [17, § 3.1], [21, § i.1, i.2].

ГЛАВА 2. ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Изученные нами в основном курсе д.у. задача Коши, краевые задачи для дифференциальных уравнений являются прямыми. Здесь исходными данными выступают само дифференциальное уравнение с известными коэффициентами, правой частью, а также начальные или граничные условия, геометрия области. По эти данным строится (определяется) решение поставленной задачи.

В обратных краевых задачах искомыми являются либо правая часть, либо коэффициенты уравнения, либо коэффициенты в граничных условиях, либо геометрия в области определения искомого величин. По дополнительным условиям относительно искомого решения определяется решение обратной задачи.

Исследования обратных задач представляют научный и практический интерес из-за их многочисленных приложений. Особенно они полезны в задачах поиска полезных ископаемых, при изучении процессов землетрясения, цунами и т.д.

§ 4. Обратная задача определения правой части линейного дифференциального уравнения

Рассмотрим сначала примеры таких задач.

1. Движение материальной точки по прямой под действием внешней силы $f(t)$ согласно закону Ньютона определяется как решение начальной задачи:

$$x''(t) = f(t), \quad 0 < t < T, \quad (1)$$

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1, \quad (2)$$

где $x(t)$ – положение материальной точки в момент времени t , x_0 и x_1 – заданные числа. Пусть в задаче (1), (2) неизвестна правая часть $f(t)$. Ставится обратная задача по определению пары функций $x(t)$ и $f(t)$ по заданию дополнительных условий относительно $x(t)$, помимо условий (2).

2. Стационарное распределение температуры $u(x)$ в тонком стержне, концы которого поддерживаются нулевой температурой, определяется решением граничной задачи:

$$(k(x)u'(x))' - q(x)u = f(x), \quad 0 < t < T, \quad (3)$$

$$u(0) = u(l) = 0, \quad (4)$$

где $k(x)$ – коэффициент теплопроводности, $q(x)$ – коэффициент теплообмена, $f(x)$ – плотность распределения тепловых источников.

Ставится обратная задача по определению пары функций $u(x)$ и $f(x)$ по заданию дополнительных условий относительно $u(x)$, помимо условий (4). В этой задаче коэффициенты $k(x)$ и $q(x)$ – известные заданные функции.

Рассмотрим линейное уравнение 2-го порядка

$$L(y) = y''(x) + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad a < x < b, \quad (5)$$

с известными коэффициентами $p(x), q(x) \in C[a, b]$.

Обратная задача. Найти пару функций $y(x)$ и $f(x)$, удовлетворяющих условиям

$$y(x) \in C^2[a, b], \quad f(x) \in C[a, b], \quad (6)$$

$$Ly \equiv f(x), \quad a < x < b, \quad (7)$$

$$y(a) = y_0, \quad y'(a) = y_1, \quad (8)$$

$$y(x_0) = \tilde{y}_0, \quad a < x_0 < b, \quad (9)$$

где y_0, y_1, \tilde{y}_0 – заданные действительные числа, x_0 – фиксированная точка интервала (a, b) .

Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – ненулевые решения однородного дифференциального уравнения $L(y) = 0$, удовлетворяющие условиям

$$y_1(a) = 0, \quad y_1'(a) = 1; \quad y_2(a) = 1, \quad y_2'(a) = 0. \quad (10)$$

В силу указанной выше гладкости коэффициентов $p(x)$ и $q(x)$ д.у. (5) функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ могут быть построены как решения задачи Коши для д.у. $L(y) = 0$ с начальными условиями (10).

Решение задачи (7) и (8) будем искать методом вариации

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x), \quad (11)$$

где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ определяются из системы [22, гл. 3, § 7]:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x), \end{cases} \quad (12)$$

с определителем Вронского

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}.$$

В точке $x = a$ функция $W(a) = -1 \neq 0$ в силу условий (10). Тогда функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы на $[a, b]$. Поскольку функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ решения д.у. $L(y) = 0$, то $W(x) \neq 0$ при всех $x \in [a, b]$. Тогда система (12) однозначно разрешима:

$$C_1'(x) = \frac{1}{W(x)} \begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ f(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = -\frac{y_2(x)f(x)}{W(x)},$$

$$C_2'(x) = \frac{1}{W(x)} \begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & f(x) \end{vmatrix} = \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}.$$

Отсюда найдем функции

$$C_1(x) = -\int_a^x \frac{y_2(t)f(t)}{W(t)} dt + \tilde{C}_1,$$

$$C_2(x) = \int_a^x \frac{y_1(t)f(t)}{W(t)} dt + \tilde{C}_2,$$

где \tilde{C}_1, \tilde{C}_2 – произвольные постоянные, и подставим в формулу (11). В результате будем иметь

$$\begin{aligned} y(x) = & -\int_a^x [y_1(x)y_2(t) - y_2(x)y_1(t)] \frac{f(t)}{W(t)} dt + \\ & + \tilde{C}_1 y_1(x) + \tilde{C}_2 y_2(x). \end{aligned} \quad (13)$$

Удовлетворяя функцию (13) начальным условиям (8), найдем постоянные

$$\tilde{C}_2 = y_0, \quad \tilde{C}_1 = y_1.$$

Тогда нами получена формула решения задачи (7) и (8):

$$y(x) = y_1 y_1(x) + y_0 y_2(x) - \frac{1}{W(a)} \int_a^x [y_1(x) y_2(t) - y_2(x) y_1(t)] f(t) dt, \quad (14)$$

так как $W(x) = W(a) = -1$.

Если функция $f(x) \in C[a, b]$, то функция $y(x)$, определенная формулой (14), является единственным решением задания (7), (8) и $y(x) \in C^2[a, b]$.

Теперь, чтобы найти функцию $f(x)$, удовлетворим решение (14) задачи (7) и (8) условию (9). Такая обратная задача сводится к интегральному уравнению Фредгольма первого рода

$$\int_a^{x_0} [y_1(x_0) y_2(t) - y_2(x_0) y_1(t)] f(t) dt = \tilde{y}_0 - y_1 y_1(x_0) - y_0 y_2(x_0), \quad (15)$$

разрешимость которого в классе $C[a, b]$ относится к классу некорректных задач. Действительно, рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$\int_a^b H(x, t) u(t) dt = g(x), \quad c \leq x \leq d, \quad (16)$$

где ядро $H(x, t)$ и правая часть $g(x)$ – известные функции. Требуется по этим данным найти функцию $u(t)$. Предположим, что $H(x, t) \in C^1(D)$, где D – прямоугольник: $c \leq x \leq d$, $a \leq t \leq b$, $g(x) \in C[c, d]$. Неизвестную функцию $u(t)$ будем искать в пространстве $C[a, b]$. Оказывается, такая задача поставлена некорректно. По Адамару решение интегрального уравнения (16) в классе $C[a, b]$ является корректным, если выполнены три условия:

- 1) для любого $g(x) \in C[c, d]$ существует решение $u(t)$ интегрального уравнения (16) в классе $C[a, b]$;
- 2) для любого $g(x) \in C[c, d]$ решение интегрального уравнения (16) в классе $C[a, b]$ единственно;
- 3) решение $u(t)$ непрерывно зависит от данных задачи, т.е. в данном случае от $g(x)$.

При выполнении хотя бы одного из этих условий задача называется некорректно поставленной.

Покажем, что в случае интегрального уравнения (16) не выполняется первое условие, т.е. не у всякой функции $g(x) \in C[c, d]$ существует решение интегрального уравнения (16). Возьмем функцию $g_0(x)$ из $C[c, d]$, но не дифференцируемой на $[c, d]$. Для такой правой части $g_0(x)$ интегральное уравнение (16) не может иметь решение $u(t)$ из класса $C[a, b]$, так как из условий на ядро $H(x, t)$ интеграл в левой части (16) является функцией из класса $C^1[c, d]$.

В случае интегрального уравнения (16) нарушается также условие непрерывной зависимости от правой части. Рассмотрим последовательность функций

$$u_k(t) = u_0(t) + k \sin(k^2 t), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (17)$$

Эти функции являются решениями интегрального уравнения (16) с правыми частями $g_k(x)$:

$$\int_a^b H(x, t) u_k(t) dt = g_k(x), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Оценим правые части при $k \geq 1$:

$$\begin{aligned} |g_k(x) - g_0(x)| &\leq \left| \int_a^b H(x, t) k \sin(k^2 t) dt \right| = \\ &= \left| -H(x, t) \frac{1}{k} \cos(k^2 t) \right|_a^b + \frac{1}{k} \int_a^b H_t(x, t) \cos(k^2 t) dt \leq \frac{A}{k}, \end{aligned}$$

где A – положительная постоянная, которая не зависит от k . Отсюда следует, что

$$\|g_k(x) - g_0(x)\|_{C[c, d]} \leq \frac{A}{k}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

т.е. исходные данные $g_k(x)$ сколь угодно близки к $g_0(x)$ при $k \rightarrow \infty$. А из построения последовательности решений (17) следует, что

$$\|u_k(t) - u_0(t)\|_{C[a, b]} \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty,$$

что и означает нарушение третьего условия.

Если правая часть $f(x)$ имеет специальный вид, например $f(x) = f_0 x^\alpha$, где $f_0 = \text{const} \neq 0$, $\alpha \geq 0$, то интегральное уравнение (15) при условии $q(x) \leq 0$ на $[a, b]$ можно однозначно разрешить относительно неизвестного коэффициента f_0 . Действительно, подставив $f(x) = f_0 x^\alpha$ в интегральное уравнение (15), найдем

$$f_0 = \frac{1}{\tilde{W}(x_0)} [\tilde{y}_0 - y_1 y_1(x_0) - y_0 y_2(x_0)], \quad (18)$$

если

$$\tilde{W}(x_0) = \int_a^{x_0} [y_1(x_0)y_2(t) - y_2(x_0)y_1(t)] t^\alpha dt \neq 0.$$

Заметим, что функция $\tilde{W}(x)$ обладает следующими свойствами:

- 1) $L\tilde{W}(x) = x^\alpha$, $x \in [a, b]$;
- 2) $\tilde{W}(a) = \tilde{W}'(a) = 0$, $\tilde{W}''(a) = a^\alpha$,

которые доказываются непосредственной проверкой.

Допустим, что $\tilde{W}(x_0) = 0$. Тогда $\tilde{W}(x) \leq 0$ на $[a, x_0]$. Пусть это не так, что существует точка $x_1 \in (a, x_0)$, такая, что $\tilde{W}(x_1) > 0$. Тогда $\max_{a \leq x \leq x_0} \tilde{W}(x) = \tilde{W}(\xi) > 0$, $a < \xi < x_0$. В этой точке $\tilde{W}'(\xi) = 0$, $\tilde{W}''(\xi) \leq 0$ и

$$L\tilde{W}(\xi) = \tilde{W}''(\xi) + p(\xi)\tilde{W}'(\xi) + q(\xi)\tilde{W}(\xi) \leq 0,$$

что в силу свойства 1) противоречит $L\tilde{W}(\xi) = \xi^\alpha > 0$. В силу свойства 2) производная $\tilde{W}'(x) > 0$ на малом промежутке $(a, a + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Тогда функция $\tilde{W}(x)$ строго возрастает на $(a, a + \varepsilon)$ и там $\tilde{W}(x) > 0$, что противоречит $\tilde{W}(x) \leq 0$ на $(a, a + \varepsilon)$.

Итак, если $q(x) \leq 0$ на $[a, b]$, то обратная задача по отысканию коэффициента f_0 с дополнительным условием (9) решается однозначно и определяется по формуле (18).

Теперь рассмотрим обратную задачу для д.у. (3) с граничными условиями (4). Здесь предположим, что при всех $x \in [0, l]$

$$k(x) \geq k_0 = \text{const} > 0, \quad q(x) \geq 0. \quad (19)$$

При условиях (19) граничная задача (3) и (4) при $f(x) = 0$ имеет только нулевое решение [22, с. 327].

Решение задачи (3), (4), когда $f(x) \in C[a, b]$, определяется по формуле [22, с. 327–333]

$$u(x) = \int_0^l G(x, t) f(t) dt, \quad (20)$$

где $G(x, t)$ – функция Грина задачи (3), (4) определяется формулой

$$G(x, t) = -\frac{1}{k(0)W(0)} \begin{cases} u_1(x)u_2(t), & 0 \leq x \leq t, \\ u_2(x)u_1(t), & t \leq x \leq l, \end{cases}$$

а $u_1(x)$ и $u_2(x)$ – линейно независимые решения однородного д.у. (3) при $f(x) = 0$, удовлетворяющие условиям

$$u_1(0) = 0, \quad u_2(l) = 0,$$

$W(x)$ – вронсиан частных решений $u_1(x)$ и $u_2(x)$.

Если зададим дополнительное условие типа (9)

$$u(x_0) = \tilde{u}_0, \quad 0 < x_0 < l, \quad (21)$$

то, удовлетворяя функцию (20) условию (21), относительно функции $f(t)$ получим интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода.

Следовательно, обратная задача по отысканию правой части д.у. (3) по условиям (4) и (21) является некорректной.

Если правая часть д.у. (3) имеет вид $f(t) = f_0 t^\alpha$, $f_0 = \text{const} \neq 0$, $\alpha \geq 0$, то при условии $u(x_0) = \tilde{u}_0$, $0 < x_0 < l$, обратная задача однозначно разрешима

$$f_0 = \frac{\tilde{u}_0}{\int_0^l G(x_0, t) t^\alpha dt},$$

так как $G(x_0, t) > 0$ при $0 < x_0 < l$.

§ 5. Обратная задача по отысканию коэффициентов линейного дифференциального уравнения

Рассмотрим линейное д.у. 2-го порядка

$$L(y) = y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad a < x < b, \quad (1)$$

где коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ подлежат определению, если известна информация о решениях и правой части $f(x)$ д.у. (1).

Обратная задача. Найти тройку функций $y(x)$, $p(x)$ и $q(x)$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$p(x), q(x) \in C[a, b], \quad y(x) \in C^2[a, b], \quad (2)$$

$$Ly(x) \equiv f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (3)$$

$$y(a) = y_0, \quad y'(a) = y_1, \quad (4)$$

если известны на отрезке $[a, b]$ два решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ однородного д.у. $L(y) = 0$, удовлетворяющие начальным условиям

$$y_1(a) = 0, \quad y_1'(a) = 1; \quad y_2(a) = 1, \quad y_2'(a) = 0, \quad (5)$$

где $f(x)$ – известная непрерывная на $[a, b]$ функция, y_0 и y_1 – заданные действительные числа.

В силу результатов § 4 определитель Вронского

$$W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) = W(a) = -1 \neq 0.$$

Подставим функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ в однородное д.у. $L(y) = 0$.

Отсюда получим систему

$$\begin{cases} p(x_0)y_1'(x_0) + q(x_0)y_1(x_0) = -y_1''(x_0), \\ p(x_0)y_2'(x_0) + q(x_0)y_2(x_0) = -y_2''(x_0), \end{cases} \quad (6)$$

где x_0 – произвольная, но фиксированная точка из $[a, b]$.

Поскольку определителем системы (6) является $-W(x_0) = 1 \neq 0$, то она имеет единственное решение

$$p(x_0) = \begin{vmatrix} -y_1''(x_0) & y_1(x_0) \\ -y_2''(x_0) & y_2(x_0) \end{vmatrix} = y_1(x_0)y_2''(x_0) - y_2(x_0)y_1''(x_0),$$

$$q(x_0) = \begin{vmatrix} y_1'(x_0) & -y_1''(x_0) \\ y_2'(x_0) & -y_2''(x_0) \end{vmatrix} = y_1''(x_0)y_2'(x_0) - y_1'(x_0)y_2''(x_0). \quad (7)$$

По условию функции $y_1(x)$ и $y_2(x) \in C^2[a, b]$, то функции $p(x)$, $q(x) \in C[a, b]$. Когда найдены коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$, функция $y(x)$ строится как решение задачи Коши для уравнения (1) с начальными условиями (4) (см. § 4).

Таким образом, доказана следующая

Теорема. Если $f(x) \in C[a, b]$ и известны два решения $y_1(x)$ и $y_2(x) \in C^2[a, b]$ однородного д.у. $L(y) = 0$, удовлетворяющие начальным условиям (5), то существует единственное решение обратной задачи (2) – (5), которое определяется по формулам (7) и (14) из § 4.

В данной теореме указаны условия определения обоих коэффициентов $p(x)$ и $q(x)$ д.у. (1). Но возможны случаи, когда надо найти только один из коэффициентов, например $q(x)$. В этом случае задается только одно решение $y_1(x)$ однородного д.у. $L(y) = 0$:

$$p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x) = -y_1''(x).$$

Отсюда при условии $y_1(x) \neq 0$ на $[a, b]$ находится коэффициент $q(x)$.

§ 6. Обратные задачи для линейных дифференциальных уравнений с параметром

Обратные задачи для обыкновенных д.у. с параметром возникают при изучении обратных задач для д.у. в частных производных методом разделения переменных.

1. Обратные задачи для дифференциальных уравнений первого порядка

Рассмотрим д.у. первого порядка с параметром λ

$$y'(x, \lambda) + \lambda q(x)y(x, \lambda) = f(x), \quad 0 < x < l, \quad (1)$$

с начальным условием

$$y(0, \lambda) = y_0, \quad (2)$$

где $f(x)$ и y_0 – заданные функция и действительное число. Ставится задача об отыскании коэффициента $q(x)$ из класса $C[0, l]$

по заданному дополнительному условию относительно искомой функции $y(x, \lambda)$:

$$y(x_0, \lambda) = \varphi(\lambda), \quad 0 < x_0 \leq l, \quad (3)$$

где x_0 – фиксированная точка из $(0, l]$, $\varphi(\lambda)$ – функция от параметра $\lambda \in \langle \alpha, \beta \rangle$.

Построим решение задачи (1) и (2) при условии, что $q(x)$, $f(x) \in C[0, l]$. Оно имеет вид

$$y(x, \lambda) = y_0 e^{-\lambda A(x)} + \int_0^x f(t) e^{\lambda[A(t) - A(x)]} dt, \quad (4)$$

где $A(x) = \int_0^x q(s) ds$.

Теперь изучим обратную задачу по отысканию пары функций $y(x, \lambda)$ и $q(x)$ по условиям (1) – (3) в классе функций: $y(x, \lambda) \in C^1[0, l]$, $q(x) \in C[0, l]$. Для этого функцию (4) подчиним условию (3):

$$y_0 e^{-\lambda A(x_0)} + \int_0^{x_0} f(t) e^{\lambda[A(t) - A(x_0)]} dt = \varphi(\lambda). \quad (5)$$

Если обозначим $\psi(t) = e^{\lambda A(t)}$, то из равенства (5) получим интегральное уравнение Фредгольма первого рода с нагруженным слагаемым

$$\int_0^{x_0} f(t) \psi(t) dt = \psi(x_0) \varphi(\lambda) - y_0, \quad (6)$$

которое, как известно, относится к классу некорректных задач. Тем не менее при некоторых условиях интегральное уравнение (6) имеет не более одного решения.

Теорема 1. Если $f(x)$, $q(x) \in C[0, l]$, $f(x) \neq 0$, $q(x) > 0$ на $[0, l]$, $y_0 = 0$, $\varphi(\lambda) = 0$, то интегральное уравнение (6) может иметь не более одного положительного решения.

Доказательство. Пусть существуют два положительных решения $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ интегрального уравнения (6). Тогда из урав-

нения (6) при $\varphi(\lambda) = 0$, $y_0 = 0$, предварительно применив теорему о среднем, получим

$$\int_0^{x_0} \psi_1(t) dt = \int_0^{x_0} \psi_2(t) dt$$

или

$$\int_0^{x_0} e^{\lambda A_1(t)} dt = \int_0^{x_0} e^{\lambda A_2(t)} dt, \quad \lambda \in \langle \alpha, \beta \rangle, \quad (7)$$

где $A_i(t) = \int_0^t q_i(s) ds$, $i = 1, 2$. В интегралах равенства (7) произведем замену $A_i(t) = \xi$. Тогда имеем

$$\int_0^{A_1(x_0)} e^{\lambda \xi} \gamma_1(\xi) d\xi = \int_0^{A_2(x_0)} e^{\lambda \xi} \gamma_2(\xi) d\xi, \quad (8)$$

где

$$\gamma_i(\xi) = \frac{1}{A_i'(t)} = -\frac{1}{q_i(t)} = \frac{1}{q_i[A_i^{-1}(\xi)]}, \quad (9)$$

$t = A_i^{-1}(\xi)$ – обратная к отношению функции $\xi = A_i(t)$, она существует, так как производная $A_i'(t) = q_i(t) > 0$ на $[0, l]$.

Покажем, что из равенства (8) следует $A_1(x_0) = A_2(x_0)$. Функция $e^{z\xi}$ является аналитической функцией от комплексной переменной z , функции $\gamma_i(\xi)$ непрерывны в своих областях определения. Отсюда следует, что интегралы равенства (8) являются аналитическими функциями параметра λ . Тогда в силу теоремы единственности для аналитических функций равенство (8) имеет место для всех комплексных значений параметра λ , в частности для всех действительных λ .

Допустим, что $A_1(x_0) \neq A_2(x_0)$ и для определенности $A_1(x_0) < A_2(x_0)$. Тогда из равенства (8) при $\lambda \in \mathbb{R}$ имеем

$$\int_{A_1(x_0)}^{A_2(x_0)} e^{\lambda \xi} \gamma_2(\xi) d\xi = \int_0^{A_1(x_0)} e^{\lambda \xi} (\gamma_1(\xi) - \gamma_2(\xi)) d\xi. \quad (10)$$

Обозначим через $m = \min \gamma_2(\xi)$ при $A_1(x_0) \leq \xi \leq A_2(x_0)$, $M = \max |\gamma_1(\xi) - \gamma_2(\xi)|$, когда $0 \leq \xi \leq A_1(x_0)$. Поскольку функции $\gamma_i(\xi)$ положительные и не равны между собой, то $m > 0$, $M > 0$. Тогда из равенства (10) имеем

$$\int_{A_1(x_0)}^{A_2(x_0)} e^{\lambda \xi} d\xi \leq \frac{M}{m} \int_0^{A_1(x_0)} e^{\lambda \xi} d\xi.$$

Отсюда получим неравенство

$$\frac{1}{\lambda} \left[e^{\lambda A_2(x_0)} - e^{\lambda A_1(x_0)} \right] \leq \frac{M}{m\lambda} \left[e^{\lambda A_1(x_0)} - 1 \right],$$

которое не выполняется при достаточно больших $\lambda > 0$:

$$e^{\lambda[A_2(x_0) - A_1(x_0)]} - 1 \leq \frac{M}{m} \left[1 - e^{-\lambda A_1(x_0)} \right].$$

Отсюда видим, что левая часть при $\lambda \rightarrow \infty$ стремится к плюс бесконечности, а правая часть – числу $\frac{M}{m}$. Из полученного противоречия вытекает, что $A_1(x_0) = A_2(x_0) = A(x_0)$. Тогда из (8) имеем равенство

$$\int_0^{A_2(x_0)} e^{\lambda \xi} [\gamma_1(\xi) - \gamma_2(\xi)] d\xi = 0, \quad \lambda \in R. \quad (11)$$

Поскольку система функций $e^{\lambda \xi}$ полна в пространстве $L_2[0, A(x_0)]$, то из равенства (11) следует, что $\gamma_1(\xi) - \gamma_2(\xi) = 0$ почти всюду на $[0, A(x_0)]$. По условию функции $\gamma_i(\xi)$ непрерывны на $[0, A(x_0)]$, то $\gamma_1(\xi) = \gamma_2(\xi)$ на $[0, A(x_0)]$. Отсюда на основании (9) получаем, что $q_1(x) = q_2(x)$. ■

Отметим, что в теореме 2 условия $f(x) \neq 0$, $y_0 = 0$ являются существенными. При их нарушении можно привести примеры не единственного решения интегрального уравнения (6) [7, с. 76-77].

2. Обратная задача Тихонова А.Н.

Рассмотрим д.у. второго порядка

$$L(y) = y''(x, \lambda) - \frac{\lambda^2}{\sigma^2(x)} y(x, \lambda) = -f(x), \quad x > 0, \quad \lambda > 0. \quad (12)$$

Ставится задача об определении коэффициента $\sigma(x)$, если заданы следующие условия:

$$y(0, \lambda) = y_0, \quad y(\infty, \lambda) = 0, \quad (13)$$

$$y'(0, \lambda) = \varphi(\lambda), \quad (14)$$

где $f(x)$, $\varphi(\lambda)$ – известные функции, y_0 – заданное число.

Эта задача впервые была поставлена и изучена Тихоновым А.Н. [31] при использовании методов электроразведки постоянным током для поиска полезных ископаемых.

Искомую функцию $\sigma(x)$ будем искать в классе функций:

$$\sigma(x) \in C[0, +\infty), \quad \sigma(x) = \tilde{\sigma}(x) > 0, \quad 0 \leq x \leq x_0, \quad (15)$$

$$\sigma(x) = \sigma_0 = \text{const} > 0, \quad x \geq x_0 > 0, \quad \tilde{\sigma}(x_0) = \sigma_0.$$

Предварительно установим следующие свойства решений краевой задачи (12) и (13).

Лемма 1. *Если существует решение краевой задачи (12), (13) в классе функций $C^1[0, +\infty) \cap C^2(0, +\infty)$, то оно единственно.*

Доказательство. Пусть $y(x, \lambda)$ – решение однородной задачи (12), (13), где $y_0 = 0$, $f(x) = 0$. Покажем, что такое решение $y(x, \lambda) \equiv 0$ на $[0, +\infty)$. Предположим, что это не так, т.е. $y(x, \lambda) \not\equiv 0$ на $(0, +\infty)$. Отсюда следует, что $y'(0, \lambda) \neq 0$. В противном случае, в силу единственности решения задачи Коши для однородного д.у. $L(y) = 0$ функция $y(x, \lambda) \equiv 0$ на $[0, +\infty)$. Для определенности положим, что $y'(0, \lambda) > 0$. Отсюда, оказывается, следует, что $y'(x, \lambda) > 0$ и на $[0, +\infty)$. Пусть $y'(x, \lambda)$ обращается в нуль в некоторых точках $(0, +\infty)$. Обозначим x_0 самый крайний слева корень уравнения $y'(x, \lambda) = 0$. Тогда $y'(x, \lambda) > 0$ на $(0, x_0]$ и из условия $y(0, \lambda) = 0$ вытекает, что $y(x, \lambda) > 0$ на $(0, x_0]$. В силу этого из д.у. $L(y) = 0$ получим, что $y''(x, \lambda) > 0$ на $(0, x_0]$.

Следовательно, функция $y'(x, \lambda)$ строго возрастает на $(0, x_0]$ и $y'(x, \lambda) > 0$, что противоречит допущению $y'(x_0, \lambda) = 0$. Итак, $y'(x, \lambda) > 0$ на $[0, +\infty)$. Но тогда функция $y(x, \lambda)$ является строго возрастающей на $[0, +\infty)$ и не может удовлетворять условию $y(+\infty, x) = 0$. Следовательно, $y(x, \lambda) \equiv 0$ на $[0, +\infty)$. ■

Замечание. Данную лемму 1 можно было доказать следующим образом.

Допустим, что $y(x, \lambda) \not\equiv 0$ на $(0, +\infty)$, т.е. существует хотя бы одна точка $x_1 \in (0, +\infty)$ такая, что $y(x_1, \lambda) \neq 0$. Пусть для определенности $y(x_1, \lambda) > 0$, тогда $\max y(x, \lambda) = y(x_0, \lambda) > 0$ при $0 \leq x < +\infty$ и в точке x_0 по необходимому условию экстремума $y'(x_0, \lambda) = 0$, $y''(x_0, \lambda) \leq 0$. А с другой стороны, из равенства $L(y(x_0, \lambda)) = 0$ следует, что

$$y''(x_0, \lambda) = \frac{\lambda^2}{\sigma^2(x_0)} y(x_0, \lambda) > 0.$$

Получено противоречие, следовательно, $y(x, \lambda) \equiv 0$ на $[0, +\infty)$.

Лемма 2. Пусть существует решение краевой задачи (12) и (13) в классе функций $C^2[0, +\infty)$. Тогда

1) если $y_0 \geq 0$ (≤ 0), $f(x) \geq 0$ (≤ 0), то $y(x, \lambda) \geq 0$ (≤ 0) на $[0, +\infty)$;

2) если $y_0 > 0$ (< 0), $f(x) > 0$ (< 0), то $y(x, \lambda) > 0$ (< 0) на $[0, +\infty)$.

Доказательство. 1. Допустим противное, что существует точка $x_1 \in (0, +\infty)$ такая, что $y(x_1, \lambda) < 0$. Тогда $\min_{[0, +\infty)} y(x, \lambda) = y(x_0, \lambda) < 0$, $0 < x_0 < +\infty$. В этой точке $y''(x_0, \lambda) \geq 0$ и

$$Ly(x_0, \lambda) = y''(x_0, \lambda) - \frac{\lambda^2}{\sigma^2(x_0)} y(x_0, \lambda) > 0,$$

что противоречит условию

$$Ly(x_0, \lambda) = -f(x_0) \leq 0.$$

2. Снова допустим, что существует точка $x_1 \in (0, +\infty)$ такая, что $y(x_1, \lambda) \leq 0$. Если $y(x_1, \lambda) < 0$, то в силу доказанного пункта 1) получаем противоречие. Пусть $y(x_1, \lambda) = 0$. Тогда в этой точке имеем минимум. Поэтому $y'(x_1, \lambda) = 0$, $y''(x_1, \lambda) \geq 0$. Но с другой стороны, из д.у. $Ly = -f(x)$

$$y''(x_1, \lambda) = \frac{\lambda^2}{\sigma^2(x_1)} y(x_1, \lambda) - f(x_1) = -f(x_1) < 0.$$

Полученное противоречие и доказывает наше утверждение. ■

Следствие. Пусть

$$1) y_i(x) \in C[0, +\infty) \cap C^2(0, +\infty), \quad i = 1, 2, \text{ и}$$

$$Ly_i(x) \equiv y_i''(x) - \frac{\lambda^2}{\sigma_i^2(x)} y_i(x) = -f_i(x), \quad x > 0;$$

$$2) f_1(x) \geq f_2(x) \geq 0, \quad f_i(x) \in C(0, +\infty), \quad \sigma_1(x) \geq \sigma_2(x), \\ x > 0.$$

Тогда, если $y_1(0) \geq y_2(0) \geq 0$, то $y_1(x) \geq y_2(x)$ при $x > 0$.

Доказательство. В силу леммы 2 решения $y_i(x) \geq 0$ при $x > 0$. Рассмотрим разность $y(x) = y_1(x) - y_2(x)$, которая является решением д.у.:

$$y'' - \frac{\lambda^2}{\sigma_i^2(x)} y = f_2(x) - f_1(x) - y_2(x) \lambda^2 \left(\frac{1}{\sigma_2^2} - \frac{1}{\sigma_1^2} \right) = \\ = - \left[f_1(x) - f_2(x) + y_2(x) \lambda^2 \left(\frac{1}{\sigma_2^2} - \frac{1}{\sigma_1^2} \right) \right] = -f(x) \leq 0.$$

Функция $y(x)$ удовлетворяет условиям леммы 2, так как $y(0) \geq 0$ и $f(x) \geq 0$. Тогда $y(x) = y_1(x) - y_2(x) \geq 0$ при $x > 0$. ■

Лемма 3. Если существует решение краевой задачи (12), (13) в классе функций $C^1[0, +\infty) \cap C^2(0, +\infty)$, $y_0 \geq 0$ (≤ 0), $f(x) < 0$ (> 0), то $y'(x, \lambda) < 0$ (> 0) на $[0, +\infty)$.

Доказательство. Пусть $y'(0, \lambda) \geq 0$. Отсюда следует, что $y'(x, \lambda) > 0$ на $(0, +\infty)$. Допустим, что функция $y'(x, \lambda)$ имеет нули на $(0, +\infty)$. Назначим через x_0 самый крайний слева корень уравнения $y'(x_0, \lambda) = 0$. Тогда $y'(x, \lambda) > 0$ на $(0, x_0)$ и из условия $y(0, \lambda) = y_0 \geq 0$ следует, что $y(x, \lambda) > 0$ на $(0, x_0]$. Из д.у. (12) следует, что

$$y''(x) = \frac{\lambda^2}{\sigma^2(x)} y(x) - f(x) > 0$$

на $(0, x_0]$. Следовательно, функция $y'(x, \lambda)$ строго возрастает на $[0, x_0]$ и $y'(x_0, \lambda) > 0$, что противоречит допущению $y'(x_0, \lambda) = 0$. Тогда $y'(x, \lambda) > 0$ на $[0, +\infty)$ и функция $y(x, \lambda)$ является строго возрастающей на $[0, +\infty)$ и не может удовлетворить условию $y(+\infty, x) = 0$. Итак, $y'(0, \lambda) < 0$. Допустим, что в некоторой точке $x_1 \in (0, +\infty)$: $y'(x_1, \lambda) \geq 0$. Покажем, что $y(x, \lambda) \equiv 0$ на $[x_1, +\infty)$. Предположим противное, что в некоторой точке $x_2 \in [x_1, +\infty)$ функция $y(x_2, \lambda) \neq 0$ и для определенности $y(x_2, \lambda) > 0$. Тогда $\max_{x_1 \leq x < +\infty} y(x, \lambda) = y(x_0, \lambda) > 0$, $x_0 \in [x_1, +\infty)$, не может достигаться на интервале $(x_1, +\infty)$. Пусть $x_0 = x_1$. Тогда в силу граничного принципа экстремума (см. [22, гл. 3, § 10]) $y'(x_1, \lambda) < 0$, что противоречит допущению $y'(x_1, \lambda) \geq 0$. Следовательно, $y(x, \lambda) \equiv 0$ на $[x_1, +\infty)$. Тогда из д.у. (15) следует, что $f(x) \equiv 0$ на $[x_1, +\infty)$, что противоречит условию $f(x) < 0$ на $(0, +\infty)$. ■

В силу леммы 1 краевая задача (12), (13) при условии $y_0 = 0$, $f(x) \in C[0, +\infty)$,

$$\int_0^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$$

имеет единственное решение

$$y(x, \lambda) = \int_0^{\infty} G(x, t, \lambda) f(t) dt, \quad (16)$$

где $G(\cdot)$ – функция Грина задачи (12) и (13), она определяется по формуле

$$G(x, t, \lambda) = -\frac{1}{W} \begin{cases} y_1(x, \lambda) y_2(t, \lambda), & 0 \leq x \leq t \leq \infty, \\ y_1(t, \lambda) y_2(x, \lambda), & 0 \leq t \leq x \leq \infty, \end{cases} \quad (16_1)$$

где $W = y_1(x, \lambda) y_2'(x, \lambda) - y_2(x, \lambda) y_1'(x, \lambda)$ – вронскиан линейно независимых решений однородного д.у. $Ly = 0$, удовлетворяющих условиям

$$y_1(0, \lambda) = 0, \quad y_2(+\infty, \lambda) = 0.$$

Лемма 4. *Функция Грина $G(x, t, \lambda)$ имеет следующие свойства:*

1. $G(x, t, \lambda) \geq 0$ при $0 \leq x, t \leq +\infty, \lambda > 0$.

2. Если $G_i(x, t, \lambda)$ – функции Грина, соответствующие коэффициентам $\sigma_i(x), i = 1, 2$, то из неравенства $\sigma_1(x) \geq \sigma_2(x), 0 \leq x < \infty$, следует неравенство

$$G_1(x, t, \lambda) \geq G_2(x, t, \lambda) \text{ при } 0 \leq x, t \leq +\infty, \lambda > 0.$$

Доказательство. Функция $y_1(x)$ определяется как решение задачи Коши для однородного д.у. $Ly = 0$ с начальными условиями

$$y_1(0, \lambda) = 0, \quad y_1'(0, \lambda) = 1.$$

Покажем, что $y_1(x, \lambda) > 0$ и $y_1'(x, \lambda) > 0$ на $(0, +\infty)$. Допустим, что $y_1'(x, \lambda)$ обращается в нуль на $(0, +\infty)$. Пусть x_0 – крайний слева корень уравнения $y_1'(x_0, \lambda) = 0$. Тогда $y_1'(x, \lambda) > 0$ на $[0, x_0)$ и из условия $y_1(0, \lambda) = 0$ следует, что $y_1(x, \lambda) > 0$ на $(0, x_0]$. Из д.у. $Ly_1 = 0$ имеем

$$y_1''(x, \lambda) = \frac{\lambda^2}{\sigma^2(x)} y_1(x, \lambda) > 0, \quad x \in (0, x_0].$$

Следовательно, функция $y_1'(x, \lambda)$ строго возрастает на $[0, x_0]$ и $y_1'(x_0, \lambda) > 0$. Из полученного противоречия следует, что $y_1'(x, \lambda) > 0$ на $[0, +\infty)$, отсюда вытекает, что $y_1(x, \lambda) > 0$ на $(0, +\infty)$.

В качестве функции $y_2(x, \lambda)$ возьмем решение д.у. $Ly = 0$ с граничными условиями

$$y_2(0, \lambda) > 0 \quad \text{и} \quad y_2(\infty, \lambda) = 0.$$

Аналогично $y_1(x, \lambda)$ можно показать, что $y_2(x, \lambda) > 0$ на $(0, x_0]$.

При $x \geq x_0$ можно принять, что

$$y_2(x, \lambda) = e^{-\frac{\lambda}{\sigma_0} x}.$$

Отсюда имеем, что $y_2(x, \lambda) \geq 0$ на $(0, +\infty)$. Тогда из формулы (16₁) следует, что функция Грина $G(x, t, \lambda) \geq 0$ при $0 \leq x, t < \infty$, $\lambda > 0$, так как вронскиан $W(x, \lambda)$ не зависит от x и $W(0, \lambda) = -y_2(0, \lambda) < 0$.

Теперь докажем второе свойство. Пусть $\sigma_1(x) \geq \sigma_2(x)$ и $G_1(x, t, \lambda)$, $G_2(x, t, \lambda)$ – соответствующие этим коэффициентам функции Грина. Функции $G_i(x, t, \lambda)$ являются решениями д.у. $LG_i(x, t, \lambda) = 0$ при $x \neq t$ и удовлетворяют граничным условиям

$$G_i(0, t, \lambda) = G_i(\infty, t, \lambda) = 0.$$

Тогда в силу следствия из леммы 2

$$G_1(x, t, \lambda) \geq G_2(x, t, \lambda)$$

при $0 \leq x, t \leq \infty$, $\lambda > 0$. ■

Отметим, в случае когда $\sigma(x) = \sigma_0 = \text{const} > 0$ при всех $x \geq 0$, функция Грина краевой задачи (12) и (13) строится в явном виде. В этом случае частные решения д.у. $Ly = 0$ имеют вид $e^{\lambda x / \sigma_0}$ и $e^{-\lambda x / \sigma_0}$. На основании их построим решения

$$y_1(x, \lambda) = \text{sh} \frac{\lambda x}{\sigma_0}, \quad y_2(x, \lambda) = e^{-\lambda x / \sigma_0}$$

и функция Грина имеет вид

$$G(x, t, \lambda) = \frac{\sigma_0}{\lambda} \begin{cases} \operatorname{sh} \frac{\lambda x}{\sigma_0} e^{-\lambda t / \sigma_0}, & 0 \leq x \leq t \leq +\infty, \\ \operatorname{sh} \frac{\lambda t}{\sigma_0} e^{-\lambda x / \sigma_0}, & 0 \leq t \leq x \leq +\infty. \end{cases} \quad (17)$$

Далее докажем теорему единственности решения обратной задачи (12) – (14) в классе функции (15) и $y(x, \lambda) \in C^1[0, +\infty) \cap C^2(0, +\infty)$ с дополнительным условием, что $\sigma(x)$ является аналитической на $[0, x_0]$.

Теорема 2. *Если существует решение $y(x, \lambda)$, $\sigma(x)$ обратной задачи (12) – (14) в указанном выше классе функций и $y_0 > 0$, $f(x) < 0$, то оно единственно.*

Доказательство. Допустим, что существуют два решения $y_1(x, \lambda)$, $\sigma_1(x)$ и $y_2(x, \lambda)$, $\sigma_2(x)$ задачи (12) – (14) в указанном классе. Тогда разность $y(x, \lambda) = y_1(x, \lambda) - y_2(x, \lambda)$ является решением неоднородного д.у.

$$y''(x, \lambda) - \frac{\lambda^2}{\sigma_1^2(x)} y(x, \lambda) = -F(x, \lambda), \quad (18)$$

где

$$F(x, \lambda) = \lambda^2 y_2(x, \lambda) \left(\frac{1}{\sigma_2^2(x)} - \frac{1}{\sigma_1^2(x)} \right) = \lambda^2 y_2(x, \lambda) \alpha(x),$$

$$y(0, \lambda) = y(+\infty, \lambda) = 0, \quad y'(0, \lambda) = 0. \quad (19)$$

Решение краевой задачи (18) и (19) на основании формулы (16) определяется по формуле

$$y(x, \lambda) = \lambda^2 \int_0^{\infty} G(x, t, \lambda) y_2(t, \lambda) \alpha(t) dt. \quad (20)$$

По условию $\sigma_1(x) = \tilde{\sigma}_1(x)$, $0 \leq x \leq x_{01}$ и $\sigma_2(x) = \tilde{\sigma}_2(x)$, $0 \leq x \leq x_{02}$, где $\tilde{\sigma}_i(x)$ являются аналитическими на своих промежутках определения. Пусть $x_0 = \min \{x_{01}, x_{02}\}$. Тогда функция $\alpha(x)$ является аналитической на сегменте $[0, x_0]$. Из теоремы

единственности для аналитических функций следует, что либо $\alpha(x) = 0$ на $[0, x_0]$, либо $\alpha(x)$ имеет конечное число нулей на $[0, x_0]$.

Покажем, что последний случай невозможен. Предположим, что существует точка $x_1 \in (0, x_0]$ такая, что $\alpha(x_1) \neq 0$, для определенности пусть $\alpha(x) > 0$ при $0 < x \leq x_1$. В силу (15) существуют положительные постоянные σ_m и σ_M такие, что при всех $x \in [0, +\infty)$

$$\sigma_m \leq \sigma_1(x) \leq \sigma_M. \quad (21)$$

Формулу (20) перепишем в виде

$$y(x, \lambda) = \lambda^2 \int_0^{x_1} G(x, t, \lambda) y_2(t, \lambda) \alpha(t) dt + \\ + \lambda^2 \int_{x_1}^{+\infty} G(x, t, \lambda) y_2(t, \lambda) \alpha(t) dt. \quad (22)$$

Из лемм 2 и 3 следует, что $y_2(x, \lambda)$ на $(0, +\infty)$ положительная монотонно убывающая функция, а из леммы 4 имеем, что $G(x, t, \lambda) \geq 0$.

Пусть $x_2 = x_1 \sigma_m / 2\sigma_M$, $x_2 < x_1$. Поскольку $\alpha(x) > 0$ на $(0, x_1]$, то существует $\alpha_0 = \text{const} > 0$ такое, что $\alpha(x) \geq \alpha_0$ при $x_2 \leq x \leq x_1$. Тогда из равенства (22) для $x \in (0, x_1)$ имеем

$$y(x_1, \lambda) \geq \lambda^2 y_2(x_1, \lambda) \alpha_0 \int_{x_2}^{x_1} G(x, t, \lambda) dt - \\ - \lambda^2 y_2(x_1, \lambda) \int_{x_1}^{+\infty} G(x, t, \lambda) |\alpha(t)| dt. \quad (23)$$

Обозначим $A = \max_{0 \leq x < +\infty} |\alpha(x)|$, а $G_m(x, t, \lambda)$ и $G_M(x, t, \lambda)$ – функции Грина краевой задачи (12), (13) с $\sigma(x) = \sigma_m$ и $\sigma(x) = \sigma_M$ соответственно. На основании (21) и леммы 4 при $0 \leq x, t < +\infty$ и $\lambda > 0$ имеем

$$G_m(x, t, \lambda) \leq G(x, t, \lambda) \leq G_M(x, t, \lambda).$$

Тогда из соотношения (23) с учетом этого неравенства получим

$$y(x, \lambda) \geq \lambda^2 y_2(x_1, \lambda) \left[\alpha_0 \int_{x_2}^{x_1} G_m(x, t, \lambda) dt - A \int_{x_1}^{+\infty} G_M(x, t, \lambda) dt \right]. \quad (24)$$

На основании явного вида функции Грина (17) в случае постоянной $\sigma(x) = \sigma_0$ вычислим интеграл

$$\int_{x_2}^{x_1} G_m(x, t, \lambda) dt = \frac{\sigma_m}{\lambda} \int_{x_2}^{x_1} \operatorname{sh} \frac{\lambda x}{\sigma_m} e^{-\frac{\lambda t}{\sigma_m}} dt = \frac{\sigma_m^2}{\lambda^2} \operatorname{sh} \frac{\lambda x}{\sigma_m} \left(e^{-\frac{\lambda x_2}{\sigma_m}} - e^{-\frac{\lambda x_1}{\sigma_m}} \right),$$

$$\int_{x_1}^{+\infty} G_M(x, t, \lambda) dt = \frac{\sigma_M}{\lambda} \int_{x_1}^{+\infty} \operatorname{sh} \frac{\lambda x}{\sigma_M} e^{-\frac{\lambda t}{\sigma_M}} dt = \frac{\sigma_M^2}{\lambda^2} \operatorname{sh} \frac{\lambda x}{\sigma_M} e^{-\frac{\lambda x_1}{\sigma_M}}.$$

Тогда неравенство (24) для $x \in (0, x_2)$ примет вид

$$y(x, \lambda) \geq y_2(x_1, \lambda) P(x, \lambda), \quad (25)$$

где

$$P(x, \lambda) = \alpha_0 \sigma_m^2 \operatorname{sh} \frac{\lambda x}{\sigma_m} \left(e^{-\frac{\lambda x_2}{\sigma_m}} - e^{-\frac{\lambda x_1}{\sigma_m}} \right) - A \sigma_M^2 \operatorname{sh} \frac{\lambda x}{\sigma_M} e^{-\frac{\lambda x_1}{\sigma_M}}.$$

Поскольку $y(0, \lambda) = P(0, \lambda) = 0$ для $\lambda > 0$, то из неравенства (25) следует, что при $\lambda > 0$

$$y'(0, \lambda) \geq y_2(x_1, \lambda) P'(0, \lambda). \quad (26)$$

Теперь оценим

$$P'(0, \lambda) = \lambda \left[\alpha_0 \sigma_m \left(e^{-\frac{\lambda x_2}{\sigma_m}} - e^{-\frac{\lambda x_1}{\sigma_m}} \right) - A \sigma_M e^{-\frac{\lambda x_1}{\sigma_M}} \right]. \quad (27)$$

По построению $\frac{x_2}{\sigma_m} < \frac{x_1}{\sigma_M}$, тогда выражение (27) представим

в виде

$$P'(0, \lambda) = \lambda e^{-\frac{\lambda x_1}{\sigma_M}} \left[\alpha_0 \sigma_m e^{\lambda \left(\frac{x_1}{\sigma_M} - \frac{x_2}{\sigma_m} \right)} - A \sigma_M - \alpha_0 \sigma_m e^{-\lambda x_1 \left(\frac{1}{\sigma_m} - \frac{1}{\sigma_M} \right)} \right].$$

Отсюда следует, что существует $\lambda_0 > 0$ такое, что $P'(0, \lambda) > 0$ для $\lambda \geq \lambda_0$. Тогда из неравенства (26) следует, что $y'(0, \lambda) > 0$ при $\lambda \geq \lambda_0$, что противоречит граничному условию $y'(0, \lambda) = 0$ из (19). Получено противоречие, значит, второй случай невозможен, т.е. $\alpha(x) = 0$ на $[0, x_0]$. Тогда из д.у. (18) (где $F(x, \lambda) = 0$) и условий $y(0, \lambda) = y'(0, \lambda) = 0$ следует, что $y(x, \lambda) \equiv 0$ на $[0, x_0]$. Отсюда получим, что $y(x_0, \lambda) = y'(x_0, \lambda) = 0$ при $\lambda > 0$.

Далее рассмотрим отрезок $[x_0, \tilde{x}_0]$, где $\tilde{x}_0 = \max\{x_{01}, x_{02}\}$. На этом отрезке одна из функций $\sigma_1(x)$, $\sigma_2(x)$ постоянная, а другая аналитична. Тогда, рассуждая, аналогично выше получим, что $\sigma_1(x) = \sigma_2(x)$ и $y_1(x) = y_2(x)$ на $[x_0, \tilde{x}_0]$, а значит, что $\sigma_1(x) = \sigma_2(x)$ и $y_1(x) = y_2(x)$ на $[0, +\infty)$. ■

Существование решения задачи (12) – (14) при $y_0 = 0$ на основании формулы (16) сводится к нелинейному интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода

$$\varphi(\lambda) = \int_0^{+\infty} G'_x(0, t, \lambda) f(t) dt, \quad (28)$$

где $G(x, t, \lambda)$ – функция Грина, которая зависит от коэффициента $\sigma(x)$. Как известно, задача о разрешимости интегральных уравнений типа (28) относится к классу некорректных задач.

В случае, когда $\sigma(x) = \sigma_0 = \text{const} > 0$, функция $G(x, t, \lambda)$ строится в явном виде (20). Подставляя (20) в уравнение (28), получим

$$\varphi(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\lambda t}{\sigma_0}} f(t) dt. \quad (29)$$

Продифференцируем уравнение (29). Тогда имеем

$$I_\lambda(\sigma_0) = - \int_0^{+\infty} \frac{t f(t)}{\varphi'(\lambda)} e^{-\frac{\lambda t}{\sigma_0}} dt = \sigma_0. \quad (30)$$

Если $\left| \frac{tf(t)}{\varphi'(\lambda)} \right| \leq M = \text{const} > 0$ при $0 \leq t, \lambda < +\infty$, то существует

$\lambda_0 > 0$ такое, что при $\lambda \geq \lambda_0$ оператор $I_\lambda(\sigma_0)$ сжимаем:

$$|I_\lambda(\sigma_1) - I_\lambda(\sigma_2)| \leq \frac{M}{\lambda} |\sigma_1 - \sigma_2| < 1.$$

Тогда интегральное уравнение (30) имеет единственное решение, которое можно найти методом последовательных приближений. Когда найден коэффициент σ_0 , решение $y(x, \lambda)$ находится по формуле (16) с учетом (17).

Отметим, что данная обратная задача является не устойчивой по равномерной метрике (см. об этом [7, с. 88–89]).

§ 7. Обратные спектральные задачи Штурма–Лиувилля

Рассмотрим д.у. второго порядка

$$Ly = y''(x) - q(x)y(x) = \lambda y(x)$$

или

$$Ly = y''(x) - (\lambda - q(x))y(x) = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad (1)$$

с граничными условиями

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad (2)$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \quad (3)$$

где h и H – заданные неотрицательные числа, $q(x)$ – заданная на $[0, \pi]$ непрерывная функция, λ – числовой параметр.

Под краевой задачей Штурма–Лиувилля понимают **спектральную задачу**: найти все значения параметра λ , при которых д.у. (1) имеет нетривиальные решения, удовлетворяющие однородным граничным условиям (2), (3).

Если существуют такие значения λ , то они называются собственными значениями, а соответствующие решения $y(x, \lambda)$ – собственными функциями задачи (1) – (3) или дифференциального оператора Ly при граничных условиях (2) и (3).

Ясно, что каждая собственная функция определяется с точностью до постоянного множителя.

Обозначим через $y(x, \lambda)$ решение д.у. (1), удовлетворяющее начальным условиям $y(0, \lambda) = 1$, $y'(0, \lambda) = h$. Такое решение при $q(x) \in C[0, \pi]$ всегда существует, единственно и удовлетворяет условию (2). Поэтому собственные значения задачи (1) – (3) суть корни уравнения $y'(\pi, \lambda) + Hy(\pi, \lambda) = 0$.

Как известно [14, п. 2], при $q(x) \in C^1[0, \pi]$ задача (1) – (3) имеет счетное множество собственных значений

$$\lambda_n: \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots,$$

все они простые, а соответствующая система собственных функций $\{y_n(x)\} = \{y_n(x, \lambda)\}_{n=0}^{\infty}$ ортогональна и полна в пространстве $L_2[0, \pi]$ и поэтому в нем образует ортогональный базис. При этом справедливы следующие асимптотические формулы при больших n :

$$\rho_n = \sqrt{\lambda_n} = n + \frac{\omega}{\pi n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad (4)$$

$$y_n(x) = \cos nx + \frac{\beta_n(x)}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad (5)$$

$$\alpha_n = \int_0^{\pi} y^2(x) dx = \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

где

$$\omega = h + H + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} q(x) dx,$$

$$\beta_n(x) = \sin nx \left(-\frac{\omega x}{\pi} + h + \frac{1}{2} \int_0^x q(t) dt \right).$$

Числа $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n \geq 0}$ называются спектральными данными задачи (1) – (3).

Справедливы следующие утверждения о разложении функций по системе (5).

Утверждение 1 [14, с. 42]. Для любой функции $f(x) \in L_2[0, \pi]$ справедливо разложение

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n y_n(x), \quad f_n = \frac{1}{\alpha_n} \int_0^{\pi} f(x) y_n(x) dx, \quad (6)$$

при этом ряд (6) сходится в $L_2[0, \pi]$ и справедливо равенство Парсеваля

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n f_n^2 = \int_0^{\pi} f^2(x) dx. \quad (7)$$

Утверждение 2 [28, с. 173]. Для любой функции $f(x) \in C^1[0, \pi]$, удовлетворяющей условиям (2), (3), имеет место разложение (6), которое сходится абсолютно и равномерно на $[0, \pi]$ и справедливо равенство (7).

Теперь перейдем к постановке обратной задачи Штурма–Лиувилля по отысканию неизвестного коэффициента $q(x)$, зная какие-то спектральные данные задачи (1) – (3). Первый результат в этом направлении был получен В.А. Амбарцумяном [1]: если граничные условия имеют вид

$$y'(0) = y'(\pi)$$

и известны собственные значения $\lambda_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, такой краевой задачи для д.у. (1), то $q(x) = 0$.

Однако этот результат не является типичным, так как одной последовательности собственных значений недостаточно для однозначного определения $q(x)$ в общем случае. Г. Борг [2] показал, что коэффициент $q(x)$ определяется однозначно, если заданы собственные значения λ_n задачи (1) – (3) и собственные значения μ_n задачи (1), (2) и

$$y'(\pi, \lambda) + H_1 y(\pi, \lambda) = 0,$$

где $H_1 \neq H$, при некоторых ограничениях на h , H и H_1 , которые затем были сняты другими исследователями.

На основании теории обратной задачи Штурма–Лиувилля [13, с. 57-60], [14, с. 211-216] будем предполагать выполнение одного из следующих условий (A_i) , $i = 1, 2$:

– известны спектральные данные $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n \geq 0}$ задачи (1) – (3) с неизвестным коэффициентом $q(x)$ из класса $C^1[0, \pi]$ и неизвестными h и H (условие (A_1));

– известны собственные значения λ_n задачи (1) – (3) с неизвестным коэффициентом $q(x)$ из класса $C^1[0, \pi]$ и неизвестными h и H , известны собственные значения μ_n задачи (1) и

$$y'(0) - h_1 y(0) = 0, \quad y'(\pi) - H y(\pi) = 0, \quad (8)$$

с неизвестными $q(x) \in C^1[0, \pi]$ и h_1, H , где $h_1 \neq h$ (условие (A_2)).

На основании этих условий ставятся обратные задачи.

Обратная задача 1. Найти коэффициенты $q(x)$, h и H , удовлетворяющие условиям (1) – (3) и (A_1) .

Обратная задача 2. Найти коэффициенты $q(x)$, h и H , удовлетворяющие условиям (1) – (3) и (A_2) .

Теперь приведем теоремы единственности решений обратных задач 1 и 2.

Теорема 1 (Единственность решения обратной задачи 1). Пусть $q(x)$ и $\tilde{q}(x) \in C^1[0, \pi]$, наборы чисел $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n \geq 0}$ и $\{\tilde{\lambda}_n, \tilde{\alpha}_n\}_{n \geq 0}$ – спектральные данные задачи (1) – (3) с соответствующими коэффициентами $q(x)$, h , H и $\tilde{q}(x)$, \tilde{h} , \tilde{H} . Тогда, если $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n$ и $\alpha_n = \tilde{\alpha}_n$ при всех $n \geq 0$, то $q(x) = \tilde{q}(x)$ на $[0, \pi]$, $h = \tilde{h}$ и $H = \tilde{H}$.

Отметим, что в случае симметричности функции $q(x)$ относительно точки $x = \frac{\pi}{2}$, т.е. когда $q(\pi - x) = q(x)$ и $H = h$, для определения функции $q(x)$ и коэффициента h достаточно задать только один спектр $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$.

Теорема 2. Пусть $q(x)$ и $\tilde{q}(x) \in C^1[0, \pi]$, $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$, $\{\tilde{\lambda}_n\}_{n \geq 0}$ – спектры задачи (1) – (3) с соответствующими коэффициентами $q(x)$, $H = h$ и $\tilde{q}(x)$, $\tilde{H} = \tilde{h}$. Тогда, если $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n$ при всех $n \geq 0$, то $q(x) = \tilde{q}(x)$ на $[0, \pi]$, $h = \tilde{h}$.

Теорема 3. (Единственность решения обратной задачи 2). Пусть $q(x)$ и $\tilde{q}(x) \in C^1[0, \pi]$, $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$, $\{\tilde{\lambda}_n\}_{n \geq 0}$ – спектры задачи (1) – (3) с соответствующими коэффициентами $q(x)$, h , H и $\tilde{q}(x)$, \tilde{h} , \tilde{H} ; $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$, $\{\tilde{\mu}_n\}_{n \geq 0}$ – спектры задачи (1), (8) с соответствующими коэффициентами $q(x)$, h_1 , H и $\tilde{q}(x)$, \tilde{h}_1 , \tilde{H} . Тогда, если $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n$ и $\mu_n = \tilde{\mu}_n$ при всех $n \geq 0$, то $q(x) = \tilde{q}(x)$ на $[0, \pi]$, $h = \tilde{h}$ и $H = \tilde{H}$.

Приведенные выше теоремы 1 – 3 являются утверждениями о единственности решения рассматриваемых нами обратных задач 1 и 2.

Далее остановимся на вопросах существования решения поставленных обратных задач. Для этого снова обратимся к теории обратной задачи для оператора Штурма–Лиувилля [13, с. 57-60], [14, с. 211-216], которая позволяет строить алгоритм решения обратной задачи (1) – (3) с неизвестными коэффициентами $q(x)$, h , H , и в ней приведены необходимые и достаточные условия ее разрешимости по спектральным данным.

Теорема 4. Для того чтобы вещественные числа $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n \geq 0}$ были спектральными данными обратной задачи (1) – (3) с $q(x) \in C^1[0, \pi]$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$\rho_n = \sqrt{\lambda_n} = n + \frac{\omega}{\pi n} + \frac{K_n}{n}, \quad \lambda_n \neq \lambda_m \text{ при } n \neq m, \quad (9)$$

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{K_{1n}}{n}, \quad \alpha_n > 0, \quad (10)$$

где

$$\kappa_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi q(t) \cos 2nt \, dt + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\kappa_{1n} = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\pi-t)q(t) \sin 2nt \, dt + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$\kappa_n, \kappa_{1n} \in l_2$. Тогда функция $q(x)$ и числа h, H строятся по следующему алгоритму:

1) по заданным числам $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n \geq 0}$ строится функция

$$F(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\cos \rho_n x \cos \rho_n t}{a_n} - \frac{\cos nx \cos nt}{a_n^0} \right), \quad (11)$$

здесь $a_n^0 = \pi/2$ при $n \geq 1$ и $a_n^0 = \pi$ при $n = 0$, которая при $0 \leq t \leq x \leq \pi$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно;

2) функция $G(x, t)$ находится из интегрального уравнения Гельфанда–Левитана

$$G(x, t) + F(x, t) + \int_0^x G(x, s)F(s, t) \, ds = 0, \quad 0 \leq t \leq x \leq \pi, \quad (12)$$

которое имеет единственное решение, при этом функция $G(x, t)$ на промежутке $0 \leq t \leq x \leq \pi$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно;

3) тогда функция

$$X(x, \lambda_n) = \cos \rho_n x + \int_0^x G(x, t) \cos \rho_n t \, dt$$

удовлетворяет уравнению

$$X''(x, \lambda_n) + 2 \frac{d}{dx} G(x, x) X = \lambda_n X$$

и начальным условиям

$$X(0, \lambda_n) = 1, \quad X'(0, \lambda_n) = h = G(0, 0) = -F(0, 0);$$

4) неизвестные $q(x)$, h и H находятся по формулам

$$q(x) = 2 \frac{d}{dx} G(x, x), \quad h = G(0, 0), \quad H = -\frac{X'(\pi, \lambda_n)}{X(\pi, \lambda_n)},$$

где последнее отношение не зависит от n .

Теперь приведем условия разрешимости второй обратной задачи по двум известным спектрам λ_n и μ_n [35, с. 58-59] соответственно задач (1) – (3) и (1),

$$X'(0) - h_1 X(0) = 0, \quad X(\pi) = 0. \quad (13)$$

Теорема 5. Для того чтобы вещественные числа λ_n и μ_n , $n \geq 0$, были соответственно спектрами задач (1) – (3) и (1), (13) с $q(x) \in C^1[0, \pi]$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства (9) и

$$\sqrt{\mu_n} = n + \frac{1}{2} + \frac{\omega'}{\pi n} + \frac{\tilde{\kappa}_n}{n}, \quad \mu_n \neq \mu_m \quad \text{при} \quad n \neq m,$$

где

$$\omega' = h_1 + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(x) dx, \quad \tilde{\kappa}_n \in l_2, \quad \lambda_n < \mu_n < \lambda_{n+1}, \quad n \geq 0.$$

Тогда функция $q(x)$ и числа h , H строятся по следующему алгоритму:

1) по заданным числам λ_n и μ_n находятся числа

$$\alpha_n = -d(\lambda) \frac{d}{d\lambda} \Delta(\lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_n}, \quad (14)$$

где

$$\Delta(\lambda) = \pi (\lambda_0 - \lambda) \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda_n - \lambda}{n^2}, \quad d(\lambda) = \prod_{n=0}^{+\infty} \frac{\mu_n - \lambda}{(n+1/2)^2};$$

2) по числам λ_n и α_n по указанному в теореме 4 алгоритму строятся $q(x)$, h и H .

Отметим, что в теореме 5 самым сложным является вычисление α_n по формуле (14). В работе [14, гл. V, § 11] получены асимптотические формулы для чисел α_n в виде формул (9).

Доказательства теорем 1 – 5 можно найти в монографиях [13], [14], [35].

Рассмотрим конкретные примеры обратных задач 1 и 2.

Пример 1. [35, с. 58]. Пусть $\rho_n = n \geq 0$, $\alpha_n = \pi/2$ при $n \geq 1$ и $\alpha_n = \alpha_0$ при $n = 0$ – любое положительное число. Далее, по формуле (11) вычислим

$$F(x, t) = \frac{1}{\alpha_0} - \frac{1}{\pi} = a$$

и из интегрального уравнения (12) найдем функцию $G(x, t) = -a/(1+ax)$. После этого по алгоритму из теоремы 4 вычислим

$$q(x) = 2 \frac{d}{dx} G(x, x) = \frac{2a^2}{(1+ax)^2}, \quad h = G(0, 0) = -a, \quad (15)$$

$$y_n(x) = \cos nx - \frac{a \sin nx}{(1+ax)n}, \quad (16)$$

$$H = -\frac{y'_n(\pi)}{y_n(\pi)} = \frac{a}{1+a\pi}. \quad (17)$$

Пример 2. Пусть $\lambda_n = n^2$ и $\mu_n = (n+1/2)^2$, $n \geq 0$, являются соответственно спектрами задач (1) – (3) и (1), (13). Тогда по теореме 5 найдем

$$\Delta(\lambda) = -\pi\lambda \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n^2}\right) = -\sqrt{\lambda} \sin \pi\sqrt{\lambda},$$

$$d(\lambda) = \prod_{n=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{(n+1/2)^2}\right) = \cos \pi\sqrt{\lambda}$$

И ВЫЧИСЛИМ

$$\alpha_n = -d(\lambda) \frac{d}{d\lambda} \Delta(\lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_0} = \frac{\pi}{2} \quad \text{при } n \geq 1, \quad \alpha_0 = \pi.$$

Затем, с учетом примера 1, находим $q(x)$, h , $y_n(x)$ и H по формулам (15) – (17):

$$q(x) = 0, \quad h = H = 0, \quad y_n(x) = \cos nx,$$

т.е. получили отмеченный выше результат В.А. Амбарцумяна.

Отметим, что в работе [24, с. 84-88] приведены примеры нахождения $q(x)$, h , H исходя из собственных функций двух спектральных задач.

§ 8. Обратная задача Ильгамова М.А. об определении длины подводного трубопровода при подъеме сосредоточенной силой

Работы по укладке трубопроводов на морское дно, профилактике, ремонту и восстановлению их работоспособности связаны с приложением внешних поперечных сосредоточенных сил для подъема определенного участка трубы. Под действием весов трубы и транспортируемой среды, выталкивающей силы воды, внутреннего и внешнего давлений, внешней сосредоточенной силы труба подвергается изгибу.

Здесь прямая задача состоит в определении изгиба участка трубопровода при подъеме сосредоточенной силой до поверхности водоема при заданных весовых и жесткостных характеристиках, условиях закрепления на концах, заданных значениях сосредоточенных сил и длины поднятого участка.

Под обратной задачей Ильгамова М.А. понимается определение длины поднятого участка и сосредоточенных сил при заданных других входных параметрах [10].

Рассмотрим следующую схему трубопровода с длиной поднятой части $2l$, находящегося в водоеме с горизонтальным дном и глубиной h (см. рис. 1):

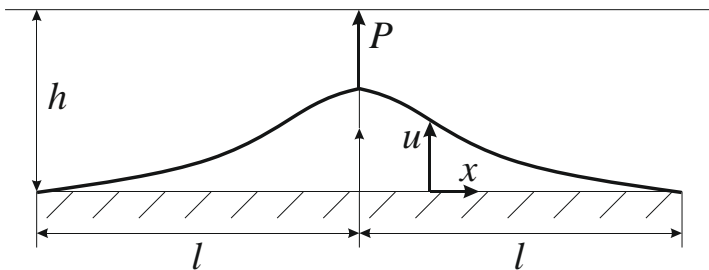


Рис. 1

Предположим, что подъем трубы сосредоточенной силой P не превышает глубины h , форма изгиба u является полой кривой, угол поворота осевой линии мал по сравнению с единицей, поперечное сечение остается круговым и перпендикулярным к осевой линии. Гидродинамические силы на трубе, возникающие в результате ее обтекания водой, а также скорость течения транспортируемой среды не учитываются.

Труба может состоять из одного слоя, двух и трех концентрических слоев. В последнем случае средним слоем является бетонный цилиндр, третьим – внешняя тонкостенная оболочка. В случае двухслойной трубы распределенная поперечная сила на единицу длины q и изгибная жесткость D определяются по формулам

$$q = q_0 + q_g - q_f, \quad D = E_1 J_1 + E_2 J_2,$$

где q_0 и q_g – веса трубы и транспортируемой среды на единицу длины, q_f – подъемная сила воды, E_1 и E_2 – модули упругости материалов внутренней и внешних слоев трубы, J_1 и J_2 – моменты инерций относительно осей внутреннего и внешних слоев трубы.

В указанных предположениях относительно изгиба u в стационарном случае, т.е. $u = u(x)$, получено д.у.

$$D \frac{d^4 u}{dx^4} = -q, \quad 0 < x < l. \quad (1)$$

Ввиду симметрии системы (см. рис. 1) граничные условия имеют вид

$$u'(0) = 0, \quad Du'''(0) = \frac{P}{2}, \quad (2)$$

$$u(l) = u'(l) = 0. \quad (3)$$

Общее решение д.у. (1) определяется по формуле

$$u(x) = -\frac{q}{24D}x^4 + C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3, \quad (4)$$

где C_i , $i = \overline{0,3}$, – произвольные постоянные. Удовлетворив общее решение (4) граничным (2) и (3), найдем постоянные

$$C_0 = -\frac{ql^4}{24D} + \frac{Pl^3}{24D}, \quad C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{ql^2}{12D} - \frac{Pl}{8D}, \quad C_3 = \frac{P}{12D}.$$

Тогда решение прямой задачи (1) – (3) определяется по формуле

$$u(x) = -\frac{q}{24D}x^4 + \frac{P}{12D}x^3 + \left(\frac{ql^2}{12D} - \frac{Pl}{8D}\right)x^2 - \frac{ql^4}{24D} + \frac{Pl^3}{24D}, \quad (5)$$

где постоянные q , P , D и l известны.

Однако в случае обратной задачи из решения (5) при заданных значениях q , D и P нельзя найти изгиб $u(x)$, так как неизвестна длина $2l$ поднятой части трубопровода.

Для определения l можно исходить из выражения полной потенциальной энергии системы

$$\Pi = \frac{D}{2} \int_0^l (u''(x))^2 dx + q \int_0^l u(x) dx - \frac{P}{2} u(0).$$

Подставляя сюда функцию (5), получим

$$\begin{aligned} \Pi &= -\frac{P^2 l^3}{96D} + \frac{Pql^4}{48} - \frac{1}{90} q^2 l^5 = \\ &= \frac{l^3}{96D} \left(-P^2 + 2Pql - \frac{16}{15} q^2 l^2 \right). \end{aligned}$$

Из условия экстремума $\frac{d\Pi}{dl} = 0$, т.е. минимизации потенциальной энергии, найдем уравнение

$$l^2 - \frac{3P}{2q}l + \frac{9}{16} \frac{P^2}{q^2} = \left(l - \frac{3}{4} \frac{P}{q} \right)^2 = 0.$$

Отсюда уже получим значение

$$l = \frac{3P}{4q}. \quad (6)$$

Значение l по формуле (6) можно найти из условия: при какой длине достигается максимум подъема u_0 трубы стрелой, т.е. из экстремума функции $u_0 = u(0)$ от l ,

$$\frac{du(0)}{dl} = \frac{l^2}{24D}(3P - 4ql) = 0.$$

Более простым является условие равновесия трубопровода, когда участок его под силой P в точке $x = 0$ поднят до уровня $u_0 = u(0)$, в частности до поверхности водоема h . Из (5) найдем

$$P = \frac{24Du_0}{l^3} + ql. \quad (7)$$

Отсюда видно, что часть силы P идет на преодоление реакции изгибной жесткости при поднятии до уровня u_0 , а другая часть – на преодоление половины веса трубопровода длиной $2l$. Минимальное потребное значение силы P определяется из условия экстремума

$$\frac{dP}{dl} = 0.$$

Подставляя сюда (7), найдем

$$l = \left(\frac{72Du_0}{q} \right)^{1/4}. \quad (8)$$

Из формулы (8) следует, что чем больше изгибная жесткость D и высота подъема u_0 , меньше вес трубопровода, тем больше длина его поднятой части.

Значение сосредоточенной силы P найдем через исходные параметры, если длину l по формуле (8) подставим в (7):

$$P = \frac{4}{3} \left(72Dq^2u_0 \right)^{1/4}. \quad (9)$$

Таким образом, в данной обратной задаче определены длина l и сосредоточенная сила P соответственно по формулам (8)

и (9). После этого изгиб трубы находится по формуле (5). Здесь дополнительным условием является

$$u(0) = u_0.$$

Подчеркнем, что при учете указанных выше допущений д.у. (1) заменяется более сложным нелинейным уравнением

$$Du^{IV}(x) + \left[\alpha + \mu u(x) - \eta \int_0^l u'^2(x) dx \right] u''(x) - \beta u(x) = -q,$$

где α , μ , η и β – известные постоянные. Задача также усложняется, когда подъем осуществляется не одной, а несколькими сосредоточенными силами.

Отметим, данная глава написана на основании учебных пособий [7, см. гл. 1, § 2; гл. 2, §§ 1–3], [11, гл. 1; гл. 6, § 6.1, 6.2] и научной статьи [10].

ГЛАВА 3. ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В этой главе рассмотрены вопросы, связанные с явлениями бифуркаций в решениях д.у., описывающие различные критические ситуации. Особенно важное прикладное значение имеет динамическая бифуркация – бифуркация рождения предельного цикла. Также целью данной главы является ознакомление с явлением возникновения хаоса в решениях динамической системы на основе понятия аттрактора и странного аттрактора Лоренца.

В теории д.у. важную роль играют специальные функции, возникающие в приложениях математики. Здесь излагаются сведения об эллиптических функциях Якоби, с помощью которых выражаются решения некоторых нелинейных д.у. Они являются обобщениями хорошо известных тригонометрических функций. С эллиптическими функциями тесно связаны функции Вейерштрасса, они также являются решениями нелинейных д.у. Показаны их применения при решении колебательных задач.

§ 9. Явление бифуркации в решениях уравнений

Термин «бифуркация» или родственные ему термины «ветвление», «разветвление» применяются в случаях, когда семейство объектов (процессов) зависит от числового или функционального параметра, при переходе этого параметра через некоторое его значение (которое называется точкой бифуркации) поведение объекта резко меняется качественно и количественно.

Сказанное демонстрируем на следующих примерах.

1. Рассмотрим алгебраическое уравнение $x^4 - \lambda x^2 = 0$ с вещественным параметром $\lambda \in \mathbb{R}$ и неизвестным $x \in \mathbb{R}$.

Данное уравнение при $\lambda < 0$ имеет только нулевое решение $x = 0$ кратности 2. Когда $\lambda = 0$, имеем решение $x = 0$ кратности 4. При $\lambda > 0$ уравнение имеет не только нулевое решение $x = 0$ кратности 2, но и два новых решения $x = \sqrt{\lambda}$, $x = -\sqrt{\lambda}$. Как видим, при переходе параметра λ от отрицательных значений к положительным появляются два новых ненулевых решения. Следовательно, точка $\lambda = 0$ является точкой бифуркации данного уравнения.

2. Рассмотрим матрицу $A - \lambda E$ порядка n с вещественными элементами, где E – единичная матрица, λ – вещественный па-

раметр. Каждое собственное значение матрицы A является точкой бифуркации данного семейства матриц. В самом деле, если λ является собственным значением матрицы A , то определитель $\det(A - \lambda E) = 0$, если же λ не является собственным значением, то $\det(A - \lambda E) \neq 0$. Или по-другому. Рассмотрим матричное уравнение $Ax - \lambda x = 0$. Оно имеет лишь нулевое решение, если λ не является собственным значением матрицы A . Если же λ является собственным значением, то данное уравнение имеет ненулевые решения.

3. Рассмотрим д.у. первого порядка с вещественным параметром λ

$$\frac{dx}{dt} = \lambda - x^2. \quad (1)$$

При $\lambda < 0$ д.у. (1) не имеет положений покоя или равновесия. При $\lambda = 0$ положением равновесия является точка $x = 0$. Решение д.у. (1) с начальным условием $x(0) = x_0$ имеет вид

$$x(t) = \frac{x_0}{1 + t x_0}.$$

Отсюда видно, что положение равновесия асимптотически неустойчиво. При $\lambda > 0$ д.у. (1) имеет два положения равновесия $x = \sqrt{\lambda}$ и $x = -\sqrt{\lambda}$. Первое из них устойчиво, а второе неустойчиво. Как видим, при возрастании параметра λ от отрицательных значений к положительным при переходе через $\lambda = 0$ возникают два новых положения равновесия.

4. Рассмотрим динамическую систему

$$\frac{dx}{dt} = x + \lambda y, \quad \frac{dy}{dt} = x - y. \quad (2)$$

Соответствующее характеристическое уравнение имеет корни $k_1 = \sqrt{1 + \lambda}$, $k_2 = -\sqrt{1 + \lambda}$. При $\lambda > -1$ корни действительные и разного знака, поэтому особая точка $(0, 0)$ системы (2) является седлом. При $\lambda < -1$ корни k_1 и k_2 чисто мнимые, тогда особая точка $(0, 0)$ является центром.

Когда $\lambda = -1$, правые части системы (2) совпадают, тогда прямая $x = y$ сплошь состоит из особых точек. Поскольку при

$y = x$ производная $\frac{dy}{dx} = 1$, то траекториями системы (2) при $\lambda = -1$ будут прямые $y = x + C$, где C – произвольная постоянная.

В данном случае значение $\lambda = -1$ является единственной точкой бифуркации системы (2).

5. Рассмотрим д.у. движения тела единичной массы под действием линейных пружин в среде линейных трений, т.е. уравнение вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + \lambda x = 0,$$

соответствующая ему динамическая система имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\lambda x - y. \quad (3)$$

Характеристическое уравнение имеет корни

$$k_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4\lambda}}{2}, \quad k_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4\lambda}}{2}.$$

При $\lambda < 0$ корни k_1 и k_2 действительны и разных знаков. Тогда особая точка $(0, 0)$ является седлом. Когда $\lambda = 0$, все точки прямой $y = 0$ являются особыми точками системы (3). В этом случае $\frac{dy}{dx} = -1$, поэтому траекториями системы будут прямые $y = -x + C$, C – произвольная постоянная. Следовательно, $\lambda = 0$ является точкой бифуркации системы (3).

При $0 < \lambda < \frac{1}{4}$ корни k_1 и k_2 вещественные и одного знака.

Тогда особая точка $(0, 0)$ является узлом. Когда $\lambda = \frac{1}{4}$, корни

$k_1 = k_2 = -\frac{1}{2}$. В этом случае особая точка $(0, 0)$ является вырожденным узлом.

При $\lambda > \frac{1}{4}$ корни k_1 и k_2 являются комплексно-сопряженными с действительной частью, отличной от нуля. Тогда

особая точка $(0, 0)$ является фокусом. Таким образом, система (3)

имеет две точки $\lambda = 0$ и $\lambda = \frac{1}{4}$ бифуркации.

6. Рассмотрим пример бифуркации рождения предельного цикла.

В предыдущих примерах рассмотрели бифуркацию в решениях уравнений и выяснили, что при прохождении параметра λ через точку бифуркации происходит изменение характера решений. Здесь рассмотрим пример динамической системы, когда при прохождении в окрестности особой точки может появиться (родиться) предельный цикл.

Пусть на плоскости задана динамическая система с вещественным параметром $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \lambda x - y - x(x^2 + y^2), \\ \frac{dy}{dt} &= x + \lambda y - y(x^2 + y^2). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь удобно перейти в полярные координаты $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Первое уравнение системы (4) умножим на x , а второе на y , полученные уравнения сложим. Тогда получим д.у. относительно r

$$\frac{dr}{dt} = r(\lambda - r^2). \quad (5)$$

Далее первое уравнение умножим на y , второе на x и полученные уравнения сложим. В результате получим д.у. относительно $\varphi = \arctg \frac{y}{x}$:

$$\frac{d\varphi}{dt} = 1. \quad (6)$$

Решение д.у. (5) с начальным условием $r(0) = r_0$ при $\lambda \neq 0$ определяется по формуле

$$r(t, r_0) = \frac{r_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{r_0^2}{\lambda}\right) e^{-2\lambda t} + \frac{r_0^2}{\lambda}}}, \quad (7)$$

а решение д.у. (6) с начальным условием $\varphi(0) = \varphi_0$ имеет вид

$$\varphi(t, \varphi_0) = t + \varphi_0.$$

Корни характеристического уравнения линеаризованной системы

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x - y, \quad \frac{dy}{dt} = x + \lambda y$$

равны $\lambda \pm i$. При $\lambda \neq 0$ начало координат $(0, 0)$ как особая точка является фокусом, а при $\lambda = 0$ – центром.

Если $\lambda < 0$, то при $t \geq 0$ подкоренное выражение в (7) положительно и при $t \rightarrow +\infty$ функция $r(t, t_0) \rightarrow 0$. Следовательно, при $\lambda < 0$ д.у. (5) имеет единственное положение равновесия $r = 0$. Для системы (4) все траектории, как спирали, накручиваются на особую точку $(0, 0)$, так как при $\lambda < 0$ производная $\frac{dr}{dt} < 0$.

Если $\lambda = 0$, то

$$r(t, r_0) = \frac{r_0}{\sqrt{1 + 2t r_0^2}} \quad (8)$$

и д.у. (5) при $\lambda = 0$ все еще имеет единственное положение равновесия $r = 0$. При этом фазовый портрет такой же.

Если $\lambda > 0$, то д.у. (5) имеет еще одно положение равновесия $r(t) = \sqrt{\lambda}$. Для исходной системы (4) соответствующая траектория есть окружность $x^2 + y^2 = \lambda$. Эта траектория является устойчивым предельным циклом, так как при $r > \sqrt{\lambda}$ производная $\frac{dr}{dt} < 0$. По-прежнему подкоренное выражение в (7) положительно при всех $t \geq 0$ и $\lambda > 0$ и $r(t, r_0) \rightarrow \sqrt{\lambda}$ при $t \rightarrow +\infty$.

При $\lambda > 0$ начало координат для системы (4) является неустойчивым фокусом, так как при $0 < r < \sqrt{\lambda}$ производная $\frac{dr}{dt} > 0$.

На рисунках 2 – 4 указаны фазовые портреты траекторий. На рис. 4 предельный цикл указан пунктиром. При этом внешние тра-

ектории также являются спиралями, накручивающимися на предельный цикл снаружи.

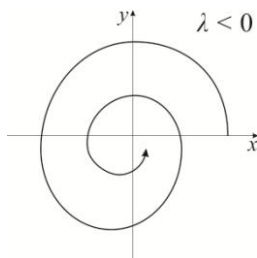


Рис. 2

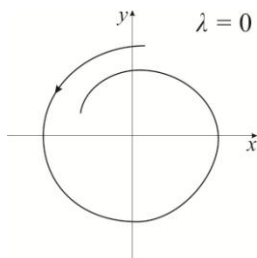


Рис. 3

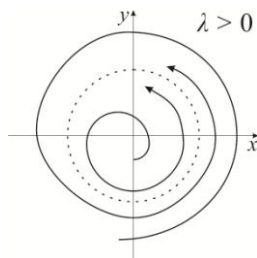


Рис. 4

Таким образом, на основании формул (7) и (8) можно сделать следующие важные заключения.

1. Если $\lambda < 0$, то решение $r(t, r_0) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, т.е. стремится к единственному устойчивому положению равновесия.

2. Если $\lambda = 0$, то ситуация аналогична случаю $\lambda > 0$. Разница состоит лишь в том, что при $\lambda > 0$ стремление траекторий при $t \rightarrow +\infty$ к положению равновесия происходит с экспоненциальной скоростью, а в данном – со степенной.

3. Когда $\lambda > 0$, ситуация совершенно иная. Положение равновесия $r = 0$ становится неустойчивым фокусом. При $t \rightarrow +\infty$ решение $r(t, r_0) \rightarrow \sqrt{\lambda}$, т.е. $r(t, r_0)$ стремится к устойчивому положению равновесия $r = \sqrt{\lambda}$ с экспоненциальной скоростью. Наблюдается плавный по λ переход от неустойчивого положения равновесия $r = 0$ к рождающемуся устойчивому предельному циклу $r = \sqrt{\lambda}$ с растущей амплитудой при росте λ .

4. Если параметр λ меняется от положительных значений к отрицательным, то предельный цикл плавно переходит в устойчивое положение равновесия $r = 0$, т.е. при $\lambda \rightarrow 0$ амплитуда предельного цикла стремится к нулю и он исчезает.

Бифуркация рождения предельного цикла была открыта Пуанкаре, строгое доказательство соответствующей теоремы было приведено Андроновым и обобщено Хопфом. Приведем достаточные условия для динамической системы

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y, \lambda), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y, \lambda), \quad (9)$$

при выполнении которых имеет место бифуркация Андронова–Хопфа.

Теорема. Пусть точка $(0, 0)$ является особой точкой системы (9) при всех значениях параметра λ , корни $k_1(\lambda)$ и $k_2(\lambda)$ характеристического уравнения, соответствующего линеаризованной системе системы (9), являются чисто мнимыми при $\lambda = \lambda_0$, и реальные части равны $\operatorname{Re} k_1(\lambda) = \operatorname{Re} k_2(\lambda)$, $\frac{d}{d\lambda}(\operatorname{Re} k_1(\lambda))\big|_{\lambda=\lambda_0} > 0$, особая точка $(0, 0)$ асимптотически устойчива при $\lambda = \lambda_0$.

Тогда

1) значение $\lambda = \lambda_0$ является точкой бифуркации системы (9);

2) существует интервал (λ_1, λ_0) , $\lambda_1 < \lambda_0$, такой, что при $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_0)$ особая точка $(0, 0)$ является устойчивым фокусом;

3) существует интервал (λ_0, λ_2) , $\lambda_0 < \lambda_2$, такой, что при $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_2)$ особая точка $(0, 0)$ – неустойчивый фокус, окруженный предельным циклом, размеры которого увеличиваются при росте λ .

Приведем пример на применение данной теоремы. Рассмотрим динамическую систему

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \lambda x - 2y - 2x(x^2 + y^2), \\ \frac{dy}{dt} &= 2x + \lambda y - y(x^2 + y^2). \end{aligned} \quad (10)$$

Для системы (10) начало координат $(0, 0)$ является особой точкой при всех λ . Линеаризованная система системы (10) имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x - 2y, \quad \frac{dy}{dt} = 2x + \lambda y.$$

Соответствующее характеристическое уравнение имеет комплексно-сопряженные корни $k_1(\lambda) = \lambda + 2i$, $k_2(\lambda) = \lambda - 2i$. Отсюда видим, что $k_1(0) = 2i$, $k_2(0) = -2i$, $\operatorname{Re} k_1(\lambda) = \operatorname{Re} k_2(\lambda) = \lambda$, $\frac{d}{dx}(\operatorname{Re} k_1(\lambda))\Big|_{\lambda=0} = 1 > 0$.

Далее, рассмотрим функцию Ляпунова $v(x, y) = x^2 + y^2$. Вдоль любого решения системы (10)

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 2\lambda(x^2 + y^2) - 2(2x^2 + y^2)(x^2 + y^2).$$

При $\lambda = 0$ производная $\frac{dv}{dt} < 0$, это означает, что точка $(0, 0)$ асимптотически устойчива. Следовательно, все условия теоремы выполнены, точка $\lambda = 0$ является точкой бифуркации для системы (10).

Отметим, что данный параграф написан на основе книг [30, с. 206–211], [3, § 2.18–2.19, с. 192–200].

§ 10. Аттракторы в динамических системах. Аттрактор Лоренца

В математической литературе имеется несколько определенных термина «аттрактор». Здесь под аттрактором (attract – привлекать, притягивать) будем понимать ограниченное, замкнутое подмножество фазового пространства динамической системы, все траектории из некоторой окрестности которого стремятся к нему же при $t \rightarrow +\infty$.

Сначала рассмотрим поведение фазовых траекторий консервативных систем, где сумма кинетической и потенциальной энергий постоянна. Примером является д.у. гармонического осциллятора

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \tag{1}$$

где ω – положительная постоянная. Решение д.у. (1) с начальными условиями $x(0) = x_0$, $x'(0) = x_1$ определяется по формуле

$$x(t) = A \sin(\omega t + \omega_0), \tag{2}$$

где

$$A = \frac{1}{\omega} \sqrt{\omega^2 x_0^2 + x_1^2}, \quad \omega_0 = \arcsin \frac{\omega x_0}{\sqrt{\omega^2 x_0^2 + x_1^2}}.$$

Функция (2) описывает гармонические колебания с постоянной круговой частотой ω и периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Как видим, амплитуда A и фаза ω_0 зависят от начальных данных x_0 и x_1 . Их малое изменение приводит к малому изменению решения (2) на всей временной полуоси $t: 0 \leq t \leq +\infty$.

Для описания многих явлений и процессов в физике, технике, биологии и других областях линейных моделей недостаточно. Начала развиваться теория нелинейных колебаний. Примером такого типа колебаний является движение простого маятника, д.у. которого в среде без сопротивления и при отсутствии внешних сил имеет вид

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \omega^2 \sin \varphi = 0, \quad (3)$$

где φ – угол отклонения от положения равновесия, $\omega^2 = mg/l$, m – масса маятника длины l , g – ускорение свободного падения. При малых углах φ ($\sin \varphi \approx \varphi$) д.у. (3) переходит в д.у. (1), где период колебаний не зависит от амплитуды. При немалых углах $\varphi < \pi$ период колебаний уже зависит от амплитуды и может быть выражен рядом [12]

$$T = T_0 \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \sin^4 \frac{\varphi}{2} + \dots \right), \quad (4)$$

где $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$. Если теперь в формуле (4) ограничиться первыми

двумя членами и положить $\sin \frac{\varphi}{2} \approx \frac{\varphi}{2}$, то получим приближенное значение периода

$$T = T_0 \left(1 + \frac{\varphi^2}{16} \right),$$

т.е. чем больше начальное отклонение, тем больше период. Например, когда маятник колеблется с амплитудой 90° , период будет равен $T = 1,54T_0$.

Д.у. (1) и (2) являются частными случаями д.у.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + f(x) = 0, \quad (5)$$

где m – масса тела, движение (смещение) которого обозначено через $x = x(t)$.

Д.у. (1), (2) и (5) описывают движение консервативных систем с одной степенью свободы, так как полная энергия колебательной системы постоянна. Покажем это. От д.у. (5) перейдем к динамической системе

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{f(x)}{m}. \quad (6)$$

Отсюда, исключая время t , имеем

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f(x)}{my}. \quad (7)$$

Здесь, разделяя переменные и интегрируя, получим равенство

$$\frac{m}{2} y^2 - \frac{m}{2} y_0^2 = -\int_{x_0}^x f(\xi) d\xi,$$

где $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, которое перепишем в виде

$$\frac{1}{2} my^2 + \int_0^x f(\xi) d\xi = \frac{1}{2} my_0^2 + \int_0^{x_0} f(\xi) d\xi. \quad (8)$$

Поскольку $\frac{1}{2} my^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$, что выражает кинетическую энергию динамической системы (6), а формула

$$\Pi(x) = \int_0^x f(\xi) d\xi$$

выражает потенциальную энергию системы. Следовательно, равенство (8) выражает закон сохранения полной энергии

$$\frac{1}{2} my^2 + \Pi(x) = E, \quad (9)$$

где

$$E = \frac{1}{2} m y_0^2 + \Pi(x_0).$$

Уравнение (9) представляет собой уравнение фазовых траекторий. Различным значениям E на фазовой плоскости соответствуют различные интегральные кривые постоянной энергии. Особыми точками будут точки $(x_0, 0)$, где x_0 – корни уравнения $f(x) = 0$, они будут точками равновесия динамической системы (6). Из уравнения (9) следует, что траектории симметричны относительно оси Ox .

Периодическое колебательное движение консервативной системы определяется значением полной энергии E , которая зависит от начальных условий $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$. На фазовой плоскости $(x, x') = (x, y)$ этим периодическим движениям соответствуют замкнутые траектории. Такая картина на фазовой плоскости соответствует окрестности особой точки типа центр. Следовательно, у консервативных систем (1), (3), (5) нет аттрактора, так как не существует траекторий, притягивающих к себе соседние.

Рассеяние (диссипация) энергии, обусловленное наличием потери энергии, существенно меняет характер движения системы. Если в д.у. (1), (3), (5) ввести слагаемое, соответствующее потере энергии в системе с вязким трением, то начало координат на фазовой плоскости превратится в устойчивый фокус – единственное устойчивое состояние равновесия. Независимо от начальных условий в системе будут наблюдаться затухающие колебания или аperiodические движения к началу координат [22, гл. 3, § 17], т.е. в неконсервативной системе есть притягивающее состояние (аттрактор) в виде устойчивого состояния равновесия. Кроме этого, в задачах о колебаниях нелинейных неконсервативных систем, описываемых д.у. вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = 0, \quad (10)$$

важную роль играют замкнутые изолированные траектории на фазовой плоскости, которые называются предельными циклами. Наличие устойчивого предельного цикла свидетельствует о том, что в системе возможно установление незатухающих периодических колебаний. Амплитуда и период таких колебаний зависят только от факта принадлежности начальных условий определенности облас-

ти фазового пространства, которое определяется значениями параметров системы. Такие периодические движения А.А. Андронова^{*)} назвал автоколебаниями [4]. Автоколебательные системы могут при некоторых значениях своих фазовых координат получать порцию энергии, расходуемой на остальной части колебательного цикла. Классическим примером нелинейной колебательной системы, обладающей предельным циклом, является д.у. Ван дер Поля [16]

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + \omega^2x = 0. \quad (11)$$

Известная теорема Пуанкаре–Бендиксона утверждает, что единственно возможные виды изолированных, ограниченных стационарных движений в системах, описываемых д.у. (10) и (11), – это либо состояния равновесия (покоя), либо предельные циклы. Эти два вида асимптотически устойчивых стационарных движений являются простейшими аттракторами, притягивающими к себе множествами.

В 70-х годах двадцатого столетия было обнаружено, что в нелинейных автономных детерминированных системах третьего и более порядка могут возникать нерегулярные колебания, напоминающие случайные. Тем самым в науке вошло понятие «детерминированный хаос». Также системы были названы хаотическими, а их притягивающие множества, в отличие от положений покоя и предельного цикла, были названы странными аттракторами. Причиной появления хаотических движений является существенная нелинейность динамической системы, которая обуславливает различные свойства ее решений в локальных окрестностях состояний покоя и при достаточно большом удалении от них.

Рассмотрим классический пример системы, обладающей хаотическим движением, аттрактор Лоренца [15]. В 1963 году специалист по физике атмосферы Е.Н. Лоренц из Массачусетского технологического института предложил достаточно простое описание тепловой конвекции в атмосфере, которое, как выяснилось, стало моделью для изучения турбулентности и решения вопроса о том, возможен ли долгосрочный прогноз погоды. Система Лоренца в безразмерном виде имеет вид

$$\frac{dx_1}{d\tau} = \sigma(x_2 - x_1),$$

^{*)} Андронов Александр Александрович (11.04.1901 – 31.10.1952) – советский физик, механик и математик.

$$\frac{dx_2}{d\tau} = rx_1 - mx_2 - x_1x_3, \quad (12)$$

$$\frac{dx_3}{d\tau} = -bx_3 + x_1x_2,$$

где $\sigma = \frac{\nu}{k}$ – число Прандтля – это отношение коэффициента кинематической вязкости ν к коэффициенту теплопроводности k ,

$r = \frac{Ra}{Ra_c}$ – нормированное число Рэлея, $Ra = \frac{g\beta H^3 \Delta T}{k\nu}$ – число Рэлея, g – гравитационная постоянная, β – коэффициент теплового расширения, $b = \frac{4}{1+a^2}$, безразмерное время $\tau = \frac{\pi(1+a^2)kt}{H^2}$,

ΔT – разность температур, H – толщина жидкости, ограниченной двумя горизонтальными плоскостями T_0 и $T_0 + \Delta T$ в гравитационном поле, коэффициент $a = \frac{H}{L}$, L – длина конвекционной ячейки.

Отметим, что в исходной работе Лоренца были приняты следующие числовые значения параметров системы (12): $\sigma = 10$,

$$b = \frac{8}{3}, \quad m = 1.$$

Основные свойства решений системы д.у. Лоренца (12)

1. Замена переменных x_1, x_2, x_3 на $-x_1, -x_2, -x_3$ не меняет вида уравнений системы (12), следовательно, траектории решений симметрично расположены относительно оси Ox_3 .

2. Область, где расположен аттрактор Лоренца, ограничена. Введем функцию Ляпунова $\nu(x_1, x_2, x_3)$ как величину квадрата длины радиуса-вектора от точки (x_1, x_2, x_3) до точки $(0, 0, \sigma + r)$:

$$\nu(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - \sigma - r)^2.$$

На решениях системы (12)

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{dv}{dx_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{dv}{dx_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{dv}{dx_3} \frac{dx_3}{dt} = \\ &= -2\sigma x_1^2 - 2mx_2^2 - 2bx_3^2 + 2b(\sigma + r)x_3 = \\ &= -2\sigma x_1^2 - 2mx_2^2 - 2b\left(x_3 - \frac{\sigma + r}{2}\right)^2 + b\left(\frac{\sigma + r}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Область G , где $\frac{dv}{dt} > 0$, ограничена поверхностью эллипсоида. Вне этой области $\frac{dv}{dt} < 0$. Рассмотрим сферу S : $v(x_1, x_2, x_3) = R^2$ с таким большим радиусом R , чтобы внутри нее лежал эллипсоид G . Тогда на сфере $\frac{dv}{dt} < 0$, т.е. функция v убывает с течением времени. Это означает, что все траектории, пересекающие сферу S , идут внутрь ограниченной ею области. Поэтому аттрактор должен располагаться внутри сферы S .

3. Диссипативность системы (12). Рассмотрим множество областей, где расположены начальные условия траекторий решений системы (12). Обозначим через A_0 начальный объем этого множества областей. Тогда во времени объем будет меняться по закону

$$A = A_0 e^{\alpha t}, \quad \alpha = \operatorname{div} \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt} \right) = -(m + b + a) < 0.$$

Это значит, траектории, начавшиеся во всех областях этого множества, должны оказаться внутри ограниченной области.

4. Состояния равновесия системы (12) определяются как решения алгебраической системы уравнений

$$\begin{cases} \sigma(x_2 - x_1) = 0, \\ rx_1 - mx_2 - x_1x_3 = 0, \\ -bx_3 + x_1x_2 = 0. \end{cases} \quad (13)$$

При любых значениях параметров σ , r , m и b система (13) имеет нулевое решение

$$\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = \tilde{x}_3 = 0. \quad (14)$$

При $r > m$ существуют еще два решения:

$$\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = \sqrt{b(r-m)}, \quad \tilde{x}_3 = r-m, \quad (15)$$

$$\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = -\sqrt{b(r-m)}, \quad \tilde{x}_3 = r-m. \quad (16)$$

Для исследования устойчивости состояний покоя (14) – (16) найдем линейную систему, соответствующую системе (12). Для этого в (12) введем замену переменных

$$x_1 = \tilde{x}_1 + y_1, \quad x_2 = \tilde{x}_2 + y_2, \quad x_3 = \tilde{x}_3 + y_3,$$

и пренебрегаем произведениями x_1x_3 , x_1x_2 . Тогда получим

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = \sigma(y_2 - y_1), \\ \frac{dy_2}{dt} = (r - \tilde{x}_3)y_1 - my_2 - \tilde{x}_1y_3, \\ \frac{dy_3}{dt} = \tilde{x}_2y_1 + \tilde{x}_1y_2 - by_3. \end{cases} \quad (17)$$

Отсюда в окрестности нулевого решения (14) получим

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = \sigma(y_2 - y_1), \\ \frac{dy_2}{dt} = ry_1 - my_2, \\ \frac{dy_3}{dt} = -by_3. \end{cases} \quad (18)$$

В окрестности решений (15) и (16) система (17) принимает вид

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = \sigma(y_2 - y_1), \\ \frac{dy_2}{dt} = m(y_1 - y_2) \pm \sqrt{b(r-m)}y_3, \\ \frac{dy_3}{dt} = \pm \sqrt{b(r-m)}y_1 \pm \sqrt{b(r-m)}y_2 - by_3. \end{cases} \quad (19)$$

Характеристические уравнения линейных систем (18) и (19) имеют вид

$$\Delta(k) = a_0 k^3 + a_1 k^2 + a_2 k + a_3 = 0. \quad (20)$$

По критерию Рауса–Гурвица [22, гл. 3, § 13] действительные части всех корней соответствующих характеристических уравнений (20) будут отрицательными, если

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0. \quad (21)$$

Для решения (14) характеристическое уравнение (20) принимает вид

$$\Delta(k) = (k + b)(k^2 + (\sigma + m)k + \sigma(m - r)) = 0. \quad (22)$$

Для этого уравнения условия (21) выполняются при $0 < r < m$.

Для решений (15) и (16) уравнение (20) имеет вид

$$\Delta(k) = k^3 + (\sigma + b + m)k^2 + b(\sigma + r)k + 2b\sigma(r - m) = 0. \quad (23)$$

При $\sigma > 0$, $b > 0$, $m > 0$ и $r > m$ условие (21) равносильно следующему необходимому и достаточному условию асимптотической устойчивости:

$$\sigma(\sigma + b + 3m) + r(m + b - \sigma) > 0. \quad (24)$$

Условие (24) может нарушиться, когда

$$r \geq r^* = \frac{\sigma(\sigma + b + 3m)}{\sigma - m - b}$$

при условии $\sigma > m + b$.

Значения параметра $r = m$, $r = r^*$ соответствуют локальным бифуркациям, так как при переходе этих значений меняется характер траекторий системы (12). Действительно, при $r < m$ уравнение (22) около положения равновесия (14) имеет корни

$$k_1 = -b_1, \quad k_{2,3} = -\frac{\sigma + m}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma + m}{2}\right)^2 - \sigma(m - r)}, \quad (25)$$

которые все отрицательны. Поэтому начало координат (14) является особой точкой типа устойчивый узел.

Значение $r = m$ является точкой локальной бифуркации, так как при $r > m$ один из корней (25) становится положительным и состояние равновесия в начале координат становится неустойчивым седло-узлом и появляются еще два состояния равновесия (15) и (16).

Характеристическое уравнение (23) около положений равновесия (15) и (16) имеет при $r > m$ один действительный корень и пару комплексно-сопряженных корней. Действительный корень k_1

уравнения (23) отрицателен, его абсолютная величина растет с ростом r ; действительная часть комплексно сопряженных корней сначала отрицательна, с ростом r она уменьшается по абсолютной величине (это приводит к все более медленному затуханию колебаний около состояний равновесия) и меняет знак при $r = r^*$. Малая часть корней растет с ростом r , т.е. растет частота колебаний около каждого из состояний равновесия (15) и (16).

Странный аттрактор Лоренца имеет два существенных отличия от обычного аттрактора: траектории такого аттрактора непериодические (они не замыкаются) и неустойчивы (малые отклонения между соседними траекториями нарастают). Из математической теории аттракторов известно, что при сильном возрастании параметра r аттрактор разрушается и появляются периодические колебания, т.е. при больших r система переходит в режим автоколебаний. Уменьшение r приведет к хаосу.

§ 11. Эллиптические функции Якоби и функции Вейерштрасса, связанные с ними нелинейные дифференциальные уравнения

1. Эллиптические функции Якоби и их свойства

Как известно [23, с. 135], тригонометрические функции $\sin x$ и $\cos x$ можно определить как решение начальной задачи для системы

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x), \\ y_2' = -y_1(x), \end{cases} \\ y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 1.$$

Аналогично этому рассмотрим систему из трех нелинейных д.у. [30, с. 231]

$$\begin{cases} y_1' = y_2 y_3, \\ y_2' = -y_1 y_3, \\ y_3' = -k^2 y_1 y_2, \quad 0 < k < 1, \end{cases} \quad (1)$$

с начальными условиями

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 1, \quad y_3(0) = 1. \quad (2)$$

На основании теоремы существования и единственности решения задачи Коши существует единственное решение задачи (1) и (2)

в некоторой окрестности $U(0)$ точки $x = 0$. Решение этой задачи обозначают символами

$$y_1(x) = \operatorname{sn} x, \quad y_2(x) = \operatorname{cn} x, \quad y_3(x) = \operatorname{dn} x. \quad (3)$$

Эти функции называют эллиптическими функциями Якоби. Они зависят от параметра k , называемого модулем эллиптических функций, поэтому часто пишут следующим образом:

$$y_1(x) = \operatorname{sn}(x, k), \quad y_2(x) = \operatorname{cn}(x, k), \quad y_3(x) = \operatorname{dn}(x, k).$$

Система д.у. (1) имеет два независимых первых интеграла

$$y_1^2(x) + y_2^2(x) = C_1, \quad k^2 y_1^2(x) + y_3^2(x) = C_2.$$

Отсюда с учетом начальных условий (2) имеем

$$y_1^2(x) + y_2^2(x) = 1, \quad k^2 y_1^2(x) + y_3^2(x) = 1. \quad (4)$$

Подставляя в равенства (4) сами функции, получим тождества

$$\operatorname{sn}^2 x + \operatorname{cn}^2 x = 1, \quad k^2 \operatorname{sn}^2 x + \operatorname{dn}^2 x = 1. \quad (5)$$

Из тождества (5) следует ограниченность этих функций:

$$|\operatorname{sn} x| \leq 1, \quad |\operatorname{cn} x| \leq 1, \quad k' \leq |\operatorname{dn} x| \leq 1,$$

где $k' = \sqrt{1 - k^2}$ и называется дополнительным модулем эллиптических функций.

Из ограниченности и гладкости эллиптические функции могут быть продолжены с окрестности $U(0)$ на всю числовую прямую \mathbb{R} .

Заметим, что при $k \rightarrow 0$ функции $\operatorname{sn}(x, k) \rightarrow \sin x$ и $\operatorname{cn}(x, k) \rightarrow \cos x$. Поэтому функции $\operatorname{sn} x$ и $\operatorname{cn} x$ являются обобщениями тригонометрических функций $\sin x$ и $\cos x$.

Приведем свойства этих функций. Из системы (1) имеем

$$\operatorname{sn}' x = \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x, \quad \operatorname{cn}' x = -\operatorname{sn} x \operatorname{dn} x, \quad \operatorname{dn}' x = -k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x. \quad (6)$$

Из первого равенства (6) имеем

$$(\operatorname{sn}' x)^2 = \operatorname{cn}^2 x \operatorname{dn}^2 x.$$

Сюда подставим $\operatorname{cn}^2 x$ и $\operatorname{dn}^2 x$ из тождеств (5). Тогда будем иметь

$$y'^2 = (1 - y^2)(1 - k^2 y^2), \quad y = \operatorname{sn} x. \quad (7)$$

Интегрируя данное д.у. с учетом условия $y(0) = 0$, получим

$$\int_0^y \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} = x. \quad (8)$$

Обратной к функции (8): $x = x(y)$ является функция $y = \operatorname{sn} x$.

В интеграле (8) проведем замену $t = \sin \varphi$. Тогда он принимает вид

$$x = \int_0^{\arcsin y} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (8_1)$$

Как известно [5, с. 29], интеграл

$$x = \int_0^{\varphi} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} = F(\varphi, k) \quad (8_2)$$

определяет φ как функцию x . Якоби положил, что $\varphi = \operatorname{am} x$ и принял

$$\operatorname{sn} x = \sin(\operatorname{am} x), \quad \operatorname{cn} x = \cos(\operatorname{am} x).$$

Тогда интеграл (8₁) определяет функцию

$$\arcsin y = \operatorname{am} x.$$

Отсюда

$$y = \sin(\operatorname{am} x) = \operatorname{sn} x.$$

Функцию $F(\varphi, k)$ называют неполным эллиптическим интегралом первого рода, а φ называют амплитудой функции F .

Аналогично можно получить интегральные представления для функций, обратных к функциям $\operatorname{sn} x$ и $\operatorname{dn} x$. На основании тождеств (6) аналогично (7) получим д.у., решениями которых являются эллиптические функции $\operatorname{sn} x$ и $\operatorname{dn} x$:

$$(\operatorname{cn}' x)^2 = (1 - \operatorname{cn}^2 x)(k'^2 + k^2 \operatorname{cn}^2 x), \quad (9)$$

$$(\operatorname{dn}' x)^2 = (1 - \operatorname{dn}^2 x)(\operatorname{dn}^2 x + k'^2). \quad (10)$$

Из системы (1), используя тождества (4), найдем д.у. 2-го порядка

$$y_1'' + (1 + k^2)y_1 - 2k^2 y_1^3 = 0, \quad (11)$$

$$y_2'' + (1 - 2k^2)y_2 + 2k^2 y_2^3 = 0, \quad (12)$$

$$y_3'' + (k^2 - 2)y_3 + 2y_3^3 = 0. \quad (13)$$

Как видим, д.у. (7), (9) – (13) являются нелинейными, решениями которых являются эллиптические функции.

Отметим, что при любом $x \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{sn}(-x) = -\operatorname{sn} x, \quad \operatorname{cn}(-x) = \operatorname{cn} x, \quad \operatorname{dn}(-x) = \operatorname{dn} x, \quad (14)$$

так как функции $\operatorname{sn}(-x)$, $\operatorname{cn}(-x)$ и $\operatorname{dn}(-x)$ являются решениями системы (1) и удовлетворяют тем же начальным условиям (2). Тогда в силу единственности решения задачи Коши получаем равенства (14).

Теперь рассмотрим вопрос о нулях эллиптических функций.

Лемма 1. *Существует наименьшее число $\alpha > 0$ такое, что $\operatorname{ch}\alpha = 0$.*

Доказательство. Допустим, что функция $\operatorname{cn} x$ не имеет нулей при $x \geq 0$. Поскольку $\operatorname{cn} 0 = 1$ и $\operatorname{cn} x$ непрерывна на \mathbb{R} , то она всюду положительна на промежутке $[0, +\infty)$. Из равенства (9) имеем

$$\operatorname{cn}' x = \pm \sqrt{(1 - \operatorname{cn}^2 x)(k'^2 + k^2 \operatorname{cn}^2 x)}.$$

Отсюда $\operatorname{cn}' 0 = 0$ и при $x > 0$ функция $\operatorname{cn} x$ либо строго возрастает, либо строго убывает. Пусть для определенности $\operatorname{cn}' x > 0$ при $x > 0$. Тогда при $x \geq \delta > 0$ на основании теоремы Лагранжа имеем

$$\operatorname{cn} x - \operatorname{cn} \delta = \operatorname{cn}' \theta(x - \delta), \quad \delta < \theta < x,$$

что противоречит ограниченности функции $\operatorname{cn} x$. Следовательно, существует по меньшей мере одно число $\alpha > 0$ такое, $\operatorname{cn} \alpha = 0$. Если среди таких α нет наименьшего, то существует последовательность α_n , для которой $\alpha_n > 0$ и $\operatorname{cn} \alpha_n = 0$ и $\lim \alpha_n = 0$. Тогда в силу непрерывности функции $\operatorname{cn} x$ в точке $x = 0$ получим $\operatorname{cn} 0 = 0$, что противоречит равенству $\operatorname{cn} 0 = 1$. ■

В силу этой леммы из тождеств (5) следует, что $\operatorname{sn}^2 \alpha = 1$, $\operatorname{dn}^2 \alpha = 1 - k^2$. Равенство $\operatorname{sn} \alpha = -1$ невозможно, так как $\operatorname{sn} 0 = 0$ и $\operatorname{sn}' x > 0$ на $[0, \alpha]$, т.е. $\operatorname{sn} \alpha = 1$, аналогично $\operatorname{dn} \alpha = \sqrt{1 - k^2} = k'$.

Лемма 2. *Для эллиптических функций справедливы следующие формулы сложения:*

$$\operatorname{sn}(x + y) = \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} y \operatorname{dn} y + \operatorname{sn} y \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 x \operatorname{sn}^2 y}, \quad (15)$$

$$\operatorname{cn}(x + y) = \frac{\operatorname{cn} x \operatorname{cn} y - \operatorname{sn} x \operatorname{sn} y \operatorname{dn} x \operatorname{dn} y}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 x \operatorname{sn}^2 y}, \quad (16)$$

$$\operatorname{dn}(x+y) = \frac{\operatorname{dn} x \operatorname{dn} y - k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{sn} y \operatorname{cn} x \operatorname{cn} y}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 x \operatorname{sn}^2 y}. \quad (17)$$

Доказательство. Для примера покажем справедливость формулы (15). Предположим, что переменные x и y изменяются так, что их сумма $x+y$ остается постоянной и равной C_1 : $x+y=C_1$. Отсюда следует, что $dx+dy=0$. Обозначим для удобства $S_1 = \operatorname{sn} x$, $S_2 = \operatorname{sn} y$. В силу равенства (11) имеем

$$S_1'' = -(1+k^2)S_1 + 2k^2 S_1^3,$$

$$S_2'' = -(1+k^2)S_2 + 2k^2 S_2^3.$$

Отсюда с учетом равенства (7) имеем

$$\frac{S_1'' S_2 - S_2'' S_1}{S_1'^2 S_2^2 - S_2'^2 S_1^2} = \frac{2k^2 S_1 S_2 (S_1^2 - S_2^2)}{(S_2^2 - S_1^2)(1 - k^2 S_1^2 S_2^2)}$$

или в другом виде

$$(S_1' S_2 - S_2' S_1)^{-1} \frac{d}{dx} (S_1' S_2 - S_2' S_1) = (1 - k^2 S_1^2 S_2^2)^{-1} \frac{d}{dx} (1 - k^2 S_1^2 S_2^2).$$

Интегрируя полученное д.у., имеем

$$\frac{S_1' S_2 - S_2' S_1}{1 - k^2 S_1^2 S_2^2} = C_2 = \text{const}.$$

Заменяя здесь S_1 и S_2 и их производные S_1' и S_2' исходя из обозначений $S_1 = \operatorname{sn} x$, $S_2 = \operatorname{sn} y$ и системы (1), получим

$$\Phi(x, y) = \frac{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \operatorname{sn} y + \operatorname{cn} y \operatorname{dn} y \operatorname{sn} x}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 x \operatorname{sn}^2 y} = C_2. \quad (18)$$

Итак, для д.у. $dx+dy=0$ имеем два интеграла $x+y=C_1$ и (18). По теории д.у. 1-го порядка эти интегралы не могут быть функционально независимыми. Стало быть, функция $\Phi(x, y)$ является функцией от $x+y$, т.е. $\Phi(x, y) = f(x+y)$. Положив $y=0$, видим $\Phi(x, 0) = f(x) = \operatorname{sn} x$. ■

Следствие. Из формул (15) – (17) с учетом (5) вытекают формулы приведения

$$\operatorname{sn}(x \pm \alpha) = \pm \frac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x}, \quad \operatorname{cn}(x \pm \alpha) = -\frac{k' \operatorname{sn} x}{\operatorname{dn} x}, \quad \operatorname{dn}(x \pm \alpha) = \frac{k'}{\operatorname{dn} x}.$$

Лемма 3. *Функции $\operatorname{sn} x$ и $\operatorname{cn} x$ являются периодическими с периодом 4α , а функция $\operatorname{dn} x$ является периодической с периодом 2α .*

Доказательство. Полагая в формулах (15) – (17) последовательно $x = y = \alpha$, $x = \alpha$, $y = 2\alpha$ и $x = y = 2\alpha$, найдем

$$\operatorname{sn} 2\alpha = 0, \quad \operatorname{cn} 2\alpha = -1, \quad \operatorname{dn} 2\alpha = 1;$$

$$\operatorname{sn} 3\alpha = -1, \quad \operatorname{cn} 3\alpha = 0, \quad \operatorname{dn} 3\alpha = \sqrt{1-k^2};$$

$$\operatorname{sn} 4\alpha = 0, \quad \operatorname{cn} 4\alpha = 1, \quad \operatorname{dn} 4\alpha = 1.$$

Отсюда и из формул (15) – (17) следуют равенства

$$\operatorname{sn}(x + \alpha) = \frac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x}, \quad \operatorname{cn}(x + \alpha) = -\frac{\operatorname{sn} x}{\operatorname{dn} x} \operatorname{dn} \alpha, \quad \operatorname{dn}(x + \alpha) = \frac{\operatorname{dn} \alpha}{\operatorname{dn} x};$$

$$\operatorname{sn}(x + 2\alpha) = -\operatorname{sn} x, \quad \operatorname{cn}(x + 2\alpha) = -\operatorname{cn} x, \quad \operatorname{dn}(x + 2\alpha) = \operatorname{dn} x;$$

$$\operatorname{sn}(x + 3\alpha) = -\frac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x}, \quad \operatorname{cn}(x + 3\alpha) = \frac{\operatorname{sn} x}{\operatorname{dn} x} \operatorname{dn} \alpha, \quad \operatorname{dn}(x + 3\alpha) = \frac{\operatorname{dn} \alpha}{\operatorname{dn} x};$$

$$\operatorname{sn}(x + 4\alpha) = \operatorname{sn} x, \quad \operatorname{cn}(x + 4\alpha) = \operatorname{cn} x, \quad \operatorname{dn}(x + 4\alpha) = \operatorname{dn} x. \blacksquare$$

Лемма 4. *При*

1) $0 < x < 2\alpha$ функция $\operatorname{sn} x > 0$ и $2\alpha < x < 4\alpha$ функция $\operatorname{sn} x < 0$;

2) $0 \leq x < \alpha$ и $3\alpha < x \leq 4\alpha$ функция $\operatorname{cn} x > 0$ и $\alpha < x < 3\alpha$ функция $\operatorname{cn} x < 0$;

3) $0 \leq x \leq 2\alpha$ функция $\operatorname{dn} x \geq \sqrt{1-k^2} > 0$.

Из предыдущих свойств следует справедливость данной леммы.

Таким образом, как видим, функции $\operatorname{sn} x$ и $\operatorname{cn} x$ очень близки по свойствам функциям $\sin x$ и $\cos x$.

Остается определить значение постоянной $\alpha > 0$. Выше было получено интегральное представление (8) обратной функции для функции $y = \operatorname{sn} x$. При верхнем пределе $y = 1$ значение этого интеграла принято обозначать числом K , т.е. $\operatorname{sn} K = 1$. Следовательно, за число α примем K :

$$\alpha = K = \int_0^1 (1-t^2)^{-1/2} (1-k^2 t^2)^{-1/2} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} dt. \quad (19)$$

Этот интеграл называют полным эллиптическим интегралом первого рода.

Приведем графики функций $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$ и $\operatorname{dn} x$. Эти функции являются периодическими $4K$ и $2K$ соответственно. Поэтому достаточно построить график для промежутков $0 \leq x \leq 4K$ и $0 \leq x \leq 2K$, затем путем смещений их в направлении оси Ox на величины, кратные $4K$ и $2K$, можно получить весь график этих функций (см. рис. 5).

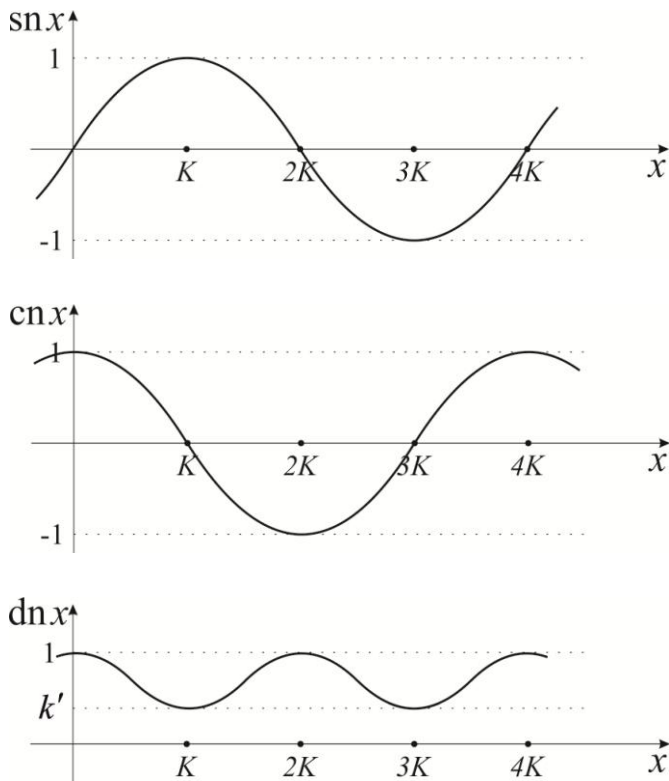


Рис. 5

Отметим, что в силу формулы (19) K зависит от k , здесь $k' = \sqrt{1-k^2}$, графики функций $\operatorname{sn} x$ и $\operatorname{cn} x$ совмещены быть не могут, как у функций $\sin x$ и $\cos x$, так как $\operatorname{sn}(K+x) = \frac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x}$.

Покажем, что если модуль $k=0$ или $k=1$, то эллиптические функции Якоби вырождаются в тригонометрические или в гиперболические.

Действительно, в формуле (8) положим $k=0$:

$$x = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Отсюда следует, что $x = \arcsin y$, т.е. $y = \sin x$. Следовательно, в этом случае

$$\operatorname{sn} x = \sin x, \quad \operatorname{cn} x = \cos x, \quad \operatorname{dn} x = 1.$$

Когда в формуле (8) положим $k=1$, то имеем равенство

$$x = \int_0^y \frac{dt}{1-t^2},$$

из которого находим

$$x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y}.$$

Отсюда имеем

$$y = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \operatorname{th} x,$$

следовательно, в этом случае

$$\begin{aligned} \operatorname{sn} x &= \operatorname{th} x, \\ \operatorname{cn} x &= \sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x}} = \frac{1}{\operatorname{ch} x}, \\ \operatorname{dn} x &= \frac{1}{\operatorname{ch} x}. \end{aligned}$$

2. Обращение определенного интеграла

Обратить интеграл

$$y = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2-2t^4}}. \quad (20)$$

Предварительно перепишем интеграл (20) в виде

$$y = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1+2t^2)}}.$$

Под знаком интеграла произведем замену $t = \sqrt{1-s^2}$:

$$\begin{aligned} y\sqrt{3} &= \int_{\sqrt{1-x^2}}^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)\left(1-\frac{2}{3}s^2\right)}} = \\ &= \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)\left(1-\frac{2}{3}s^2\right)}} - \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)\left(1-\frac{2}{3}s^2\right)}}. \end{aligned}$$

В силу формулы (19) отсюда имеем

$$\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)\left(1-\frac{2}{3}s^2\right)}} = K - y\sqrt{3}. \quad (21)$$

С учетом формулы (8) из равенства (21) имеем

$$\sqrt{1-x^2} = \operatorname{sn}(K - y\sqrt{3}).$$

Отсюда найдем

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2(K - y\sqrt{3})} = \operatorname{cn}(K - y\sqrt{3}) = \\ &= \frac{k' \operatorname{sn} y\sqrt{3}}{\operatorname{dn} y\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{sn} y\sqrt{3}}{\operatorname{dn} y\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Тем самым задача обращения интеграла (20) решена.

3. Свободные колебания маятника

Рассмотрим свободные колебания простого маятника длиной l в среде без сопротивления. Шарик массы m подвешен на конце тонкого стержня (см. [22, гл. 3, § 17].

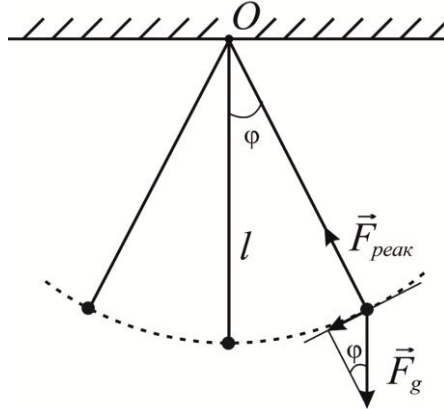


Рис. 6

Такие колебания описываются д.у.

$$ml \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} + mg \sin \varphi = 0,$$

где $\varphi = \varphi(t)$ – угол отклонения маятника от вертикали, или

$$\frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \varphi = -\alpha^2 \sin \varphi, \quad (22)$$

где $\alpha = g/l$. Умножим левую часть д.у. (22) на $\frac{d\varphi(t)}{dt} dt$, а правую

– на $d\varphi$. Учítывая, что $\frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} dt = d\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)$, имеем

$$\frac{d\varphi}{dt} d\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = -\alpha^2 \sin \varphi d\varphi.$$

Интегрируя полученное д.у., получим

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2\alpha^2 \cos \varphi + C, \quad (23)$$

здесь C – произвольная постоянная.

Заметим, что угловая скорость $\frac{d\varphi}{dt} = 0$, когда угол $\varphi = \pm\theta$,

где θ – угол максимального отклонения маятника. Тогда

$$2\alpha^2 \cos \theta + C = 0.$$

Из этого равенства находим постоянную C и подставим в равенство (23)

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2\alpha^2 (\cos \varphi - \cos \theta) = 4\alpha^2 \left(\sin^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}\right).$$

Отсюда, извлекая корень, имеем

$$\frac{d\varphi}{dt} = 2\alpha \sqrt{\sin^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}. \quad (24)$$

В равенстве (24) перед радикалом выбран знак плюс из-за того, что угол φ меняется в пределах $[-\theta, \theta]$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. В правую сторону

от положения равновесия (от вертикали) $\varphi > 0$, а в левую $\varphi < 0$. Тогда при переходе маятника из левой стороны в правую угол φ

возрастает, поэтому $\frac{d\varphi}{dt} > 0$. За начальный момент выбирается

момент перехода через положение равновесия.

Теперь в д.у (24), разделяя переменные и интегрируя, найдем

$$\alpha t = \int_0^{\varphi} \frac{d\tau/2}{\sqrt{\sin^2 \theta/2 - \sin^2 \tau/2}}.$$

Под знаком интеграла произведем замену

$$\sin \frac{\tau}{2} = x \sin \frac{\theta}{2}, \quad \sin \frac{\varphi}{2} = u \sin \frac{\theta}{2}.$$

Тогда интеграл примет вид

$$\alpha t = \int_0^u \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad (25)$$

где $k^2 = \sin^2 \frac{\theta}{2}$. Отсюда уже имеем

$$u = \operatorname{sn}(\alpha t) = \operatorname{sn}\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right)$$

или

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \sin \frac{\theta}{2} \operatorname{sn}\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right). \quad (26)$$

Если в интеграле (25) совершим замену $x = \sin \xi$, то будем иметь

$$t = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\eta} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi}}, \quad (27)$$

где $\eta = \arcsin u$.

Из формулы (24) видно, что угловая скорость $\frac{d\varphi}{dt}$ равна нулю, когда $\varphi = \pm\theta$. Тогда в силу (27) время колебания маятника при переходе от положения $\varphi = -\theta$ до положения $\varphi = \theta$ находится по формуле

$$T = \frac{2}{\alpha} \int_0^{\pi/2} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi}} = \frac{2}{\alpha} K, \quad (28)$$

так как при $\varphi = \theta$ переменная $u = 1$, а $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$.

При малом угле θ , пренебрегая слагаемым $k^2 \sin^2 \xi$, получим известную формулу

$$T = \frac{\pi}{\alpha} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Из формул (26) и (28) следует, что движение маятника периодично с периодом $4 \sqrt{\frac{l}{g}} K$.

4. Функции Вейерштрасса

Рассмотрим интеграл

$$x = \int_y^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2t - g_3}}, \quad (29)$$

определяющий x как от y , где g_2 и g_3 – какие-либо действительные числа. Обозначим через e_1 , e_2 и e_3 корни

$$4t^3 - g_2t - g_3 = 0. \quad (30)$$

Тогда интеграл (29) можно переписать в виде

$$x = \int_y^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{4(t-e_1)(t-e_2)(t-e_3)}}. \quad (31)$$

По аналогии с интегралом (8) обратную к функции (29) называют функцией Вейерштрасса и обозначают символом $y = \wp(x)$ (читают «пе от x » или «пе x »), при этом числа g_2 и g_3 называют ее инвариантами. Из интеграла (29) нетрудно получить д.у., которому удовлетворяет функция $\wp(x)$. Дифференцируя его, имеем

$$dx = -\frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2y - g_3}}.$$

Отсюда получим

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4y^3 - g_2y - g_3$$

или

$$\wp'^2(x) = 4\wp^3(x) - g_2\wp(x) - g_3. \quad (32)$$

Как видно, д.у. (32) является нелинейным.

Обратно, если задано д.у. (32), то можно показать [33, ч. 2, с. 300], что его общим решением будет

$$y = \wp(\pm x + \alpha),$$

где α – постоянная интегрирования. Поскольку $\wp(x)$ – четная функция (это будет показано ниже), то

$$y = \wp(x \pm \alpha).$$

Не теряя общности, общее решение д.у. (32) можно написать в виде

$$y = \wp(x + \alpha).$$

Заметим, что из интеграла (29) следует, что если $y \rightarrow \infty$, то $x \rightarrow 0$, следовательно, α есть полюс функции $\wp(x)$.

Как известно из формулы Кардано, уравнение (30) в зависимости от дискриминанта $\Delta = 27g_3^2 - g_2^3$ имеет разные по характеру корни.

Если $\Delta > 0$, то уравнение (30) имеет два корня мнимые сопряженные и один действительный. Пусть e_2 – действительный, а $e_1 = a + bi$, $e_3 = a - bi$.

Когда $\Delta < 0$, то все три корня уравнения (30) вещественны и различны. Пусть они расположены так:

$$e_3 < e_2 < e_1.$$

В случае $\Delta = 0$ все корни действительны, но среди них имеются два равных.

Во всех случаях справедливы равенства

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0,$$

$$e_1e_2 + e_2e_3 + e_1e_3 = -\frac{g_2}{4},$$

$$e_1e_2e_3 = \frac{g_3}{4}.$$

Пусть $\Delta < 0$. При $y \geq e_1$ интеграл (31) принимает действительные значения. В этом интеграле произведем замену

$$t = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\sin^2 \varphi}, \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

Тогда интеграл (31) примет вид

$$x = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} \int_0^{\varphi(y)} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (33)$$

где

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}, \quad \varphi(y) = \arcsin \left(\frac{e_1 - e_3}{y - e_3} \right)^{1/2}.$$

Отметим, что $0 < k^2 < 1$, так как при $\Delta < 0$: $e_3 < e_2 < e_1$. Интеграл (33) по аналогии с интегралом (8₁) определяет функцию

$$\varphi(y) = \arcsin\left(\frac{e_1 - e_3}{y - e_3}\right)^{1/2} = \operatorname{am}\left(x\sqrt{e_1 - e_3}\right).$$

Отсюда находим y :

$$\frac{e_1 - e_3}{y - e_3} = \sin^2\left(\operatorname{am} x\sqrt{e_1 - e_3}\right) = \operatorname{sn}^2 x\sqrt{e_1 - e_3}$$

или

$$y = \rho(x) = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\operatorname{sn}^2 x\sqrt{e_1 - e_3}}. \quad (34)$$

Таким образом, получена формула (34), выражающая функцию Вейерштрасса через функцию Якоби.

Пусть теперь $\Delta > 0$. В этом случае корни уравнения (30): e_2 – действительный, а $e_1 = a + bi$, $e_3 = a - bi$. Для определенности положим, что $b > 0$. Тогда многочлен из уравнения (30) представляется в виде

$$4t^3 - g_2 t - g_3 = 4(t - e_2)\left[(t - a)^2 + b^2\right]$$

и интеграл (31) примет вид

$$x = \int_y^\infty \frac{dt}{\sqrt{4(t - e_2)\left[(t - a)^2 + b^2\right]}}. \quad (35)$$

В интеграле (35) сделаем замену переменных

$$t = e_2 + H \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2},$$

где

$$H = \sqrt{9a^2 + b^2}, \quad a = -\frac{e_2}{2}, \quad b^2 = \frac{g_3}{4e_2} - \frac{e_2^2}{4}.$$

Тогда получим

$$x = \int_0^{\varphi(y)} \frac{\sqrt{H} d\varphi}{2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \sqrt{H^2 \operatorname{ctg}^4 \frac{\varphi}{2} + 3H e_2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2} + H^2}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\sqrt{H}} \int_0^{\varphi(y)} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^4 \frac{\varphi}{2} + \cos^2 \frac{\varphi}{2} + \frac{3e_2}{H} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos^2 \frac{\varphi}{2}}} = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{H}} \int_0^{\varphi(y)} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \tag{36}
\end{aligned}$$

где

$$k^2 = \frac{1}{2} - \frac{3e_2}{4H}, \quad \varphi(y) = 2 \operatorname{arccctg} \left(\frac{y - e_2}{H} \right)^{1/2}.$$

Отметим, что $0 < k^2 < 1$, так как

$$\frac{|3e_2|}{4H} = \frac{3}{4} \frac{|2a|}{\sqrt{9a^2 + b^2}} = \frac{3|a|}{2\sqrt{9a^2 + b^2}} < \frac{1}{2}.$$

Тогда интеграл (36) определяет функцию

$$\varphi(y) = 2 \operatorname{arccctg} \left(\frac{y - e_2}{H} \right)^{1/2} = \operatorname{am} 2\sqrt{H}x.$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned}
y &= e_2 + H \operatorname{ctg}^2 \frac{1}{2} \operatorname{am} (2x\sqrt{H}) = e_2 + H \frac{1 + \cos \operatorname{am} (2x\sqrt{H})}{1 - \cos \operatorname{am} (2x\sqrt{H})} = \\
&= e_2 + H \frac{1 + \operatorname{cn} 2x\sqrt{H}}{1 - \operatorname{cn} 2x\sqrt{H}}. \tag{37}
\end{aligned}$$

Если $\Delta = 0$, то все корни уравнения (30) действительны и два из них равны между собой, когда g_2 и g_3 не равны нулю. При $g_2 = g_3 = 0$ все корни равны $e_1 = e_2 = e_3 = 0$.

Пусть $e_1 = e_2$, $e_2 \neq e_3$. В этом случае по аналогии с случаем $\Delta < 0$ получаем, что

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = 1,$$

и вычислим интеграл (33) при $k^2 = 1$:

$$x = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} \int_0^{\varphi(y)} \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \frac{1}{2\sqrt{e_1 - e_3}} \ln \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \Big|_0^{\varphi(y)} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{e_1 - e_3}} \ln \frac{1 + A}{1 - A},$$

где $A = \left(\frac{e_1 - e_3}{y - e_3} \right)^{1/2}$. Отсюда находим

$$y = \wp(x) = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\operatorname{th}^2 x \sqrt{e_1 - e_3}}. \quad (38)$$

Пусть $e_2 = e_3 < e_1$. В этом случае $k = 0$ и интеграл (33) равен

$$x = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} \varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} \arcsin \left(\frac{e_1 - e_3}{y - e_3} \right)^{1/2}.$$

Отсюда найдем

$$y = \wp(x) = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\sin^2 x \sqrt{e_1 - e_3}}. \quad (39)$$

Когда $g_2 = g_3 = 0$, все три корня $e_1 = e_2 = e_3 = 0$. Тогда интеграл (31) имеет вид

$$x = \int_y^\infty \frac{dt}{2t^{3/2}} = y^{-1/2},$$

откуда

$$y = \wp(x) = \frac{1}{x^2}. \quad (40)$$

Таким образом, когда $\Delta = 0$, функция Вейерштрасса выражается через элементарные функции (38) – (40).

Далее найдем формулу для вычисления значений функции Вейерштрасса от мнимого аргумента. Для этого в интеграле (29) проведем замену $t = s/\alpha$. Тогда получим

$$\frac{x}{\sqrt{\alpha}} = \int_{y\alpha}^\infty \frac{ds}{\sqrt{4s^2 - \gamma_2 s - \gamma_3}}, \quad (41)$$

где $\gamma_2 = g_2 \alpha^2$, $\gamma_3 = g_3 \alpha^3$. Интеграл (41) определяет функцию

$$y\alpha = \wp\left(\frac{x}{\sqrt{\alpha}}, \gamma_2, \gamma_3\right)$$

или

$$\alpha \wp(x) = \alpha \wp(x, g_2, g_3) = \wp\left(\frac{x}{\sqrt{\alpha}}, \gamma_2, \gamma_3\right). \quad (42)$$

В равенстве (42) положим, что $\alpha = -1$. Тогда имеем

$$-\wp(x, g_2, g_3) = \wp\left(\frac{x}{i}, g_2, -g_3\right).$$

Здесь, полагая $x = i\xi$, где ξ – действительная переменная, найдем

$$\wp(i\xi, g_2, g_3) = -\wp(\xi, g_2, -g_3). \quad (43)$$

Отметим, что перемена знака g_3 в правой части (43) влияет на корни уравнения (30). В случае $\Delta < 0$ все корни e_1, e_2, e_3 перейдут в корни $-e_1, -e_2, -e_3$, при этом $-e_3 > -e_2 > -e_1$, т.е. здесь e_1 и e_3 поменялись ролями. Рассуждая аналогично, как при выводе формулы (34), получим

$$\wp(\xi, g_2, -g_3) = -e_1 + \frac{e_1 - e_3}{\operatorname{sn}^2(\xi\sqrt{e_1 - e_3}, k')}.$$

Тогда

$$\wp(\xi i) = e_1 - \frac{e_1 - e_3}{\operatorname{sn}^2(\xi\sqrt{e_1 - e_3}, k')}, \quad (44)$$

где под знаком sn уже возникает дополнительный модуль $k' = \sqrt{1 - k^2}$. Действительно, в модуле

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}$$

заменяем e_2 на $-e_2$, e_1 на $-e_3$, а e_3 на $-e_1$. Тогда имеем

$$k'^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3} = 1 - \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = 1 - k^2.$$

При $\Delta > 0$ аналогично получим формулу

$$\wp(\xi i) = e_2 - H \frac{1 + \operatorname{cn}(2\xi\sqrt{H}, k')}{1 - \operatorname{cn}(2\xi\sqrt{H}, k')}, \quad (45)$$

где

$$k' = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{3e_2}{4H}}.$$

Рассмотрим примеры вычисления значений функций Вейерштрасса.

Пример 1. Вычислить $\wp\left(x, \frac{39}{4}, \frac{35}{8}\right)$ при $x = 0,4536$.

Решение. В данном примере инварианты $g_2 = \frac{39}{4}$, $g_3 = \frac{35}{8}$, дискриминант $\Delta = 27g_2^3 - g_3^3 < 0$. Корни уравнения (30) равны: $e_1 = \frac{7}{4}$, $e_2 = -\frac{1}{2}$, $e_3 = -\frac{5}{4}$, $e_1 - e_3 = 3$. Тогда на основании формулы (34) имеем

$$\wp(0,4536) = -\frac{5}{4} + \frac{3}{\operatorname{sn}^2(0,4536\sqrt{3})}. \quad (46)$$

Значение $\operatorname{sn}(0,4536\sqrt{3}) \approx \operatorname{sn}(0,78565)$ вычислим при модуле

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = \frac{1}{4} = \sin^2 \theta,$$

т.е. модулярный угол $\theta = 30^\circ$, $F(30^\circ) = 0,78565$. Из таблицы 1 [27, с. 332] следует, что амплитуде 43° соответствует аргумент $F(43^\circ) = 0,76714$, а амплитуде 44° – $F(44^\circ) = 0,78573$. Предполагая, что приращения амплитуды пропорциональны приращению интеграла $F(\varphi)$, получим

$$\frac{\varphi - 43^\circ}{44^\circ - 43^\circ} = \frac{0,78565 - 0,76714}{0,78573 - 0,76714}.$$

Отсюда находим искомую

$$\varphi = 43^\circ 59' 45'' \approx 44^\circ.$$

Тогда из равенства (46) с учетом

$$\operatorname{sn}(0,78565) = \sin \varphi = \sin 44^\circ = 0,69466$$

получим

$$\wp\left(0,4536; \frac{39}{4}, \frac{35}{8}\right) = -\frac{5}{4} + \frac{3}{0,69466^2} \approx 4,96697. \blacksquare$$

Пример 2. Вычислить $\wp\left(1,0046i, \frac{39}{196}, -\frac{5}{392}\right)$.

Решение. На основании формулы (43) имеем

$$\wp(1,0046i) = -\wp\left(1,0046; \frac{39}{96}, \frac{5}{392}\right),$$

где $g_2 = \frac{39}{196}$, $g_3 = \frac{5}{392}$, $\Delta < 0$, корни уравнения (30) $e_1 = \frac{1}{4}$,

$e_2 = -\frac{1}{14}$, $e_3 = -\frac{5}{28}$. Тогда по формуле (34) имеем

$$\begin{aligned} \wp(1,0046i) &= -\left(e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\operatorname{sn}^2\left(1,0046\sqrt{e_1 - e_3}\right)} \right) = \\ &= \frac{5}{28} - \frac{8}{7\operatorname{sn}^2\left(1,0046\sqrt{3/7}\right)}. \end{aligned}$$

По значению $\operatorname{sn}\left(1,0046\sqrt{3/7}\right) \approx \operatorname{sn}(0,65766)$ вычислим модуль

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = \frac{1}{4} = \sin^2 \theta,$$

следовательно, $\theta = 30^\circ$, т.е. $F(30^\circ) = 0,65766$. Из таблицы 1 [27, с. 332] имеем: амплитуде 37° соответствует аргумент $F(30^\circ) = 0,65655$, а амплитуде 38° – $F(30^\circ) = 0,67487$. Тогда из пропорции

$$\frac{\varphi - 37^\circ}{38^\circ - 37^\circ} = \frac{0,65766 - 0,65655}{0,67487 - 0,65655}$$

находим $\varphi = 37^\circ 3' 45'' \approx 37^\circ$ и $\operatorname{sn}(0,65766) = \sin 37^\circ = 0,60182$.

Следовательно, находим

$$\wp(1,0046i) = \frac{5}{28} - \frac{3}{7 \cdot (0,60182)^2} \approx -1,0047. \blacksquare$$

Отметим свойства функции $\wp(x)$

1. Функция $\wp(x)$ является четной, что следует из формул (44), (37), (38) – (40).

2. Функция $\wp(x)$ двойкопериодическая. При $\Delta < 0$ она имеет один вещественный период $2\omega_1$ и чисто мнимый период $2\omega_3$, где

$$\omega_1 = \int_{e_1}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{4(t-e_1)(t-e_2)(t-e_3)}},$$

$$\omega_3 = i \int_{-\infty}^{e_3} \frac{dt}{\sqrt{4(e_1-t)(e_2-t)(e_3-t)}}.$$

Когда $\Delta > 0$, периодами являются числа $2\omega_2$ и $2\omega'_2$, где

$$\omega_2 = \int_{e_2}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{4(t-e_2)[(t-a)^2 + b^2]}},$$

$$\omega'_2 = i \int_{-\infty}^{e_2} \frac{dt}{\sqrt{4(e_2-t)[(t-a)^2 + b^2]}}.$$

Если обозначим через K и K' соответственно полные эллиптические интегралы первого рода:

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}},$$

$$K' = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2 \sin^2 \varphi}},$$

то при $\Delta < 0$

$$\omega_1 = \frac{K}{\sqrt{e_1 - e_3}}, \quad \omega_3 = \frac{iK'}{\sqrt{e_1 - e_3}}, \quad (47)$$

а при $\Delta > 0$

$$\omega_2 = \frac{K}{\sqrt{H}}, \quad \omega_2' = \frac{iK'}{\sqrt{H}}, \quad (48)$$

здесь

$$k^2 = \frac{1}{2} - \frac{3e_2}{4H}, \quad k'^2 = \frac{1}{2} + \frac{3e_2}{4H} = 1 - k^2.$$

Вывод формул (47) и (48) можно найти в книге [27, с. 150–154].

Приведем график функции $\wp(x)$ при $\Delta < 0$ (см. рис. 7)

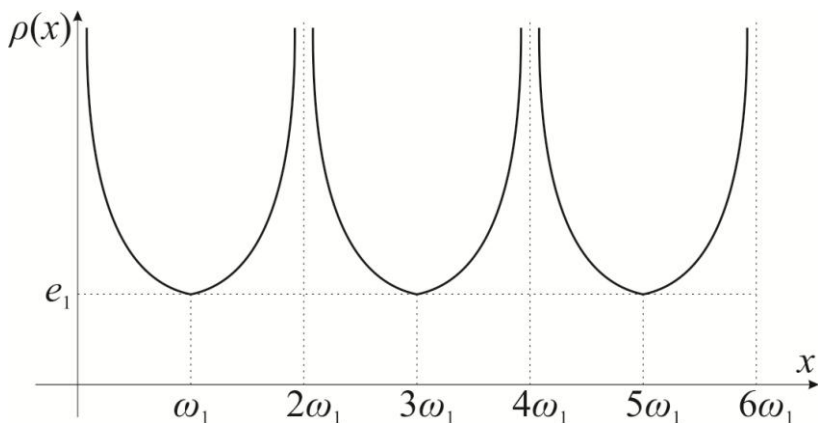


Рис. 7

Когда $\Delta > 0$, ход графика функции $\wp(x)$ будет такой же. В этом случае $\wp(\omega_2) = \omega_2$ и $\wp'(\omega_2) = 0$.

Разложение функции $\rho(x)$ в ряд имеет вид

$$\wp(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{g_2}{4 \cdot 5} x^2 + \frac{g_3}{4 \cdot 7} x^4 + \frac{g_2^2}{2^4 \cdot 3 \cdot 5^2} x^6 + \frac{3g_2g_3}{2^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} x^8 + \dots \quad (49)$$

Обоснование сходимости ряда (49) можно найти в книге [27, с. 178–181].

Кроме функции $\wp(x)$ Вейерштрасс ввел еще функции $\zeta(x)$ (дзета от x) и $\sigma(x)$ (сигма от x). Они определяются формулами

$$\zeta(x) = \frac{1}{x} - \int_0^x \left(\wp(t) - \frac{1}{t^2} \right) dt, \quad (50)$$

$$\sigma(x) = x \exp \left[\int_0^x \left(\zeta(t) - \frac{1}{t^2} \right) dt \right]. \quad (51)$$

Из формул (50) и (51) следует, что

$$\zeta'(x) = -\wp(x),$$

$$(\ln \sigma(x))' = \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)} = \zeta(x).$$

Обе эти функции нечетные

$$\zeta(-x) = -\zeta(x), \quad \sigma(-x) = -\sigma(x).$$

5. Изгиб кругового бруса

Пусть брус длины l круглого сечения лежит на двух опорах и подвергается действию равномерно распределенной нагрузки, интенсивности q . Поперечные размеры бруса подобраны так, что нормальное напряжение равно допускаемому. Найти изгиб (колебания) $u(x)$ такого бруса, удовлетворяющего граничным условиям

$$u(0) = u(l) = 0. \quad (52)$$

Обозначим через r радиус поперечного сечения на расстоянии x от левой опоры. Тогда момент сопротивления равен

$$W = \frac{\pi r^3}{4},$$

а изменяющий момент этого сечения определяется по формуле

$$M = \frac{q}{2} (lx - x^2). \quad (53)$$

Пусть R – допускаемое напряжение. Тогда

$$\frac{M}{W} = R.$$

Отсюда находим

$$r = \sqrt[3]{\frac{2q}{\pi R} \sqrt{lx - x^2}}.$$

В силу этого момент инерции равен

$$I = \frac{1}{4} \pi r^4 = \frac{q}{2R} \sqrt[3]{\frac{2q}{\pi R} \sqrt{(lx - x^2)^4}}. \quad (54)$$

Предполагая изгиб малым для описания таких колебаний бруса, воспользуемся приближенным д.у.

$$EIu''(x) = M, \quad (55)$$

где E – модуль Юнга для материала, из которого сделан брус. Подставляя (53) и (54) в (55), получим

$$u''(x) = \frac{A}{\sqrt[3]{lx - x^2}}, \quad (56)$$

где

$$A = \frac{R}{E} \left(\frac{\pi R}{2q} \right)^{1/3}.$$

В д.у. (56) положим $x - \frac{l}{2} = \frac{ls}{2}$. Тогда имеем

$$\left(\frac{2}{l} \right)^{4/3} u''(s) = - \frac{A}{(s^2 - 1)^{1/3}}.$$

Отсюда, интегрируя один раз, имеем

$$\left(\frac{2}{l} \right)^{4/3} u'(s) = -A \int \frac{ds}{(s^2 - 1)^{1/3}} + C_1. \quad (57)$$

Пусть $(s^2 - 1)^{1/3} = z$, тогда $2s = \mp \sqrt{4z^3 + 4}$; здесь знак минус соответствует изменению x в промежутке от 0 до $l/2$, а плюс – изменению x в промежутке от $l/2$ до l . Тогда

$$\frac{ds}{(s^2 - 1)^{1/3}} = \mp \frac{3z dz}{\sqrt{4z^3 + 4}}.$$

Примем за аргумент интеграл

$$y = \int_z^\infty \frac{dz}{\sqrt{4z^3 + 4}},$$

обращая который, получим функцию Вейштрасса $z = \wp(y)$ с инвариантами $g_2 = 0$, $g_3 = -4$. Корнями многочлена $4z^3 + 4$ являются числа

$$e_1 = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}), \quad e_2 = -1, \quad e_3 = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}).$$

При $x \in (0, l/2)$ функция $\wp(y)$ убывает от 0 до -1 , а когда $x \in (l/2, l)$, функция возрастает от -1 до 0. При $x = l/2$ аргумент $y = \omega_2$ – вещественному полупериоду, т.е. $\wp(y + 2\omega_2) = \wp(y)$. Производная

$$\wp'(y) = -\sqrt{4z^3 + 4} \quad \text{при } x \in (0, l/2),$$

$$\wp'(y) = \sqrt{4z^3 + 4} \quad \text{при } x \in (l/2, l).$$

В силу этого для обоих интервалов

$$\frac{ds}{\sqrt[3]{s^2 - 1}} = 3\wp(y)dy. \quad (58)$$

Тогда с учетом равенства (58) д.у. (57) примет вид

$$\left(\frac{2}{l}\right)^{4/3} u'(s) = -3A \int \wp(y) dy + C_1$$

или

$$\left(\frac{2}{l}\right)^{4/3} u'(s) = 3A\zeta(y) + C_1,$$

где $\zeta(y)$ – дзета функция Вейерштрасса. Поскольку

$$ds = \mp \frac{3z^2 dz}{\sqrt{4z^3 + 4}} = 3\wp^2(y) dy,$$

то интегрируя полученное д.у., находим

$$\left(\frac{2}{l}\right)^{4/3} u(s) = 9A \int \zeta y \wp^2(y) dy + C_1 \int \wp^2(y) dy + C_2. \quad (59)$$

Когда $g_2 = 0$, имеем

$$(\wp' y)^2 = 4\wp^3 y - g_3, \quad \wp^2 u = \frac{1}{6} \wp'' y, \quad \int \wp^2 y dy = \frac{1}{6} \wp' y.$$

С учетом последнего интегрируем по частям

$$\int \zeta y \wp^2 y dy = \left| u = \zeta y \right. \\ \left. dv = \wp^2 y dy \right| = \frac{1}{6} \zeta y \wp' y - \frac{1}{6} \int \wp' y \zeta' y dy = \\ = \frac{1}{6} \zeta y \wp' y + \frac{1}{6} \int \wp' y \wp(y) dy = \frac{1}{6} \left(\zeta y \wp' y + \frac{1}{2} \wp^2 y \right).$$

Тогда равенство (59) примет вид

$$\left(\frac{2}{l} \right)^{4/3} u(s) = \frac{3A}{2} \left(\zeta y \wp' y + \frac{1}{2} \wp^2 y \right) + \frac{C_1}{2} \wp' y + C_2. \quad (60)$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 находятся исходя из граничных условий

$$u(-1) = u(1) = 0. \quad (61)$$

Пусть y_0 – значение аргумента y , при котором $z = \wp y = 0$, т.е. $\wp y_0 = 0$, когда $l = \pm 1$. Тогда

$$\wp' y_0 = -2, \quad \wp'(2\omega_2 - y_0) = 2, \\ \zeta(2\omega_2 - y_0) = 2\zeta\omega_2 - \zeta y_0.$$

Теперь, подчинив полученное решение (60) граничным условиям (61), получим систему

$$\begin{cases} 3A\zeta y_0 + C_1 - C_2 = 0, \\ -3A\zeta y_0 + 6A\zeta\omega_2 + C_1 + C_2 = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим $C_1 = -3A\zeta\omega_2$, $C_2 = 3A\zeta y_0 - 3A\zeta\omega_2$ и подставим в формулу (60). Тогда имеем

$$\left(\frac{2}{l} \right)^{4/3} u(s) = \frac{3A}{2} \left[\wp' y (\zeta y - \zeta\omega_2) + 2(\zeta y_0 - \zeta\omega_2) + \frac{1}{2} \wp^2 y \right]. \quad (62)$$

Прогиб f найдем, полагая в формуле (62) $y = \omega_2$. Тогда $\wp' \omega_2 = 0$, $\wp \omega_2 = -1$. С учетом этого получим

$$f = 3A \left(\frac{l}{2} \right)^{4/3} \left(\frac{1}{4} + \zeta y_0 - \zeta\omega_2 \right). \quad (63)$$

Полагая в формуле

$$\zeta(x+y) = \zeta(x) + \zeta(y) + \frac{1}{2} \frac{\wp'x - \wp'y}{\wp x - \wp y}$$

$y = y_0$, $x = -\omega_2$, получим

$$\zeta y_0 - \zeta \omega_2 = 1 + \zeta(y_0 - \omega_2).$$

Тогда формула (63) примет вид

$$f = 3A \left(\frac{l}{2} \right)^{4/3} \left[\frac{5}{4} + \zeta(y_0 - \omega_2) \right]. \quad (64)$$

Рассмотрим пример с числовыми данными: $l = 200$ см, $q = 20$ кг/см², $E = 2000000$ кг/см², $R = 1000$ кг/см². Найдем ω_2 и

y_0 . Поскольку $e_1 = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$, то $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$, поэтому

$H = \sqrt{9a^2 + b^2} = \sqrt{3}$. Модулярный угол определим из уравнения

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2} - \frac{3e_2}{4H} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Отсюда находим $\theta = 75^\circ$. Тогда, согласно таблицам, при $\theta = 75^\circ$ полный эллиптический интеграл $K = 2,76806$ и по формуле

$\omega_2 = \frac{K}{\sqrt{H}}$ вычислим $\omega_2 = 2,1033$. Пользуясь формулой (37), при

$\wp y_0 = 0$ имеем

$$\operatorname{cn}(2y_0\sqrt{H}) = \frac{e_2 + H}{e_2 - H} = \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = -\operatorname{tg} 15^\circ.$$

Отсюда $\operatorname{sn}(2K - 2y_0\sqrt{H}) = \operatorname{tg} 15^\circ$. Пользуясь таблицами из [27] и интерполируя, найдем

$$2K - 2y_0\sqrt{H} = 1,84557,$$

$$y_0 = 1,4021, \quad \omega_2 - y_0 = 0,7012.$$

На основании формулы (49) найдем

$$\zeta(\omega_2 - y_0) = \zeta(0,7012) \approx 1,4361.$$

Тогда из формулы (64) получим $f = -0,56$ (см).

§ 12. Автономные решения

Для дифференциальных уравнений в частных производных существуют такие частные решения, когда решение $u(x, t)$ определяется через функцию одной переменной ξ , которая представляет некую комбинацию переменных x и t . Такие решения называются автономными. Они существуют, если заданное дифференциальное уравнение с начально-граничными условиями обладает свойством подобия, т.е. при замене переменных (сдвига или растяжения – сжатия) вид уравнения и начально-граничных условий остается неизменным.

Для иллюстрации рассмотрим следующие задачи.

Задача 1. В четверти $D: x > 0, t > 0$ найти решение уравнения теплопроводности

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0, \quad (1)$$

удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = \varphi_0, \quad x \geq 0, \quad (2)$$

$$u(0, t) = \varphi_1, \quad t \geq 0, \quad (3)$$

где φ_0 и φ_1 – заданные постоянные.

Решение. Если $\varphi_0 = \varphi_1$, то решение задачи (1) – (3) имеет вид $u(x, t) = \varphi_0$. Если $\varphi_0 \neq \varphi_1$, то в классе $C(\bar{D}) \cap C_{x,t}^{2,1}(D)$ решения этой задачи не существует из-за разрыва в начале координат. Пусть $\varphi_0 \neq \varphi_1$ и решение будем искать в классе функций из $C(\bar{D} \setminus \{0, 0\}) \cap C_{x,t}^{2,1}(D)$ и ограниченных на D . Прежде заметим, если заменить x на kx , $t \rightarrow k^2 t$, то вид задачи (1) – (3) не изменится.

Тогда, полагая $k = t^{-1/2}$, решение уравнения (1) будем искать в виде

$$u(x, t) = \varphi(\xi), \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{t}}.$$

Отсюда вычислим производные

$$u_t = \varphi'(\xi) \xi_t = -\frac{x}{2t^{3/2}} \varphi'(\xi),$$

$$u_{xx} = \varphi''(\xi)\xi_x^2 + \varphi'(\xi)\xi_{xx} = \varphi''(\xi)\frac{1}{t}$$

и, подставив их в уравнение (1), получим обыкновенное д.у.

$$\varphi''(\xi) + \frac{\xi}{2a^2}\varphi'(\xi) = 0, \quad 0 < \xi < +\infty, \quad (4)$$

и граничные условия

$$\varphi(0) = \varphi_1, \quad \varphi(+\infty) = \varphi_0. \quad (5)$$

Общее решение д.у. (4) находится по формуле

$$\varphi(\xi) = c_1 + c_2 \int_0^{\xi} e^{-\frac{s^2}{4a^2}} ds. \quad (6)$$

Удовлетворив функцию (6) граничным условиям (5), найдем

$$c_1 = \varphi(0) = \varphi_1, \quad c_2 = (\varphi_0 - \varphi_1) \left(\int_0^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{4a^2}} ds \right)^{-1}.$$

Как нам известно,

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{4a^2}} ds = a\sqrt{\pi}.$$

Тогда окончательно найдем функцию

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &= \varphi_1 + \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{a\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} e^{-\frac{s^2}{4a^2}} ds = \\ &= \varphi_1 + (\varphi_0 - \varphi_1) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\xi}{2a}} e^{-y^2} dy = \varphi_1 + (\varphi_0 - \varphi_1) \operatorname{erf}\left(\frac{\xi}{2a}\right), \end{aligned} \quad (7)$$

где $\operatorname{erf}\left(\frac{\xi}{2a}\right)$ – интеграл вероятности ошибок. Возвращаясь в (7) к переменным x и t , найдем решение поставленной задачи

$$u(x, t) = \varphi_1 + (\varphi_0 - \varphi_1) \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right), \quad (8)$$

т.е. функция (8) удовлетворяет всем условиям задачи (1) – (3). ■

Отметим, что важным частным решением нелинейных уравнений математической физики являются решения типа бегущей волны.

Задача 2. Найти решение уравнения Бюргерса

$$u_t - uu_x = u_{xx}, \quad (9)$$

которое описывает волновые процессы в газовой динамике, гидродинамике, акустике и других областях.

Решение. Решение уравнения (9) будем искать в виде бегущей волны

$$u(x, t) = \varphi(\xi) = \varphi(x - at), \quad (10)$$

$a > 0$ – скорость распространения волны. Из формулы (10) найдем производные

$$u_x = \varphi'(\xi), \quad u_{xx} = \varphi''(\xi), \quad u_t = -\varphi'(\xi)a,$$

и подставим в д.у. (9). Тогда получим обыкновенное нелинейное д.у.

$$-a\varphi'(\xi) + \varphi(\xi)\varphi'(\xi) = \varphi''(\xi),$$

которое перепишем в следующем виде:

$$-a\varphi'(\xi) + \frac{1}{2} \frac{d}{d\xi} \varphi^2(\xi) = \varphi''(\xi).$$

Интегрируя полученное д.у., получим уравнение Риккати

$$-a\varphi(\xi) + \frac{1}{2} \varphi^2(\xi) = \varphi'(\xi) - c_1$$

или

$$\varphi'(\xi) = -a\varphi(\xi) + \frac{1}{2} \varphi^2(\xi) + c_1. \quad (11)$$

Если число k является корнем алгебраического уравнения

$$k^2 + ak + \frac{c_1}{2} = 0, \quad (12)$$

то $\varphi_q(\xi) = -2k$ является частным решением уравнения (11).

Очевидно, квадратное уравнение (12) всегда имеет решение. При $a^2 - 2c_1 \geq 0$ корни вещественные, а в противном случае – комплексно сопряженные.

Подстановка функции

$$\varphi(\xi) = u(\xi) + \varphi_q(\xi) = u(\xi) - 2k$$

в уравнение (11) приводит нас к уравнению Бернулли

$$u'(\xi) + (a + 2k)u(\xi) = \frac{1}{2}u^2(\xi). \quad (13)$$

Заменой $y(\xi) = u^{-1}(\xi)$ уравнение (13) сводится к линейному д.у.

$$y'(\xi) - (a + 2k)y = -\frac{1}{2},$$

общее решение которого определяется формулой

$$y(\xi) = \frac{1 + 2c_2(a + 2k)e^{(a+2k)\xi}}{2(a + 2k)}.$$

Тогда общее решение д.у. (12) находим по формуле

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{y(\xi)} - 2k = \frac{2(a + 2k)}{1 + 2c_2(a + 2k)e^{(a+2k)\xi}} - 2k,$$

где c_1 и c_2 – произвольные постоянные, и стало быть автомодельное решение д.у. (9) имеет вид

$$u(x, t) = \frac{2(a + 2k)}{1 + 2c_2(a + 2k)e^{(a+2k)(x-at)}} - 2k. \quad \blacksquare$$

Задача 3. Найти решение д.у. Кортевега–де Фриза

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (14)$$

которое описывает волны в плазме, на мелкой воде и других процессах, удовлетворяющее условиям

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, t) = \lim_{x \rightarrow +\infty} u_x = \lim_{x \rightarrow +\infty} u_{xx} = 0. \quad (15)$$

Решение. Снова решение задачи (14) и (15) будем искать в виде бегущей волны

$$u(x, t) = \varphi(\xi) = \varphi(x - at).$$

После подстановки функции $\varphi(\xi)$ в уравнение (14) получим

$$-a\varphi'(\xi) + 6\varphi(\xi)\varphi'(\xi) + \varphi'''(\xi) = 0$$

или

$$-a\varphi'(\xi) + 3\frac{d}{d\xi}\varphi^2(\xi) + \varphi'''(\xi) = 0.$$

Интегрируя это д.у., будем иметь

$$-a\varphi(\xi) + 3\varphi^2(\xi) + \varphi''(\xi) = c_1.$$

За счет условий (15) получим, что $c_1 = 0$. Умножим полученное д.у. на $2\varphi'(\xi)$. С учетом равенства

$$\frac{d}{d\xi}[\varphi'(\xi)]^2 = 2\varphi'(\xi)\varphi''(\xi)$$

имеем

$$\frac{d}{d\xi}[\varphi'(\xi)]^2 - 2\frac{d}{d\xi}[\varphi(\xi)][a\varphi(\xi) - 3\varphi^2(\xi)] = 0.$$

Затем снова проинтегрируем:

$$[\varphi'(\xi)]^2 - 2\int \frac{d}{d\xi}[\varphi(\xi)][a\varphi(\xi) - 3\varphi^2(\xi)] d\xi = c_2.$$

Интеграл в левой части интегрируем по частям

$$\begin{aligned} & \int \frac{d}{d\xi}[\varphi(\xi)][a\varphi(\xi) - 3\varphi^2(\xi)] d\xi = \\ & = \varphi(\xi)[a\varphi(\xi) - 3\varphi^2(\xi)] - \int \varphi(\xi)[a\varphi'(\xi) - 6\varphi(\xi)\varphi'(\xi)] d\xi = \\ & = a\varphi^2(\xi) - 3\varphi^3(\xi) - \frac{a}{2}\varphi^2(\xi) + 2\varphi^3(\xi) = \frac{a}{2}\varphi^2(\xi) - \varphi^3(\xi). \end{aligned}$$

Тогда получим

$$[\varphi'(\xi)]^2 - a\varphi^2(\xi) + 2\varphi^3(\xi) = c_2.$$

Снова из условий (15) постоянная $c_2 = 0$. Тогда

$$[\varphi'(\xi)]^2 + 2\varphi^3(\xi) - a\varphi^2(\xi) = 0. \quad (16)$$

Разрешая д.у. (16) относительно φ' , получим д.у. с разделяющимися переменными

$$\frac{d\varphi}{\varphi\sqrt{a-2\varphi}} = d\xi.$$

Интегрируя его [20, с. 52], найдем

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{\sqrt{a-2\varphi} - \sqrt{a}}{\sqrt{a-2\varphi} + \sqrt{a}} \right| = \xi + \tilde{c}_3.$$

Отсюда найдем функцию

$$\varphi(\xi) = \frac{2ace^{\xi\sqrt{a}}}{(1 + ce^{\xi\sqrt{a}})^2}, \quad (17)$$

где $c \neq 0$ – произвольная постоянная. Для определения этой постоянной нужно задать условие. Например, $\varphi(0) = \varphi_0 = a/2$. Тогда из формулы (19) найдем $c = 1$.

Полученное решение задачи (16), (17)

$$u(x, t) = \frac{2ae^{\sqrt{a}(x-at)}}{(1 + e^{\sqrt{a}(x-at)})^2}$$

называют простым *солитоном* – уединенной волной. С ростом скорости a эта волна становится более узкой с высокой амплитудой. ■

Задача 4. Найти автомодельное решение нелинейного уравнения теплопроводности

$$u_t = \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = u_x^2 + uu_{xx}, \quad (18)$$

удовлетворяющее условию

$$\lim_{x \rightarrow 0} u(x, t) = 0 \quad \text{при} \quad t \neq 0. \quad (19)$$

Решение. Рассмотрим масштабирование переменных: $x_1 = \lambda x$, $t_1 = \mu t$ и функции $u(x_1, t_1) = v u(x, t)$, чтобы оно не изменяло вида уравнения (18). После замены получим

$$\frac{\lambda^2}{v\mu} u_t = u_x^2 + uu_{xx}.$$

Д.у. (18) не изменяет вида, если выполнено условие

$$\lambda^2 = v\mu. \quad (20)$$

Переменную ξ будем искать в виде $\xi = x^\alpha t^\beta$. Эта переменная не должна меняться при замене переменных

$$(\lambda x)^\alpha (\mu t)^\beta = \lambda^\alpha \mu^\beta x^\alpha t^\beta = x^\alpha t^\beta.$$

Отсюда получим второе условие

$$\lambda^\alpha \mu^\beta = 1. \quad (21)$$

Обычно полагают $\alpha = 1$. Тогда при $\beta = -1/3$ из условий (20) и (21) находим $\lambda = t^{-1/3}$, $\mu = \lambda^3 = t^{-1}$, $v = t^{1/3}$. Тогда автомодельное решение д.у. (20) будем искать в виде

$$u(x, t) = \frac{1}{t^{1/3}} u \left(\frac{x}{t^{1/3}}, 1 \right) = \frac{1}{t^{1/3}} \varphi(\xi), \quad \xi = \frac{x}{t^{1/3}}. \quad (22)$$

Подставляя (22) в д.у. (18), получим обыкновенное д.у.

$$-\frac{1}{3} [\varphi(\xi) + \xi \varphi'(\xi)] = \varphi'^2(\xi) + \varphi(\xi) \varphi''(\xi),$$

которое перепишем в следующем виде:

$$-\frac{1}{3} \frac{d}{d\xi} [\xi \varphi(\xi)] = \frac{d}{d\xi} [\varphi(\xi) \varphi'(\xi)].$$

Проинтегрировав полученное д.у., имеем

$$-\frac{1}{3} \xi \varphi(\xi) = \varphi(\xi) \varphi'(\xi) + c_1.$$

Из условия (19) следует, что $c_1 = 0$. С учетом этого еще раз интегрируя, найдем $\varphi(\xi) = 0$ или $\varphi(\xi) = c_2 - \frac{1}{6} \xi^2$. Тогда решение задачи (18) и (19) определяется по формуле

$$u(x, t) = -\frac{x^2}{6t}. \quad \blacksquare$$

Задача 5. Найти автомодельное решение уравнения синус-Гордона

$$u_{tt} - u_{xx} = \sin u. \quad (26)$$

Решение. Решение д.у. (26) будем искать в виде

$$u(x, t) = \varphi(\xi) = \varphi(x - at).$$

Подставляя функцию $\varphi(\xi)$ в д.у. (26), получим уравнение колебаний маятника

$$(1 - a^2) \varphi'' + \sin \varphi = 0, \quad a \neq 1,$$

изученное нами в п. 3 § 11. \blacksquare

Список литературы

1. *Ambarzumijan V.A.* Über eine Frage der Eigenwerttheorie // Zeitschr. für Physik. 1929. Bd. 53. P. 690–695.
2. *Borg G.* Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilchen Eigenwertaufgabe // Acta Math. 1946. Bd. 78, 1. P. 1–96.
3. *Амелькин В.В.* Дифференциальные уравнения в приложениях. М.: Мир, 1989. 279 с.
4. *Андронов А.А., Витта А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Физматигз, 1959. 916 с.
5. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 3. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. М.: Наука, 1967. 299 с.
6. *Джрбашян М.М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 671 с.
7. *Денисов А.М.* Введение в теорию обратных задач. М.: Изд-во МГУ, 1994. 208 с.
8. *Егоров А.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. М.: Физматлит, 2005. 384 с. (изд. 2).
9. *Еругин Н.П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. Минск: Наука и техника, 1970. 572 с.
10. *Ильгамов М.А.* Подъем подводного трубопровода сосредоточенной силой // ДАН. Физика, технические науки. 2024. Т. 514. С. 156–161.
11. *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. 457 с.
12. *Куликовская Н.В., Морозов В.М.* Аттрактор Лоренца. М.: МГУ, 2022. 23 с.
13. *Левитан Б.М.* Обратные задачи Штурма–Лиувилля. М.: Наука, 1984. 240 с.
14. *Левитан Б.М., Саргсян Н.С.* Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака. М.: Наука, 1988. 432 с.
15. *Lorenz E.N.* Deterministic nonperiodic flow // J. of the Atmospheric Sciences. 1963. V. 20. P. 130–141 [Перевод на русский язык: *Лоренц Э.* Детерминированное непериодическое течение // Странные аттракторы. М.: Мир, 1981. С. 88–116].

16. *Магнус К.* Колебания: Введение в исследование колебательных систем. М.: Мир, 1982. 304 с.

17. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

18. *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1964. 272 с. (изд. 5).

19. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1970. 352 с.

20. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Т. 1. Элементарные функции. 2-е изд. М.: ФИЗМАТЛИТ, 203. 800 с.

21. *Псху А.В.* Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными дробного и континуального порядка. Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2005. 186 с.

22. *Сабитов К.Б.* Функциональные, дифференциальные и интегральные уравнения. М.: Высшая школа, 2005. 671 с.

23. *Сабитов К.Б., Сабитова Ю.К.* Основные элементарные функции. – М.: Высш. шк., 2010. 175 с.

24. *Садовничий В.А., Султанаев Л.Т., Ахтямов А.М.* Обратные задачи Штурма–Лиувилля с нерасподающимся краевыми условиями. М.: Изд-во МГУ, 2009. 184 с.

25. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.

26. *Сикорский Ю.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Гостехиздат, 1940. 155 с.

27. *Сикорский Ю.С.* Элементы теории эллиптических функций: с приложениями к механике. М.: URSS, сор. 2013. 386 с. (изд. 4).

28. *Стеглов В.А.* Основные задачи математической физики. 2-е изд. – М.: Наука, 1983. 432 с.

29. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. М.: Гостехиздат, 1953. 468 с. (изд. 6).

30. *Треногин В.А.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 312 с.

31. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 285 с. (изд. 2).

32. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985. 232 с.

33. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. Часть 2. Трансцендентные функции. М.: Физматлит, 1963. 500 с.

34. Юмагулов М.Г. Обыкновенные дифференциальные уравнения: теория и приложения. Москва; Ижевск: Институт компьютерных исследований, Регулярная и хаотическая динамика, 2019. 180 с.

35. Юрко В.А. Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007. 384 с.

Для заметок

Для заметок

Для заметок

Учебное пособие для вузов

Сабитов Камиль Басирович
Сидоров Станислав Николаевич

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ К КУРСУ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Редактор *Л.В. Филиппова*
Компьютерная верстка *С.Н. Сидоров*
Дизайн обложки *А.Ю. Гурьянова*

Подписано в печать 23.01.2026 г.
Формат 60х90/16. Гарнитура «Arial». Печать офсетная.
Усл.-печ. л. 8,0. Уч.-изд. л. 7,4.
Тираж 200 (1-й завод – 77) экз. Заказ № 665/25.

ФГБУ «Издательство «Наука»
121099, Москва, Шубинский пер., д. 6, стр. 1

E-mail: info@naukapublishers.ru
<https://naukapublishers.ru>
<https://naukabooks.ru>

Отпечатано в редакционно-издательском секторе
Стерлитамакского филиала УУНиТ:
453103, г. Стерлитамак, пр. Ленина, 49.

E-mail: sf@struust.ru
<https://str.uust.ru/>
Тел.: 8(3473)33-98-50



САБИТОВ Камиль Басирович

– доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент Академии наук Республики Башкортостан, главный научный сотрудник Стерлитамакского филиала УУНиТ и Института механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, известный специалист по теории краевых задач для дифференциальных уравнений, автор более 300 научных работ.



СИДОРОВ Станислав Николаевич

– кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Физика» Уфимского государственного нефтяного технического университета, известный специалист по теории краевых задач для уравнений смешанного параболического типа, автор более 30 научных работ

▶ Обыкновенные дифференциальные уравнения или кратко дифференциальные уравнения находят многочисленные применения в самых разнообразных областях современной науки и техники. В известных книгах по дифференциальным уравнениям изложены его классические главы и их приложения, полученные до начала 20-го столетия. В 20-ом столетии появились новые направления в теории дифференциальных уравнений: обратные задачи для дифференциальных уравнений, дифференциальные уравнения с дробными производными, групповые методы решения дифференциальных уравнений и новые виды приложений, связанные с понятиями бифуркации и аттрактора в динамических системах.

ISBN 978-5-02-041657-4



9 785020 416574